

Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs (2)

DE JAREN 1920 TOT HEDEN

A. TREFFERS EN E. DE MOOR

Utrecht

‘Zwei Umstände schrecken soviele Schüler von der Geometrie ab

a die Abgesondertheit der Geometrie von jeder Wirklichkeit, welche durch manche Lehrer betont wird, und

b das Beweisen von ‘evidenten’ Sätzen, das gerade am Anfang des Kurses den Weg zum Verständniss versperrt’.

Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

0. Inleiding

Na het vorige artikel, waarin de periode tot 1924 onder de loep genomen is, zullen we nu de jaren 1920 tot heden beschouwen. We moeten ons daarbij uiteraard beperken.

Dit heeft tot gevolg, dat er weinig konkrete voorbeelden gegeven worden.

De indeling is:

- 1 de periode 1920–1940
- 2 de periode 1940–1950
- 3 de periode 1950–1965
- 4 de periode 1965–heden

Waar nodig, is er aandacht besteed aan de kwestie van de algemene doelstellingen voor het wiskunde-onderwijs en de didaktische werkvormen.

In het volgende artikel zullen wij nader ingaan op het meetkunde-onderwijs voor de basisschool. Dan zullen we meer konkrete voorbeelden in onze beschrijving verwerken.

1. De periode 1920–1940

Hoewel vakpsychologische studies betreffende het mathematisch denken of studies, die in het algemeen relevant zijn voor het wiskunde-onderwijs, ontbraken, kunnen we toch zeggen, dat zich enkele belangrijke ontwikkelingen hebben voorgedaan binnen de kring van de toenmalige geïnteresseerden in het onderwijs in de meetkunde.

Enerzijds bestond de gezaghebbende groep van *Dijksterhuis, Beth, e.a.*, die meende dat een deduktieve inleiding in de meetkunde, waarin van meet af aan het formeel logische bewijs gehanteerd werd op grond van een aantal aksioma's, de aangewezen weg tot meetkunde-onderwijs was.

Anderzijds waren er didaktici als Mevrouw *Ehrenfest-Afanassjewa*, *Reindersma*, *Wolda*, e.a., waarvan ieder op geheel eigen wijze het strenge deductieve element in het aanvankelijk meetkundeonderwijs afwees en een intuïtieve aanpak voorstond, waarin aanschouwelijke evidentie en concreet manipuleren met voorwerpen uit de ons omringende wereld een belangrijke rol speelden. Stond bij de eerstgenoemde groep de doceermethode als didaktische werkvorm centraal, zo wees de tweede groep deze van de hand en legde vooral de nadruk op zelfwerkzaamheid, motivatie en emotionele betrokkenheid. Leertheoretische beschouwingen, met uitzondering van een poging van *Turkstra*, ontbraken.

Om de tegenstellingen tussen beide groeperingen iets nader te belichten, onderscheiden we in de tweede groep twee stromingen, zodat we uiteindelijk tot drie stromingen komen, die binnen het aanvankelijk meetkunde-onderwijs bestonden.

We noemen ze:

- 1 De logisch-deductieve stroming
- 2 De empirische stroming
- 3 De intuïtieve stroming

1.1. De logisch-deductieve stroming (*Beth, Dijksterhuis, e.a.*)

In een discussie met Mevrouw *Ehrenfest* zegt *Dijksterhuis* dat kennismaken met de meetkunde het inademen is van een zuivere atmosfeer . . . , en niets mag toelaten, dat de zuiverheid van de atmosfeer, waarin wordt geademd, de hechtheid van een opbouw, die daar wordt voltrokken, zou kunnen schaden' . . .¹.

Dit werd precies 50 jaar geleden geschreven!

Hiermee is de logisch-deductieve stroming eigenlijk al gekarakteriseerd. Men gaat er van uit, dat een leerling in het middelbaar onderwijs vrij snel aan de eisen van een deductieve leergang moet kunnen voldoen, met name de wetenschappelijk verantwoorde leerstofordening van de euclidische meetkunde. De leraar heeft in het onderwijsgebeuren een leidende rol. Hij is veelal korrigerend en docerend bezig. De leerling mag kijken en luisteren, maar móet denken. De slechte resultaten van de leerlingen worden afgewenteld op een slecht selectiebeleid.

Deze groep gaf binnen het onderwijs de toon aan, al deed men bij de praktische uitwerking nogal eens water in de wijn. Soms zelfs zoveel, dat de werkwijze sterk deed denken aan de vormleerachtige aanpak, zoals we die in het vorige artikel beschreven. Het werk van *Reindersma* is in het vorige artikel uitgebreid aan de orde geweest. Omdat aan zijn werk de empirische stroming het best wordt gedemonstreerd, geven we hier nog een korte samenvatting.

1.2. De empirische stroming (*Reindersma*)

Er wordt gebruik gemaakt van de traditionele meetkundeleerstof. De op-

bouw vindt plaats in de vraagstukken, die uiteindelijk uitmondt in de logisch-deductieve stroming. De inleiding echter geschiedt met schatten, meten, vouwen, knippen, draaien, vloeien (lijnspiegeling) en konstrueren. Het symmetriebegrip speelt een belangrijke rol, terwijl kongruentie vrijwel niet gebruikt wordt. Aanhangers van de empirische stroming stellen, dat 12-jarigen in het algemeen niet rijp zijn voor een logisch-deductief georiënteerd aanvangsonderwijs. Zij menen, dat er nog veel aan de wiskunde-didaktiek te verbeteren valt. Men ziet de ontwikkeling van het logische denken als belangrijkste doel, maar ook de praktische waarden van de meetkunde mag niet onderschat worden. Daarom dient een empirische propedeuse vooraf te gaan aan de aksiomatische behandeling. Het principe 'learning by doing' staat in deze opvatting centraal.

1.3. De intuïtieve stroming (*Ehrenfest-Afanassjewa*)

De inzichten van Mevrouw *Ehrenfest* nemen binnen deze periode een geheel aparte plaats in. De logika, die in de wiskunde gehanteerd wordt, dient – volgens Mevrouw *Ehrenfest* – niet alleen de formele kant te raken. Juist het proces dat voorafgaat aan het zuiver formeel redeneren, acht zij van groot belang. Zij bedoelt hiermee: het aanvoelen van: 'in die richting gaat de oplossing van het probleem', het 'formuleren van de oplossing' en het 'zien van het bewijs'. Zij noemt deze voorafgaande fase: 'intuïtie', die uit zintuigelijke waarnemingen of als resultaten van voorgaande 'logische werkzaamheden' tot stand is gekomen. Zij onderscheidt bij het verwerven van inzicht twee stappen:

- 1 Het zien van een zekere 'trek' in het beeld en het ordenen van die trekken zonder zich er rekenschap van te geven (intuïtieve structurering).
- 2 De bewustwording van het intuïtieve beeld, het ordenen van datgene wat het intuïtieve beeld voorstelt, het opvullen van leemtes, het trachten op te heffen van tegenstrijdigheden. Dit proces van 'eksplíciete analyse' van het intuïtieve beeld noemt zij 'logische werkzaamheid'.²

Soms nu zal deze intuïtieve kennis door opvoeding en/of milieu aanwezig zijn, maar het leven heeft echter aan het ene kind een veel grotere voorraad intuïtief materiaal verschaft, dat bruikbaar is voor het meetkunde-onderwijs, dan aan het andere. Om nu leerlingen op eenzelfde aanvangsnivo te brengen, wordt aan de 'minderbedeelden' eerst een propedeuse aangereikt. Deze wordt gegeven aan de hand van opdrachten, die bijna alle direkt met de ons omringende ruimte en/of het leven van alledag te maken hebben: schatten en meten van hoeken en lengten; afstand bepalen tussen twee punten op bol, kegel en cylinder; perspectief en schaduwproblemen; doorsnijding van ruimtefiguren en topologische kleurproblemen.³

Na deze propedeutische introductie volgt de systematische inleiding, die zich slechts van de traditionele inleiding onderscheidt door:

- a 'Een stelling wordt alleen dan bewezen wanneer ze minstens voor één leerling niet evident is; de evidente stellingen worden uitdrukkelijk als (voorlopige) aksioma's aangenomen.

b Het vaststellen, formuleren en bewijzen der stellingen geschiedt – wel niet zonder leiding van de leraar – maar toch met verregaande medewerking van de leerlingen zelf.

c De inhoud van de cursus moet zo beknopt mogelijk zijn'.⁴

Tenslotte volgt een aksiomatische herziening van het geleerde. Mevrouw *Ehrenfest* gaat er dus van uit, dat kinderen in het algemeen niet in staat zijn een systematische inleiding in de meetkunde te volgen, dat de 'logische werkzaamheid' leeg is als er niet een bepaalde intuïtieve fase aan voorafgegaan is en dat de leerlingen eerst op een zelfde nivo gebracht dienen te worden ('propedeuse voor de zwakken').

Het uiteindelijke doel van deze stroming is ook inzicht te verschaffen in een deductieve wetenschap, doch in tegenstelling met *Reindersma* wordt een rijkere inleiding gegeven binnen een ruimer leerstofgebied. Mevrouw *Ehrenfest* meent, dat met het meetkundeonderwijs ook het formele doel van het wiskundeonderwijs gediend kan worden.

1.4. Onderlinge kritiek

Richten we ons tot slot op de onderlinge kritiek, die deze stromingen op elkaar hadden.

Dijksterhuis (logisch-deductieve stroming) richtte zich fel tegen de stereometrisch georiënteerde opzet van de propedeutische cursus van Mevrouw *Ehrenfest-Afanassjewa* (intuïtieve stroming), omdat deze aanpak niet noodzakelijk zou zijn voor een zinvolle behandeling van de planimetrie en zelfs meer moeilijkheden voor de leerlingen zou opleveren dan de zoveel mogelijke logische opbouw van de meetkunde op evidente grondslagen. Tegen de systematische cursus uitte *Dijksterhuis* het bezwaar, dat de vanzelfsprekende stellingen niet bewezen werden, maar als 'voorlopige' aksioma's ingevoerd werden en hij betitelde een dergelijke leergang als een aanslag op de zuiverheid en eerlijkheid van het mathematische denken. In een voetnoot bij het artikel 'Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?' schrijft hij echter:

'Dat de logische onaantastbaarheid der elementaire meetkunde bij scherpere kritiek niet volkomen blijkt te zijn, kan buiten beschouwing blijven. De leerlingen plegen de gebruikte redeneringen als dwingend te voelen, zelfs daar, waar, zoals bij het opnemen en weer neerleggen van driehoeken in de congruentiebewijzen, de logische strengheid in werkelijkheid zoek is'.⁵

Dijksterhuis neemt hier dus als criterium voor eksaktheid de door de leerling als eksakt gevoelde redenering en daarmee stelt hij zich op het standpunt dat hij bij *Ehrenfest-Afanassjewa* bestrijdt.

Het is echter wel duidelijk, dat zich hier juist de verschillen toespitsen op de kern van de zaak, namelijk een verschillende beoordeling van de uitgangssituatie.

De psychologische argumenten van *Ehrenfest-Afanassjewa* maken weinig in-

druk op *Dijksterhuis*, omdat haar opvattingen niet steunen op inzichten van de wetenschappelijke psychologie, maar ontspruiten aan een subjectief psychologische overtuiging, waartegenover *Dijksterhuis* zijn psychologische opvattingen stelt. De felheid van de discussie nam in de dertiger jaren zodanig af, dat men kon spreken van een vreedzame koëxistentie tussen de verschillende opposanten.

Men aanvaardde een pluriformiteit van onderwijsmethoden en men ging zich richten op gemeenschappelijke doelstellingen.

H. E. J. Beth schreef dan ook in *Euclides X*:

‘De ijverigste verdediger van de propaedeutische cursus zal wel na enkele maanden zoo ver zijn, dat hij orde gaat scheppen in de verworven kennis; de meest overtuigende propagandist der exactheid laat in de eerste tijd veel figuren teekenen en daarin eigenschappen met het oog ontdekken’.⁶

Ehrenfest-Afanassjewa veroordeelde, zoals we reeds eerder vermeld hebben, de syntetische opvatting van meetkunde-onderwijs en stelde daartegenover de analyse der intuïtie, als een noodzakelijke voorwaarde om tot inzicht te komen in de meetkunde als deductieve wetenschap. De ontwikkeling van een meetkundig begrippenstelsel, vergroting van het ruimtelijk voorstellingsvermogen en het beleven van de noodzaak van eksakte formulering en bewijs, moeten (uitdrukkelijk) nagestreefd worden in een propedeutische cursus.

Reindersma legde in zijn bestrijding van de logisch-deductieve inleiding vooral de nadruk op de noodzaak om het gehele denkproces te ervaren, wat bij het traditionele aanvangsonderwijs niet mogelijk zou zijn vanwege een te sterke nadruk op het eindresultaat van andermans denken.

De kritiek op de empirische stroming bevat twee wezenlijke punten:

1 De propedeutische introductie geeft geen verrijking van de intuïtieve inzichten.

2 De konsentrische leergang van *Reindersma* heeft het bezwaar, dat de moeilijkheden die inherent zijn aan de vermenging van ruimteleer en aksiomatika vergroot worden, omdat hetgeen eerst als maatstaf voor juistheid diende – het inzien of de empirische verifikatie – later niet meer gebruikt mag worden met betrekking tot gelijksoortige leerstof.

1.5. Doelstellingen

Er werd gedurende de periode 1920–1940 in het algemeen sterke nadruk gelegd op de formele vorming. Eksakt taalgebruik, deductief redeneren en logisch denken worden welhaast algemeen als doel gesteld, terwijl daarnaast nog gesproken werd over etische, esthetische, cultuurhistorische en sociale waarden, die door het wiskunde-onderwijs gediend kunnen worden (onder bepaalde voorwaarden). De humanisering en de geestesvorming kregen ’n sterk aksent in de denkbeelden van de ideële bovenbouw. Het praktische nut en het maatschappelijk belang echter werden vrijwel onvermeld gelaten, zodat we konden spreken van wiskunde-onderwijs met een sterk anti-utilitaristisch karakter,

wat nog eens onderstreept werd door de opvattingen die men in het algemeen huldigde ten aanzien van het mechanika-onderwijs, waarin de konfrontatie met de werkelijkheid gemeden werd en de aksioma's met de daaruit getrokken konklusies nauwelijks op hun fysische bruikbaarheid onderzocht werden.

1.6. Leerboeken

Het is van belang te vermelden, dat de meest succesvolle leerboeken – afgemeten aan het aantal herdrukken in de periode 1920–1940 – dicht rond het gemiddelde leerboek der logisch-deduktieve richting gegroepeerd dienen te worden, waarbij we moeten bedenken dat de leerboeken voor het U.L.O. in het algemeen een meer vormleerachtige benadering kiezen.

We kunnen het volgende beeld over het gemiddelde leerboek der logisch-deduktieve richting ontwerpen:

De leerstof, die in het algemeen in de eerste klas behandeld werd, is op de volgende wijze geordend:

- 1 Inleiding, lijnen en hoeken.
- 2 Evenwijdige lijnen.
- 3 Over driehoeken.
- 4 Over kongruente driehoeken.
- 5 Over meetkundige plaatsen; waaronder de cirkel.
- 6 Konstrukties: de grondkonstrukties en het konstrueren van driehoeken (en later vierhoeken).
- 7 De bijzondere vierhoeken: parallellogram, rechthoek, ruit, vierkant.
- 8 De veelhoeken.

Na het vooropstellen van objekt en werkwijze, volgt er in de eerste hoofdstukken vrijwel direkt een praktische uitwerking van deze werkwijze: stellingen en hun bewijzen verschijnen in een stuk theorie, dat duidelijk apart van de toepassingen staat.

De stelling wordt allereerst geformuleerd, daarna 'vertaald' in het gegeven en te bewijzen, en het bewijs volgt in pasklare vorm. Er worden drie aksioma's genoemd in de eerste hoofdstukken:

- 1e Heeft 'n rechte twee punten met een plat vlak gemeen, dan ligt hij er geheel in.
- 2e Een rechte is door twee punten bepaald.
- 3e Door 'n punt buiten een rechte lijn kan men slechts één rechte evenwijdig met die lijn trekken.

Het merendeel der eigenschappen wordt in de theorie behandeld, slechts een enkele stelling wordt in de vraagstukken – dik gedrukt vermeld. In het eerste hoofdstuk – over lijnen en hoeken – komen de volgende eigenschappen – in theorie of toepassingen – aan de orde:

- 1e Twee gestrekte hoeken zijn gelijk.

- 2e Twee overstaande hoeken zijn gelijk.
- 3e Twee rechte hoeken zijn gelijk.
- 4e Als twee hoeken gelijk zijn, dan zijn hun supplementen (komplementen) ook gelijk.
- 5e De bissektrices van twee nevenhoeken staan loodrecht op elkaar.
- 6e De bissektrices van twee overstaande hoeken vormen een gestrekte hoek.

Op basis van drie aksioma's en een groot aantal min of meer eksakt gedefinieerde begrippen bewijst men in het eerste leerjaar een vijftigtal stellingen. Daarnaast heeft men de beschikking over tweehonderdvijftig vraagstukken, waarvan er ongeveer 40 in de eerste twee hoofdstukken staan. Aanvankelijk ligt het aksent bij de toepassingen op het berekenen (50%); bewijssommen (30%) en theorievragen (15%) zijn ook in ruime mate aanwezig, maar vraagstukken waarin het doel van tekenen en meten in zichzelf ligt, zijn vrijwel niet voorhanden. Passer, tekendriehoek en gradenboog worden niet gehanteerd.

De *meer aksiomatische* aanpak (*Schogt, Ouwehand en Ruben*) onderscheidt zich kwantitatief van het 'gemiddelde' leerboek: er is sprake van meer aksioma's, meer stellingen, meer onderwerpen, meer bewijssommen in de eerste hoofdstukken, een verder terugdringen van de aanschouwelijke evidentie, en meer eksakte begripsomschrijvingen. Hoewel er ook concessies gedaan worden ten aanzien van de aanschouwelijkheid, gaat men niet zo ver, dat men al het vanzelfsprekende verzwijgt. Een voorbeeld uit het boek van *Schogt*:

'Helften van congruente lijnstukken zijn congruent.

Onderstelde: $AB = A'B'$, PQ is de helft van AB , $P'Q'$ de helft van $A'B'$.

Gestelde $PQ = P'Q'$.

Bewijs: Er zijn drie gevallen denkbaar: $PQ > P'Q'$, $P'Q' > PQ$ en $PQ = P'Q'$. Was $PQ > P'Q'$, dan was volgens stelling 7 $PQ + PQ > P'Q' + P'Q'$ en daarna $P'Q' + P'Q' = A'B'$, volgens stelling 4 $AB > A'B'$. Dit is in strijd met het onderstelde, dat $AB = A'B'$, dus kan het geval, dat $PQ > P'Q'$ is, zich niet voordoen. Evenzo bewijst men, dat $P'Q' > PQ$ zich niet kan voordoen, omdat daaruit zou volgen, dat $A'B' > AB$, hetgeen ook in strijd is met het onderstelde. Dus moet $PQ = P'Q'$ zijn.

Hiermede is de stelling bewezen.'⁷

En juist in de verzwijging – het minder – ligt het kenmerk van de *meer vormleerachtige* aanpak. Terwijl men in het gemiddelde leerboek moeilijk z'n 'draai' kan vinden in het bewijs van evenwijdigheid en overeenkomstige hoeken, 'schuift' men bij de vormleerachtige benadering de moeilijkheid van het bewijs opzij:

'Verschuift $\angle A_1$ tot punt A op punt B valt.

AB komt dan op BC te liggen. Omdat de lijnen m en l evenwijdig zijn zal m_1 op l_1 vallen. Het hoekpunt A komt in B en de benen van $\angle A_1$ komen te liggen op de benen van $\angle B_1$, dus $\angle A_1 = \angle B_1$.⁸

Wij vinden dus hier een typisch kenmerk van de vormleer terug, namelijk het verplaatsen van figuren en het gebruikmaken van aanschouwelijke evidenties.

Het aksent bij de vraagstukken ligt in de eerste twee hoofdstukken vooral op het berekenen (50%) en de theorievragen (30%). Er wordt dus niet alleen over het vormaspect gesproken, maar vooral het grootte-aspekt komt in de vraagstukken tot uitdrukking. In plaats van de nadruk op het bewijzen (aksiomatische richting) is er hier sprake van een aksent op berekensommen.

In de vormleerachtige aanpak is er dus ten opzichte van het gemiddelde leerboek sprake van een 'minder'. Er komen minder onderwerpen aan de orde, er worden minder (of geen) aksioma's gebruikt, minder bewijssommen gevraagd. Het berekenen neemt een belangrijke plaats in, de aanschouwelijke evidentie wordt dankbaar gebruikt om het indirekte bewijs te mijden, maar ook nu is er voor hanteren van tekendriehoek, passer en gradenboog vrijwel geen plaats in het leerboek ingeruimd. De stellingen zijn vrijwel dezelfde als die van het gemiddelde leerboek.

Vervolgens is er een aantal leerboeken, die het *konstruktieve element* wat naar voren schuiven (*Apeldoorn en Heimeel, Velthoven, Wijdenes e.a.*).

Het tekenen en konstrueren wordt vooral aangeprezen, omdat het kind dan actief bezig is – wat dat dan ook betekenen mag – of omdat de moeilijkheden die het konstrueren met zich meebrengt bij een geleidelijke behandeling beter opgelost kunnen worden. De grondkonstrukties worden vooruitgeschoven om de grondkonstrukties beter te leren (een methodisch doel), maar niet omdat men dit konstrueren als middel gebruikt (met eventueel andere empirische middelen) om de hele aanpak van het meetkunde-onderwijs te veranderen en om het konstrueren voor beter begrip van andere onderwerpen, zoals bijvoorbeeld kongruentie, te laten dienen.

Tenslotte zijn er dan nog de leerboeken van *Bijpost en Timmer*, en van *Muller*, die ieder op hun eigen wijze een *syntese* tussen de eksperimenteel-konstruktieve en de logisch-deduktieve benaderingswijze trachten te realiseren.

Samenvattend kunnen we over de leerboeken uit de periode 1920–1940 het volgende opmerken:

In de leerboeken was binnen het kader van de kwasi-deduktieve opbouw der traditionele leerstof een skala van mogelijkheden gerealiseerd: vormleerachtige, eksperimentele en deduktieve aspekten werden verschillend geaksentueerd. Er bleken leerboeken te zijn, die niet of slechts gedeeltelijk in het gezichtsveld van de vakstructuur lagen; deze kenmerkten zich vooral door hun afwijkende inhoud, die moest dienen om de 'geleefde' matematische ervaringen te ekspliseren of te verrijken.

Binnen het geheel der leerboeken bleken verschillende inleidingsprocedures gebruikt te worden, maar de systematische inleiding, die zich kenmerkt door een kontinu verloop naar een meer eksakte behandeling, bleek in het algemeen geprefereerd te worden boven de propedeutische introductie, waarin een diskontinue overgang naar een aksiomatische opzet plaatsvindt.

Hoewel het leerplan ruimte liet voor een geheel eigen aanpak wat betreft de leerstofordening, was de leerplankommissie – *Beth, Dijksterhuis e.a.* – van mening dat een deduktieve inleiding, waarin op basis van een breed aksioma-

stelsel het bewijs als overtuigingsmiddel gehanteerd wordt, aan te bevelen was boven een empirische of intuïtieve introductie. Een streng aksiomatische inleiding – in klassieke of moderne zin – werd didaktisch niet verantwoord geacht en de klassieke leerstofopbouw kon doorbroken worden, indien dit in verband met het epistemisch beginsel wenselijk geacht werd (de psychologie zou hieromtrent uitsluitsel moeten geven). In het algemeen kenmerkte zich de periode 1920–1940 door perfektionering van de traditionele leerstofordening: er was een aanzet tot besnoeiing van de onoverzienbare vraagstukken – uitgroei en een beperking van het stellingenveld merkbaar, die na de tweede wereldoorlog – mede door het werk van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. – voltooid werd. Het probleem van de leerstofkeuze werd uitsluitend door leraren opgelost, het schrijven van een leerboek was veelal een energieke studeerkamerprestatie gestoeld op een respectabele onderwijservaring.

1.7. Didaktische werkvormen e.d.

Over de didaktische werkvormen merken we allereerst op, dat het niet mogelijk is om een indruk te geven van wat er zoal in de schoolklas plaatsvindt, maar dat het ook hier weer gaat om de didaktische werkvormen, die door de ideële bovenbouw in de mathematisch-didaktische literatuur aangeprezen worden en in leerplan en schoolboek een ruimte van toepassingsmogelijkheden krijgen toegewezen. De periode 1920–1940 kan in dit opzicht slechts negatief gekarakteriseerd worden: er ontbreken in het algemeen beschouwingen over didaktische werkvormen bij de gezaghebbende groeperingen. Daaruit kunnen we echter niet zonder meer konkluderen, dat men de les in een bepaald star schema indeelde volgens de 'Formalstufen' van de Herbartiaanse school, dat men geen oog had voor de zelfwerkzaamheid van de leerling en dat men de leerling zonder meer voor een probleem stelde en daarmee de motivatie als belangrijke leermotor uitschakelde. Men kan echter wel stellen, dat er vanuit de mathematisch-didaktische literatuur en het schoolboek in het algemeen geen steun gegeven werd (voorzichtig uitgedrukt!) om de keten *Vorbereitung – Darbietung – Verknüpfung – Zusammenfassung – Anwendung* te doorbreken. Er was echter wel een groep (*Ehrenfest-Afanassjewa, Reindersma, Wolda, e.a.*), die de eenzijdige doceermethode uitdrukkelijk afwees en het aksent legde op motivatie, emotionele betrokkenheid, zelfwerkzaamheid, aanschouwelijkheid, nabijheid e.d., maar de nadruk in dergelijke betogen lag dan – begrijpelijk – veel meer op de rechtvaardiging van de inhoudelijke zijde van de denkbeelden, dan op de technische kant van de zelfwerkzaamheidsvormen. Zo bleef de kwestie van de didaktische werkvormen een zaak van de individuele leraar, die er binnen de persoonlijke speelruimte die hem gegeven werd een creatieve oplossing voor moest vinden, hoewel de onderwijsmiddelen weinig mogelijkheden boden.

Ook ten aanzien van de leerteoretische aspecten wordt de periode 1920–1940 het beste gekarakteriseerd door de aanduiding van 'het ontbreken'.

De beschouwingen van *Turkstra* vormen hierop een uitzondering, maar met alle waardering, die men voor deze eerste poging om leerpsychologische beschouwingen in de didaktiek van het wiskunde-onderwijs te betrekken kan

hebben, moet men echter ook stellen dat deze beschouwingen te vaag en algemeen gehouden waren.⁹

De evaluatie – het cijfers geven voor proefwerken – is in mathematische kring geen onderwerp van een discussie geweest, die aanleiding gaf tot didactische probleemstellingen (als men tenminste het selectieve element in dit verband meer als een maatschappelijke eis ziet).

2. De periode 1940–1950

Overzien we de periode '20–'40 nog eens dan kan de discussie, die toen gevoerd werd samengevat worden tot de vraag:

‘Wat kan een 12-jarige leren?’

Er bestond betreffende deze problematiek een veelheid van verschillende gezichtspunten, die stoelen op praktisch-intuïtieve ervaringen. Het liefst zou men de was de deur uit te doen en een andere instantie dan de wiskunde-onderwijzer laten beslissen. Men verwachtte nogal wat van de leer- en ontwikkelingspsychologie, die echter nog weinig te bieden bleek te hebben.

Wel meent *Mooy*: ‘Het is evenwel volstrekt niet nodig ons bij deze toestand neer te leggen, want al zijn inderdaad de tot nu toe gebruikte methoden (enquêtes en correlatie-onderzoek) ontoereikend geweest, dan wil dat niet zeggen dat er geen andere methoden zijn en dat we dus moeten berusten in de toestand zoals die nu is en alleen kunnen afgaan op onze eigen ervaring.’¹⁰

Mooy merkt met betrekking tot het al dan niet bewijzen van stellingen op: ‘Welke van deze nu wel en welke niet bewezen moeten worden, kan niet door de wiskunde, maar moet door de psychologie in verband met het intellect van de leerlingen uitgemaakt worden’.¹¹

Ook *Wielenga* wijst op de noodzaak om feiten van psychologische onderzoekingen mee te laten spreken in de leerstofselectie en ordening. Zonder dat men echter de beschikking heeft over deze psychologische feiten is er in de veertiger jaren een toenemende eenstemmigheid te konstaten over de basisprincipes van het aanvangsonderwijs in de meetkunde, waarmee uiteraard niet gezegd is, dat deze ideeën al direct hun neerslag kregen in de onderwijspraktijk. In publikaties van *Mooy*, *Wielenga*, *Vredenduin*, *Heijting*, *Van Hiele* en *Timmer* komen enkele van deze basisprincipes naar voren:

- Leerlingen van 12 jaar zijn in het algemeen nog niet rijp voor meetkunde-onderwijs op traditionele (‘deduktieve’) grondslag.
- Er dient een aanschouwelijke basis gelegd te zijn, voordat het geometrisch gebouw opgetrokken kan worden.
- Het leggen van een grondslag kan gebeuren door konstrueren en eksperimenteren.
- Wiskunde-onderwijs dient in nauw verband gebracht te worden met andere vakken.
- Bewegingen (transformaties) dienen een grotere rol te spelen in het meetkunde-onderwijs.

Naast deze grotere eenstemmigheid over het aanvankelijk meetkunde-onderwijs

beluisteren we een toenemende kritiek op het werk van de commissie *Beth-Dijksterhuis*, die onder de naam 'epistemisch' een wetenschappelijker benadering van het totale wiskunde-onderwijs voor de H.B.S.-B-scholen nastreefde. Het staat te ver van de reële onderwijspraktijk, de uitvoering is niet alleen onwenselijk, maar onmogelijk en het is onbegrijpelijk dat de ervaringen over het bevattingsvermogen van leerlingen van 12 tot 18 jaar zo kunnen verschillen; kortom, het leerplan voor het onderwijs in de wiskunde aan de H.B.S.-B is zowel naar omvang als inhoud onuitvoerbaar, zo bekritisieren *Bremekamp*, *Bottema en Streefkerk* het leerplan. Voeg men bij deze algemene kritiek de veranderde denkbeelden over het meetkunde-onderwijs, dan hebben we een rijke voedingsbodem voor de groei van nieuwe inzichten omtrent leerstof-selectie en ordening. Het zou echter nog enkele jaren duren voordat iets van deze denkbeelden geëffektueerd zou worden. Dit geschiedde in het ontwerp-leerplan van de WIMECOS-commissie in 1954, waarop wij nog terugkomen. Kenmerkend voor deze periode is wel het ontbreken van een scherpe discussie: de opvattingen over leren en onderwijzen blijven ongewijzigd.

3. De periode 1950-1965

3.0. Inleiding

Deze periode wordt gekenmerkt door het beeld van een levendige didaktische activiteit, die belangrijke veranderingen bewerkstelligde. We doelen hierbij niet in de eerste plaats op het gewijzigde leerplan (1954) als wel op de kritische belangstelling voor de ontwikkelingspsychologie (*Piaget*), de veranderde houding ten aanzien van didaktische werkvormen (*Boermeester*), de opkomst van de transformatie-meetkunde (*De Groot, Troelstra*) en vooral op het werk van *Van Hiele en Van Hiele-Geldof*. Verwachtte men in de vorige periode nog veel van de psychologie, nu wordt het onderzoek door de deskundige leraar zelf ter hand genomen (*Boermeester, Van Hiele, Van Hiele-Geldof*) of in samenwerking met psychologen (*De Groot, e.a.*).

Naast de klinische methode uit de ontwikkelingspsychologie wordt nu de didaktische methode uit de onderwijs praktijk als nieuwe onderzoeksmethode gesteld.

3.1. Doelstellingen

De discussie rond de vraag: 'Kan het wiskunde-onderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?' tussen Mevrouw *Ehrenfest* en *Freudenthal* bleek geen eenstemmigheid te kunnen uitlokken.¹² Overeenstemming tussen de opponenten bestond er ten aanzien van de brede benadering van wiskunde-onderwijs vanuit de analyse van het matematiseren en in de wijze waarop goede denk- en leergewoonten in de wiskunde gestimuleerd kunnen worden, maar het breekpunt bleek te liggen bij de 'eenvoud' van de wiskunde als voorwaarde voor 'transfer'. Deze eenvoud was voor *Ehrenfest-Afanassjewa* aanleiding het abstraherend en kritisch vermogen juist in het wiskunde-onderwijs

te beoefenen om het van daaruit te laten uitstralen op andere kennisgebieden waar deze denkgewoonten ook van groot nut zullen zijn. *Freudenthal* daarentegen was van mening, dat deze 'eenvoud' van de wiskunde juist de grote belemmering voor overdracht is op gebieden buiten de wiskunde. Deze zienswijze van *Freudenthal* wordt vanuit de psychologisch-didaktische kant ondersteund en zelfs versterkt door de opvattingen van *Langeveld*, die verschillende transfer-kringen onderscheidt, waartussen onderling een negatieve transfer bestaat. De opvatting van *Ehrenfest-Afanassjewa* vindt z'n psychologisch-didaktische komplement bij *Van Hiele* en *Van Hiele-Geldof*, die mede op grond van Gestaltpsychologische en leerpsychologische overwegingen tot de mogelijkheid van 'totale transfer' komen, mits het onderwijs in de wiskunde gericht is op het proces van matematiseren, waarbij men ontdekt wat wiskunde is door er van buiten af in te dringen en aldus konkrete niet-wiskundige problemen om te vormen tot wiskundige. Het aspect van de vormende waarde als motivering voor wiskunde-onderwijs verdwijnt onder invloed van deze discussie uit het leerplan. *Freudenthal* schreef: 'Ik vrees, dat men op drijfzand bouwt, wanneer men de uren, die het een of ander schoolvak opeist, wil rechtvaardigen met een beroep op de denkoefeningen, waaraan die tijd zou worden besteed'.¹³

Met het verdwijnen van het argument van de vormende waarde van het wiskunde-onderwijs, komen ook de eerste publikaties over operationaliseerbare doelstellingen los (*Wielenga, Van Dantzig, De Groot*).

3.2. De leerboeken

Bekijken we eens in het bijzonder de criteria, die voor het onderwijs in de meetkunde golden, dan lezen we in het rapport van de WIMECOS-leerplan-kommissie (1954), dat een systematische inleiding niet geschikt meer lijkt.

'Naar de mening van de Kommissie zullen de resultaten van het aanvangs-onderwijs verbeteren, als niet te spoedig wordt overgegaan tot de opbouw van een logisch systeem. De bedoeling van een dergelijke opbouw met behulp van definities, aksioma's en stellingen moet door de leerlingen worden ingezien alvorens het zin heeft deze te laten bestuderen. Hiertoe dient de meetkundekursus met een intuïtieve inleiding aan te vangen. Deze inleiding hoeft niet van lange duur te zijn en kan geleidelijk overgaan in het logisch-systeematisch gedeelte'.¹⁴

Hiermee wordt dan weer geheel aan de beleefdheid der schoolboekenauteurs overgelaten, waarvoor gekozen zal worden. Een korte of een ruime intuïtieve inleiding.

Na de intuïtieve inleiding, waarin veel gemeten, gekonstrueerd en getekend dient te worden, volgt de systematische cursus.

In de vijftiger jaren beginnen de meeste van de ongeveer zeventig leerboeken van het voortgezet onderwijs dan ook met een propedeuse waarvan tijdsduur en inhoud nogal uiteenlopen. Enkele verschilpunten: een duur van enkele weken tegenover een duur van meer dan een jaar; een analytisch-stereometrisch georiënteerde leergang tegenover een syntetisch-planimetrisch gerichte aanpak: de nadruk op aanschouwelijke evidentie tegenover de nadruk

op het eksperiment; het aksent op probleemoplossing tegenover de nadruk op ruimtelijke structurering. Deze veelvormigheid komt ook tot uitdrukking in het 'Report on Methods of initiation into Geometry' en komt overeen met de grondgedachte, dat de leraar de nodige vrijheid dient te behouden in de keuze van zijn didaktische middelen.¹⁵ Een inleidende meetkunde behoorde ook tot een dergelijke keuze en het lijkt zelfs gerechtvaardigd te stellen, dat een dergelijke keuze – in tegenstelling tot de dertiger jaren – een gebruikelijke gang van zaken begon te worden. Het zojuist genoemde 'Report ...' bevat bijdragen van *Van Albada*, *Boermeester*, *Bunt*, *Ehrenfest-Afanassjewa*, *Ernst*, *Geursen*, *Van Hiele-Geldof*, *Van Hiele*, *Krooshof*, *Van der Neut*, *Timmer*, *Turkstra* en *Vredenduin*, en is uitgegeven onder redactie van *Freudenthal*, die het betreurt dat de opvattingen van *Bos* en *Lepoeter* hierin ontbreken.

Het geheel weerspiegelt de bonte verscheidenheid van uitwerkingen die geen eenvoudige klassifikatie in vooroorlogse categorieën meer mogelijk maakt. De logisch-deduktieve stroming is uiteengewaaierd in tal van genuanceerde inleidingen, de empirische aanpak wordt geïntegreerd in deze inleidingen, de intuïtieve stroming vindt zijn voortzetting en verdieping in het werk van de *Van Hiele's* en van *Van Albada*, en de transformatie-meetkunde – waarvoor men in de dertiger jaren ook reeds belangstelling had – wordt in 1962 in een schoolboek gekonkretiseerd.

3.3. Onderzoek over meetkunde-onderwijs

In de vijftiger jaren zijn er drie belangrijke onderzoeken gedaan:

1. Een onderzoek van *Boermeester*, waarin een evaluatie van werkvormen vanuit de praktisch-pedagogische hoek plaatsvindt¹⁶
2. Researchwerk van *De Groot*, waarin een evaluatie van leerstofvormen geschiedt vanuit methodologisch-psychologisch gezichtspunt¹⁷
3. Een eksperiment van *Van Hiele-Geldof*, waarbij het fenomologisch-didaktische standpunt tot uitdrukking komt.¹⁸

Het eerste onderzoek heeft een beperkt onderzoeksgebied en beoogt een aanbeveling te zijn voor het toepassen van de leergespreksmethode. Het gebruikte onderzoeksinstrumentarium en de gevoegde onderzoeksprocedure vertonen overeenkomst met de toetshandelingen in de alledaagse schoolpraktijk en bevatten fundamentele feilen. Toch is deze bijdrage, vooral door de weergave van de lesprotokollen, van belang als vernieuwingssteentje. Het kan echter niet als een belangrijk onderzoeksbroodje verkocht worden.

Bij het tweede onderzoek liggen de zaken juist omgekeerd. Men wil een nieuwe 'methode' – bewegingsmeetkunde – evalueren en daarbij tegelijkertijd een model aanreiken voor zo'n evaluatie. De gebruikte onderzoeksmiddelen zijn eksakt, maar belangrijke didaktische vóóronderstellingen zijn ongemerkt ingepast in de 'eksperimentele variabele', zodat de bruikbaarheid voor de onderwijspraktijk gering is. De methodologische opbrengst is interessant genoeg om een diepgaande discussie uit te lokken, wat overigens niet gebeurd is.

Zoals het eerste onderzoek voortkomt uit een bezinning op de onderwijs-

praktijk en het tweede onderzoek resulteert in onderzoekstechnische bemoeiingen, zo blijkt het derde eksperiment vooral ten grondslag te liggen aan een nieuwe doordenking van de didaktiek. Er wordt in dit onderzoek een verantwoording gegeven van de uitgangspunten, een opsomming van de doelstellingen van het aanvankelijke meetkunde-onderwijs en een beschrijving van het onderwijs-leerproces door middel van lesprotokollen. Het geheel wordt geïnterpreteerd vanuit de theorie over de denknivo's van *Van Hiele*. We schetsen nu kort de leergang, die mevrouw *Van Hiele* in haar onderzoek gebruikte en wijzen erop, dat deze activiteiten, met die van *Van Albada*, als het eindpunt te beschouwen zijn van de ontwikkelingen, die vanaf de eerste wereldoorlog hebben plaatsgevonden. Of zo men wil: het hoogtepunt.

Om bij het kinderlijke denken te kunnen aansluiten, wordt in een empirisch gerichte aanpak van ongeveer 4 maanden gewerkt. De kinderen maken zelf een kubus, leren daaraan allerlei begrippen kennen, lossen telproblemen op, meten de zijvlak- en lichaamsdiagonalen, etc. Het feit, dat de kinderen de kubus zelf gemaakt hebben, verankert allerlei grondbegrippen. Daarna is er aandacht voor symmetrische figuren, de ruit wordt uitgebreid behandeld in verband met de grondkonstrukties, terwijl ook nog aandacht aan andere ruimtefiguren (achthoek, piramide) wordt besteed. Dit alles volgens de didaktische grondstelling: 'Men moet de kinderen denkend laten doen met hanteerbaar materiaal als hulpmiddel'. ()

Hierna volgt het onderwerp 'tegelvloeren' om visuele meetkundige figuren bij de kinderen te vormen. De bedoeling is, dat men zich niet meer tevreden stelt met louter empirisch gevonden waarheden, doch dat langzamerhand een meer logisch redeneren hiervoor de plaats inneemt. Het bewijs van een stelling als 'de drie hoeken van een driehoek zijn samen 180° ' wordt door de kinderen zelf gevonden, waarbij de hulplijn zich op natuurlijke wijze aanbiedt. Er wordt in dit stadium en verder gedurende het gehele eerste jaar echter nog geen systematische leerstofordening aangeboden. De cursus wordt afgesloten met een zestal lessen, welke weer aanvangen met een kubusmodel, waaruit dan het ruitentwaalfvlak wordt gekonstrueerd door de zes piramides, die de kubus opvullen als het ware naar buiten te klappen. De samenhang met de kubus (ligging en inhoud) komt ter sprake en de kinderen maken zelf een netwerk van het ruitentwaalfvlak. Daarna dringt zich de vraag op welke regelmatige lichamen te maken zijn. Uiteindelijk vinden de kinderen langs empirische, maar systematische weg, gesteund door het onderwerp tegels, de 5 regelmatige veelvlakken. De lichamen worden in scheve parallelprojectie getekend, terwijl ook nog een aantal halfregelmatige lichamen bestudeerd worden.

4. De periode 1965 tot heden

4.0. Inleiding

De jaren '60 staan bol van de 'modernisering van het wiskundeonderwijs'. Alom bekend is het Sputnik-effekt (1957), dat Amerikaanse leerplanontwikkelaars aan het werk heeft gezet om spoedprogramma's gemoderniseerde wis-

kunde in elkaar te zetten. Men beschouwt in die dagen de wiskunde als een vak, dat zich zo snel uitbreidt als een stad, waarvan de kern vanuit de buitenwijken nog slechts te bereiken is door grote bruggen te slaan naar het hart van de 'stad'. Dit hart van de wiskunde zou bestaan uit de wezenlijke structuren, die de randgebieden beheersen. Alom wint de gedachte veld, dat formele logika, verzamelingenleer, de leer der afbeeldingen en relaties en de structuren als groepen, lichamen en ringen die de ruggegraat van de wiskunde vormen, ook als zodanig voor het wiskunde-onderwijs aangemerkt dienen te worden. Een eeuwenoude wetenschappelijke en didaktische utopie om vanuit het algemene afdalend tot het bijzondere te geraken, duikt weer op. De kloof tussen het V.W.O. en wetenschappelijk onderwijs in de wiskunde lijkt groter dan ooit. Vooral vanuit de kringen van de universiteiten en hogescholen wordt daarom aandrang uitgeoefend om het wiskunde-onderwijs te moderniseren.

Daarnaast ontstaat een hausse in toegepaste vakken als computerkunde, numerieke wiskunde, ekonometrie en informatika.

De vraag uit de maatschappij om praktische wiskundigen wordt hoe langer hoe dringerder. Veel bedrijven hebben of formeren hun eigen opleidingen. De C.M.L.W. vangt haar taak dan ook van bovenaf aan (1961). De eerste opdracht van de C.M.L.W. was zorg te dragen voor een betere aansluiting tussen het middelbaar onderwijs en het hoger onderwijs.

Gezien het bovenstaande is het begrijpelijk dat uit het traditionele programma geschrapt dienen te worden. *Dieudonné* heeft reeds zijn 'Weg met Euclides' uitgesproken en er lijken nog weinig aanhangers van de 'mikroskopie van de driehoek' te bestaan. De 'aksiomatiek' van de meetkunde uit het eerste jaar was reeds bij de eerdere 'modernisering' verwijderd uit het leerplan en er was een intuïtieve inleiding in de meetkunde voor in de plaats gesteld (1958).

De nekslag voor de traditionele meetkunde zal vallen. Nog schrijft *Duparc*: 'Wie dan ook heel radicaal is zou misschien de gehele meetkunde willen bannen uit ons schoolonderwijs. Ik kom hier ten sterkste tegen op om heel verschillende redenen'.¹⁹

Een van de redenen is volgens *Duparc*, dat juist bij de meetkunde het 'dooreenlopen van intuïtie, aanschouwing en zakelijke redenering' als voorbeeld van goed, wiskunde-onderwijs kan dienen.

Ook schrijft *Kuiper* nog een 'Lofzang op de meetkunde', waarin echter geen nieuwe gezichtspunten worden gegeven van waaruit men het traditionele meetkunde-onderwijs zou kunnen ondersteunen.²⁰ Het lijkt erop, dat de meetkunde, eens beschouwd als de parel van het wiskunde-onderwijs, zijn tijd heeft gehad.

4.1. Doelstellingen

In de zestiger jaren ebt de gebruikelijke doelstellingendiskussie volledig weg. Reeds draaien enige proefscholen met eksperimentele programma's wiskunde nieuwe stijl, voordat in 1968 de mammoetwet officieel zijn intrede doet en tegelijkertijd op het nieuwe wiskundeleerplan werd overgestapt. Kennelijk is men zo uitsluitend gericht op de inhoudelijke kant van het nieuwe leerplan, dat men aan vragen als 'waarom', 'waartoe', en 'hoe' ternauwernood toekomt.

Laat staan dat er discussie over algemene doelstellingen op gang zou komen. Onderzoeken we de jaargangen van 'Euclides' – vanaf het jaar 1960 – dan blijken slechts drie artikelen te zijn verschenen die zich met deze problematiek hebben bezighouden (*Peremans, v. d. Hak, v. d. Sluis*).

In het Interimrapport van de C.M.L.W. (mei 1967) lezen wij:

'Bij het opstellen van een programma voor de verschillende vormen van V.O. is het zaak te trachten een motivering aan dit programma te geven. Dit is in het algemeen geen gemakkelijke zaak en in ieder geval niet voor het vak wiskunde'.

Daarna worden de bekende argumenten als maatschappelijke, cultureel-historische relevantie en toepasbaarheid genoemd. Wat het meetkunde-programma voor de brugklas betreft, wordt de navolgende summier opsomming van de leerstofonderdelen gegeven:

3 MEETKUNDE

- a Introductie van fundamentele begrippen, lijn, lijnstuk, halve lijn, verlengde en vlak.
- b De hoek in het vlak: graad, gestrekte hoek, rechte hoek, scherpe hoek, stompe hoek, complement en supplement, overstaande hoeken, overeenkomstige hoeken en verwisselende binnenhoeken, bissectrice, hoek van twee lijnen, loodrecht.
- c De afstand: de afstand van punt en lijn, twee evenwijdige lijnen, de verzameling van de punten die een gegeven afstand tot een gegeven lijn hebben.
- d De driehoek: scherphoekige, rechthoekige, stomphoekige, gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken, hoogtelijn, bissectrice en zwaartelijn.
- e De vierhoek: vlieger, parallelogram, ruit, rechthoek, vierkant.
- f Lijnspiegeling, lijnsymmetrie, puntspiegeling, puntsymmetrie, verschuiving en draaiing.
- h Het begrip kongruent.

waarna een toelichting volgt (duidelijk bedoeld als hint aan de auteurs), waarmee men vele kanten op kan.

In de toelichting op het leerplan wiskunde (1968) wordt dan in het interimrapport ingegaan op de algemene doelstellingen:

'De door de leerlingen dikwijls gestelde vraag: 'Waarom moet ik wiskunde leren?' vindt haar oorsprong in het feit dat zij geen verband zien tussen hun toekomst en de wiskunde. Van het onderwijs in de eerste jaren dient een stimulans uit te gaan, zodat leerlingen die de begaafdheid daartoe hebben, dit vak later als examenvak kiezen. Mede daarom dient aanvankelijk niet het formele karakter van de wiskunde op de voorgrond gesteld te worden, maar zal een intuïtieve benadering het creatieve element, het zelf-actief met de stof bezig zijn, het kritisch denken een ruime plaats moeten hebben. Het zal noodzakelijk zijn ook het basisonderwijs in de vernieuwing te betrekken. Hier zijn andere landen ons reeds voorgegaan.

Zo kan bijvoorbeeld reeds heel wat intuïtieve kennis van vlakke- en ruimte-metkunde worden verworven langs de weg van ervaring en experiment, door tekenen, meten en het maken van modellen. Op deze wijze wordt een betere voorbereiding gegeven op de wiskundestudie in het V.O. dan thans het geval is'.

Opmerkelijk is hier de zinsnede dat een intuïtieve benadering van de meetkunde naar het basisonderwijs wordt verwezen.

Over de meetkunde volgt dan:

‘Wat in het voorgaande (de traditionele meetkunde) waardevol is en niet verloren mag gaan is:

- a het verkrijgen van inzicht in de betekenis van een mathematisch bewijs;
- b het afleiden van resultaten, die voor hen, die later wiskunde moeten toepassen, van nut kunnen zijn’.

Hoe het onder a. gestelde geïnterpreteerd dient te worden, wordt aan de lezer zelf overgelaten. Duidelijk wordt wel uitgesproken, dat de leerling eerst langs intuïtieve weg vertrouwd dient te geraken met enige meetkundige begrippen om daarna de structuur van de transformaties centraal te stellen. Ook in de richtlijnen die de gezamenlijke pedagogische centra (1968) voor een leerplan wiskunde voor het M.A.V.O. geven, komt men niet verder dan de inhoudelijke, de algemeen vormende, de toepassings- en de kulturele waarde van de wiskunde aan te dragen voor het wiskunde-onderwijs. Voor de meetkunde worden 19 min of meer didactische aanwijzingen gegeven om tot een optimale leerprestatie van de leerlingen te kunnen geraken. Nadruk wordt gelegd op een oriënterende fase, op de moeilijkheden die ‘het bewijzen’ met zich meebrengt en op het taalaspect. Toch lijkt men ook hier weer op twee gedachten te hinken. Enerzijds wordt ruime aandacht gevestigd op het deductieve denken, terwijl anderzijds te lezen valt:

‘Bij de meetkundige onderwerpen beperke men zich tot die gedeelten, die de meeste kans op *toepassing* bieden. Daardoor zal de meetkunde grotendeels *numeriek* zijn . . .’

Samenvattende kunnen we zeggen dat wat betreft de meetkunde in het brugjaar de volgende konsekwenties getrokken worden:

- a oriëntatie in ruimte en vlak dienen te blijven bestaan
- b schijn-aksiomatiek dient vermeden te worden
- c een intuïtieve benadering verdient de voorkeur
- d de oude planimetrie wordt afgezworen
- e de meetkunde dient een unificerend karakter te hebben op grond van transformaties (spiegelingen, rotaties, translaties)
- f het deduceren blijft een (belangrijke) plaats innemen binnen het onder e genoemde
- g het uiteindelijke doel is zo snel mogelijk te geraken tot een gearitmetiseerde meetkunde.

Laten we in de volgende paragraaf eens kijken hoe de auteurs van schoolboeken wat betreft het brugjaar op deze veranderingen hebben gereageerd.

4.3. De leerboeken

In 1968 gaan de scholen voor het V.O. over op nieuwe leerboeken. We delen de boeken in 4 categorieën in wat betreft de meetkunde in het brugjaar:

- A traditionele benadering met moderne aanpassing
- B intuïtieve benadering van de transformatiemeetkunde
- C transformatiemeetkunde in een aksiomatische opbouw
- D informele veelzijdige benadering

ad A

De bestaande traditionele leergang wordt grotendeels gehandhaafd. De konstruktie en kongruentiegevallen van de driehoeken blijven centraal staan. De transformaties worden uit de kongruentie afgeleid. Een duidelijk behoudend karakter spreekt uit deze boeken.

ad B

De transformatiemeetkunde wordt intuïtief ingeleid. Soms wordt eerst concreet gewerkt met vouwen, knippen, doorkijkspiegels. Daarna wordt getekend en gekonstrueerd. Het visuele element speelt een belangrijke rol. Veelal worden de transformaties, spiegeling, rotatie en translatie losstaand van elkaar beschouwd.

Vaak wordt gebruik gemaakt van roosters, ook om het vektorbegrip in te voeren. Een aksiomatische opbouw wordt vermeden.

ad C

Na een intuïtieve inleiding wordt de transformatie lijnspiegeling aksiomatisch vastgelegd met behulp van de volgende regels:

- 1 Elk punt P heeft één beeldpunt P'
Als P op de spiegelas ligt geldt $P = P'$
Als P niet op de as ligt in de as middelloodlijn van PP' .
- 2 Het beeld van lijn is een lijn.
- 3 Het beeld van een lijnstuk is een lijnstuk dat even lang is.
- 4 Het beeld van een hoek is een hoek, die even groot is, maar tegengestelde draaizin heeft.

Hierna moet natuurlijk ook nog een modus gevonden worden om het parallelen-aksioma in te voeren. Dit kan bijvoorbeeld gedaan worden door de volgende regel:

- 5 Als van een vierhoek 3 hoeken recht zijn dan is de 4e hoek ook recht. De traditionele wijze volgens Euclides kan natuurlijk ook gevolgd worden. (Als de som van 2 binnenhoeken, bij 2 lijnen gesneden door een derde, kleiner is dan 180° , snijden die lijnen elkaar).

Met behulp van deze regels wordt verder getracht de meetkunde deduktief op te bouwen. Er wordt ruime aandacht geschonken aan het systeem van aksioma's, definities en stellingen. Het bewijs staat centraal. Translaties en rotaties worden opgevat als produkten van lijnspiegelingen.

ad D

Veel aandacht voor ruimtefiguren, waarbij men zich niet alleen tot de kubus beperkt, maar ook het viervlak, achthoek, blok, de bol, kegel en cilindervorm aan een eerste onderzoek onderwerpt. Hieraan worden telproblemen, constructies, netwerken, doorsnijdingen en inhoudsbepalingen verbonden. Het vlak wordt niet alleen vanuit het vierkantenrooster beschouwd, doch ook met andersoortige vlakvullingen volgelegd. Schatten, meten, konstrueren, grafieken maken, met coördinaten werken, behoren tot de meetkundige activiteiten. De transformaties komen – zij het niet zo sterk beklemtoond – eveneens aan bod.

5. Besluit

We noemen tenslotte de aspecten van de meetkunde, die aan de orde zijn geweest. De auteurs van de meetkunde-leerboeken hebben veelal de nadruk gelegd op de volgende 6 aspecten:

- 1 aanschouwelijk aspect; oriëntatie in vlak en ruimte
- 2 het teken- en constructie-aspect
- 3 het aspect der nuttigheid (toepasbaarheid)
- 4 het logische aspect (deduktief systeem)
- 5 het structuur aspect (kongruentietransformaties)
- 6 het algebraïsche aspect

Al naar gelang stroming en/of leerplanvoorschrift kregen bepaalde punten de nadruk. Zo hebben de aspecten 5 en 6 vooral de laatste jaren het volle pond gekregen, maar 3 is er vaak bekaaid afgekomen. Er zijn 4 aspecten te noemen:

- 7 het reken- en meetaspect
- 8 het taal- en relatie-aspect
- 9 het kombinatorische aspect
- 10 het topologische aspect

Bekijken we het geheel aan uitwerkingen, dan moeten we besluiten met de vaststelling van Wansink:

‘De modernisering van ons wiskunde-onderwijs in de zestiger jaren van deze eeuw heeft het stelsel van Euclides in zijn traditionele vorm, met de in de negentiende eeuw naar voren gekomen ‘nieuwere meetkunde’, uit ons schoolonderwijs doen verdwijnen en laat het probleem van aard en plaats van het resterend ‘meetkunde’-onderwijs binnen ons voortgezet onderwijs tot dusver onopgelost’²¹

Zou de oplossing niet in de eerste plaats aan de basis van het onderwijs gezocht moeten worden? Het derde artikel handelt dan ook over het vraagstuk van de meetkunde op de basisschool.

Noten

- 1 Dijksterhuis, E.
Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? in 'Bijvoegsel van het Nieuwe Tijdschrift voor Wiskunde' 1 (1924-25) p. 12
- 2 Ehrenfest-Afanassjewa, T.
Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven? Groningen 1924, p. 6
- 3 Ehrenfest-Afanassjewa, T.
Uebungensammlung zu einer Geometrischen Propädeuse; Den Haag 1931
- 4 Ehrenfest-Afanassjewa, T.
Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven? Groningen 1924, p. 18
- 5 Dijksterhuis, E. J.
Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? in 'Bijvoegsel van het Nieuwe Tijdschrift voor Wiskunde' 1 (1924-25) p. 12.
- 6 Beth, H. J. E.
Enkele beschouwingen inzake het Meetkunde-onderwijs; in 'Euclides' 10 (1933-34) p. 258
- 7 Schogt, J. H.
Beginnelen der vlakke Meetkunde; Groningen 1929, p. 13.
- 8 Een dergelijk bewijs vindt men bijvoorbeeld bij;
Reinink & Teunis; Boomsma & Vriezen; Ingen Schenau & Westerhof.
- 9 Turkstra, H.
Psychologisch-Didactische Problemen bij het onderwijs in de Wiskunde aan de Middelbare School. Wat heeft de Psychologie voor de Wiskunde te zeggen; Groningen 1934.
- 10 Mooy, H.
Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies ter verdeling van de hoek in gelijke delen; Amsterdam, 1948. p. 18.
- 11 loc. cit. p. 53
- 12 Ehrenfest-Afanassjewa, T.
Kan het Wiskunde-onderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen? Discussie tussen T. Ehrenfest-Afanassjewa en Prof. Dr. H. Freudenthal. Purmerend 1951
- 13 loc. cit. p. 16
- 14 Rapport van de WIMECOS-commissie, Euclides 30 ('54-'55) p. 154
- 15 Freudenthal, H.
Report on Methods of initiation into Geometry; III, Groningen 1958
- 16 Boormeester, C.
Over Meetkunde-onderwijs en psychologie en andere didactische mogelijkheden voor het Meetkunde-onderwijs aan M.U.L.O.-scholen gebaseerd op psychologische inzichten; in 'pedagogische Monographieën' VI. Groningen-Djakarta 1955
- 17 Groot, A. D. de
Bewegingsmeetkunde; Groningen 1968
- 18 Hiele-Geldof, D. van
De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.; Amsterdam 1957.
- 19 Duparc, H. J. A.
Welke gevolgen brengt de veranderde plaats der wiskunde in de maatschappij met zich mee? Euclides 36 (1960-61) p. 194
- 20 Kuiper, N. H.
Lofzang op de meetkunde; Euclides 39 (1963-'64) p. 33-47
- 21 Wansink, J. H.
De zogenaamde 'nieuwe meetkunde' in de wiskundeprogramma's van de hbs; Een terugblik. Euclides 49 (73-74), p. 373