

EEN EN ANDER OVER DE DEFINITIES

DOOR

T. EHRENFEST—AFANASSJEW.

1. Menige leeraar zal wel het volgende ondervonden hebben: men moet de leerlingen in een nieuw hoofdstuk van de exacte wetenschappen introduceeren; er valt allereerst een reeks fundamentele begrippen te verklaren, en natuurlijk wil men dit zoo precies mogelijk doen.

Spoedig bemerkt men, dat men zich met geen van de, in de schoolboeken voorkomende, definities vereenigen kan: alle laten zij iets te wenschen over, alle beroepen zij zich op iets, dat ongedefinieerd blijft.

„De *massa* van een lichaam is de hoeveelheid stof die het bevat” — zoo iets zou misschien een eenigszins bepaalde inhoud hebben, als alle lichamen in elk opzicht homogeen waren; men zou dan toegeven, dat een tweemaal zoo groot lichaam ook tweemaal zooveel „hoeveelheid stof” bevatte. Maar wat wordt met „gelijke hoeveelheid stof” in twee heterogene lichamen bedoeld?

Als men zich op de vergelijking „kracht is gelijk massa maal versnelling” beroepen wil, moet men de begrippen „versnelling” en „kracht” verklaren.

„Een *rechte* is de kortste afstand tusschen twee punten” — weet men dan reeds, hoe men afstanden langs willekeurige lijnen met elkaar moet vergelijken? Wat is een „afstand”?

„*Congruente figuren* zijn figuren, die van elkaar niet te onderscheiden zijn” (een dergelijke definitie heb ik werkelijk in een van de laatst uitgekomen geometrieboeken gevonden) — hoe moet men echter twee figuren überhaupt met elkaar vergelijken?

Als men zelf probeert het beter te doen, begrijpt men eerst recht, hoe hopeloos de zaak is. Inderdaad: men wil een goede definitie geven van de vorm: „een A is een B, die de eigenschap bezit een C

te zijn". Maar dan moeten klaarblijkelijk eerst de begrippen B en C gedefinieerd zijn, hetgeen aantoonst dat het een zaak zonder eind is.

Men ziet in, dat men er principieel op aangewezen is om een — zij het ook heel kleine — groep van begrippen als „*fundamenteele* begrippen" aan te nemen, die men niet volgens het bovenstaande onderverdeelings-schema kan definiëren; alle andere kunnen dan tot deze fundamenteele begrippen teruggebracht worden; dat zijn dan „*afgeleide*" begrippen.

Hoe moeten echter de grondbegrippen zelf geïntroduceerd worden? — De laatste tijd beginnen wel de quasi-definities van de boven-geciteerde soort uit de school- en leerboeken te verdwijnen. In menig boek staat er dan ongeveer dit: „wat A, B, C, zijn, weet iedereen uit eigen ervaring". Bijgevolg schijnt de geheele strenge wetenschap, waarin men (zooals b.v. in de geometrie) terwille van de grootst mogelijke strengheid zelfs volkomen evidente stellingen bewijst, opgebouwd te zijn op het persoonlijke ongecontroleerde inzicht van den enkeling, dat hij uit zijn persoonlijke ervaring gewonnen heeft.

Is dat niet eenigszins riskant? Bestaan er twee mensen, die ieder woord, dat zij gebruiken, — zonder een speciale afspraak — precies in dezelfde beteekenis gebruiken?

2. Twee zeer verschillende vragen zijn er: *a.* hoe moet men bereiken, dat een nieuw woord voor een beginneling een voldoende bepaalde en levende inhoud krijgt, opdat hij het bij de bestudeering van het nieuwe vak juist kan gebruiken, en: *b.* wat omvat het betreffende begrip bij nadere beschouwing voor dengene, die op het gegeven gebied reeds thuis is en nu eens alles, wat hij daarover weet, in een helder, logisch, precies beeld wil samenvatten.

Wat hier volgt, heeft eigenlijk betrekking op de tweede vraag; toch geloof ik, dat het daarin verkregen inzicht ook bij het onder-richt, zij het ook indirect, van dienst kan zijn.

Zelfs onder de eminente mathematici zijn er, die het streven naar de logische strengheid in de uitbeelding van hun vak zeer weinig apprecieeren, daar zij het voor een bezigheid aanzien, die onbelangrijk is voor de zakelijke uitbreiding van ons weten, voor een soort naleven van de „goede manieren", voor zoo iets als het voorschrift om visch zonder mes en asperges met de vingers te eten.

Een dergelijk gedrag kan wel door de traditioneele manier van

schoolonderricht gesuggereerd zijn: aan de ééne kant wordt er in de geometrie wél de nadruk op logische strengheid gelegd en dát op een oogenblik, dat de leerlingen de juiste motieven daarvoor niet kunnen meevoelen; aan de andere kant worden de veel gecompliceerder problemen van de physica en van de overige vakken zonder de minste logische scrupules behandeld, en nooit leidt dit tot eenige merkbare katastrophe.

Ondertusschen is een afwijzende beoordeeling van de logische onderzoekingen zeer eenzijdig. De analyse van de grondslagen van de geometrie helpt inderdaad niet mee tot het ontdekken van nieuwe stellingen, maar het is niet waar, dat zij niets tot de uitbreiding van onze kennis zou hebben bijgedragen.

Tot onze *kennis der natuur* heeft zij wel dit bijgedragen, dat wij thans andere mogelijkheden zien om ons de ruimte te denken, dan door de geometrie van *Euclides* voorgeschreven wordt, en dit effent de weg voor de nieuwe mechanische en kosmologische opvattingen, die door *Einstein's* gravitatie-theorie zijn ingevoerd.

Onze *methodologische* inzichten heeft zij in de eerste plaats in dit opzicht verder gebracht, dat nu het begrip „axioma” gepreciseerd is; dat het probleem van het bewijzen van de logische onafhankelijkheid van de axioma's op de voorgrond is geplaatst en dat de methoden om dit op te lossen uitgewerkt zijn. Men vindt thans in de geometrie een voorbeeld bij uitnemendheid van een overzichtelijke uiteenzetting van een gebied van onderzoek, waarin iedere volgende hypothese, die uit het voorgaande niet logisch afgeleid kan worden, duidelijk herkend wordt, en de vertrouwdheid met een dergelijke manier van voorstellen is werkelijk ook op ieder ander gebied niet overbodig, in de eerste plaats voor iemand, die op de hoogte wil komen van een nieuwe gecompliceerde theorie.

Tenslotte hangen ook de *kennistheoretische* vragen ten nauwste samen met de logische analyse van de grondslagen.

Naar het mij toeschijnt hoeven dergelijke onderzoekingen niet voor ieder *scheppend* wetenschappelijk mensch van directe toepassing te zijn, de *leeraar* in het betreffende vak mag deze kennis echter in geen geval ontberen. Hij moet weten, welke omstandigheden de aanleiding zijn geweest voor die onderzoekingen en wat hun uitkomsten zijn. Dan zou hij kunnen overwegen of en wanneer de motieven van de hierop betrekking hebbende probleem-stelling aan de leerlingen onder oogen gebracht kunnen worden; dan zou hij

met grootere zekerheid de uiteenzetting van de stof in de schoolboeken kunnen beoordeelen en de schijnheilige strengheid van de ware kunnen onderscheiden. Maar tevens zou hem de logische — zoo formeele en zoo „geleerde” — analyse menige wenk geven voor het begrijpen van de psychologische moeilijkheden van de leerlingen, want meestal struikelen de leerlingen juist op dat punt, waar de zaak den leeraar zelf weliswaar bekend is, maar logisch niet geheel duidelijk.

Daarom schijnt het mij niet overbodig te zijn, als ik hier het hierboven opgeworpen probleem van de definitie van de grondbegrippen wat nader bespreek, en wel aan de hand van de geometrie.

3. Omdat de definities voor de uitbreiding zelf van de zakelijke geometrische kennis onbeduidend waren, werd haar herziening in de geometrie steeds uitgesteld, hoewel men de ontoereikendheid van de definities bij Euclides zelf reeds lang bemerkt had. De vraag werd urgent, toen men met het andere logische probleem — met de onbewijsbaarheid van het parallelen-axioma — klaar kwam en nu een zoo volledig mogelijk systeem van grondslagen voor de Euclidische geometrie wenschte samen te stellen.

Hoe introduceeren nu de laatste onderzoekers de grondbegrippen van de geometrie?

De zuiverste positie vinden wij daartegenover ingenomen door D. Hilbert in „*Grundlagen der Geometrie*.” Op het eerste gezicht kan deze zeer verrassend schijnen: Hilbert stelt axioma's op, waarin de woorden „punt”, „rechte”, „vlak”, „bij elkaar hooren”, „liggen tusschen”, „congruent zijn” op bepaalde verschillende manieren gedeclineerd en geconjugeerd worden, en zegt eenvoudig niets over de beteekenis van deze termen; wat men met hen bedoelt, moet juist uit deze axioma's blijken!

Dus: niet definities en axioma's, maar de *axioma's alleen* moeten nu als de volledige grondslag van een systeem dienen.

Bij nadere beschouwing is echter deze weg tot het begrijpen van de woorden niet zoo nieuw: op precies dezelfde manier hebben wij voor een groot deel onze moedertaal leeren verstaan en gebruiken, alleen gebeurde dat onbewust en daarom niet altijd met even goed resultaat.

Inderdaad, hoe leert men spreken?

Eerste methode: de eerste woorden worden met bepaalde zintuigelijke waarnemingen geassocieerd; men wijst het kind op dingen en situaties, en dit gaat gepaard met overeenkomstige woorden; zoo leert het kind zulke woorden als „melk”, „bal”, „tafel”, „op” (de tafel), „onder (de tafel)”, „loopen”, „blij zijn” enz.

Tweede methode: een reeks andere woorden wordt volgens het schema „A is een B, die een C is”, verklaard.

Derde methode: hoeveel woorden raadt het kind niet, zonder dat iemand het hem speciaal uitlegt, eenvoudig uit hun gebruik in het een of andere gesprek! Sommige daarvan kunnen ook nauwelijks anders verklaard worden: „maar”, „in zooverre als”

Op deze laatste methode is men ook aangewezen als men een uitdrukking uit een vreemde taal, die niet precies vertaald kan worden, aan iemand wil verklaren: men geeft verschillende zinnen, waarin zij voorkomt, en uit de rol, die zij in de bouw van die zinnen speelt, maakt men op, wat men met haar wil uitdrukken.

Om beter te begrijpen, wat met dit definieeren door axioma's bedoeld wordt, vervange men de al te bekende woorden „punt”, „rechte”,; „congruent” resp. door de voorloopig nietszeggende teekens: $A, B, \dots; \alpha, \beta, \gamma, \dots$, en schrijve daarmee de axioma's van H i l b e r t op. Men krijgt dan stellingen van ongeveer de volgende gedaante:

I. Bij elke twee A (A^1 en A^2) is er steeds een B , die tot elk der beide A in de relatie α staat.

I,2. Bij elke twee A (A^1 en A^2) is er niet meer dan één B , die tot de beide A in de relatie α staat enz..

III,1. Als A^1 en A^2 in de relatie α tot een B^1 staan, en verder A^3 in de relatie α hetzij tot dezelfde B , hetzij tot een andere B (B^2) staat, dan kan men steeds een A (A^4) vinden, die in de relatie α tot dezelfde B , als A^4 staat, zoodat D ($A^1 A^2$) in de relatie γ tot D ($A^3 A^4$) staat, enz. enz.

En laat men nu eens probeeren, terwijl men deze stellingen te samen als grondslag neemt, uit de verschillende volgende in dezelfde teekens geschrevene speciale veronderstellingen verdere stellingen af te leiden.

Vervangt men de teekens $A, \dots, \gamma$ weer door de overeenkomstige woorden, dan zal men volkomen juist de stellingen van de ruimteleer krijgen.

Is het echter makkelijk zonder deze omzetting uit te maken, om welke dingen en relaties het gaat?

4. Natuurlijk zal het bij niemand opkomen om dit soort definities op school in te voeren. Men zal hen te moeilijk, „te abstract voor den beginnening” vinden. Zij zijn echter nog erger dan dat; zij zijn namelijk werkelijk te abstract, d.w.z. te *algemeen*: zij zijn geheel niet toereikend om die begrippen in vast te leggen, *die wij werkelijk aan deze woorden verbinden*, en aan onze leerlingen moeten bijbrengen!

Uit deze axioma's zelf kan men niet eens opmaken, of het gaat over de ruimteleer, of misschien over erfelijkheidswetten of over handelsverdragen in het een of andere nieuwe land, of over nog iets anders. Zelfs als men zich tot zuiver geometrische voorwerpen wil beperken, vindt men daarbij niet slechts één enkel systeem van dingen, die resp. als „punten”, „rechten” en „vlakken” *in de betekenissen van deze axioma's* kunnen dienen, maar een oneindige hoeveelheid van dergelijke systemen. En dit ligt aan het feit, dat door deze axioma's niet alle kenmerken van de ons bekende punten, rechten en vlakken worden vastgelegd, maar slechts een deel ervan, namelijk *hun wederzijdsche relaties*.

Een eenvoudig voorbeeld ter illustratie van deze stand van zaken levert het volgende systeem:

Men stelle zich voor alle cirkels, die door één en hetzelfde punt 0 gaan, waarbij echter het punt 0 zelf niet tot het systeem gerekend wordt („uitgestoken”!); in plaats van met volledige cirkels hebben wij dus met niet gesloten („open”) lijnen te doen. De rechten, die door 0 gaan, moeten daarbij als cirkels met oneindig groote straal beschouwd worden; ook hun moet het punt 0 ontbreken, daarentegen moeten hun beide deelen in het oneindige door een gemeenschappelijk „oneindig ver” punt tot één enkele, in het punt 0 open zijnde lijn, vereenigd worden.

Een dergelijk systeem van lijnen krijgen wij als afbeelding van alle rechten van de ruimte, als wij de bekende „transformatie door reciproke stralen” aan een bol met het middelpunt 0 op de ruimte toepassen.

Daarbij gaan twee elkaar snijdende rechten in twee elkaar snijdende cirkels over, en deze hebben — let wel — slechts één snijpunt, daar het tweede altijd het punt 0 is, dat weggedacht wordt; twee

evenwijdige lijnen gaan in twee cirkels over, die elkaar in het punt 0 raken, — die dus in ons systeem geen punt gemeen hebben; vlakken gaan in bollen over, die klaarblijkelijk alle door het punt 0 gaan.

Laten wij nu afspreken om iedere cirkelboog die lengtemaat toe te kennen, die de door hem afgebeelde lijn (in de een of andere bepaalde eenheid uitgedrukt) bezit, en om onder een „hoek” tusschen twee snijdende cirkels de hoek tusschen hun raaklijnen in het snijpunt te verstaan. (Deze hoek is, zooals men weet, gelijk aan de hoek tusschen de afgebeelde rechten).

Dan krijgen wij een systeem van objecten, die aan alle axioma's van Hilbert voldoen, en waarin als punten weliswaar de gewone punten optreden, maar waarin de rol van de rechten door cirkels en de rol van de vlakken door bollen wordt vervuld, en waarin als „congruente lijnen” en „congruente driehoeken” kromlijnige figuren dienst doen, die bovendien in de gewone beteekenis heelemaal niet congruent zijn. Maar ook iedere andere punt-transformatie, waarbij continue lijnen in continue overgaan, levert, bij een goede afspraak omtrent de maatgetallen van lijnen en hoeken, een systeem van dingen, die voldoen aan dezelfde axioma's.

Men zou ook andere systemen kunnen aanhalen, waarbij de rol van de vlakken, rechten en punten niet door vlakken, resp. lijnen en punten, maar door andere geometrische of arithmetische objecten wordt vervuld.

5. Wij komen zoo tot de volgende inzichten:

De grondbegrippen van een wetenschap kunnen door dat systeem van axioma's gedefinieerd worden, waaruit alle verdere stellingen van deze wetenschap als logische gevolgtrekkingen kunnen worden afgeleid.

Het systeem van de aan deze grondbegrippen beantwoordende dingen wordt daarbij slechts in zooverre gedefinieerd, als daardoor hun onderlinge relaties worden vastgelegd.

Deze methode van definieeren is in het algemeen niet ondubbeltzinnig: het is mogelijk dat er meer dan één systeem van dingen is, waarvan de relaties door stellingen van dezelfde formeele structuur beschreven kunnen worden, d.w.z.: één en hetzelfde systeem van axioma's kan meer dan één „representant” bezitten.

6. Zoo komen echter twee vragen op: wat hebben wij dan eigen-

lijk voor de ruimteleer gewonnen met de definities van Hilbert, als wij toch niet weten, aan welke dingen wij daarbij moeten denken? en: moet men het streven naar een nader preciseeren van de begrippen, die ons interesseeren, werkelijk opgeven?

Wel, voor het doel, dat Hilbert voor oogen had, behoeven de objecten van zijn onderzoekingen ook niet nader dan zoo gedefinieerd te worden. Zijn doel was immers: de *logische structuur* van de ruimteleer, en wel van de ruimteleer van Euclides, zoo precies mogelijk na te gaan. Als daarbij gebleken is, dat een geometrie-boek op meer dan één systeem van objecten kan toegepast worden, dan mag men daarvoor den onderzoeker niet verantwoordelijk stellen; overigens is dit ook heusch geen bedroevend resultaat — integendeel!

Uit deze stand van zaken komt echter nog een bijzonder voordeel voor het onderzoek van het systeem van axioma's zelf voort. Een essentieel punt van een dergelijk onderzoek is namelijk het bewijs, dat ieder verder axioma A , dat men aan de reeds geaccepteerde n axioma's toevoegt, een werkelijk axioma is, d.w.z. een stelling, die aan twee voorwaarden voldoet: ten eerste mag zij niet in strijd zijn met de eerste n axioma's; ten tweede mag zij niet uit deze volgen — hetgeen inhoudt, dat haar ontkenning, de stelling A , ook niet in tegenspraak is met dezelfde n eerste axioma's.

Evenals met een alibi is het ook hier alleen dan overtuigend, als men een positief bewijs voor deze verhoudingen geeft. En dan komt het bestaan van meerdere representanten, van één systeem van axioma's ons te hulp: van ieder van de beide systemen van axioma's: van het systeem S , dat de stelling A , en van het systeem $\bar{S}$, dat inplaats daarvan de stelling $\bar{A}$ bevat, zet men elk één representant neer, die zoo goed te overzien is (en die onafhankelijk van het systeem van dingen, dat nu onderzocht moet worden, bestudeerd is) dat men aan zijn bestaan en derhalve aan zijn betrouwbaarheid niet kan twijfelen. Zoo krijgt men de zekerheid dat de stelling A logisch onafhankelijk is van de eerste n axioma's.

7. Al hebben wij ingezien, dat voor de logische fundeering van de geometrie het definieeren van de grondslagen door het systeem van axioma's van Hilbert voldoende is, toch kunnen wij ons er niet mee tevreden stellen, als het gaat om het practische gebruik van de geometrie.

Dat systeem van axioma's is weliswaar een volledige basis voor alle verdere *geometrische stellingen*, maar *als beschrijving van de karakteristieke eigenschappen van de ruimte, waarin wij leven*, is het niet volledig: als men zegt, dat de lichtstraal „rechtlijnig” is, dat een blad papier langs een „rechte” lijn gevouwen kan worden, dan bedoelt men daarmee een zeer bepaalde figuur, maar in het systeem van axioma's van Hilbert is geen aanknooppingspunt aanwezig, om deze onder de oneindig vele denkbare representanten van de „rechte” op te sporen.

Ondertusschen is de belangstelling van de menschen voor de stellingen van de geometrie slechts daarom zoo groot, omdat een zekere representant van de geometrie een zoo gewichtige rol in de natuurverschijnselen speelt — en dien moeten wij hebben!

8. Dat wij een rechte op het eerste gezicht van iedere andere lijn kunnen onderscheiden, ligt blijkbaar aan het feit, dat wij specifieke zintuigelijke indrukken van haar krijgen, m.a.w. aan haar betrekking tot ons lichaam. Als wij echter de kenmerken van de figuren in woorden willen beschrijven, moeten wij het subjectieve element elimineeren en door objectieve betrekkingen tusschen ruimtelijke en andere fysische kenmerken vervangen.

Daarbij moeten wij ons van een serie woorden bedienen, die aan de natuurkunde ontleend zijn, maar die nog nooit zeer streng gedefinieerd zijn. Nu kan echter nauwelijks éenige duidelijke definitie van een natuurkundig begrip zonder er geometrische begrippen bij te halen tot stand komen — men moet niet uit 't oog verliezen, dat al het fysische gebeuren zich in de ruimte afspeelt (niet zonder reden loopen ook alle natuurkundige metingen — zelfs tijdmetingen — op het aflezen van geometrische maten uit!) De definieering van de natuurkundige begrippen die wij noodig hebben, zou dus niet aan die van de geometrische begrippen vooraf kunnen gaan. Er blijft dus niets anders over dan een uitgebreider systeem van axioma's op te stellen, waarin naast de geometrische ook de noodige natuurkundige termen voorkomen, die dan juist door dit systeem van axioma's mede gedefinieerd zijn.

Men zou op dit oogenblik niet mogen zeggen of een dergelijk systeem wel uit een eindig aantal axioma's zou bestaan. Misschien wel. Maar ook dan nog zou het een reusachtig werk zijn, dat tot

nu toe nog door niemand volbracht is, en zeker is het niet het doel van dit korte artikel om zoo iets op te bouwen.

Toch zou men nu reeds een bescheidener probleem kunnen aanpakken, dat toch een zekere vooruitgang in het duidelijk maken van onze begrippen zou beteekenen: *de grenzen van het ongedefinieerde* hierdoor wat te *verschuiven*, dat men tenminste eenige natuurkundige begrippen, die het dichtst bij de geometrie staan, precieser zou analyseeren. Dit zal in hetgeen volgt, geprobeerd worden. Wij willen de physische representanten van de begrippen „congruentie” en „rechte” onderzoeken.

9. Als een voorwerp zich van ons verwijderd, zien wij het kleiner worden, maar wij zijn overtuigd, dat het „in werkelijkheid” „hetzelfde” blijft.

Daarmee wordt de gangbare opvatting uitgedrukt, dat er een absoluut, aan de ruimte eigen criterium zou zijn, met behulp waarvan men de afmetingen van figuren, die zich op verschillende plaatsen bevinden, met elkaar zou kunnen vergelijken.

Dienovereenkomstig doet het eenigszins vreemd aan, als men voor het eerst de verschillende representanten van Euclides' systeem van axioma's leert kennen en daarbij van de *afspraken* omtrent de maatgetallen van lengten en hoeken hoort. Men is geneigd dergelijke representanten als „conventioneel” te stellen tegenover de goede bekende „echte” representanten.

Als wij echter naar een absoluut criterium zoeken voor het vergelijken van lengten en hoeken, ontdekken wij, dat zoo iets niet bestaat, maar dat wij eerder ook bij ons traditioneele meten door een *overeenkomst* geleid worden, en wel door een zoodanige als gesuggereerd wordt door het gedrag van physische lichamen bij verandering van plaats.

Men weet reeds lang, dat het vergelijken van twee temperatuursprongen („temperatuurafstanden”) op twee verschillende temperatuurniveau's, („op twee verschillende plaatsen van de temperatuur-ruimte”) slechts op een afspraak kan berusten, want twee temperatuursprongen, b.v. 1) van 0° C. tot 1° C. van een kwikthermometer en 2) van 50° C. tot 51° C. *dito*), die aan twee *gelijke* uitzettingen van een kwikzuil beantwoorden, veroorzaken bij een spiritus-zuyl twee verlengingen van *ongelijke* grootte.

Men wordt zich echter niet zoo snel van de conventionaliteit bij

het vergelijken van ruimtelijke afstanden bewust, en dit ligt aan het feit, dat alle stoffen, waaruit men de maatstaven vervaardigt, zich op verschillende plaatsen merkbaar-gelijk gedragen: twee maatstaven, die op één plaats even lang waren, blijven ook op iedere andere plaats even lang tenminste zij zijn daar niet opvallend anders of wel men vindt steeds een speciale oorzaak voor hun eventueele ongelijkheid; dan, maar ook slechts dan, zegt men, dat zij uitgezet (en wel ongelijk uitgezet) of verkort zijn.

Het *aan elkaar gelijk blijven* van heterogene maatstaven bij verandering van plaats is hetgeen ons de illusie geeft van een *aan zich zelf gelijk blijven* in een bijzondere „absolute” beteekenis.

In werkelijkheid kunnen wij echter slechts dit constateeren: twee ruimte-deelen zijn voor ons „gelijk” of „congruent”, als één en hetzelfde physische lichaam, en wel een *vast* lichaam, in beide precies past; twee lijn-afstanden zijn „even lang” als één en dezelfde op een vast lichaam afgeteekende lijn met elk van beide kan samenvallen.

Als wij nu de ons alleen interesseerende representant van het begrip „congruentie” nader analyseeren, dan moeten wij eerst tot klaarheid komen omtrent het begrip „*vast lichaam*”.

10. Vreemd genoeg verwerpt men gewoonlijk de poging om dit probleem aan te pakken; men beroept er zich met voorliefde op, dat er in de natuur geen werkelijk vaste lichamen zijn. Op deze manier gaat men in een amusante logische cirkel rond: men loochent het bestaan van iets, waarvan men niet weet — en niet weten wil — wat het eigenlijk zou moeten zijn. Dit is des te merkwaardiger, omdat men er niet voor terugschrikt de talrijke andere in de natuurkunde voorkomende begrippen te definieeren, hoewel men er zeker van is, dat de overeenkomstige dingen, exact genomen, ook nooit in de natuur voorkomen (b.v. de gelijkmatige beweging). — Maar in elk gegeven geval is men toch in staat een vast lichaam van een niet-vast te onderscheiden!

Wat wij hier willen, is — zooals gezegd — geen tot in ieder woord gepreciseerde definitie, maar een analyse van dat, waarop dan wel deze onderscheiding van ons berust. Wij zullen het niet vermijden om woorden te gebruiken, die ongedefinieerd blijven, en waarvan de beteekenis wordt verondersteld bekend te zijn. Alleen mag in onze gedachtengang geen logische cirkel voorkomen.

De tot nu toe mij bekende pogingen om het begrip „vast lichaam” te definieeren, loopen op de bewering uit, dat een vast lichaam zijn afmetingen en vorm onder alle omstandigheden onveranderd behoudt. Wij komen daar natuurlijk niet verder mee, want wij gaan van het inzicht uit, dat het meten en indentificeeren van de vorm zelf op het begrip „vast lichaam” berusten.

Gelukkig is het echter heelemaal niet waar, dat wij ons in de praktijk van de vastheid van een lichaam met behulp van opmetingen overtuigen; veeleer gebruiken wij een experiment, dat geen metrische elementen bevat en dat dikwijls zelfs in de allerprimitiefste uitvoering reeds toereikend is: wij probeeren het betreffende lichaam samen te drukken en voelen of het meegeeft. Dit experiment kan ook in een objectieve vorm uitgevoerd worden, en dan kan men het ongeveer op de volgende manier schematiseeren:

1. Het te onderzoeken lichaam K brengen wij met een willekeurig ander „Standaardlichaam” P in aanraking en op elk van beide teekenen wij een paar punten A, B, resp. A', B', waar zij elkaar aanraken. Dus: A coïncideert met A', B met B'.

2. Wij voeren twee manipulaties uit, die „drukken” en „spannen” van het lichaam K genoemd worden, waarbij wij het zoo inrichten dat de punten A en A' blijven coïncideeren, en wij letten op of daarbij de punten B en B' ook nog coïncideeren. Is dat het geval, dan noemen wij het lichaam K „vast”.

Bij dit schema behoort een reeks aanvullende opmerkingen:

a. De manipulaties „drukken” en „spannen” moeten nader gedefinieerd worden en wel zoo, dat daarbij nergens gebruik gemaakt wordt van die begrippen, voor welker definitie het begrip „vast lichaam” zelf noodig is. Hier kunnen wij het wegens plaatsgebrek niet doen; het schijnt echter werkelijk mogelijk te zijn het zonder logische cirkel te volbrengen.

b. Men moet de zekerheid hebben, dat, ofschoon druk en spanning *werkelijk plaats vonden*, de verschuiving van punt B van het lichaam K t.o.v. punt B' van het lichaam P *desalniettemin* is uitgebleven. Voor dit doel kan men contrôle-lichamen gebruiken, die op dezelfde voorwaarden, waarin wij bij het onderzoek het lichaam K brengen, wel met een verschuiving reageeren.

c. Om de zekerheid te vergrooten, dat de bewuste manipulaties alleen op het lichaam K en niet tegelijkertijd ook op P werkten, of dat niet toevallig juist op het oogenblik van het experiment onbe-

kende invloeden het uitblijven van de relatieve verschuiving van de punten B en B' bewerkten, kan men het lichaam P achtereenvolgens door een reeks andere standaardlichamen vervangen en ieder experiment op verschillende tijden herhalen.

d. Opgemerkt dient te worden, dat het geen vereischte is, dat het standaardlichaam zelf vast is: het moet slechts aan de eisch voldoen, dat zijn punten A', B' t.o.v. de punten A, B van het lichaam K niet verschuiven, zolang er op dit lichaam K niet met druk of spanning gewerkt wordt.

e. Om zeker te zijn, dat alle deelen van het lichaam K vast zijn, moet men zich natuurlijk niet tot één enkel paar punten A, B, beperken.

f. Bij al dergelijke onderzoeken — zooals trouwens bij ieder experimenteel onderzoek — blijft een element van onzekerheid. Principieel kunnen wij nooit ontkennen, dat er géén invloeden geweest zijn, die een lichaam, dat gecomprimeerd kan worden, abusievelijk vast doen schijnen. Dit zwakke punt ligt echter niet in onze definitie van het begrip „vast lichaam”, maar aan het feit, dat wij ons kunnen vergissen bij de beoordeeling of een gegeven lichaam aan dit begrip beantwoordt.

g. Ook kan het niet als een kritiek op de definitie opgevat worden, dat wij toegeven, dat er in de natuur geen zoodanige lichamen zijn, als wij zoojuist gedefinieerd hebben. Wel mag men echter vragen welk verband er dan is tusschen dit begrip en al datgene waarvoor wij de definitie hebben opgesteld. Het antwoord ligt voor de hand: weliswaar zijn er geen lichamen die in de boven beschreven beteekenis vast zijn, maar er zijn vele lichamen, die wij bij minder preciese beschouwing voor zoodanig houden, en juist dergelijke lichamen zijn het die bij ons het idee van het vergelijken en identificeeren van geometrische figuren deden opkomen. Tevens zijn deze ook de werkelijke dragers van alle onderzoekingen omtrent de ruimtelijke betrekkingen in de natuurverschijnselen.

Ook hier laten wij, korthedshalve, een meer preciese beschrijving achterwege, maar ik geloof de verzekering te mogen geven: men kan zonder in een logische cirkel rond te gaan een definitie van „bijna vast lichaam” geven en ook van de „graad van vastheid”.

h. Een werkelijke verbetering moet echter nog aan onze definitie van het vaste lichaam aangebracht worden: een lichaam K, dat het bovenstaande onderzoek betreffende vastheid met een bevredigende

nauwkeurigheid heeft doorstaan, kan onder omstandigheden zonder aanwezigheid van druk of spanning toch nog merkbare verschuivingen t.o.v. het standaardlichaam vertoonen. Wij zeggen dan, dat er andere factoren op inwerken (verwarming, magnetiseering etc.).

Een volledige definitie van het vaste lichaam zou dus als volgt moeten luiden: *de punten A, B van een „ideaal vast lichaam” blijven onder alle omstandigheden ten opzichte van de punten A', B' van een standaardlichaam onbewegelijk, als slechts dit standaardlichaam vrij blijft van de op het lichaam K werkende invloeden.*

Het inzicht, dat lichamen, die aan de eerste definitie van het vaste lichaam tamelijk goed beantwoorden, toch niet voldoen aan deze verbeterde definitie, verhindert ons niet om dergelijke lichamen voor geometrische identificaties op verschillende plaatsen te gebruiken. Wij doen dit, daar wij aannemen dat het ons steeds mogelijk is om hun vroegere gedaante terug te vinden, die ze zouden hebben, als op de nieuwe plaats de storende factoren ontbraken. Met het oog hierop moet men natuurlijk aannemen, dat ons op de tweede plaats dergelijke factoren niet ontgaan, en dat hun werking op de gedaante van het gebruikte lichaam op alle plaatsen hetzelfde is, nadat wij deze op de eerste plaats goed bestudeerd hebben.

Of al deze veronderstellingen in ieder gegeven geval opgaan, is een andere zaak. Voor ons komt het slechts hier op aan: dat dergelijke onderstellingen werkelijk ten grondslag liggen aan iedere geometrische identificatie; dat wij door onze beschrijving werkelijk die essentiele deelen van de onderzoekingen hebben naar voren gebracht, die een lichaam in onze oogen „vast” doen schijnen, en dat deze essentiele trekken in principe tot loutere *coïncidenties* van punten teruggebracht kunnen worden, en op geen enkel aan de ruimte zelf inherent maat- of congruentiebegrip berusten.

11. Wij kunnen nu de volgende definities introduceeren:

1. *Congruente* figuren zijn figuren, die met één en dezelfde, op een vast (in de verbeterde beteekenis) lichaam afgeteekende, figuur kunnen samenvallen.

2. Een geometrische figuur „zonder verandering overbrengen” of „bewegen” wil zeggen: op de andere plaats een met de gegeven figuur congruente figuur oprichten.

12. Ik kan niet nalaten nog een veronderstelling naar voren te

brenge, die nooit vermeld wordt, maar toch van beslissende betekenis is.

Volgens Einstein's theorie van de zwaartekracht moet de ruimte, zooals bekend, niet alleen van die van Euclides afwijken, maar ook op verschillende plaatsen in verschillende mate afwijken. Wij kunnen dit aan de hand van het volgende voorbeeld schetsen: wij stellen ons vóór, dat op verschillende plaatsen een gelijkzijdige driehoek is geconstrueerd; in de ruimte van Euclides zouden alle drie hoeken van zoo'n driehoek even groot zijn en tot som de gestrekte hoek hebben; in de wereld van Einstein echter zouden de hoeken van een gelijkzijdige driehoek niet eens overal alle aan elkaar gelijk zijn en hun som zou, bij gelijke lengte van de zijden, niet overal hetzelfde zijn. M.a.w. de ruimte van Einstein is niet „homogeen”; op verschillende plaatsen zijn de onderlinge betrekkingen tusschen de elementen van figuren, die alle volgens één en dezelfde methode geconstrueerd zijn, niet hetzelfde.

Als in de wereld van Einstein vaste (of bijna vaste) lichamen mogelijk waren en ook overgebracht konden worden, dan zouden zij toch nog niet voor het „overbrengen van figuren zonder verandering” kunnen dienst doen: de onderlinge betrekkingen in een op zoo'n lichaam afgeteekende figuur zouden op verschillende plaatsen verschillend zijn (hier behoeven wij er ons niet om te bekommeren, hoe de natuur zoo iets zou inrichten, maar slechts hoe wij het zouden vaststellen) en er zou überhaupt geen sprake zijn van „congruente figuren”, tenminste niet op grootere afstanden. (Het schijnt weliswaar daarbij toch mogelijk een „klein genoeg vast lichaam” voor het introduceeren van het begrip „gelijke afstanden” te gebruiken).

Wij zien daaruit dat onze hierboven gegeven definitie van „congruente figuren” nog een rechtvaardiging noodig heeft, namelijk de veronderstelling:

Veronderstelling 1: *de ruimte is homogeen*, zonder welke veronderstelling die definitie onder bepaalde omstandigheden vol tegenpraak kan blijken te zijn.

Dat aan dergelijke tegenspraken gewoonlijk niet gedacht wordt, ligt aan het feit dat zij in onze dagelijksche ervaringen met de bijna vaste lichamen niet merkbaar zijn.

13. Aan de hand van het begrip „vast lichaam” en de zooeven

vermelde veronderstelling betreffende de homogeniteit van de ruimte kan gemakkelijk het begrip „rechte lijn” gedefinieerd worden.

Aan de ervaring ontleenen wij namelijk nog de volgende veronderstellingen:

Veronderstelling 2: *Als één punt O van een figuur onbewegelijk is, kan toch nog ieder ander punt van deze figuur bewegingen uitvoeren.*

Veronderstelling 3: *Als twee punten A en B van een figuur onbewegelijk zijn, dan zijn ook al die punten van deze figuur onbewegelijk, die zich op een bepaalde door A en B gaande lijn bevinden. Alle andere punten van deze figuur kunnen daarbij bewegingen uitvoeren.*

En dit maakt het ons mogelijk de „rechte lijn” te definiëren: *Een „rechte” is een lijn, die onbewegelijk blijft bij alle bewegingen van een figuur, waarvan zij een deel vormt, en waarbij twee willekeurige tot haar behorende punten onbewegelijk zijn.*

Laten wij er nog een eveneens aan de ervaring ontleende veronderstelling aan toevoegen:

Veronderstelling 4: *Als drie niet op een rechte lijn liggende punten van een figuur onbewegelijk zijn, is de geheele figuur onbewegelijk.*

Dan kan men daaruit gemakkelijk *afleiden*, dat door twee punten van de ruimte slechts één rechte getrokken kan worden.

Wij kunnen onze zaak nog meer met de ervaring in overeenstemming brengen, als wij in plaats van de „onbewegelijkheid” uitdrukkelijk van de „relatieve onbewegelijkheid” met betrekking tot een vast lichaam spreken. De eenvoudigste fysische illustratie van een „rechte” is dan een vouw in een papier of de rand van een lineaal, die bij alle standen, waarbij hij door twee gegeven punten gaat, steeds één en dezelfde indruk op het papier dat deze punten bevat, achterlaat.

14. In verband met het feit, dat er geen volkomen vaste lichamen zijn, wordt er dikwijls geprobeerd om de rechte niet zóó, als wij het gedaan hebben, als draais van een vast lichaam, te introducereen, maar haar te definiëren door zich te beroepen op zekere andere fysische betrekkingen. Op deze manier beweert men b.v. dat de rechte de vorm van een gespannen touw of van een lichtstraal zou hebben.

Mij schijnen deze beide definities minder gelukkig, want men

kan haar niet consequent doorvoeren. Inderdaad: iedereen weet, dat een gespannen touw, streng genomen, niet rechtlijnig is; het is slechts dan waar, als het touw of niet onderhevig is aan zwaartekracht of oneindig sterk gespannen is, of wel als zijn beide uiteinden zich bevinden op een vertikale rechte. Wat beteekenen echter dergelijke uitspraken? Blijkbaar gebruikt men daarbij een tweede definitie van de rechte zonder deze te formuleeren. Hetzelfde valt ook van het introduceeren van de rechte als een lichtstraal te zeggen: hoe zou men van reflexie en breking van de lichtstralen kunnen spreken — dus van hun eventueele afwijking van de rechtlijnigheid, als de rechte door niets anders dan door de lichtstraal zelf bepaald ware?

15. Laten wij, na alles wat gezegd is, onze aandacht toch een oogenblik op het onderwijs richten en laten wij onze conclusies betreffende de grondbegrippen van de geometrie eens vergelijken met dat wat de beginnelingen daar gewoonlijk over te hooren krijgen.

Of men de quasi-strengte definities al dan niet tracht te geven, geen leeraar kan het nalaten toch ook op de concrete objecten, die deze begrippen illustreeren, te wijzen.

Dit wordt echter meestal als een betreurenswaardige concessie aan de jeugdigheid van de leerlingen opgevat. Uit de bovenstaande overwegingen daarentegen, moet volgen, dat dit aanvoeren van physische objecten in overeenstemming is met een *wetenschappelijke eisch*, die gegrond is op de meening, dat onze ideeën over de ruimte geabstraheerd zijn uit onze physische ervaring en dat hun ontwikkeling in laatste instantie gewijd is aan het begrijpen en beheerschen van de natuur.

Natuurlijk kan men met de beginnelingen deze ervaring niet op dezelfde manier analyseeren, als wij het hierboven trachtten te doen. Maar misschien kan men er eenige toepassingen voor het onderwijs uithalen. Mij schijnt het b.v. toe, dat de leerlingen de procedure van het op elkaar leggen van driehoeken bij de congruentie- en gelijkheidsbewijzen, met meer begrip zullen opnemen, als men de bovengenoemde vier veronderstellingen (vooral de drie laatste) betreffende het bewegen van figuren in de ruimte expliciet bespreekt. Men weet immers, hoe dikwijls een leerling het als een onbegrijpelijke formaliteit beschouwt, dat men bij dit op elkaar plaatsen een bepaalde volgorde in het oog moet houden, en hoe

vaak deze hem juist daarom mislukt. Ook zou men hun meer kunnen laten zien, hoe essentieel het in de praktijk is, dat slechts één bepaalde lijn van een lichaam onbewegelijk blijft, als het lichaam nog een of andere beweging kan uitvoeren (de rol van de zwengel van een as, waaromheen men raderen wil laten draaien; de onmogelijkheid om een vlak te vouwen, als het geen regelvlak is; het controleren van een rechtlijnigheid van een lineaal; het vergelijken van een rechtlijnige rand met soortgelijke niet-rechte randen die toch op meer dan één manier op één en hetzelfde spoor kunnen worden gelegd enz.). Zoo zou de bewering, dat door twee punten slechts één rechte kan gaan, in hun oogen een levender en niet-triviale inhoud krijgen.

16. Wij gingen van het probleem uit, *hoe* men de grondbegrippen van een wetenschap moet *definieeren*. Bij de nadere bespreking van de grondbegrippen van de geometrie zijn wij onvermijdelijk met de andere vraag in aanraking gekomen: *wat* deze begrippen voor ons omvatten, en *hoe wij er aan komen*. Daarbij bleek, dat zij hun oorsprong vinden in de ervaring, en wij zijn tot de conclusie gekomen, dat de verwijzing naar de ervaring onontbeerlijk is voor het op een ondubbelzinnige manier vastleggen van deze begrippen.

Ik herinner mij een levendige discussie, die meerdere jaren geleden tusschen eenige mathematici en physici hier te lande gevoerd werd: in verband met de vraag, of het een mathematicus dan wel een physicus behoorde te zijn, aan wien men het onderricht in de mechanica aan de middelbare scholen moest toevertrouwen, werd overwogen, of de mechanica zelf een experimenteel of een zuiver rationeel vak was.

Ik hoop, dat het bovenstaande ook moge bijdragen tot de beantwoording van deze vraag.

13, II, 35, Leiden.