

Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs (3)

'MEETKUNDE OP DE BASISCHOOL'

ED DE MOOR ADRI TREFFERS

Inleiding

Aan het slot van de twee vorige artikelen (2) hebben wij aangekondigd in te gaan op het meetkunde-onderwijs op de basisschool. Nu lijkt dit niet mogelijk zonder iets over de problematiek van het wiskunde-onderwijs op de basisschool in het algemeen uit de doeken te doen. Hoewel velen 'wiskunde en basis-onderwijs' als onverenigbare begrippen zien, willen wij ons toch van de term wiskunde bedienen, omdat 'rekenen' een te enge omschrijving is van het totaal aan activiteiten, dat in het volgende aan de orde zal komen.

Trachten wij enige orde te scheppen in de stroom van vernieuwingen die zich vooral in het buitenland in de zestiger jaren hebben voltrokken, dan kunnen wij 5 richtingen in het reken-wiskunde-onderwijs onderscheiden: Wij noemen deze:

- 1 Het traditionele rekenonderwijs
- 2 Het vernieuwde rekenonderwijs
- 3 De mathematisch-empirische richting
- 4 De mathematisch-aritmetische richting
- 5 De mathematisch-structurele richting

We zullen van elk van deze vijf richtingen een korte karakteristiek trachten te geven. Zoals bij veel van dit soort indelingen is het moeilijk om de 'hokjes' strikt gescheiden te houden, zo is het ook moeilijk om te determineren of dit of dat soort onderwijs (c.q. leerboekje) in dit of dat 'hokje' hoort. Voor degenen, die zich ruimer willen oriënteren omtrent deze materie, verwijzen wij naar 'maTEMATika'. (3)

1. Wiskunde op de basisschool

1.1 *'Het traditionele rekenen'*

Vrijwel allen, die dit lezen, zullen opgegroeid zijn met dit systeem. Centraal stond het cijferen, zowel schriftelijk als uit het hoofd, het 'aanleren' van het metrieke stelsel, het decimale stelsel, procentrekening, uitgebreide oeteningen met breuken en als hoogste nivo de zogeheten redaktievraagstukken. Hoewel veel hierop is bezuinigd in de laatste jaren, worden nog vele leerboeken in deze trant gebruikt en is de waardering voor het louter algoritmische aspect zeer groot.

1.2. *Het vernieuwde rekenonderwijs*

Deze richting onderscheidt zich van de vorige door een nieuwe didactische aanpak. De traditionele stof blijft gehandhaafd, maar men probeert voornamelijk in de hogere klassen het onderwijs een wat dynamischer karakter te geven door te trachten aan te sluiten bij het leven van alledag.

Krante-artikelen, het spoorboekje, de weerkaart, actuele t.v.-uitzendingen, het statistisch zakboek kunnen aanleiding geven tot rekenactiviteiten.

Het vernieuwde rekenonderwijs tracht dus het traditionele rekenonderwijs uit het isolement van voortdurende drill te verlossen. Het is vooral didactisch een vernieuwing, terwijl aan de traditionele stofinhoud weinig veranderd wordt.

1.3. *'De mathematisch-empische richting'*

Bij deze richting wordt de nadruk gelegd op het 'handelend leren' (learning by doing), op het creatieve element, zowel bij leraar als leerling en op de zelfontdekkende werkwijze, die bij 'probleemgeoriënteerd' onderwijs centraal staat. Het traditionele rekenonderwijs wordt geïnjecteerd met activiteiten als meetkunde, waartoe ook meten, grafische verwerking en eenvoudige topologische problemen behoren.

Niet het leerboekje, maar de werkkaart en het bijbehorende materiaal nemen een belangrijke plaats in en de onderwijzer is een stimulator en begeleider in het werklokaal, dat vroeger de klas heette. De kinderen zelf nemen waar, ontwikkelen een geschikte taal voor de beschrijving van de waarnemingen, beschrijven de activiteiten in deze taal en komen tot analogiserenderingen. Men staat in deze richting gereserveerd ten opzichte van het gebruik van de verzamelingentaal. Wat de leerstof betreft, maakt de richting een evolutionaire indruk, terwijl de didactische aanpak meer revolutionair genoemd kan worden.

1.4. *De mathematisch-aritmetische richting*

Deze richting wijkt vooral wat de stofinhoud betreft sterk af van de vorige richting. Veel 'moderne' elementen worden toegevoegd. We noemen: talstelsels, klokrekenen, kansrekening, rekenen met andere 'dingen' dan getallen (draaiingen bijvoorbeeld), het gebruik van ongelijkheden ($<$, $>$, $\neq$), het gebruik van 'frames' ($\square + 3 > 15$) en vooral het vroegtijdig introduceren van begrippen uit de verzamelingentaal en het gebruik van deze begrippen voor het aanleren van het getalbegrip en de basisoperaties. Er is weinig flexibiliteit voor het ontwikkelen van eigen 'taaltjes', maar vanaf het begin wordt het heilige geloof in de verzamelingenleer ondersteund door het gebruiken van symbolen als $\cap$, $\cup$, $\subset$, $\in$, etc. Didactisch gezien, is er nauwelijks van vernieuwing sprake. Het leerboekje staat centraal en drill is een belangrijke komponent van de didaktiek.

1.5. *De mathematisch-structurele richting*

Deze richting gaat nog meer dan de mathematisch-aritmetische richting weg

van het traditionele rekenen en beweegt zich verder in de richting van de 'formele' wiskunde. Centraal staat het leren van mathematische structuren. Logika, transformaties, topologie, verzamelingenleer, talstelsels, structuurspelen, vectoren en kansrekening dringen de traditionele onderwerpen naar de achtergrond. Er is een sterk aksent op het logisch redeneren en de wiskunde zelf is de inspiratiebron voor het onderwijs. Vertegenwoordigers van deze richting zijn dan ook van mening, dat kunstmatig materiaal (struktureel materiaal) meer gelegenheid biedt om bepaalde wiskundige begrippen te leren dan spullen uit de natuurlijke alledaagse omgeving van het kind. Ook de verzamelingentaal wordt direkt vanaf de eerste klas gehanteerd, doch met grotere zorgvuldigheid dan bij de mathematisch-aritmetische richting. Bij de didaktiek hecht men veel waarde aan de zelfontdekkende werkwijze.

1.6. Een opvallende gelijkenis

Hoewel men voorzichtig dient te zijn met vergelijkingen te trekken, is het het toch interessant de onder 1.3., 1.4. en 1.5. genoemde richtingen binnen het reken-wiskunde-onderwijs te vergelijken met de eerder onderscheiden stromingen² binnen het aanvankelijk meetkunde-onderwijs in de jaren 1920-1940. We vatten dit onder verwijzing naar het vorige artikel summier samen.

Meetkunde-onderwijs 1920-1940	Wiskunde op de basisschool vanaf 1960	Korte karakteristiek
Logisch-deduktieve stroming (Dijksterhuis, Beth, e.a.)	Mathematisch-strukturele richting	Wiskunde als inspiratiebron en doel in zich. Snel naar het deduktieve systeem.
Empirische stroming (Reindersma, e.a.)	Mathematisch-aritmetische richting	Informeel inleiding, gevolgd door een grondiger opbouw. Tamelijk veel routinematige vraagstukken
Intuitieve stroming (Ehrenfesst-Afanassjewa, Van Hiele Geidof, e.a.)	Mathematisch-empirische richting	Veelzijdige benadering. Deduktief systeem als laagste en hoogste nivo. Didaktisch gezien revolutionair van aanpak.

2. Het Ontario programma

Inleiding

Tot begin 1960 treffen we vrijwel niets aan meetkunde in het basisschool-programma aan. Vrijwel tegelijk met de verminderde belangstelling voor meetkunde in het V.O. lijkt de interesse binnen het basisonderwijs toe te nemen, maar een konsensus schijnt nauwelijks te bestaan. Vooral de moei-

lijkheid om een vertikaal geplande leerstofordening van kleuterschool tot in het hoger beroepsonderwijs aan te brengen, lijkt onoverkomelijk.

Tot zijn er enkele pogingen ondernomen een dergelijk programma tot stand te brengen. Eén van deze ontwerpen is het GEOMETRY REPORT (Kindergarten to grade thirteen) van het Ontario Institute for Studies in Education⁴, waaraan o.a. de befaamde meetkundige Coxeter heeft meegewerkt. Het rapport bevat voorstellen op drie nivo's:

- A) (kleuterschool-basisschool)
- B) ('middenschool')
- C) (voortgezette opleiding)

Als voorbeeld geven we een samenvatting van de voorstellen voor nivo A. Het is een angelsaksische gewoonte om voor dit nivo de meetkundestof te verdelen in 'Shape' (vorm), 'Size' (grootte) en 'Measurement' (meten). Men geeft geen werkelijke vertikale planning, doch men doet aanbevelingen voor 'topics' en men kan de samenhang tussen deze topics aflezen in het overzicht aan het einde van deze paragraaf.

We volgen nu deze topics en geven bij elk een voorbeeld, aan het programma ontleend. 'Shape' en 'Size' onderwerpen zijn vooral voor de lagere klassen bedoeld, die over 'Measurement' meer voor de hogere klassen.

2.1. *Shape*

a *Driedimensionale figuren*: Laat de kinderen aan de hand van 'modellen' vertrouwd raken met kegels, cilindrs, bollen en veelvlakken. Laat ze deze vooral in hun omgeving ontdekken en op hun gebruik letten.

b *Tweedimensionale figuren*: Aan de hand van de zijvlakken van de 3-D figuren kunnen zij de 2-D figuren leren kennen en klassificeren.

Begrippen als gekromd, recht, (hoek)punt, hoek (corner, angle), kant of lijn, grens(lijn), driehoek, vierkant, rechthoek, etc. komen aan de orde.

c *Punten, lijnen en hoeken*. Deze komen ter sprake bij het in b en d genoemde.

d *Konstrukties van 2-D figuren*. Gebruik hiervoor het spijkerbord. Ga met rietjes, pijpestokers en meccano aan de gang. Stijf zijn van een figuur (nodige gegevens voor een konstruktie) komt reeds ter sprake.

e *Konstruktie van 3-D figuren*. Modellen maken met behulp van rietjes, pijpestokers, klei, stokjes, karton, kant en klare veelhoeken, papier en plasticine.

f *Meetkundige patronen*. Begin met patronen uit de omgeving als behangsel-papier, tapijten en tegelvloeren. Laat zelf patronen maken. Laat ontdekken met welke figuren het vlak is vol te leggen.

Voorbereiding op transformaties en oppervlaktebegrip.

g *Transformaties*. Met behulp van papiervouwen, doorkijkspiegels, doorzichtige roosters, verschuivingen en draaiingen, worden de begrippen symmetrie en a-symmetrie voorbereid.

h *Krommen*. Laat de kinderen papiermodellen van kegels en cilindrs doorknippen. Cirkels, spiralen en ellipsen met potlood en touwtje maken.

Als de kinderen in staat zijn met passer en tekendriehoek te werken, dan

kunnen ze zelf patronen ontdekken (zie g). Ook ruimtekrommen maken met draad.

i *Projekties en schaduwen*. Maak schaduwen op de wand van vierkanten, rechthoeken en cirkels. Meten van lengtes van schaduwen van een stokje, dat recht op staat, op verschillende tijden van de dag kan in verband gebracht worden met tijd, lengtes, hoeken en gelijkvormige driehoeken.

j *Topologie*. Men beschouwt dit onderwerp als een uitbreidingsmogelijkheid. Er wordt genoemd: 'binnen' en 'buiten' begrip. Möbiusband, het 2 kleuren-probleem, vergelijking torus bol, eenvoudige doorloopbaarheidsproblemen.

2.2. 'Size'

a *Schatten van inhoud*. Bied de kinderen een stel verschillende flessen aan met gelijke inhoud; door vullen met water of zand vergelijken, na eerst geschat te hebben. Ook het ordenen van flessen met verschillende inhoud. Begrippen als 'groter dan' en 'kleiner dan' komen ter sprake. Het begrip conservatie van inhoud staat centraal.

b *Schatten van oppervlakte*. Ook hier weer staat de vorming van het begrip oppervlakte centraal alsmede het conservatiebegrip voor oppervlakte. Laat de kinderen een aantal rechthoeken van bijvoorbeeld 1×36 , 2×18 , 3×12 en 4×9 ordenen naar grootte zonder het woord oppervlakte te gebruiken. Geef ze daarna vier vierkanten van 6×6 en laat ze met behulp van een schaar de rechthoeken bedekken.

c *Schatten van lengtes*. Net als in a en b, maar nu met lengtes. Begin met een aantal lijnstukken van verschillende soort (gebroken, gekromd). Laat met behulp van een touwtje vergelijken. Laat ook vergelijkingen doen van figuren met gelijke omtrek, doch verschillende oppervlakte.

d *Draaiingen en hoeken*. Als de kinderen enige notie van het begrip 'hoek' hebben, kunnen ze hoeken gaan vergelijken met een eenvoudige hoekmeter, gemaakt van 2 meccanostrips. Breng het draaiingsbegrip direct in verband met het begrip hoek.

e *Grafieken*. Toepassingen van de grootterelaties bij het lezen en maken van eenvoudige blok-, staaf-, lijngrafieken en sektordiagrammen.

f *Vergelijken van groottes*. Laat de kinderen van foto's het hoogste gebouw, de kleinste man en de verste boom aanwijzen. Op kaarten kan een kind de langste straat en de dichtstbijzijnde stad ontdekken.

g *Vergelijken met projekties*. Laat een lichtbron vlakbij en veraf van een vierkant schijnen en vergelijk de oppervlakten van de schaduwen. Bekijk de schaduw van een cirkel in het zonlicht. Vergelijk de schaduw lengtes, van paaltjes van verschillende lengte op hetzelfde tijdstip van de dag.

2.3. 'Measurement'

a *Gebruik van geschikte maateenheid*. Deze topic is een vervolg op het schatten (zie 2.2. a, b en c). Tracht met behulp van konkreet materiaal geschikte maateenheden te vinden voor inhoud, oppervlakte en lengtematen. Denk bijvoorbeeld aan: Er gaan zoveel knikkers in die fles, etc.

b *Gebruik van standaardmaten*. Op natuurlijke wijze zal een noodzaak voor

standaardmaten moeten ontstaan, nadat eerst geschat is en met een eigen maateenheid is gemeten.

c *Metten van hoeken*. Als het werk in b begrepen is, kan met een eenvoudige eigengemaakte hoekmeter begonnen worden. Denk aan een in twaalf gelijke delen verdeelde cirkel. De noodzaak voor een nauwkeuriger meetinstrument en maateenheid zal vanzelf ontstaan. Tenslotte het begrip graad en de konventionele gradenboog invoeren.

d *Grafieken*. Als de kinderen een eerste begrip van grafieken hebben (zie 2.2. e) kunnen vele toepassingen naar aanleiding van meten gemaakt worden. Neem bijvoorbeeld de betrekking tussen omtrek en diameter van een cirkel. Ook beveelt het programma het gebruik van poolkoördinaten aan.

e *Metten bij transformaties*. Bij deze topic worden translaties, spiegelingen en rotaties bekend verondersteld en bij bepaalde transformaties meetopgaven gegeven.

Gegeven een bepaalde rotatie: meet de hoek van rotatie etc.

f *Koördinaatgrafieken*. Na d kan dit gezien worden als een formele uitbreiding naar het gebruik van koördinaten. Zowel kartesische koördinaten als poolkoördinaten. Begrippen als *X*- en *Y*-as worden geïntroduceerd.

g *Konstrukties*. Vanuit de eerder opgedane ervaringen met modellen maken, papiervouwen en knippen, zal het kind nu in staat geacht moeten worden om liniaal, 'set square', gradenboog, passer en 'parallelrulers' te gebruiken. Met behulp van deze instrumenten zal hij in staat moeten zijn om konstrukties te maken van gelijkzijdige, gelijkbenige en rechthoekige driehoeken, cirkels en cirkelsektoren, vierkanten, parallellogrammen, etc. Netwerken voor de ruimte als mogelijke uitbreiding.

h *Tekeningen op schaal*. Laat de kinderen een plattegrond van de omgeving van de school op schaal maken.

i *Inhouds- en oppervlakte-formules*. Na het voorbereidende werk over meten en standaardeenheden (2.3.e) kunnen enkele formules over oppervlakten afgeleid worden. Gebruik roosterpapier om de formule voor de rechthoek te vinden, daarna de rechthoekige driehoek, het parallellogram, etc. door de bekende afsnijdingen en aanplakkingen. Daarna wordt de inhoudsformule voor een blok afgeleid, waarna door verschillende opdelingen een formule voor de piramide verschijnt. Ook de inhoudsformules van cylinder en kegel worden 'afgeleid'.

j *Eigenschappen van de cirkel*. Eenvoudige eigenschappen van middelpunt, middellijn en straal door vouwen laten ontdekken. Door grafische vergelijking van omtrek en middellijn omtreksformule afleiden.

k *Relaties tussen oppervlaktes en lengten*. Vergelijk bijvoorbeeld de oppervlakte van een vierkant met zijn zijde. Zet de resultaten uit in een grafiek (kwadratische funktie). Bepaal nu met behulp van de grafiek vierkantswortels.

l *Metten van vormen*. Het kind moet nu in staat geacht worden vergelijkingen en werkelijke metingen tussen figuren en projecties te verrichten (zie 2.3. b).

m *Telrelaties bij veelvlakken*. Gedoeld wordt hier op de formules:

$q \cdot H = 2R = pV$ voor het regelmatige veelvlak (p , q). Dit is het regelmatige veelvlak opgebouwd uit regelmatige p -hoeken, waarvan er in elk hoekpunt q samenkomen en H , R en V respectievelijk voor het aantal hoekpunten, ribben en vlakken staan.

2.4. Samenhang tussen topics

We sluiten deze programmabeschrijving af met een overzicht van de samenhang tussen de topics, zoals gepubliceerd in het besproken rapport.

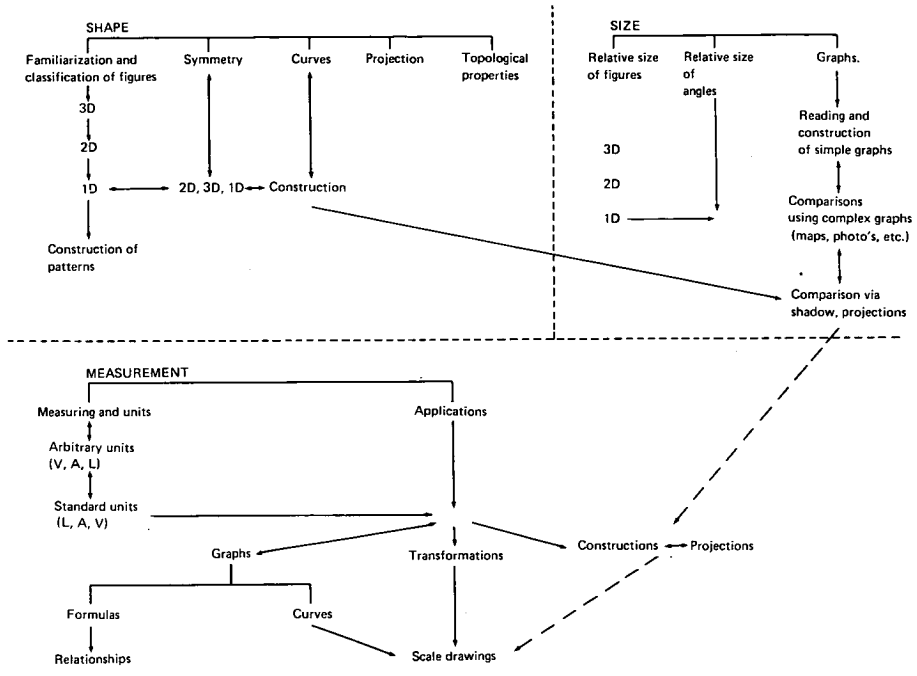


Figure 1. Geometry Topics for Stage A (Primary)

3. Aspecten van de meetkunde

In het vorige artikel (1920–heden) hebben wij gesproken over 10 aspecten die wij aan de meetkunde meenden te kunnen toekennen:

1. Aanschouwelijk aspect ; oriëntatie in vlak en ruimte.

Een niet te miskennen aspect van de meetkunde, waarmee ieder mens vanaf zijn geboorte mee te maken heeft: Spelen met blokken, mozaïeken leggen, spelen met symmetrieën door middel van vouwen, knippen en kleuren. (Zie verder ook paragraaf 5).

2. Teken- en konstruktie-aspekt

Konstrueren hoeft niet alleen te betekenen: gebruik passer en liniaal, doch ook het maken van ruimtefiguren met behulp van rietjes, karton, papier en het maken van vlakke figuren met behulp van spijkerbord, meccano, tekendriehoek e.d. behoren tot dit aspect.

3. Nuttigheidsaspekt (toepasbaarheid)

Dit kan op de basisschool vooral gevonden worden in meten, het maken

van plattegronden op schaal en verticale en horizontale projecties van eenvoudige figuren. Het maken en lezen van grafieken, het benaderen van oppervlaktes en inhouden. Verbindingen met andere vakken, zoals aardrijkskunde; denk aan plaatsbepaling op de bol. Afstanden meten op de bol. Draaiing van de aarde en het begrip tijd. In het V.O. zijn onderwerpen uit de fysika geschikt om meetkunde mee te beginnen. Bijvoorbeeld eerst optika, dan goniometrie of eerst mechanika dan differentiaal rekening.

4. *Het logische aspekt (deduktief systeem)*

Verschillende delen van de wiskunde lenen zich zeer goed voor 'lokaal deduktief' redeneren. Door zijn ondersteunend aanschouwelijk karakter is juist de meetkunde hiervoor bijzonder geschikt, ook op een eenvoudig nivo. Denk aan eenvoudige redeneringen op inductief nivo bij doorloopbaarheidsproblemen van grafen. Of neem een stukje deduktief redeneren op grond van alleen de driehoeksongelijkheid.

5. *Het struktuur-aspekt (kongruentietransformaties)*

Dit aspekt kan pas aan de orde komen als de leerlingen zich eerst de specifieke moeilijkheden van de 'eenvoudige' voorbeelden hebben eigen gemaakt. De structuur van de meetkunde kan pas zichtbaar worden als men de delen beheerst vanuit het voorbeeld naar het algemene en niet andersom. Dit aspekt zal o.i. niet voorkomen in het basisschoolprogramma en wellicht ook nog niet in de eerste klassen van het V.O..

6. *Het algebraïsch aspekt*

Voor het V.O. spreekt dit voor zichzelf: berekeningen van lengten, hoeken, etc., grafieken van funkties, analytische- en vektormeetkunde. Doch ook op basisschoolnivo is hier al een en ander te doen. Men denke aan eenvoudige lineaire programmeringsproblemen, waarbij ongelijkheden als bijvoorbeeld $x + y < 6$; $x, y \in \mathbb{N}$ dienen te worden opgelost. Dit zal voornamelijk pas in de hoogste klassen van het basisonderwijs en de brugklas gedaan kunnen worden.

7. *Het reken- en meetaspekt*

Metten is het begin van de meetkunde geweest en behoort een belangrijk onderdeel van het basisschoolpakket uit te maken. Schatten, geschikte eenheden kiezen, rekenen met deze eenheden, direkte en indirekte meetstrategieën behoren alle tot dit aspekt (zie hiervoor bijvoorbeeld het Ontario-programma).

8. *Taal- en relatie-aspekt*

Begrippen als 'liggen op', 'gaan door', 'binnen', 'buiten', 'is even lang als', 'is groter dan', 'is van dezelfde vorm als', kunnen intuïtief aangeleerd worden. Men denke aan het machtige meetkundige hulpmiddel van de getallenlijn, waarop vele wiskundige relaties meetkundig vertaald kunnen worden.

9. *Het kombinatorische aspekt*

Niet alleen komen in de meetkunde vele kombinatorische problemen voor, waaraan 'handig tellen' geoefend kan worden, zoals tel het aantal diagonalen van een vijfhoek, doch ook zijn er meetkundige modellen die dit handig tellen ondersteunen, zoals het boomdiagram, het wegenmodel en het roostermodel. Reeds verschillende malen is aangetoond, dat dit

door 8–9-jarigen gehanteerd soms zelfs ontdekt kan worden.

10. *Topologisch aspekt*

Eenvoudige topologische problemen zijn geschikt om bepaalde logische uitspraken en lokale deductieve redeneringen aan te leren of te demonstreren, zoals bijvoorbeeld de formule van Euler, de doorloopbaarheid van grafen en het tweekleurenprobleem. Belangrijke mathematische vaardigheden als het dualiteitsprincipe kunnen voorbereid worden.

Tenslotte nog een overzicht met enkele voorbeelden per aspekt, de voorbereidende waarde van ieder aspekt en de relaties met de andere aspecten van de meetkunde, meer in het algemeen met die van de wiskunde en andere vakken.

4. Meetkunde op de basisschool

Uit de paragrafen 2 en 3 is al duidelijk geworden, dat bij meetkunde op de basisschool niet gedacht moet worden aan de traditionele opvatting dat meetkunde als voorbeeld voor een deductief systeem zou moeten staan. Juist de ontkoppeling van de klassiek aksiomatische methode en de meetkunde speelt bij moderne opvattingen van wiskunde leren een belangrijke rol. Naast te leren vaardigheden kan men een goede feeling ontwikkelen om tot de kern door te dringen van op zichzelf staande problemen ('topics'), die niet in een keurig geordende reeks van definities en stellingen staan. Juist de meetkunde lijkt hiertoe een bijzonder geschikt leerstofgebied te zijn. Nemen we als voorbeeld eens het afstandsbegrip, dat meestal zeer formeel wordt ingevoerd. Dit begrip dient afhankelijk van de ruimte waar men in werkt, telkens opnieuw geformuleerd te worden.

Het is echter steeds gebaseerd op een intuïtief begrijpelijke en vanzelfsprekende afspraak. Dit nu kan goed voorbereid worden door het afstands-begrip ter sprake te brengen in het platte vlak, op de bol, op een kegel, op een cylinder. Begin met werkelijke metingen met behulp van touwtjes of elastiekjes en tracht daaruit konklusies te trekken, die niet direkt in formele bewoordingen behoeven te worden vastgelegd. Door ook binnen een geheel andere verzameling – bijvoorbeeld die van de roosterpunten in het X - Y -vlak – het afstands-begrip te behandelen, zal een flexibeler houding ten opzichte van wiskunde leren kunnen ontstaan.

De meer alerte houding ten opzichte van wiskunde en wiskunde leren, die ook bij volwassenen waar te nemen is als zij ontdekken, dat een cirkel binnen laatstgenoemde verzameling een geheel ander beeld heeft dan de euclidische cirkel, doet vermoeden, dat juist dergelijke opgaven uitermate geschikt zijn om het leerproces in de wiskunde op gang te brengen.

De psycholoog '*Bruner*' spreekt in zijn theorie van het leren over drie fasen: 'enactive' (handelend) – 'ikoniek' (beeldend) – 'symboliek' (abstraakt), die vooral op de meetkunde van toepassing lijken te zijn. We geven een voorbeeld: '*Enactive*': Biedt een kind een verzameling plastiek driehoeken aan van twee soorten: gelijkzijdige en rechthoekig gelijkzijdige, die zulke afmetingen hebben, dat de rechthoekszijden dezelfde lengten hebben als de zijden van de gelijkzijdige driehoeken. Geeft het kind de opdracht er 'sluitende' patronen mee te

ASPEKT	VOORBEELDEN VOOR HET BASISONDERWIJS	VOORBEREIDEND OP	VERBINDINGEN MET
① <i>Oriëntatie in vlak en ruimte</i>	a) Geef de leerlingen een verzameling blokken (rechte blokken, piramides, cylinders, bol, halve bol...). Welke blokken hebben vlakke zijanten, welke gebogen? Hoeveel ribben? Hoeveel hoekpunten? Welke kunnen staan, welke niet? ... Etc. b) Met eenvoudige meetkundige figuren mozaïeken leggen. Herkennen en benoemen van figuren en begrippen. c) Situaties herkennen naar aanleiding van foto's en tekeningen.	Alle overige aspecten in het bijzonder symmetrie.	spelsituaties, leven van alledag, taalgebruik
② <i>Constructies en tekenen</i>	a) Figuren maken op het spijkerbord, die aan bepaalde eisen voldoen, deze daarna overnemen op roosterpapier. b) Ruimtemodellen maken van rietjes, karton. c) Teken en van figuren met behulp van liniaal, teken-driehoek, passer, gradenboog, touwtjes en punaises, etc. d) Teken en in parallelprojectie, teken en in perspectief. e) Schaduwen tekenen.	eigenschappen van ruimte en vlakke figuren, het maken van goede tekeningen, nodige voorwaarden bij constructies, vervormingen, gelijkvormigheid, symmetrie.	tekenen kaarten en plattegronden. gebruik van bepaald tekengerei
③ <i>Nut</i>	a) Grafieken maken, lezen en toepassen. b) Toepassingen bij allerlei meetprocedures (hoeken, lengten, oppervlaktes, inhoud, snelheden meten). c) Instrumenten (hoekmeter, hoogtemeter, windroos, kompas, schuifmaat, mikrometer) leren kennen en begrijpen. d) Plattegronden en werktekeningen lezen.	praktisch handelen	leven van alledag aardrijkskunde natuurkunde biologie
④ <i>Logika</i>	a) Waarom wordt de 'roostercirkel' in de roostermeetkunde voorgesteld door een vierkant? b) Waarom heb je bij het volleggen van het platte vlak met zeshoeken drie kleuren nodig om de vloer afwisselend te kleuren? c) Eenvoudige inductieve redeneringen bij doorloopbaarheidsproblemen. d) Eenvoudige gevolgtrekkingen. Uit een tegelvloer met driehoeken zien dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.	deduceren, analogie redeneringen, generaliseren, abstraheren.	taal

⑤ <i>Struktuur</i>			
⑥ <i>Algebra</i>	a) Ongelijkheden oplossen met behulp van getallenlijn b) Eenvoudige lineaire programmeringsproblemen	het begrip: variabele	rekenen
⑦ <i>Meten en rekenen</i>	a) Meten met een geschikte maat, daarna komen tot standaardmaten. Verfijnen en tot kommagetallen geraken b) Gebruik van grafieken bij meten	kommagetallen, grote, kleine getallen, eenhedenstelsels,	leven van alledag natuurkunde biologie rekenen
⑧ <i>Taal en relaties</i>	a) Relaties in een pijlendiagram weergeven b) Relaties in een rooster weergeven c) Het juiste gebruik van relaties als 'ligt op', 'gaat door', etc. d) Laat een leerling een figuur beschrijven, die een andere moet tekenen zonder de figuur te zien	afbeeldingen, functies en grafieken, eksakt taalgebruik, (definiëren), symboliseren, ordenen	taal, in het bijzonder symbolentaal
⑨ <i>Kombinatoriek</i>	a) Boomdiagram (), wegenmodel () en roostermodel (), als meetkundige visualiserings ontdekken b) Kombinatorische problemen als: Vind alle pentomino's	visualiseren, isomorfieën ontdekken, systematisch werken	rekenen
⑩ <i>Topologie</i>	a) Waarom kan een doorloopbaar netwerk nooit meer dan 2 oneven knooppunten bevatten? b) Laat het netwerk van een achthoek doorlopen en daarna de zijvlakken van een kubus. Wat merk je op?	induktie, deductie, dualiteitsprincipe, matrices	logika

leggen. Al handelend zal het het verschil opmerken tussen de twee soorten driehoeken. Voor de goede orde zij opgemerkt, dat 5-6-jarigen in het algemeen het verschil tussen deze driehoeken niet opmerken.

'*Ikonie*': Als de handelende fase voorbij is, zal het 'beeld' van de driehoeken herkend worden aan getekende figuren.

'*Symbolic*': Als hoogste nivo zal het kind uiteindelijk geen beeld meer nodig hebben om zich het verschil tussen de twee genoemde driehoeken voor te stellen en kan dit wellicht zelfs onder woorden brengen. Het hoeft geen betoog, dat dit soort activiteiten bij het basisonderwijs thuishoren.

Omdat veel al handelend, tekenend, konstruerend en plakkend gedaan kan worden, kan het onderwijsleerproces een levendig, creatief karakter krijgen. Vele meetkundige problemen kunnen ook gekoppeld worden aan reële situaties en hebben daarom een stimulerende invloed op de houding van leerling en onderwijzer.

Vergelijken we de eerder genoemde aspecten van de meetkunde met het Ontarioprogramma, dan merken we op, dat binnen dit programma een sterke nadruk ligt op de aspecten:

① (oriëntatie) ② (konstrukties) ③ (nuttigheid) (binnen de wiskunde: grafieken) en ⑦ meten, terwijl het aspect ⑤ (struktuur) voorbereid wordt door al konstruerend de transformaties in te leiden en het aspect (topologie) als mogelijke uitbreiding wordt gezien.

Over 'bewijzen' wordt in verband met aspect ④ (logika) niet gesproken. Het taalaspect ⑥ komt niet ekspliciet naar voren en het kombinatorische aspect ⑨ wordt kennelijk niet als een meetkundige activiteit gezien.

Nadat in 1889 in Nederland het vak 'vormleer' uit het basisschoolprogramma was verwijderd, leek de meetkunde meer dan ooit bestemd voor het voortgezet onderwijs en sel als specimen van een deduktieve wetenschap. Het basisschoolprogramma richtte zich in het algemeen geheel en al op 'rekenen' en zo er al enige meetkunde in voorkwam, dan was dit het louter benoemen van enige vlakke figuren (driehoek, vierkant, rechthoek, parallellogram, trapezium, cirkel) met de bijbehorende formules voor de oppervlakte van deze figuren en enkele eenvoudige stereometrische figuren (kubus, recht blok en cylinder).

Nu sinds enige jaren ook de modernisering van het rekenonderwijs op gang is gekomen, zien wij in de leerboeken meer meetkunde verschijnen. Afhankelijk van de beïnvloeding van de auteurs door de buitenlandse stromingen, krijgen verschillende aspecten een zwaarder aksent. In de Angelsaksische landen wordt veelal de empirische stroming gekozen van handelend leren, met de nadruk op handelend, zodat veel gemeten en gekonstrueerd wordt. In Frankrijk en België wordt meer de logisch-deduktieve stroming gevolgd, zodat al van het begin af aan topologische begrippen en formele redeneringen worden gehanteerd.

In vrijwel alle nieuwere leerboeken voor het basisonderwijs wordt de laatste jaren wat aan grafieken en meten gedaan. De leergangen, die een bewering van een angelsaksisch leerboek zijn, leggen aksenten op het meet- en

konstruktie-aspekt. terwijl de bewerkingen van franse methoden het aksent leggen op logika, relaties en topologie.

Vanaf augustus 1971 wordt in Nederland door een groep onderwijzers, wiskundedidaktici van de Pedagogische Akademies, onderwijskundigen, wiskundeleraren en hoogleraren aan de ontwikkeling van een nieuw leerplan voor wiskunde op de basisschool gewerkt in een prokekt genaamd WISKOBAS, dat is ondergebracht bij het I.O.W.O. (Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs).

In 1975 zullen de eerste publikaties verschijnen en in een uitgewerkt schoolwerkplan (een draaiboek voor de onderwijspraktijk) zullen ook meetkundige bijdragen te vinden zijn. Hierin zullen o.a. onderwerpen als meten, grafieken, koördinaten, werken met het spijkerbord en de kubus, verbindingen met aardrijkskunde (de bol) voorkomen.

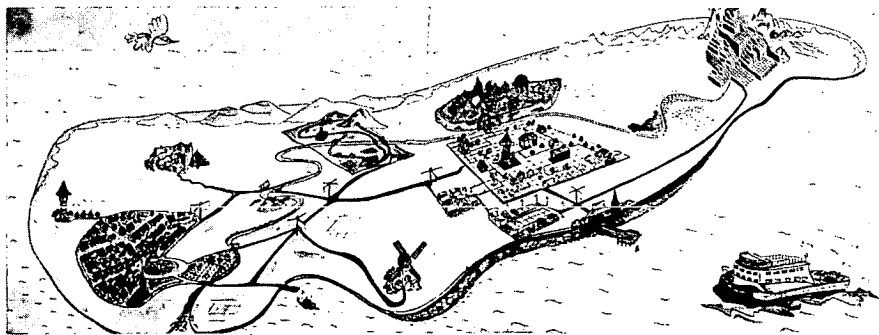
Om een wat duidelijker idee te krijgen dan men kan gissen uit deze globale omschrijvingen, geven wij in de volgende paragraaf een voorbeeld (slechts één in verband met de beschikbare ruimte) van een mogelijke meetkundige aktiviteit voor de eerste klas van de basisschool. De te beschrijven aktiviteit is gecentreerd rond het aspekt van de ruimtelijke oriëntatie.

5. Voorbeeld van een meetkunde-les (klas 1, basisschool)

Het volgende behoort tot het nog te publiceren Integratieplan van WISKOBAS. De lessen zijn ontworpen door *Jan van den Brink* die over dit eksperiment heeft geschreven in het Wiskobas-Bulletin.⁵

Mogen wij er nog eens op wijzen, dat dit slechts een paar voorbeeldjes zijn van de stukken meetkunde, die in het programma verwerkt zijn; dat de hier beschreven aktiviteiten tot een projekt behoren; dat er ook binnen het IOWO nog geen konsensus bestaat ten aanzien van de problematiek van het aanvankelijk meetkunde-onderwijs.

Het projekt WATERLAND (zie afb. 1), dat in november van het eerste leerjaar uitgevoerd wordt, handelt over een denkbeeldig eiland, waar heel wat wiskunde te beleven valt. Tijdens de inleidende lessen wordt de aandacht



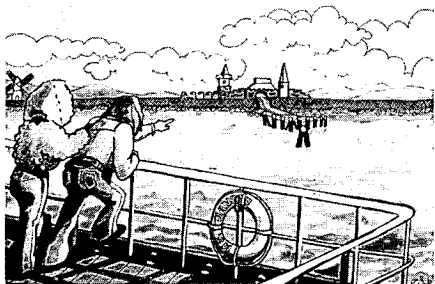
afb. 1

gevestigd op het waarnemen van details, verhoudingen, ruimtelijke oriëntatie en het symboliseren van routes. Er worden maquettes van gedeelten van Waterland nagebouwd, waarbij een eerste kennismaking met het oppervlaktebegrip, coördinaten, meten en telproblemen aan de orde komen. Daarna volgen ruimtelijk oriënteren, waarover dadelijk meer in detail, het symboliseren van situaties, optimaliseren, parkeren en rangeren en doolhofproblemen. Het project wordt afgesloten met een aantal autobusproblemen (bij elke halte stappen mensen in en uit), die een louter rekenkundig karakter hebben.

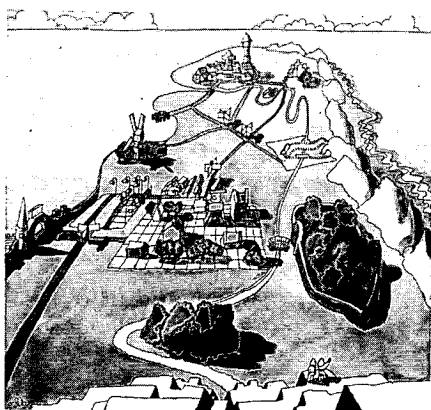
Het begrip ruimtelijke oriëntatie wordt nogal verschillend geïnterpreteerd. Soms wordt er onder verstaan de begrippen 'voor', 'achter', 'boven', 'onder', 'links', 'rechts', 'verder', etc. te kunnen hanteren. Dat hier echter veel meer over te zeggen valt, moge uit het volgende blijken.

De kinderen kregen een 'foto-album' van een vakantietocht op Waterland en er werden verschillende vragen gesteld over deze 'foto's'.

De kernvraag was steeds: 'Waar is deze 'foto' genomen?' Zo kozen sommige kinderen bij de 'foto' van afb. 2 nog al eens de linkse steiger op de grote waterlandplaat, die voor de klas hing. Door vragen te stellen als: 'Als het die steiger is, waar moet die molen dan staan?', merkten de kinderen de relaties tussen de verschillende objecten op. Toen de hoogte, van waaraf de 'foto' genomen was, in het geding kwam, traden er moeilijkheden op (afb. 3).



afb. 2



afb. 3

Dit gaf aanleiding tot het maken van een serie echte foto's van de school, vanaf verschillende etages van een flatgebouw genomen, waarbij dezelfde problemen aan de orde kwamen. Verder werden vragen gesteld als:

'Waar staat deze wegwijzer?' en de omkering 'Waar moet je deze wegwijzer plaatsen?'

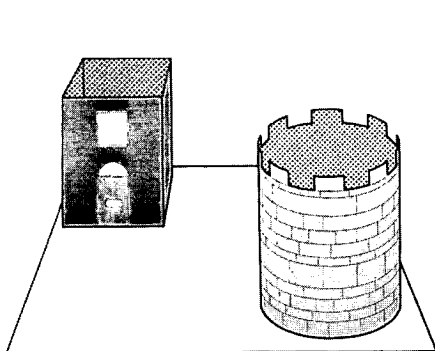
Aan de hand van een volgorde van 'foto's' diende een fietstocht beschreven te worden. De kinderen moesten dus ordenen en symboliseren via een soort routekaart als in trams en bussen is te vinden.

Het bleek, dat sommige foto's van Waterland moeilijkheden gaven, omdat ze vanuit een andere richting genomen waren dan de grote waterlandplaat

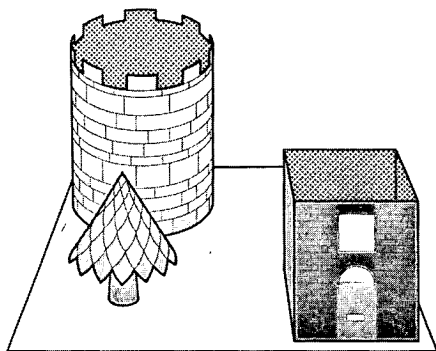
zelf (afb. 1). Een voorbeeld van een dergelijke verwarring ziet U in de afbeeldingen 4 en 5, die wij ontleen aan het Nuffieldprojekt.

Het is nog de vraag of deze problemen betreffende 'ruimtelijk oriënteren' wel in deze volgorde gebracht moeten worden. Nu verliep de volgorde: het fiktieve eiland, de maquette, de echte foto's rondom de school.

Ook gaven de 'foto's' aanleiding tot het 'vergelijken' van grootheden op één 'foto'. De juf legde een kwartje op de overheadprojektor en vroeg de kinderen, wijzend op het scherm, welk geldstuk het was. Door andere muntstukken te nemen en op de overheadprojektor te leggen, konden de kinderen aan de grootte ontdekken dat het een kwartje was.

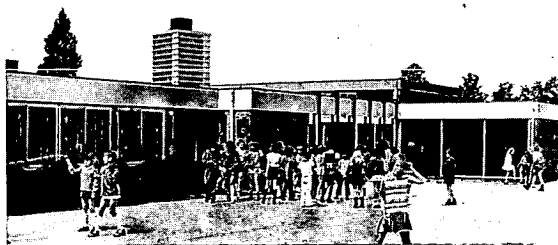
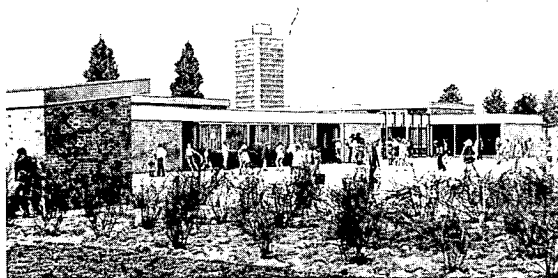


afb. 4



afb. 5

Een laatste voorbeeld over oriënteren is de opdracht naar aanleiding van de serie foto's uit afb. 6.





afb. 6

De opdracht luidde:

Welke foto is het dichtst bij de deur genomen? En welke daarna? etc. Een leerling wees op de flat, die boven het dak van de school uitstak en zei: 'De flat wordt kleiner als je dichterbij de school komt, want de school wordt groter'. Hij telde de balkonnetjes om zeker te zijn: 'Daar zie je meer balkonnetjes, dus je staat verderweg van de school'.

Op dit soort problemen zijn nog legio voortzettingen en variaties te bedenken, die o.i. voorbeelden zijn wat werkelijk ruimtelijke oriëntatie betekent en die gerekend dienen te worden tot de beginactiviteiten van de meetkunde.

6. Een standpunt

We zijn thans aan het einde van onze reeks artikelen over het aanvankelijk meetkunde-onderwijs. Wij hebben in vorige artikelen laten zien hoe de traditionele meetkunde, die binnen het onderwijs jarenlang model heeft gestaan voor 'het' deductief systeem, bij de laatste leerplanherziening geheel uit het voortgezet onderwijs is verdwenen. De afbeeldingsmeetkunde is er voor in de plaats gekomen, die onze leerlingen sneller naar het strukturelement van de wiskunde moet leiden. Bij de vektormetkunde kunnen we – behalve het algebraïsch aspect – nauwelijks andere aspecten ontdekken. Dat de traditionele meetkunde uit het leerplan is verdwenen, is velen niet onwelgevallig. Het feit, dat leerlingen van 12 jaar niet in staat blijken te zijn de aksiomatische methode te volgen, is in ieder geval in de praktijk ruimschoots aange-

toond. De eindeloze vraagstukkenvariëaties over een bepaald planimetrisch onderwerp hebben slechts weinig leerlingen en docenten gelukkig gemaakt en de herinnering aan de stereometrie zal niet voor ieder een zoete zijn.

Thans lijkt er belangstelling voor meetkunde te ontstaan bij het basisonderwijs. Wel dient meetkunde dan ruimer geïnterpreteerd te worden dan tot voor kort de gewoonte was, toen eigenlijk alleen het logische en het konstruktie-aspekt aandacht kregen. In het voorgaande hebben wij aan deze twee aspekten nog een achttal andere toegevoegd. Een aantal, dat wellicht nog uitgebreid kan worden, misschien door anderen weer beknot zou willen worden. Uit de beschrijving en toelichting op deze aspekten moge duidelijk geworden zijn, dat we een hernieuwde belangstelling zouden toejuichen, maar dan wel in de ruimere zin en waar mogelijk verschoven naar het basisonderwijs en brugklas en in 'topics' aangeboden.

Door het handelende karakter, dat aan vele voor het basisonderwijs beschreven onderwerpen inherent is, kan het vak een voorbeeld van het principe 'learning by doing' zijn. Kinderen en onderwijzers kunnen in het onderwijs creatief bezig zijn, terwijl een spontane differentiatie bij het oplossen van problemen kan optreden. Het plezier in het leren en leiding geven bij het leren zal hierbij stimulerend kunnen werken op het gehele onderwijsleerproces. Behalve in meetkundige onderwerpen rond kleine topics, die soms een wat abstrakt karakter kunnen hebben, kan meetkunde bedreven worden naar aanleiding van projecten rond een niet-meetkundig onderwerp. Men denke bijvoorbeeld aan een projekt rond de aarde, waarbij de begrippen tijd, snelheid, afstand, aanleiding geven tot meetkundige activiteiten. (Hieraan zal *Streefland* nog een artikel wijden.)

We overdrijven niet als we stellen dat de meetkunde de laatste jaren wat stiefmoederlijk is behandeld. De moderne opvattingen over wiskunde en wiskunde leren zullen hieraan niet vreemd zijn. Fervente aanhangers van het 'strukkturalisme' (verzamelingenleer, logika, afbeeldingen, relaties) zullen ongaarne teruggrijpen naar de 'oude' meetkunde. Het feit, dat nieuwe vakken als bijvoorbeeld komputerkunde de aandacht eisen, zal dit ook niet gemakkelijk maken.

Toch is meetkunde overal. We leven op een bol, we leven in de driedimensionale ruimte, we zien de ganse dag geometrische figuren om ons heen en stellen ons bij elk abstrakt probleem iets konkreet meetkundigs voor. (De Grieken hadden een rekenkunde, die geheel geometrisch was.) Het aspekt van de ruimtelijke oriëntatie en de samenhang met ons dagelijks leven, is gedemonstreerd aan het gegeven voorbeeld van de lessen naar aanleiding van de foto's (zie par. 5).

Door de meetkunde aldus te benaderen, kan hier een waarde van uitgaan, die belangrijk is voor de vorming van belangrijke meetkundige en wiskundige begrippen. *Arthur Engel* gebruikt bij zijn leergang waarschijnlijkheidsrekening 'bomen' om kansen en verwachtingen te berekenen!

Het meetkundige hulpmiddel, dat hij hierbij gebruikt is een goed voorbeeld hoe visualisering in wiskundige problemen van dienst kunnen zijn.

Het visualiseren door middel van meetkundige modellen is een niet weg te denken element van de wiskunde.

Als je een leergang ontwerpt over hoeken en bogen in een cirkel is er binnen

dit onderwerp streng deductief redeneren haalbaar, dat visueel overzichtelijk is en zinvol is. We hebben dit eerder lokaal deductief redeneren genoemd.

De opbouw van een 'geheel' (deductief systeem) kan overgelaten worden aan wiskunde-specialisten.

Problem-solving wordt soms gezien als een apart leerstofvlak van de wiskunde. Verstaan we hieronder het aanpakgedrag bij de problemen, die niet direkt met bekende routines opgelost kunnen worden, dan lijken verschillende meetkundige onderwerpen hiervoor geschikt. Men zie bijvoorbeeld de verzameling problemen van *Engel*, die hij publiceerde in the Educational Studies.⁶

Tenslotte mag het esthetische element, dat ons de meetkunde biedt, niet onderschat worden. Hoewel dit enigszins etisch moge klinken, menen wij toch, dat men kinderen (en volwassenen) hierin kan en moet opvoeden en dan zijn we natuurlijk weer dicht bij het argument van de vormende waarde, waarover vijftig jaar geleden reeds zoveel is gezegd.

7. Samenvatting

Meetkunde hoorde tot voor kort tot het domein van het voortgezette onderwijs. Het werd vooral geassocieerd met Euclides en gezien als het voorbeeld van een deductief systeem. Op basisschoolnivo lagen er hier en daar enkele restjes van de vormleer, zoals die ruim een eeuw geleden gepraktiseerd werd en nog wat leerstofblokjes, die we nu tot het leerstofvlak meten zouden rekenen, zoals het berekenen van de omtrek, oppervlakte en inhoud van meetkundige objecten. Maar vanaf de vijftiger jaren steeg de belangstelling voor meetkunde op de basisschool bijna even snel als het entoesiasme voor de euclidische meetkunde bij het voortgezette onderwijs daalde. Zo bevatte 'The Arithmetic Teacher' in de periode van 1954 tot 1959 geen enkel meetkunde-artikel, in de vijf volgende jaren vijf verhandelingen per jaargang, vervolgens tien en in de periode 1968-1973 zelfs vijftien stukjes per jaar. Er bestaat echter internationaal gezien opvallend weinig overeenstemming over een meetkundeprogramma voor het basisonderwijs. Wellicht is dit toe te schrijven aan de rijkdom van het gebied: de meetkunde bevat tal van aspecten, die moeilijk in een vertikaal gepland leerstofprogramma gevat kunnen worden.

Meetkundige activiteiten worden vooral aangeprezen vanwege hun uitnodigend karakter, de aanschouwelijke basis die ze verschaffen voor de mathematische activiteiten en de mogelijkheden die ze hebben voor een steeds verdergaande wiskundige organisatie van het gebied.

Noten

1 Brydegaard, M. en Inskeep, J.

Readings in Geometry from the 'Arithmetic Teacher' N.C.T.M. (1970)

2 Treffers, A. en Moor, E. de

Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs 1 en 2. Euclides 50, 1 en 2.

3 Treffers, A.

'maTEMAtika', handboek heroriëntering onderwijzer, hoofdstukken 1 en 2. uitgave I.O.W.O. (1973)

4 The Ontario Institute for Studies in Education
GEOMETRY (Kindergarten to grade thirteen). 1967

5 Brink, J. van den

'Kieken' Wiskobas-Bulletin jaargang 4 nr. 1 (1974)

6 Engel, A.

'Geometrical Activities for the upper Elementary School'. 'Educational Studies in Mathematics' Jaargang 3.(1971)

EUCLIDES

Redactieverslag – Jaargang 49 – 1973/1974

Aan de besturen van
de Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren
en de Wiskunde-werkgroep van de
W.V.O.

De inhoud van deze jaargang geeft weinig aanleiding tot opmerkingen. De diverse aspecten kwamen in ongeveer dezelfde verhouding aan bod als in de vorige jaargang.

Vermeldenswaard is de verschijning van het speciale themanummer gewijd aan statistiek en kansrekening. De redactie vindt, dat themanummers eigenlijk vaker dienen te verschijnen. Zij vraagt zich evenwel af of dit mogelijk is, daar deze nummers een veel intensere voorbereiding vergen dan zij er tot nu toe aan heeft kunnen geven.

Ook in het afgelopen jaar heeft de redactie gepoogd het blad actueel te doen zijn. Doch de tijd nodig tussen inleveren van de kopij en verschijnen van het blad is vaak zo groot, dat al gauw aan actualiteit wordt ingeboet. Het probleem blijft bij de redactie in studie.

Binnen de redactie zijn enige veranderingen opgetreden. Drs. A. M. Koldijk legde in het begin van deze jaargang het redactiesecretariaat neer. Hij werd daarin opgevolgd door de heer W. Kleijne. Bovendien werd de heer P. Th. Sanders in de redactie opgenomen.

De samenwerking met de uitgever was ook dit jaar voortreffelijk. Enige onregelmatigheden in de druk waren helaas niet te voorkomen, wegens verandering van drukprocédé.

september 1974

G. Krooshof, voorzitter
W. Kleijne, secretaris