

EEN OPZIENBAREND BOEK

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

(Oosterbeek)

In november 1963 verscheen: Papy, *Mathématique moderne* 1, uitgave Didier (Brussel), 468 blz., prijs 200 BF.

Laat ik ter introductie eerst medelen, dat dit boek een schoolboek is. Het is bedoeld om doorgewerkt te worden de eerste anderhalf jaar, dat leerlingen middelbaar onderwijs volgen. De schrijver is hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit van Brussel. Zijn vrouw is lerares in wiskunde aan de normaalschool te Berkendael-Brussel. Zij heeft vijf jaar lang met de in het boek gepresenteerde leerstof geëxperimenteerd en op grond van deze experimenten is de oorspronkelijke tekst vaak gewijzigd.

Om een indruk van de inhoud te geven, som ik hier de titels van de 24 hoofdstukken op: verzamelingen, deelverzamelingen, vereniging — doorsnede — verschil, rekenen met verzamelingen, partities (d.w.z. verdelingen van een verzameling in niet lege disjuncte deelverzamelingen), eerste beginselen van de meetkunde; relaties, eigenschappen van relaties, samenstellen van relaties, ekwivalentierelaties, orderelaties, functies, permutaties, transformaties van het vlak, parallelprojectie en ordening, cardinaalgetallen, optellen, vermenigvuldigen, het binaire stelsel, gehele getallen, ekwipollentie (d.i. gelijkheid en evenwijdigheid van lijnstukken), translaties (en vectoren), centrale symmetrie, groepen. De bedoeling van het boek is dus te komen tot een geheel nieuwe fundering van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school.

Als men dit boek doorleest, raakt men hoe langer hoe meer onder de indruk van de didactische gaven van de auteur. Een nieuw begrip wordt veelal ingeleid met behulp van gemakkelijk verstaanbare voorbeelden uit het dagelijks leven. Eerst daarna volgt een nauwkeurige omschrijving. Opvallend is echter, dat deze omschrijving nooit resulteert in een moeilijk reproduceerbare verbale definitie, maar in een of ander schema, waarin op aanschouwelijk duidelijke manier de betekenis geïllustreerd wordt. De figuren, die dienen om de theorie toe te lichten of om vraagstukken op te geven, zijn zeer

talrijk. Ze nemen zeker de helft van de ruimte van het boek in beslag, zodat men zich over de omvang van het boek niet te zeer moet verbazen. Ze zijn uitgevoerd in driekleurendruk (rood, blauw, geel, groen, violet, oranje), hetgeen de overzichtelijkheid sterk bevordert. Moeite noch kosten zijn gespaard om deze uitgave tot een welverzorgd succes te maken. Ik zou dan ook elke wiskundeleraar willen aanraden van dit boek kennis te nemen. Niet alleen, dat hij kan genieten van een ongekend fraai stuk didactiek, maar het zou me bovendien niet verwonderen, als hij er menig ding in vond, dat hem niet bekend was, of als bij bekende dingen in voor hem nieuwe samenhang leerde zien. Ik ben me ervan bewust, dat een leraar niet gauw vijftien gulden zal willen uitgeven voor een schoolboek. Nu verschijnt over een paar maanden (d.w.z. een paar maanden na het verschijnen van de Franse uitgave) een Nederlandse vertaling, terwijl in 1964 ook een Duitse, een Engelse en een Spaanse vertaling gereed zullen komen. Ik geloof zeker, dat het aanschaffen van de Nederlandse uitgave voor de schoolbibliotheek verantwoord is. Leerlingen van de klassen 4 en hoger, die belangstelling voor wiskunde hebben, zullen er met plezier in werken. En het zal de leraar dan wel gegund zijn als eerste het boek te lenen.

Een bespreking van de inhoud in details zou te veel ruimte in beslag nemen en toch slechts een onvoldoende indruk van de kwaliteiten van het boek geven. Liever wil ik me er daarom toe bepalen enkele facetten naar voren te brengen. Als men de inhoud doorneemt, valt op, dat aan logica 12 hoofdstukken besteed zijn, aan meetkunde 6 en aan algebra 5, terwijl het slothoofdstuk over groepen een meer algemeen karakter heeft. Ik kies hieruit eerst de ontwikkeling van de beginselen van de meetkunde in de hoofdstukken 6, 11, 14 en 15. Eerst leren we enkele figuren kennen op aanschouwelijke manier: punt, rechte lijn, vierkant (open en gesloten), driehoek (idem), cirkel (idem). Al deze figuren worden gezien als verzamelingen, waarvan de elementen punten zijn. Twee rechte lijnen zijn gelijke verzamelingen of hebben een lege doorsnede, in welke beide gevallen ze evenwijdig genoemd worden, of ze hebben als doorsnede een singleton (d.w.z. één enkel element, dus één punt). Nu volgt een definitie, die in het verband van het boek heel gewoon is: onder de richting van een rechte lijn verstaat men de verzameling van de eraan evenwijdige lijnen. Waarna geconstateerd wordt: elke richting is een partitie van het vlak (d.w.z. door elk punt van een vlak gaat één lijn, die evenwijdig is aan een gegeven lijn). Dit is dus een zeer bondige moderne

formulering van het parallellenaxioma van Euclides. Van de stellingen: $A \parallel B \parallel C \Rightarrow A \parallel C$ en $A \parallel B \nparallel C \Rightarrow A \nparallel C$, zijn de bewijzen nu zeer simpel. Hierna volgt de loodrechte stand, waarvan de betekenis alleen aanschouwelijk vastgelegd wordt door een papier twee keer dubbel te vouwen. Nu wordt geconstateerd: met elke richting a correspondeert één richting a' , waarvoor geldt $a \perp a'$; elke lijn $A \in a$ staat loodrecht op elke lijn $A' \in a'$. Waarna gemakkelijk bewijsbaar zijn de stellingen:

bij elk punt p en elke lijn D is er één lijn P , waarvoor $p \in P \perp D$,

$A' \parallel A \perp B \parallel B' \Rightarrow A' \perp B'$,

$A \perp B \parallel B' \Rightarrow A \perp B'$,

$A \perp B \perp C \Rightarrow A \parallel C$,

$A \perp B \perp C \perp D \Rightarrow A \perp D$ (d.w.z. als drie hoeken van een vierhoek recht zijn, is de vierde het ook).

En hiermee is dan het eerste hoofdstuk over de meetkunde, dat nog alleen steunt op de vijf voorgaande hoofdstukken over verzamelingen, ten einde. Men vindt er natuurlijk talrijke vraagstukken in, die de leerling de gelegenheid geven de in de voorgaande hoofdstukken verkregen kennis toe te passen.

In het hoofdstuk over orderelaties vinden we een verdere ontwikkeling van de meetkunde. Geconstateerd wordt, dat de punten op een rechte lijn zich op twee manieren totaal kunnen laten ordenen. Door middel van deze ordening kunnen lijnstuk en halve lijn gedefinieerd worden, waarna ook convexe puntverzamelingen ter sprake komen.

In het hoofdstuk over transformaties van het vlak vindt men aanvankelijk enige willekeurige toepassingen van afbeelding in het algemeen. De eerste afbeelding, die van betekenis is voor de systematische opbouw van de planimetrie, is de parallelprojectie. Deze leidt tot het bepalen van een punt door zijn coördinaten, hetgeen hier geen getallen zijn maar parallelprojecties van het punt parallel A op B en parallel B op A , waarin A en B snijdende lijnen zijn. We hebben hier dus te maken met een bijectie (omkeerbaar eenduidige toevoeging) van de punten van het vlak en de paren van een punt op A en een op B . Daarna komt aan de orde de bijectie, die door parallelprojectie de punten van een lijn op die van een andere lijn afbeeldt. Geconstateerd wordt, dat bij een dergelijke projectie de ordening van de punten hetzelfde bewaard hetzij omgekeerd wordt. Nu volgt een definitie van gelijkgerichte en van tegengesteld gerichte evenwijdige lijnstukken, van halfvlak, en een bewijs, dat een lijn een vlak in twee halfvlakken (plus deze lijn) verdeelt. We gaan hierbij als volgt te werk. Gegeven is een

rechte lijn D (fig. 1). We ordenen alle lijnen, die D snijden zo, dat parallelprojectie evenwijdig aan D de ordening van een lijn in die van de andere doet overgaan. We schrijven nu $x < D$, als een punt x op een lijn voorafgaat aan het snijpunt van die lijn met D . De verzameling van de punten, waarvoor $x < D$, en eveneens die, waarvoor $x > D$, heet een halfvlak.

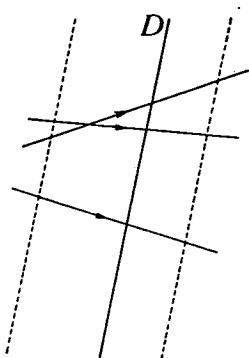


Fig. 1

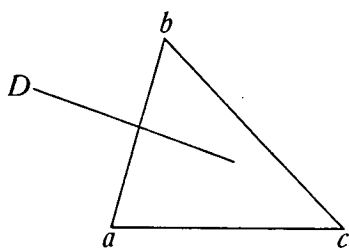


Fig. 2

Nu wordt het theorema van Pasch bewezen: als een lijn door geen enkel hoekpunt van een driehoek gaat en een van de zijden snijdt, dan snijdt de lijn ook een van de beide andere zijden. Het bewijs komt hierop neer, dat aangenomen wordt, dat de lijn D de zijde $]ab[$ snijdt (fig. 2). Dan verdeelt D de verzameling $\pi \setminus D$ (d.i. het verschil van het gehele vlak en de lijn D) in twee halfvlakken. In het ene halfvlak ligt a en in het andere b . Dus liggen hetzij a en c , hetzij b en c in verschillende halfvlakken. D snijdt in het eerste geval $]ac[$ en in het tweede $]bc[$.

Van de laatste drie hoofdstukken over de meetkunde wil ik alleen vertellen, dat de schrijver hier een zeer merkwaardig en doeltreffend bewijsmiddel toepast, nl. de bewijsfilm. Zo geeft hij van de stelling, die zegt dat ekwipollente lijnstukken ekwipollente projecties hebben, een bewijs, dat alleen bestaat uit een opeenvolging van tien figuren, die zo suggestief zijn, dat men de gang van het bewijs eruit gemakkelijker afleest en doorziet dan uit een gebruikelijk bewijs. De leerling krijgt dan als taak de figuren van een tekst te voorzien.

Thans zou ik nog iets willen meedelen over de wijze, waarop Papy de algebra fundeert. Zoals uit de inhoud blijkt, bestaat deze fundering nog alleen uit het invoeren van de gehele getallen en het uitvoeren van enkele hoofdbewerkingen. Begonnen wordt met de

definitie: twee verzamelingen E en F zijn gelijkmachting of hebben hetzelfde cardinaalgetal, als er een bijectie $E \rightarrow F$ bestaat. We schrijven $\# E = \# F$. Daarna wordt bewezen, dat de relatie „gelijkmachting” een ekwivalentierelatie is. Nu kan een begin gemaakt worden met het invoeren van de natuurlijke getallen. Dit geschiedt als volgt.

Alle verzamelingen, die gelijkmachting met de lege verzameling zijn, zijn leeg.

Men noemt nul het cardinaalgetal van de lege verzameling en schrijft $0 = \# \emptyset$.

Alle singletons zijn gelijkmachting.

Men noemt één het cardinaalgetal van de singletons. Men schrijft 1:

Dus: $1 = \# \{0\}$.

Omdat de singletons niet leeg zijn, is $0 \neq 1$. Dus is $\{0, 1\}$ een paar.

Alle paren zijn gelijkmachting. Men noemt twee het cardinaalgetal van de paren. Men schrijft 2.

Dus: $2 = \# \{0, 1\}$.

Nu zet men de „litanie” voort:

$3 = \# \{0, 1, 2\}$,

$4 = \# \{0, 1, 2, 3\}$, enz.

„Tu admettras volontiers que les nombres 0, 1, 2, 3, ... ainsi définis sont distincts deux à deux. Ces nombres sont appelés naturels.”

De verzameling van de natuurlijke getallen schrijven we ω .

Een verzameling heet eindig, als haar cardinaalgetal een natuurlijk getal is, en oneindig, als ze niet eindig is.

Het cardinaalgetal van ω schrijven we δ .

Omdat de afbeelding $\omega \rightarrow 2\omega : x \rightarrow 2x$ een bijectie is, is $\# 2\omega = \# \omega = \delta$. De verzameling ω heeft dus hetzelfde cardinaalgetal als een van zijn echte deelverzamelingen. Ook de verzameling van de paren natuurlijke getallen blijkt het cardinaalgetal δ te hebben.

Nu bewijst de schrijver: als er een bijectieve afbeelding bestaat van een verzameling E op een echte deelverzameling F , dan is er een oneindige serie alle verschillende elementen van E , waarvoor $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$. Men ziet dit in door $a_0 \in E \setminus F$ te kiezen.

En omgekeerd, als er een afbeelding van E in E bestaat, waarbij voor een oneindige serie alle verschillende elementen geldt $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \dots$, dan is er een bijectieve afbeelding van E op een echte deelverzameling F . We zien dit in door uit de gegeven afbeelding een nieuwe af te leiden, waarbij $a_0 \rightarrow a_1$, $a_1 \rightarrow a_2$, ... en waarbij alle overige elementen van E op zichzelf afgebeeld worden.

Deze afbeelding is een bijectie van E op de echte deelverzameling $E \setminus \{a_0\}$.

Uit deze beide stellingen volgt het theorema van Dedekind: een verzameling is oneindig dan en alleen dan, als ze gelijkmachting is met een echte deelverzameling.

Zelfs het theorema van Bernstein, dat zegt, dat uit $F \subset G \subset E$ en $\# F = \# E$ volgt $\# G = \# E$, wordt nu op eenvoudige en begrijpelijke manier bewezen. Kies daartoe een punt $a_0 \in E \setminus G$ en construeer de serie $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$. Doe dit voor alle punten $x_0 \in E \setminus G$. Laat nu al deze punten x_0 weg en de stelling is bewezen. Bedenkt u hierbij a.u.b., dat al deze bewijzen door fraaie gekleurde figuren op zodanige manier toegelicht worden, dat in de meest letterlijke manier een kind ze kan begrijpen.

Ten slotte wordt nog de ordening van cardinaalgetallen gedefinieerd.

In het volgende hoofdstuk wordt de optelling van cardinaalgetallen gedefinieerd op de volgende manier:

als $a = \# A$, $b = \# B$ en $A \cap B = \emptyset$, dan is $a + b = \# (A \cup B)$. Zonder moeite blijkt, dat de optelling commutatief en associatief is en 0 als neutraal element heeft.

Per definitie betekent: $\# A \leq \# B$, dat er een bijectie van A op een deel van B bestaat. Nu volgen enige theorema's, waarin verband gebracht wordt tussen de optelling en de ordening van cardinaalgetallen:

$a \leq c \Leftrightarrow$ er is een cardinaalgetal b , waarvoor $c = a + b$,

$a \leq b$ en $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$.

De bewijzen kan men zich wel voorstellen.

Ten slotte nog een stelling, die alleen voor natuurlijke (cardinaal-) getallen geldt: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

Het produkt van de cardinaalgetallen van A en van B wordt gedefinieerd als het cardinaalgetal van het cartesisch produkt $A \times B$. De vermenigvuldiging heeft 1 als neutraal element en 0 als absorberend element (d.w.z. voor elke a geldt $0 \cdot a = 0$). Verder blijkt de vermenigvuldiging commutatief en associatief te zijn en bovendien distributief t.o.v. de optelling. En verder geldt: $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$. Hierna wordt voor natuurlijke getallen de deelbaarheidsrelatie $|$ gedefinieerd en worden enige eigenschappen ervan afgeleid.

Nu volgt een serie vraagstukken, waarin de leerling voor het eerst kennis maakt met algebraïsch rekenwerk. De schrijfwijze $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, enz. wordt ingevoerd, zonder dat over eigenschappen van machten gesproken wordt. Als typen gemaakte

vraagstukken noem ik:

$(1+x)(1+y)$, $(u+v+w)(x+y+z)$, $ab(1+c)$, $(a+b)^2$,
 $(a+b+c)^2$, $(x+y)^3$, $(x+y+z)^3$, ontbind $ac+ad+ae+bc+bd+be$.

In totaal heb ik 15 niet uitgewerkte opgaven van deze typen aangetroffen (niet 15 nummers, die elk uit enige opgaven bestaan, maar 15 opgaven).

Nadat in een volgend hoofdstuk de duale schrijfwijze van de natuurlijke getallen verklaard is, wordt van deze schrijfwijze gebruik gemaakt om de negatieve gehele getallen in te voeren. We nemen een abacus en plaatsen daarop twee getallen, een in het rood en een in het blauw (zie fig. 3, de rode pionnen zijn door stippen, de blauwe door kruisjes voorgesteld). Elke pion stelt een cijfer 1 voor en elke open plaats een cijfer 0. Op de abacus in fig. 3 staan dus de getallen 1011001 (rood) en 1100101 (blauw). Decimaal zijn dit resp. de getallen 89 en 101.

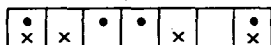


Fig. 3

Nu gaan we het volgende spel spelen. De rode pionnen mogen één vakje naar rechts verschoven worden en worden daarbij verdubbeld. Hetzelfde geldt voor de blauwe pionnen. Als in een vakje een rode en een blauwe pion komen, dan doden deze elkaar, d.w.z. we verwijderen één rode en één blauwe pion, die op hetzelfde veld staan, van de abacus. We krijgen dan de eindsituatie, die weergegeven is in fig. 4.

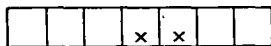


Fig. 4

„L'armée bleue a vaincu!

Si l'on additionnait le nombre défini par les survivants bleus au nombre défini par l'armée rouge initiale, on retrouverait le nombre bleu initial.

Nous dirons que la bataille décrite ci-dessus est

une addition de nombres de signes opposés.

A leur entrée sur le champ de bataille, les jetons bleus définissaient le nombre

1100101 [blauw gedrukt]¹⁾.

Nous signalerons que ce nombre est représenté en bleu en écrivant

$$-1100101$$

Un tel nombre est appelé *négalif*.

Les jetons rouges définissaient initialement le nombre

$$1011001 \text{ [rood gedrukt].}$$

Nous signalerons que ce nombre est représenté en rouge en écrivant

$$+1011001$$

ou, par abréviation

$$1011001$$

De tels nombres sont appelés *positifs*.

Le nombre zéro est le seul pour lequel il est indifférent de le représenter par des pions rouges ou bleus.

$$0 = -0 = +0$$

Zéro est le seul nombre qui est à la fois positif et négatif.

Le résultat de la bataille décrite ci-dessus est le nombre (bleu) que nous noterons

$$-1100$$

c'est la *somme des nombres*

$$-1100101 \text{ et } +1011001."$$

De verzameling van de gehele getallen noteren we Z . De gehele getallen zijn dus de natuurlijke getallen voorzien van een teken.

Als a een willekeurig geheel getal voorstelt, dan verstaan we onder $-a$ het getal, dat uit a ontstaat door het teken (de kleur) ervan te veranderen. Hieruit volgt, dat $-(-a) = a$.

„La bataille $(-a) + (-b)$ n'est autre que la bataille $a + b$, mais les combattants ont échangés les uniformes!" En dus:

$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

Ter vereenvoudiging van de notatie schrijven we ook $-a - b$ i.p.v. $(-a) + (-b)$. Zodat $-(a + b) = -a - b$.

Voor de verzameling Z worden de fundamentele eigenschappen van de optelling bewezen, t.w.

$$a + b = b + a, \quad a + 0 = a, \quad a + (-a) = 0,$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Ze volgen gemakkelijk uit de spelregels van het spel, door middel waarvan de gehele getallen ingevoerd zijn. Uit de geldigheid van deze regels volgt, dat de gehele getallen een groep vormen t.o.v.

¹⁾ In het boek staan grotere getallen.

de optelling, nl. de groep $Z, +$. Deze groep is commutatief. Dit is een van de plaatsen, waar de groepstructuur door de schrijver geconstateerd wordt. Een systematische behandeling van de groepen volgt eerst in het laatste hoofdstuk.

Als verkorte schrijfwijze voor $a + (-b)$ wordt vastgesteld $a - b$. Per definitie is nu $a - b$ het verschil van a en b . En daarmee is meteen de aftrekking afgehandeld.

De vermenigvuldiging wordt zo gedefinieerd, dat het produkt van twee positieve getallen overeenkomt met het produkt van de corresponderende natuurlijke getallen en dat een produkt van teken verandert, als een van de factoren van teken verandert. Commutatieve en associatieve eigenschap zijn dan direct duidelijk, de distributieve eigenschap wordt bewezen. En ten slotte wordt meegedeeld, dat de gehele getallen een ring vormen, nl. de ring $Z, +, \cdot$.

In de vraagstukken vond ik een 17-tal niet uitgewerkte opgaven over algebraïsch rekenwerk van dezelfde aard als vermeld bij de natuurlijke getallen, maar nu voorzien van min-tekens. B.v. $(x - y - 1)^2$.

Verder vinden we nog oplossingen van zeer eenvoudige eerste-graadsvergelijkingen, zoals $x + 7 = -2$. De oplossing geschiedt als volgt. De afbeelding $Z \rightarrow Z : x \rightarrow x + 7$ is een bijectie (fig. 5).

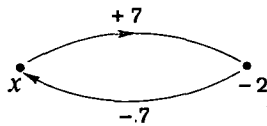


Fig. 5

Er wordt nu gevraagd, welk getal door deze afbeelding op -2 afgebeeld wordt. We stellen de inverse afbeelding op. Deze is $x \rightarrow x - 7$. De inverse beeldt -2 dus af op $-2 - 7 = -9$. „Passer de $x + 7 = -2$ à $x = -2 - 7 = -9$, c'est résoudre l'équation $x + 7 = -2$.”

Hiermee wil ik de bespreking van de inhoud van dit boek beëindigen. Ruim 70 % is nog onbesproken gebleven. Ik heb mij beperkt tot die hoofdstukken, waarin traditionele stof op moderne manier weergegeven werd. De lezer van dit verslag krijgt dan een indruk van de manier, waarop Papy de moderne begrippen hanteert om tot een weergave van traditionele onderwerpen te komen. Uit de aard der zaak krijgt hij daarvan slechts een zeer onvolkomen indruk, maar ik hoop, dat zijn nieuwsgierigheid thans voldoende

geprikkeld is om het boek zelf ter hand te willen nemen.

Tot slot een korte kritische nabeschuwing. Papy begeeft zich met dit boek op een terrein, waar de meningen zich aan het vormen zijn, nl. het terrein van de nieuwe didactiek van de wiskunde. Op dit gebied neemt hij een extreem standpunt in en daar mogen we hem dankbaar voor zijn. Aan voorzichtige compromissen hebben we in het huidige stadium weinig, omdat we er lang niet zo veel van leren als van een radicale poging het bestaande omver te werpen. We zien dan, wat de consequenties zijn, als we lang betreden paden verlaten en het wagen een weg te zoeken in nog ongebaand terrein. Uiteraard zullen de reacties van lezers op dit werk zeer uiteenlopend zijn. De een zal in dit boek een orakel zien, een ander zal zeggen, dat het een afdoende waarschuwing is. Ik geloof, dat beiden het boek onrecht doen.

Laat ik eerst de vraag pogen te beantwoorden, waaruit het extreme bestaat, dat dit boek demonstreert. Totnogtoe waren we gewoon een ouderwets programma te behandelen, waarbij in de eerste plaats vastgesteld werd, welke onderwerpen aan de orde dienden te komen en, niet te vergeten, welke types vraagstukken op examens te verwachten waren. Primair was deze vraagstukken te kunnen maken; secundair tot zekere hoogte de manier waarop dit gebeurde. Anders gezegd: de te behandelen stof was het primaire, de wiskundige taal secundair. Natuurlijk wordt in ons onderwijs wiskundige taal verweven, maar een analyse of een systematische behandeling ervan heeft nauwelijks plaats. In het werk van Papy ziet men juist het tegengestelde. Hij plaatst een bepaalde wiskundige taal in het middelpunt van de belangstelling. Het gehele werk is erop gericht deze taal te leren spreken. Wiskundige onderwerpen, in de traditionele betekenis, worden er nog slechts betrekkelijk weinig ter sprake gebracht, en voorzover dit geschiedt, wordt de behandeling nauwgezet in de aangeleerde taal gevoerd.

Na deze uiteenzetting kan ik mijn poging tot een kritische beschuwing gemakkelijker voortzetten. Ik wil dit echter niet doen in de vorm van het geven van een mening, want daar is m.i. de tijd niet rijp voor. Ik zou liever een paar vragen willen stellen. Is het noodzakelijk deze wiskundige taal zo zeer in het centrum van de belangstelling te plaatsen, dat men aan de taal zelf enige honderden bladzijden wijdt? Is de taal niet slechts hulpmiddel om tot inzicht te komen en wordt dit hulpmiddel hier niet te veel tot doel gepromoveerd? Dreigt het gevaar, dat men de stofkeuze te veel laat bepalen door de mogelijkheid er op fraaie wijze het gebruik van een bepaalde taal door te etaleren? Ik stel deze vragen niet, omdat

ik er een positief antwoord op verlang. Ik weet zeker, dat Papy in staat zal zijn uiteen te zetten, dat ik mij geen zorgen behoef te maken. Ik zal mij over Papy's denken ook heus geen zorgen maken. Maar wel zou ik mij zorgen kunnen maken, als zijn voorbeeld op onvoorzichtige wijze nagevolgd werd. En daarom eindig ik met de opmerking: laat ieder zich verrijken door de lectuur van dit boek, laat hij zich duidelijker ervan bewust worden, welke mogelijkheden er in een nieuwe didactiek schuilen, en laat hij dan een vruchtbare synthese doen ontstaan tussen zijn eigen gezichtspunten en het nieuw verworven inzicht.

UIT DE VERSLAGEN VAN DE COMMISSIES VOOR HET STAATSEXAMEN H.B.S. — 1962 EN 1963

1962

Wiskunde I

h.b.s.-B. Allereerst zou de commissie willen verwijzen naar de verslagen van de laatste jaren. Bij het schriftelijk werk komt het over het algemeen niet meer voor, dat de grafieken van functies puntsgewijze geconstrueerd worden.

Opmerkelijk is, dat zo weinig kandidaten in staat zijn te onderzoeken of er een symmetrie-as is. Dit bleek zowel bij het schriftelijk als bij het mondeling examen. De kandidaten moeten het differentiaalquotiënt en de afgeleide functie kunnen definiëren.

Ter bepaling van uiterste waarden geeft de commissie de voorkeur aan het tekenonderzoek van de eerste afgeleide. Het gebruik van de tweede afgeleide is vaak omslachtig en kan door de examinandi niet verklaard worden.

Wiskunde II

h.b.s.-B. Het viel de commissie voor wiskunde II op, dat dit jaar weer vele kandidaten wel gebruik maakten van, maar geen duidelijke omschrijving konden geven van de meest elementaire definities en begrippen uit de stereometrie en de analytische meetkunde. Wat de stereometrie betreft kunnen de opmerkingen gemaakt in voorgaande verslagen worden herhaald. Aan die verslagen wordt kennelijk te weinig aandacht geschonken door betrokkenen. Vele kandidaten bleken bij de stereometrie nooit van de ontwikkeling van de mantel van een cilinder of kegel in een plat vlak te hebben gehoord. Hierboven kon bovendien voortdurend een verwisseling van de namen cirkelsector en cirkelsegment worden geconstateerd. In het algemeen kan men constateren, dat de planimetrie veelal verwaarloosd wordt, zodat men de eenvoudigste eigenschappen van rechthoekige driehoeken niet meer kende en evenmin de betrekkingen tussen hoeken en bogen in een cirkel. Zelfs de verzameling van de hoekpunten van de rechthoekige driehoeken met dezelfde hypotenusa was dikwijls niet meer terug te vinden. Het is gewenst, dat men het oppervlak van een driehoek kan berekenen, als de lengten van de drie zijden eenvoudige getallen zijn.

De resultaten van de mondelinge examens analytische meetkunde waren dikwijls teleurstellend. Nu dit vak voor het tweede jaar op het staatsexamen h.b.s.-B wordt geëxamineerd vallen enkele markante gebreken op in de kennis van de kandidaten, of beter gezegd gebreken in de voorbereiding voor dit examenvak.