

PAKKEND MATERIAAL TER INLEIDING VAN MEETKUNDIGE GRONDBEGRIPPEN

Bespreking van de principes

door

P. M. VAN HIELE

Het peil van het onderwijs op de middelbare school.

Er is een ontwikkeling in de didactiek van de meetkunde waar te nemen, die er toe leidt, dat de stof voor vele leerlingen steeds vervelender wordt. Deze stelling zal ik U nader toelichten.

Collega Streefkerk heeft zich bij zekere gelegenheid eens als volgt uitgelaten: Het peil van de leerlingen zakt voortdurend en de stof zakt mee. We hebben daar erg om gelachen, in de eerste plaats om de geestigheid van de voorstelling, maar toch ook, omdat wij toen meenden, dat hij er toch wel erg naast was. Vergelijkt men nl. de eindexamens H.B.S. van vroeger met die van nu, dan blijkt duidelijk, dat de wiskunde-examens heel wat zwaarder zijn geworden. Met het peil van de leerstof valt het dus schijnbaar nog al mee, maar aan de andere kant wil ik van Dr Streefkerk best aannemen, dat het peil van de leerlingen belangrijk gedaald is: daar zijn trouwens genoeg oorzaken voor aan te wijzen. Wanneer daartegenover het peil van de eindexamens gestegen is, dan is dit m.i. mogelijk geworden doordat een geraffineerde didactiek (het woord geperfectionneerd gaat mij in dit verband niet goed af) ons in staat heeft gesteld bij deze zwakkere leerlingen betere schijnresultaten te bereiken. Laat ons eens nagaan, hoe wij dit klaar spelen.

De ontwikkeling van de didactiek.

De meest directe wijze om de leerlingen de stellingen der meetkunde te onderwijzen is de volgende: De leraar noemt de stelling, maakt de inhoud en de draagwijdte ervan duidelijk, bewijst de stelling op het bord en laat daarna het bewijs leren. Het hangt daarbij natuurlijk geheel van de persoon van de leraar af, in hoeverre bij het poneren van de stelling en het bewijs ervan de klas daarin een werkzaam aandeel heeft. De gunstige kant van deze werkwijze is, dat zij voor leerlingen, die wiskundig hebben leren denken, of althans wiskundig denken hebben leren waarderen, op zichzelf

pakkend is. Het is ook mijn overtuiging, dat wij, hoe wij ook starten en welke middelen ter animering wij ook aanwenden, naar deze werkwijze zullen moeten streven.

Dit neemt niet weg, dat deze werkwijze voor het begin onoverkomelijke bezwaren heeft: beginnende leerlingen hebben meestal nog geen waardering voor de wiskundige werkwijze. Ook is het moeilijk te verwachten, dat leerlingen de werkwijze op de duur wel zullen waarderen, als ze maar lang genoeg aan deze gang van zaken hebben deelgenomen. Ze wennen eraan, daar is alles mee gezegd.

Om te toetsen, of de theorie werkelijk begrepen is en niet domweg uit het hoofd is geleerd, last men vraagstukken in, die de geleerde theorie in de praktijk brengen. Vooral in het begin zijn er dan veel leerlingen, die pas aan de vraagstukken merken, waar het eigenlijk om gaat. Het is dus niet te verwonderen, dat die leerlingen de vraagstukken als hoofdzaak zien. Het is volkomen begrijpelijk en ook niet direct af te keuren, dat zich daaruit een methode ontwikkeld heeft, waarbij men de leerlingen uitsluitend een vraagstukkenboek in handen geeft, aan de hand waarvan de leraar telkens, wanneer dit noodzakelijk blijkt, de bijbehorende theorie afleidt en die in dictaatvorm laat verwerken. Toch heeft deze methode, hoe goed bedoeld ook, zijn bezwaren. Het gevaar is immers groot, dat de theorie nu wat schraal behandeld wordt en de goede leerling niet voldoende aan zijn trek komt. Bovendien is het van hier maar één stap naar een methode, waarbij de theorie zo slecht en de vraagstukken zo goed behandeld worden, dat de leerlingen deze leren oplossen, *zonder* dat zij de theorie goed begrepen hebben. En dan is de zaak net op zijn kop gezet: het vraagstukken maken is doel geworden en het oorspronkelijke doel, nl. het begrijpen van de theorie is op de achtergrond geraakt.

In reactie hierop heeft zich weer een methode ontwikkeld, waarbij men de leerlingen de theorie zelf in vraagstukvorm laat doorwerken. Om dit voor alle leerlingen mogelijk te maken worden alle moeilijkheden systematisch opgespoord, die zich kunnen voordoen. Men rangschikt de opgaven dan zo, dat de leerlingen steeds maar heel kleine stapjes behoeven te doen, zodat struikelen vrijwel uitgesloten is. Ook deze methode is niet zonder gevaar. In de eerste plaats moet, voordat men op de kleine stapjes overschakelt, aan de leerlingen het totale probleem duidelijk voorgelegd worden en nadat het probleem in kleine stapjes doorgewerkt is, moet weer getoond worden, hoe het probleem tot oplossing gebracht is. Het komt er dus eigenlijk op neer, dat men de leerlingen op de ouderwetse manier de zaak voor doet, maar in plaats dat men het bewijs thuis laat leren, laat

men het bewijs met behulp van aanwijzingen thuis overdoen. Zou men de voor- en de nabespreking achterwege laten, dan loopt men gevaar dat men vervalt in de zogenaamde muizenvalinductie. In de tweede plaats heeft de werkwijze het nadeel, dat zij op de lagere middelmaat afgestemd moet zijn, dat de stapjes voor de goede leerlingen veel te klein zijn, zodat die zich grenzeloos kunnen gaan vervelen en in ieder geval steeds ver beneden hun kracht moeten werken. Voor wie dit gevaar onderkend heeft zijn er natuurlijk middelen genoeg om het te bezweren. Men kan de leidende vragen zo stellen, dat de knappe leerling er meer uit haalt dan de middelmatige, men kan ook van tijd tot tijd de knappe leerling plompverloren voor het totale probleem zetten; tien tegen een, dat hij er uit komt!

Moeten wij ons verzetten tegen een didactiek, die op de lagere middelmaat ingesteld is?

De hiervoor geschetste ontwikkeling heeft dus ten gevolge gehad, dat het de leerling steeds gemakkelijker gemaakt is. Ook wanneer men de zelfwerkzaamheid vooropstelt gaat het gemakkelijk dezelfde kant uit, immers de goede gang van zaken vereist, dat de leerlingen niet te veel vastlopen, hetgeen weer meebrengt een instelling van de cursus op de lagere middelmaat. De resultaten op het eindexamen mogen niet anders dan schijnsuccessen genoemd worden, want we weten immers, hoe onderwerpen, die niet op het examen gevraagd worden, zoals de leer der kegelsneden en de differentiaalrekening, hoe langer hoe meer in de verdrukking komen. Op verschillende uiteenzettingen van de theorie moet in de hogere klassen duchtig besnoeid worden, omdat het gros van de leerlingen deze toch niet begrijpen kan. Dit hindert ook niet, want op het examen wordt deze stof niet gevraagd. Intussen moeten de werkelijk intelligente leerlingen, die wij zo nu en dan nog krijgen, geestelijk verkommeren.

Moeten wij nu niet het volle pond gaan eisen en de leerlingen, die eigenlijk niet op de middelbare school thuis horen radicaal de weg versperren? Ik geloof, dat wij dat niet kunnen, en zo wij dit al konden doen, dan geloof ik, dat wij niet het recht hebben om de middelmatige leerlingen nu tegen te houden. De maatschappij vraagt nu eenmaal veelvuldig het H.B.S.-diploma en als de maatschappij dan al grieven heeft tegen de huidige H.B.S.-opleiding, dan zijn die zeker niet gericht tegen het tekort aan wiskundig inzicht. Het is het tweeslachtige karakter van de H.B.S., dat ons parten speelt. Het is het te grote aantal dergenen, die via de H.B.S. een niet-universitaire richting kiezen, die het peil zo doen dalen, maar zolang er

geen andere school is, die deze functie overneemt, kunnen wij aan de toestand weinig veranderen.

Welk materiaal moeten wij de leerlingen voorzetten om de meetkundige begrippen in te leiden?

De lange aanloop, die ik genomen heb, is nodig om bepaalde misverstanden weg te nemen. Wanneer men met nieuw didactisch materiaal aankomt, dan wil men nogal eens de deugdelijkheid daarvan afmeten aan het gemak, waarmee de leerlingen daar mee zullen werken. Volgens deze maatstaf gemeten zal ons materiaal het er niet al te best afbrengen: het was geenszins onze bedoeling nog dommere kinderen langs een nog gemakkelijker weg naar en door het eindexamen te loodsen. Waar wij vooral op willen letten, is, dat de pientere leerlingen niet te kort komen. Trouwens, men bewijst de zwakke leerlingen evenmin een dienst, als men hen didactisch voortdurend in de watten laat liggen.

Hier volgen dan de voornaamste eisen, waaraan het inleidende materiaal zal moeten voldoen:

1. De eerste eis is wel, dat in een hoofdstuk zo snel mogelijk een bepaalde vaardigheid aangeleerd wordt, zodat de leerling zich bewust wordt, dat het hoofdstuk hem nieuwe gebieden ontsluit. Wanneer men bijvoorbeeld de grondconstructies der meetkunde op de juiste wijze aanbiedt, is de leerling zich van meet af aan bewust, dat hij door het kennen van deze grondconstructies een meester zal worden in het hanteren van passer en liniaal. Van het eerste begin af zal men de leerling zoveel vaardigheid moeten bijbrengen, dat hij bezielde wordt van het verlangen deze mogelijkheden in de praktijk te brengen en nieuwe vaardigheden te leren, die zijn potentieel nog zullen vergroten. Eerst dus een heel eenvoudig wijsje leren spelen en dan pas de vingeroefeningen.

2. Een tweede zeer belangrijke eis is, dat het hoofdstuk zo wordt opgesteld, dat de leerling de behoefte gevoelt zijn woordenschat uit te breiden. Hij ontmoet nieuwe begrippen, wil daarover spreken en ziet zich daarom genooddaakt hun namen te leren. Verschillende problemen uit het hoofdstuk maken een nadere analyse van de begrippen nodig: de begrippen worden gedefinieerd (zonder dat nog het woord definitie gebruikt hoeft te worden). In enkele gevallen zal de leerling moeten constateren dat een begrip in de meetkunde in een andere betekenis gebruikt wordt dan in het dagelijkse spraakgebruik. Aan de tweede eis is gemakkelijk te voldoen en men zal dan waarnemen, dat de leerling zich spoedig en zeer ongedwongen aanpast aan het wiskundige taalgebruik.

3. De hoofdstukken van het begin moeten verschillende entrée's tot de meetkunde bevatten. Aan deze eis is ook vrij gemakkelijk te voldoen. Een hoofdstuk dat heel duidelijk een eenheid vormt kan tegelijkertijd een entrée zijn tot het construeren, tot het begrip oppervlakte en het begrip inhoud. De leerling, die zo'n hoofdstuk heeft doorgewerkt kan dus geanimeerd zijn om zich in de genoemde onderwerpen verder te verdiepen, omdat hij ondervonden heeft, dat daarin voor hem belangrijke problemen verscholen liggen.

4. De hoofdstukken van het begin moeten ook een ongedwongen onderzoek doen naar de kennis, die wij van de lagere school bekend veronderstellen. In aanmerking daarvoor komen vooral het oppervlaktebegrip, de breuken en de verhoudingen. Ervaringen van de laatste jaren hebben ons geleerd, dat van de drie genoemde onderwerpen de leerlingen vrijwel uitsluitend schijnkennis meebrengen. Het is zelfs de vraag, of wij er niet beter aan zouden doen te handelen, of de leerlingen helemaal geen begrip van deze drie onderwerpen hebben: dat is veel veiliger en niet zo ver bezijden de waarheid.

5. Wil het aangeboden materiaal goed tot zijn recht komen, dan moet men er vooral voor zorgen, dat ieder hoofdstuk een duidelijke climax heeft. Deze kan er in bestaan, dat de verworven vaardigheden op het eind een soort meesterstuk opleveren. Het kan ook zijn, dat het hoofdstuk met een puzzle opent en dat het slot de volledige oplossing daarvan brengt.

6. Daar de beginhoofdstukken en natuurlijk ook vele volgende de ingang moeten vormen voor een *aantal* andere hoofdstukken, moet er aan het einde van zo'n hoofdstuk duidelijk gerecapituleerd worden, wat er in behandeld is en wat onthouden moet worden.

7. Ten slotte geef ik nog een aantal middelen, die kunnen dienen om de leerstof voor de leerlingen aantrekkelijk te maken.

A. De titel. Daar moet men niet te licht over denken. Een hoofdstuk, dat de geheimzinnige naam van ganglamp draagt, heeft al direct een heel stuk voor op een hoofdstuk dat de voor de leerlingen weinig zeggende naam van symmetrie heeft. Men moet dus de titels met zorg kiezen en zo nu en dan een hoofdstuk herdopen, waarvan de titel te weinig aantrekkelijk is gebleken.

B. Ruimtelijke betrekkingen en verhoudingen boeien de leerlingen over het algemeen zeer. En er is ruimtelijk materiaal te over, waaraan de leerlingen hun juist geleerde grondbegrippen kunnen toetsen.

C. Een hoofdstuk kan interessant gevonden worden doordat de leerlingen er het werk van anderen in leren waarderen. Zoals bij-

voorbeeld de stelling van Pythagoras, een middel om iets te construeren of om iets te berekenen. Ten slotte moeten we ze zover zien op te voeden, dat zij hun stuwkracht putten uit de liefhebberij in het bewijzen en de hele wiskundige stijl.

D. Men kan leerlingen animeren door hen het werk te tonen dat door andere leerlingen vervaardigd is. Zoals bijvoorbeeld modellen. In vele gevallen zullen zij dan de lust gevoelen ook zo iets te gaan maken.

E. Een andere stimulans wordt gevonden door de leerlingen in kennis te brengen met nieuwe figuren en de namen van die figuren.

F. Het hoofdstuk levert resultaten, die de leerlingen verrassen. Het is dan zaak de spanning er zo in te houden, dat zij ook de verklaringen willen weten.

G. Een nuttige en zeer pakkende bezigheid is ook het herkennen van figuren en relaties tussen figuren. Zoals bijvoorbeeld gelijkvormige en congruente voorwerpen in de huishouding, rechthoekige driehoeken, ruiten, enz., die gevormd worden door de hoekpunten van een regelmatige twaalfhoek met zijn middelpunt.

H. Even boeiend is voor de leerlingen de omgekeerde bewerking van de zo juist genoemde: het benoemen van gegeven figuren en gegeven relaties.

I. Boeiend is voor de leerlingen natuurlijk ook veel van de traditionele oefenstof. Alle oefenstof, waarvan de aantrekkelijkheid in twijfel getrokken kan worden, kunnen we gevoegelijk weglaten: we hebben nog keus genoeg.

J. Voor vele leerlingen zal de stof aantrekkelijker worden, als men hen laat beleven, hoe deze in praktische toepassing gebracht kan worden. Hoe bijvoorbeeld ruimtelijke afbeeldingsmethoden ook een beginner in staat kunnen stellen zich een vrij goed beeld te vormen van een nog te bouwen huis.

Ik hoop, dat ik erin geslaagd ben U duidelijk te maken, in welk licht U de poging om het werk aantrekkelijker te maken, moet bezien. Zij is er dus zeker niet op gericht om de opleiding gemakkelijker te maken en nog dommer kinderen tot het eindexamen te brengen. De weg naar het eindexamen staat er helemaal los van. Het is integendeel onze wens, dat de leerlingen wat meer van wiskunde zullen begrijpen dan soms wel het geval is en wij vrezen dat een gladde weg naar het eindexamen dit begrijpen wel eens zou kunnen bemoeilijken. Noodzakelijk is volgens ons, dat men de kinderen liefde voor de wiskunde bijbrengt. Daarin kan men slagen, als men hen eerst de vreugde van het maken van mooie dingen met behulp van

wiskunde laat beleven en hen er dan gaandeweg toe brengt ook de beknoptheid en duidelijkheid van de wiskundige bewijsvoering te waarderen. Pakt men de zaken met beleid en zonder overhaasting aan, dan zal men zien, hoe de leerlingen ten slotte ook enthousiast worden voor analyse en discussie. En vooral: laten wij de zaak zo aanpakken, dat er voor pientere leerlingen nog wat te kluiven overblijft. Ook al is hun aantal relatief klein, zij vormen niet het onbelangrijkste deel van de klas.

Bespreking van het materiaal

door

MEVR. VAN HIELE-GELDOLF.

Ik heb gemeend, dat het het beste is, een paar werkstukken in hun geheel door te nemen. De kinderen krijgen daarvan in het eerste jaar tien door te werken

Het eerste werkstuk, dat ik zal bespreken is *Het ruitentwaalfvlak*.

Vele leerlingen zijn daarmee begonnen, nadat ik eerst een inleidende les gegeven had. Deze les was niet alleen geschikt voor het ruitentwaalfvlak, maar ook voor andere inleidende werkstukken. Deze les verliep ongeveer als volgt:

Met armzwaaien werd getoond, wat men onder een gestrekte hoek verstaat. Deze werd dus niet gedefinieerd. Daarna de rechte hoek, dus de helft van de gestrekte. Opgenoemd werd, dat deze ook in de tekendriehoek voorkomt. Vervolgens werd een stukje papier getoond, waarvan de randen onregelmatig waren en gevraagd daarvan een rechte hoek te vouwen. Bij de eerste vouw werd het begrip rechte lijn ter sprake gebracht, bij de tweede kwam de rechte hoek. Er werd gesproken over de benen van een hoek. Opgenoemd werd, dat men gewoonlijk rechte lijnen trekt met behulp van een liniaal en rechte hoeken maakt met behulp van een tekendriehoek. Dat alle rechte hoeken gelijk zijn, wordt door de leerlingen vanzelfsprekend geacht. Vervolgens werd het begrip lijnstuk ingevoerd en gevraagd, hoe men kan constateren, dat twee lijnstukken even lang zijn. Zo komen we op passen, langs elkaar leggen, meetlat gebruiken, passer gebruiken. Op het bord werd aangetoond, hoe men een lijnstuk kan overbrengen. Vier potloden van gelijke lengte werden uitgezocht en gevraagd daarvan een vierhoek te leggen, die geen vierkant is. Gevraagd werd, of de leerlingen deze figuur meer gezien hadden, of ze de naam kenden. Er werd gewezen op het ver-

schil van de figuur met de hun bekende vensterruit. Hier bleek dus de noodzaak te definiëren, wat men in de meetkunde onder ruit verstaat. Van het opgevouwen papier werd daarna ook een ruit gemaakt. Nadat de figuur opengevouwen was werden de diagonalen aangewezen. Hierna konden de leerlingen aan hun werkstuk beginnen.

Blad 1 van het ruitentwaalfvlak begint met de rechte hoek. Gevraagd wordt door middel van de tekendriehoek en door middel van vouwen rechte hoeken te maken.

Op blad 2 wordt gevraagd een lijnstuk met de passer over te brengen.

Op blad 3 wordt gevraagd een vierkant te tekenen met behulp van tekendriehoek en passer. De naam diagonaal wordt ingevoerd. „Hoeveel diagonalen heeft een vierkant? Zijn ze even lang? Dit kan door meting worden vastgesteld”.

Blad 4. Om te onderzoeken, of het verschil tussen vierkant en rechthoek voldoende bekend is, wordt gevraagd, of dit blad een vierkant is. Het blad is rechthoekig, het is aan de achterkant verdeeld in drie rijen van vijf vierkanten, elk met een zijde van 5 cm. De begrippen rechthoek en vierkant worden hier niet gedefinieerd, er wordt alleen gevraagd, of de leerlingen het verschil kennen. „Hoeveel vierkanten, waarvan de zijde 5 cm is, bevat de rechthoek? Teken een rechthoek, waarvan de lengte en de breedte resp. 4 en 3 cm zijn. Hoeveel vierkantjes, waarvan de zijde 1 cm is, kun je daarop plakken, zodat de rechthoek precies eenmaal overdekt is? Men noemt een vierkantje, waarvan de zijde 1 cm is, vierkante centimeter. Het boven gevondene kan als volgt onder woorden gebracht worden: Een rechthoek van 4 bij 3 cm heeft een oppervlakte van 12 cm^2 ”.

Blad 5 handelt over de ruit. Hier wordt getoetst, of het lesje, dat over de ruit handelde goed begrepen is. Gevraagd wordt daarna een ruit te tekenen, waarvan de diagonalen 8 en 5 cm zijn. „Aan de achterkant van het blad vind je een enveloppe, waarin vier driehoeken, die je kunt samenvoegen tot een rechthoek van 4 bij 5 cm. Doe dit. Ook kun je er de ruit, die je in je schrift hebt getekend, mee leggen. Hoe groot is dus de oppervlakte van die ruit?” Hiermee is aangetoond, dat men ook oppervlakten van figuren kan bepalen, die geen rechthoeken zijn.

Blad 6 heet kubus. De leerlingen krijgen een model van een kubus in handen. Gevraagd wordt door hoeveel vierkanten hij begrensd wordt en hoeveel cm^2 er nodig zouden zijn om de kubus geheel te beplakken. (De ribbe is 4 cm). Vervolgens wordt gevraagd zelf een

kubus te maken met een ribbe van 4 cm. Het netwerk is voorge-tekend. De leerlingen krijgen de beschikking over een groot aantal kubusjes met een ribbe van 1 cm. Van deze kubusjes moeten zij een kubus maken met een ribbe van 3 cm. Op deze wijze komen zij tot het inhoudsbegrip. Deze opgaaf is gebleken *niet* overbodig te zijn.

Blad 7 heet prisma. „Maak van tekenpapier een rechthoek lang 5,7 cm en breed 4 cm. Deze past in de kubus, die je in 6 gemaakt hebt. De kubus wordt door het tussenschot in twee gelijke stukken verdeeld. Ieder deel wordt prisma genoemd”. Het netwerk van zo'n prisma wordt gegeven, er wordt gevraagd dit na te tekenen en er een prisma van te plakken. „Hoeveel cm^3 is de inhoud van dit prisma”?

Blad 8 heet viervlak. „Men noemt een kubus ook wel zesvlak. Waarom? Er bestaat ook een viervlak. Het wordt door vier driehoeken begrensd”. Gevraagd wordt een driehoek te tekenen, waarvan de zijden 5,7 cm zijn. Dit gebeurt met behulp van passer en liniaal naar een gegeven voorbeeld. „Construeer een figuur, die kan worden opgevouwen tot een viervlak, waarvan de ribben 5,7 cm zijn”. Een model wordt pas gegeven, als de leerlingen er niet in

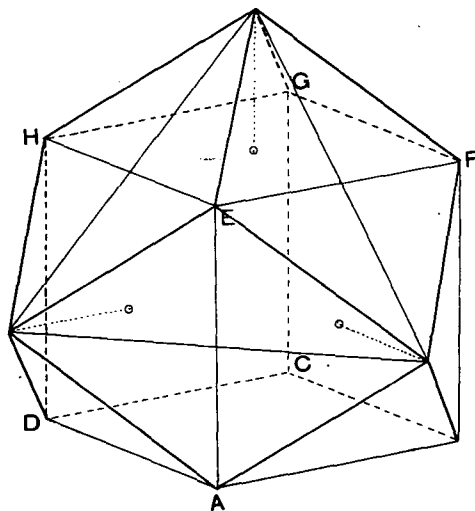


Fig. 1

slagen het netwerk te construeren. „Het viervlak kan zo geplaatst worden in de kubus van no 7, dat het deksel dicht kan. Probeer het eens”.

Blad 9 heet pyramide. De leerlingen krijgen enige modellen van pyramiden in handen. Deze zijn niet regelmatig. Op het blad staat een netwerk getekend van een regelmatige vierzijdige pyramide,

waarvan de grondribben 4 cm zijn en de opstaande ribben $3\frac{1}{2}$ cm. De leerlingen moeten dit natekenen, uitknippen en dichtplakken. Gevraagd wordt, hoeveel van deze pyramiden er nodig zijn om er een kubus van te bouwen. Dit zijn er zes en om dit te kunnen onderzoeken, werken de leerlingen in groepjes samen. „Hoeveel cm^3 is de inhoud van zo'n pyramide? Neem nu de kubus van no 6, plak het bovenvlak dicht en plak vervolgens op ieder zijvlak zo'n pyramide. Het lichaam, dat zo ontstaat, noemt men wel ruitentwaalfvlak. Kun je die naam verklaren?” Daarna wordt de leerlingen een model van een ruitentwaalfvlak getoond. Nu komt de climax. Gevraagd wordt het netwerk van het ruitentwaalfvlak zelf te maken. Weinig leerlingen slagen er in een sluitend netwerk te krijgen. De meeste moeten een of twee ruiten afknippen en ergens anders toevoegen. De probleemstelling is duidelijk. De leerlingen tonen spontane bewondering voor diegenen, aan wie het gelukt is het model uit één stuk te vervaardigen. De andere leerlingen zijn toch bevredigd, omdat zij ondanks gemaakte fouten toch een behoorlijk geheel krijgen. Spelenderwijze krijgen ze een grote vaardigheid in het hanteren van de passer. Ten slotte wordt de inhoud van het ruitentwaalfvlak gevraagd.

Blad 10 geeft de samenvatting. „Leer het volgende: *a.* Een vierhoek met vier gelijke zijden noemt men ruit. *b.* Een ruit kan langs zijn diagonalen dubbelgevouwen worden. *c.* In een ruit vormen de diagonalen rechte hoeken met elkaar. Beantwoord de volgende vragen: *d.* Op hoeveel manieren kan men een vierkant dubbel vouwen? *e.* Kun je een rechthoek ook dubbel vouwen om een diagonaal? *f.* Kun je een rechthoek op een andere manier dubbel vouwen?”

De namen van de veelvlakken worden als volgt gerepeteerd: Uit een doos met modellen moeten de pyramiden opgezocht worden. Daarna de prisma's. Er wordt alleen onthouden, dat in de pyramiden de opstaande ribben in één punt samenkomen en dat deze bij de prisma's evenwijdig zijn. In de doos komen prisma's voor, die zij nog niet eerder tegengekomen zijn en andere modellen, die noch pyramide noch prisma zijn. De meeste leerlingen rekenen de kubus niet onder de prisma's. Ik vraag dan, of hij er een is. Sommige leerlingen antwoorden: Neen, want het is een kubus. Andere raken aan het twijfelen. Het viervlak wordt wel steeds tot de pyramiden gerekend en dit kan de schakel worden, die het mogelijk maakt de kubus ook tot de prisma's te doen rekenen. Er wordt op gewezen, dat kubus en viervlak bevoorrechte lichamen zijn, omdat zij er steeds eender uitzien, op welk zijvlak men ze ook neerlegt. Gevraagd wordt, of er in de doos nog meer van zulke lichamen voor-

komen. Dit zijn dan het regelmatige achthoek en het regelmatige twintigvlak. (Een regelmatig twaalfvlak komt er niet in voor).

Als tweede te bespreken werkstuk neem ik er een, dat op een hoger niveau ligt. Het werkstuk heet *Vergroten en Verkleinen*.

Aangenomen wordt, dat de leerlingen het niveau bereikt hebben, waarop ze meetkundige figuren kunnen herkennen en onderscheiden, dat ze de eigenschappen van deze figuren kennen en dat zij met deze eigenschappen kunnen opereren. Met het werkstuk beogen wij het bereiken van een hoger niveau, nl. het kunnen opereren met relaties tussen figuren. De beide eerste bladen doen een onderzoek, of het eerste niveau bereikt is.

Blad 1 bevat een aantal figuren, waarvan de leerlingen de naam moeten geven; figuren, die in verschillende standen voorkomen.

Op blad 2 wordt van de leerlingen verlangd zelf een aantal figuren te construeren, waarvan de maten worden opgegeven. Er is voor gezorgd, dat de figuren ten dele congruent en ten dele gelijkvormig zijn met die van blad 1 of met elkaar. Onder de figuren komen driehoeken, vierhoeken, regelmatige zeshoeken, hoeken en cirkels voor.

Op blad 3 gaan we deze figuren met elkaar vergelijken. We knopen aan bij een bekende relatie: de schaal op de landkaart,



Fig. 2

vergrotingen van foto's. „Van de afgebeelde gevels zegt men, dat zij dezelfde vorm hebben: de ene is een vergroting van de andere". Verder worden twee kaartjes van Denemarken gegeven; de schaal van het ene kaartje is vermeld: nl. 1 : 6000000. Gevraagd wordt hemelsbreed de afstand van Esbjerg naar Aarhus in km te bepalen door middel van meting op het kaartje. De schaal van het tweede kaartje is niet vermeld. Gevraagd wordt deze te berekenen met behulp van de nu bekende afstand van Esbjerg tot Aarhus. Gevraagd

wordt verder door meting de gelijkvormigheidsfactor van de gevels te berekenen. Van de figuren van blad 1 en blad 2 te zamen wordt gevraagd uit te maken, welke er gelijkvormig zijn. Voorlopig wordt het aan de leerlingen overgelaten, of zij congruente figuren op wenssen te vatten als gelijkvormige. Steeds wordt gevraagd naar de gelijkvormigheidsfactor.

Op blad 4 wordt gevraagd figuren op te noemen, die altijd gelijkvormig zijn. Daarna, of alle rechthoeken gelijkvormig zijn. Hier springt een verschil met het spraakgebruik naar voren: In de wetenschap zijn rechthoeken niet altijd gelijkvormig, in het spraakgebruik hebben alle rechthoekige tafels dezelfde vorm, doordat zij een tegenstelling met de ronde tafels vormen. Het blijkt hier dus, dat het begrip gelijkvormig nader vastgelegd dient te worden. Om te onderzoeken, of twee rechthoeken, bv. een blad papier en een tafelblad gelijkvormig zijn, moet er een meting verricht worden. Ook naar ruimtefiguren wordt gevraagd, waarbij een doos met cartonmodellen ter beschikking staat. „Zijn twee bollen gelijkvormig? Zijn twee kegels gelijkvormig?” Bij de laatste vraag wijst men de leerlingen op spitse en stompe torens. „Van twee gelijkvormige cilindervormen is bekend, dat de stralen van de grondcirkels resp. 2 en 8 cm zijn. De kleinste cilinder is 6 cm hoog. Bereken de straal van de andere cilinder. Teken een ruit, die gelijkvormig is met de ruit, die in fig. 1 van blad 1 getekend is”. Ook wordt gevraagd een meer ingewikkelde figuur, waarin lijnstukken en cirkeldelen voorkomen te vergroten. Gevraagd wordt gelijkvormige voorwerpen aan te wijzen in het werkklokaal. Nu beschouwen de leerlingen congruente banken en tafels als gelijkvormig. Op dat moment wordt dus de congruentie opgevat als een bijzonder geval van gelijkvormigheid.

Blad 5 handelt over congruentie. Uit de figuren van blad 1 en 2 worden er twee gehaald, die elkaar kunnen bedekken. In dat geval noemt men ze congruent. Gevraagd wordt de gelijkvormigheidsfactor van twee congruente figuren. „Zoek uit de figuren van blad 1 en 2 die, welke congruent zijn. Zijn er figuren, die altijd congruent zijn?” Op blad 1 en 2 kunnen de leerlingen er enkele vinden. „Teken een ruit, die congruent is met die van fig. d van blad 1. Hoe kun je nagaan, dat driehoeken, die op blad 1 getekend zijn, congruent zijn? Wat kun je zeggen van de hoeken van twee congruente figuren? Wat van de hoeken van gelijkvormige figuren?” Er wordt ook gewezen op figuren, die wel dezelfde oppervlakte hebben, maar die niet congruent zijn. Gevraagd wordt van vier congruente rechthoekige driehoeken een ruit te leggen en ook twee verschillende rechthoeken. „Deze figuren hebben dezelfde oppervlakte, maar ze zijn niet congruent. Teken een andere ruit, die dezelfde oppervlakte heeft

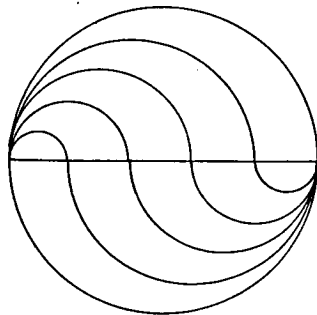


Fig. 3

als de ruit, die je zo pas gelegd hebt". Getekend wordt een vierkant met zijn diagonalen. Gevraagd wordt een stel van vier driehoeken in die figuur aan te wijzen, die congruent zijn. Daarna nog een tweede stel. Daarna, of de leerlingen ook gelijkvormige driehoeken kunnen aanwijzen.

Blad 6. In figuur 3 is een cirkel door een aantal halve cirkels verdeeld in vijf delen. „Zijn er congruente delen bij? Zijn er gelijkvormige delen bij? Teken deze figuur twee maal zo groot in je schrift. De delen van deze figuur zijn niet alle congruent, maar ze hebben wel alle dezelfde oppervlakte en dezelfde omtrek”.

Op blad 7 wordt de relatie gelijkvormigheid en congruentie nader bestudeerd: we bekijken in dat verband het aantal gegevens, dat nodig is om een figuur te bepalen.

„We vestigen de aandacht op de drie volgende uitspraken:

1. Alle vierkanten zijn gelijkvormig.
2. Met één gegeven is een vierkant te construeren.
3. Twee vierkanten zijn congruent, als ze een zijde (of een diagonaal) gelijk hebben.

Schrijf zelf soortgelijke uitspraken op voor de meetkundige figuur: de cirkel.

Voor welke bijzondere driehoeken kun je soortgelijke uitspraken doen?” (Op blad 1 komen een rechthoekige gelijkbenige driehoek en een gelijkzijdige driehoek voor).

Vervolgens worden figuren beschouwd, die door twee gegevens bepaald zijn. „Wanneer zijn twee rechthoeken gelijkvormig? Hoeveel gegevens zijn er nodig om een rechthoek te construeren? Men kan zeggen: Twee rechthoeken zijn congruent, als twee verschillende zijden van de ene rechthoek gelijk zijn aan twee zijden van de andere. Zijn alle ruiten gelijkvormig? Hoeveel gegevens zijn er nodig om een ruit te construeren? Welke gegevens zou men kunnen kiezen?

Men kan zeggen: Twee ruiten zijn congruent, als zij gelijk hebben een zijde en een hoek. Ook als zij de diagonalen gelijk hebben. Eveneens, als zij een zijde en een diagonaal gelijk hebben.

Schrijf zelf een soortgelijk verhaal over de gelijkbenige driehoek”.

In alle bovenstaande gevallen wordt ook gevraagd de figuren te construeren met strokenmateriaal.

Blad 9 handelt over de congruentie van driehoeken.

„Hoeveel gegevens zijn er nodig om een driehoek te construeren?”

We beperken ons tot de zijden en de hoeken. Op blad 2 hebben de leerlingen driehoeken getekend, waarvan de drie zijden gegeven waren of één zijde en de beide aanliggende hoeken. Uit de eenduidigheid van de constructie wordt tot de congruentie der driehoeken besloten.

„Wij schrijven het resultaat als volgt op:

Twee driehoeken zijn congruent als zij gelijk hebben een zijde en de beide hoeken, die aan die zijde grenzen. Kan men een driehoek nog op andere wijze construeren dan door een zijde en de hoeken aan die zijde te kiezen? Tracht nog twee gevallen te vinden. Schrijf

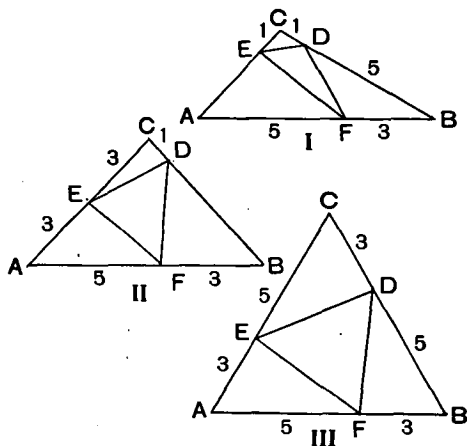


Fig. 4. Gelieve te lezen in tekening I lijn
AE = 3 en in tekening II lijn BD = 5.

het resultaat op, zoals boven is voorgedaan". De gevallen, die de leerlingen kunnen vinden zijn alleen: zzz en zhz. Deze afkortingen worden nu nog niet gegeven, evenmin als de gebruikelijke wijze van opschrijven. Over andere gevallen van congruentie wordt niet gesproken. Deze drie gevallen moeten goed geleerd worden. Dat door drie gegevens een driehoek vastligt wordt nader beklemtoond door een aantal constructies, waarin ook hoogtelijnen, zwaartelijnen en bisectrices voorkomen.

Op blad 10 komen enkele toepassingen van de congruentie ter sprake. Op het blad zijn de bovenstaande figuren getekend. De maten zijn hierboven in cm aangegeven. „In fig. II zijn twee van de drie zijden van $\triangle DEF$ gelijk. Dit is door meten na te gaan. Tracht door een *redenering* de gelijkheid van die zijden aan te tonen". Wanneer de leerlingen alleen wijzen op de getallen 3 en 5, die tweemaal in de driehoeken voorkomen, dan toont fig. I aan, dat dit onvoldoende is. In fig. III moet aangetoond worden, dat van $\triangle DEF$ alle drie zijden gelijk zijn.

Ik merk nog even op, dat wij de gelijkvormigheid niet eerst bestuderen aan driehoeken, maar aan vierhoeken. De gelijkvormige