EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Digitaal leren in de wiskundeles
Een onderzoek naar de leerresultaten en leermotivatie van leerlingen bij het gebruik van een digitale oefenomgeving.

Schoolexamens statistiek
Cito maakte gratis schoolexamens statistiek met grote datasets en ict voor havo en vwo wiskunde A.

Aansluiting voortgezet en hoger onderwijs
Docenten in het hoger onderwijs reageren op de plannen van het PWN en de NVvW.

Haakjes, hokjes, hekjes
'Haakjes' zijn de leestekens van de algebrataal. Aan de neiging om die weg te willen werken moet lang niet altijd worden toegegeven.

NR.7

JAARGANG 95 - JUNI 2020

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 95 NR7

IN DIT NUMMER

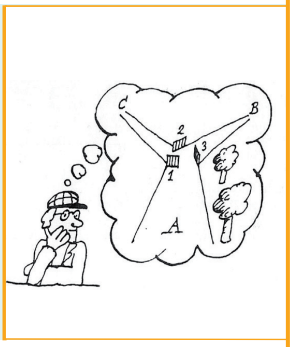
DIGITAAL LEREN IN DE WISKUNDELES
Ellen van Kesteren
4

PROTOTYPES ROND STATISTIEK EN DATASETS
Ivo Claus
Ger Limpens
Irene van Stiphout
7

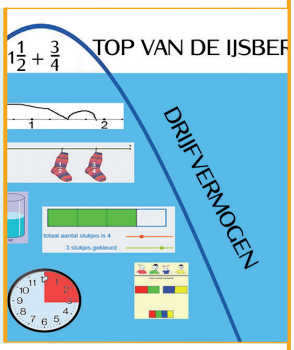
TWEE GELIJKVORMIGE DRIEHOEKEN
Herman Bloem
Igor Hoveijn
Floor van Lamoen
20

BOEKBESPREKING
EENZAAMHEID, TRAUMA'S, ROUW EN LIEFDE: ROMAN OVER EEN WISKUNDEDOCENT
Alex van den Brandhof
23

HAAKJES, HOKJES, HEKJES
Martin Kindt
10



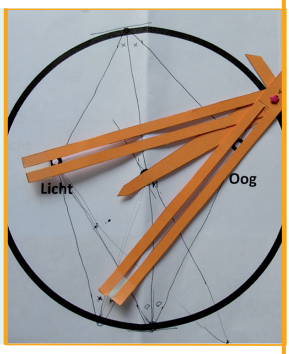
HET FIZIER GERICHT OP....
HET DRIJFVERMOGEN VAN DE IJSBERG
Mieke Abels
24



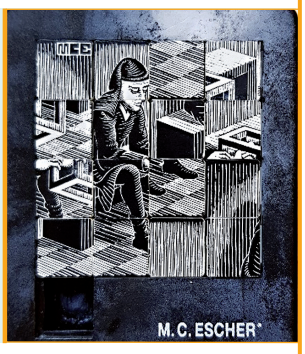
AANSLUITING TUSSEN VOORTGEZET EN HOGER ONDERWIJS
PWN-commissie Onderwijs
14

0,999... = 1!
Klaas Pieter Hart
26

DAGEN MET STERREN
NWD 26
Rob van Oord
16



BOEKBESPREKING
SYMMETRIE IN TELPROBLEMEN EN PUZZELS
Jacques Jansen
30



KLEINTJE DIDACTIEK
Lonneke Boels
18

WERELDWISKUNDEFONDS
BOEKEN VOOR VOCATIONAL OPEN SCHOOL, TANZANIA
Leo Bakker
34

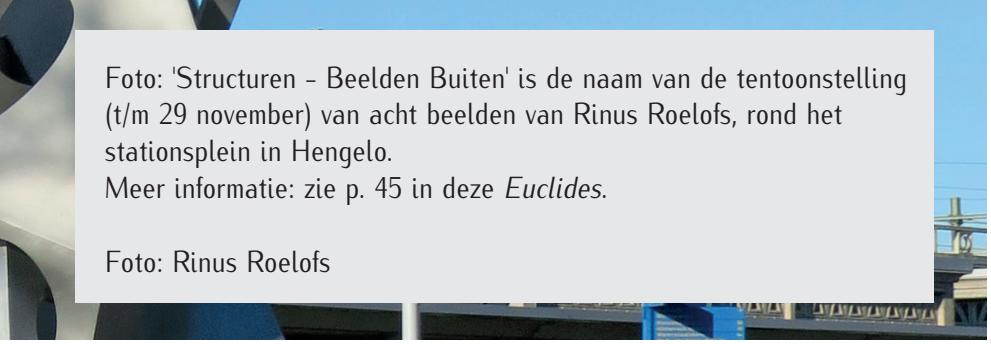


Foto: 'Structuren - Beelden Buiten' is de naam van de tentoonstelling (t/m 29 november) van acht beelden van Rinus Roelofs, rond het stationsplein in Hengelo.
Meer informatie: zie p. 45 in deze *Euclides*.

Foto: Rinus Roelofs

BOEKBESPREKING
HET GRENZELOZE BREIN
Marloes van Hoeve 36

WIS EN WAARACHTIG 40

WITJE: EENVOUWDIG 41

VASTGEROEST
Ab van der Roest 42

VERNIGINGSNIEUWS
JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2020
43

PUZZEL
Lieke de Rooij
Wobien Doyer 44

SERVICEPAGINA 46

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

Het laatste nummer alweer van een schooljaar dat we ons gegarandeerd voor altijd zullen blijven herinneren. We hadden de traditionele eindspurt naar de zomervakantie zeker heel anders voorgesteld. En als we dan ook nog in eigen land moeten blijven deze zomer, dan heeft deze editie in ieder geval nog een toeristische tip in petto: Hengelo!
Op de voorkant van deze *Euclides* zie je een van de acht wiskundige beelden van Rinus Roelofs die op dit moment te zien zijn rond het stationsplein aldaar. Deze tentoonstelling onder de naam 'Structuren Beelden Buiten' ging in ieder geval wel gewoon door en door de omvang van de sculpturen moet anderhalve meter afstand bewaren ook geen enkel probleem zijn. Een aanrader!
En wéér was ik te optimistisch in het vorige Kort vooraf. Door min of meer te veronderstellen dat na de zomer alles weer 'normaal' zou zijn en dat we de ervaringen van blijvende waarde uit deze tijd in één *Euclides* zouden kunnen bundelen als 'terugblik'. Maar waarschijnlijk zijn we ons nu al aan het voorbereiden op de anderhalve-meter-lessen van het volgend schooljaar. Daarom gaan we die ervaringen als een rode draad door de komende nummers verspreiden, zodat je ook nog ná de hectiek van nu die ervaringen kunt toesturen. Overigens, het openingsartikel van Ellen van Kesteren over digitaal onderwijs dateert nog uit het precorona tijdperk...
Vakantie. Verdiend. Hoe die er ook uit gaat zien. Nog een aanrader: de nieuwe podcasts uit de serie 'De Fascinatievolger' van Judith Lengkeek, zie de aankondiging elders in deze *Euclides*. Voor in de tuin of op het balkon, ondergaande zon, drankje erbij, koptelefoon op en even lekker luisteren.
Namens de hele redactie: een mooie zomer gewenst.

Tom Goris

Ellen van Kesteren

Digitaal leren in de wiskundeles

Voor de masterstudie 'Gepersonaliseerd en toekomstgericht leren' heeft Ellen van Kesteren onderzoek gedaan naar de leerresultaten en leermotivatie van leerlingen bij het gebruik van een digitale oefenomgeving als aanvulling op de wiskundeles.

Inleiding

We leven in een maatschappij die door digitalisering en technologische ontwikkelingen aan snelle veranderingen onderhevig is. Het onderwijs probeert hierin mee te gaan door ict een steeds belangrijkere rol toe te kennen. Zo zijn internet, digitale volgsystemen, digitale leeromgevingen, computers en mobiele apparaten bijna niet meer weg te denken uit het onderwijs van de 21e eeuw. Een efficiënte inzet van ict kan een meerwaarde hebben voor het leerproces en de leerprestaties en leermotivatie van leerlingen bevorderen.[1]

Effecten van ict op het leerproces

De positieve effecten van ict op het leerproces zijn vaak het grootst bij het gebruik van adaptieve online oefenomgevingen, waarin het systeem een overzicht geeft van de behaalde leerdoelen, direct feedback geeft en de opgaven aanpast aan het niveau van de leerling.[2] De docent kan sneller en effectiever klassikale of individuele ondersteuning bieden en de leerling kan gerichter aan leerdoelen werken. Deze systemen kunnen docenten en leerlingen helpen bij het formatief evalueren van het leerproces en geven leerlingen meer eigenaarschap van het leren. Dit heeft een positieve invloed op inzet, motivatie, interesse, zelfvertrouwen en doorzettingsvermogen van de leerling en bevordert duurzaam leren.[3]

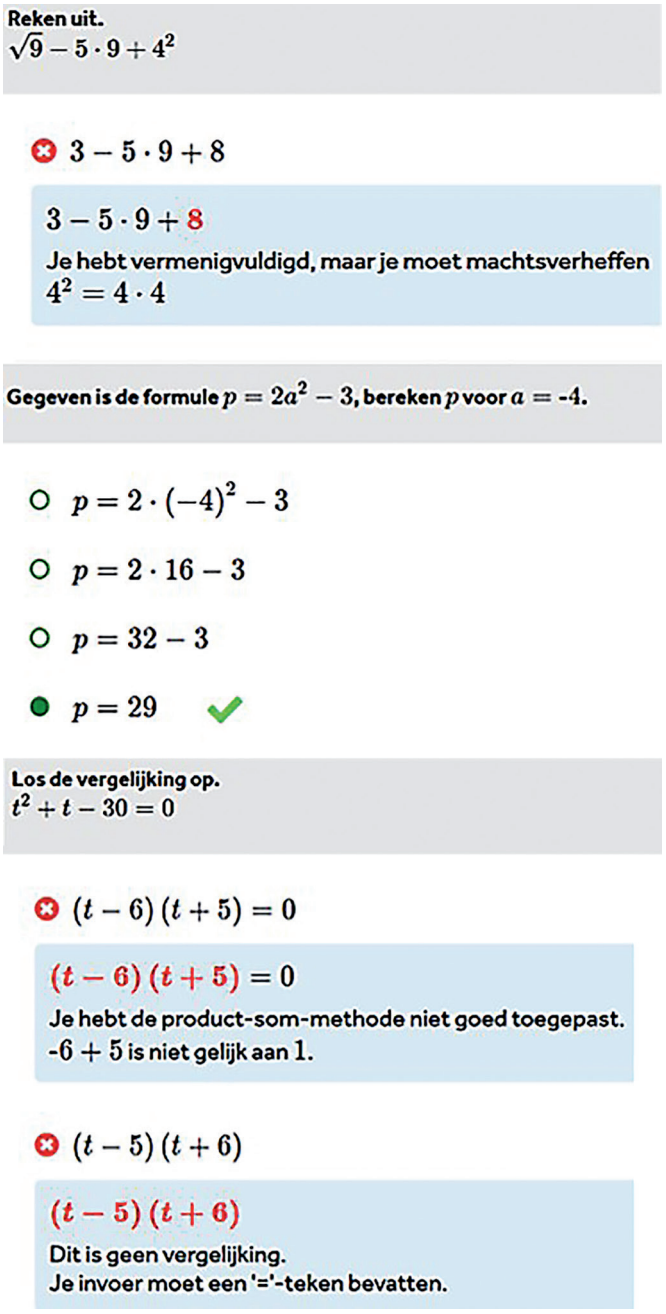
Ict bij het vak wiskunde

Bij het vak wiskunde kan ict op verschillende manieren worden geïntegreerd. Hoogleraar in de wiskundedidactiek Paul Drijvers noemt voor de wiskunde drie didactische functies van ict:

— wiskundig gereedschap (zoals de grafische rekenmachine)
— oefenomgeving voor wiskundevaardigheden (zoals een online oefenomgeving)
— hulp bij begripsvorming (zoals *GeoGebra*).[4]

In het huidige Nederlandse wiskundeonderwijs wordt ict het meest gebruikt als gereedschap en als hulpmiddel bij begripsvorming. In internationale reviewstudies over het gebruik van ict in de wiskundeles worden veelal kleine positieve effecten gemeten op de leerresultaten, waarbij de effecten in het primair onderwijs groter zijn dan in het voortgezet onderwijs.[5] In deze onderzoeken wordt ict het meest gebruikt als ondersteunend middel bij de begripsvorming. De positieve effecten op de leerprestaties en leermotivatie zijn vaak groter wanneer ict wordt gebruikt bij het oefenen van de reken- en algebraïsche vaardigheden in een online oefenomgeving, met effectgroottes op de leerprestaties van 0,39 – 0,83.[6] Hierbij wordt vaak benadrukt dat bij het vak wiskunde het effect het grootst is als de online oefenomgeving als aanvulling op de wiskundelessen wordt gebruikt en het systeem niet alleen de eindantwoorden controleert, maar ook feedback geeft op de tussenstappen.[7] Dit wordt intelligente feedback genoemd. Deze systemen, ook wel Intelligente Tutorsystemen (ITS) genoemd, geven terugkoppelingen gebaseerd op een analyse van de tussenstappen. Bij een fout antwoord wordt aangegeven wat er vermoedelijk fout is gegaan en worden hints gegeven om tot het goede antwoord te komen. De effecten op leeprestaties en leermotivatie van het oefenen van de algebraïsche- en rekenvaardigheden in een ITS, waarbij intelligente feedback op de vervolgstappen wordt gegeven, zijn veelal positief.[8]

In Nederland worden ITS'en het meest gezien in het primair onderwijs, onder andere bij het vak rekenen, en worden er duidelijke positieve effecten op de leerresul-



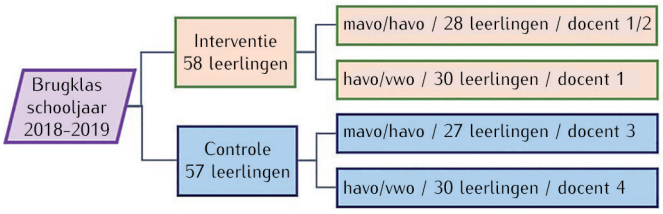
figuur 1 Intelligente feedback in Wistrainer

taten gezien.[9] Maar ook in het Nederlands voortgezet onderwijs zijn ITS'en voor het vak wiskunde sterk in opkomst, alleen zijn er nog niet zoveel onderzoeken naar gedaan. Twee Nederlandse studies naar het effect van een ITS op de wiskundeprestaties tonen aan dat de wiskundevaardigheden bij de leerling duidelijk verbeteren.[10,11] Voorbeelden van al langer bestaande ITS'en voor het vak wiskunde zijn de Digitale Wiskunde Omgeving van het Freudenthal Instituut (*Numworx*) en de Khan Academy.

Het onderzoek

Om het effect van een Intelligent Tutorsysteem voor het vak wiskunde te onderzoeken is in dit onderzoek gebruik gemaakt van *Wistrainer* aangeboden door de digitale leeromgeving *Learnbeat*. *Wistrainer* is een adaptieve online oefenomgeving voor algebraïsche- en rekenvaardigheden. De oefensommen en de intelligente feedback en hints in *Wistrainer* worden door *AlgebraKit* gegenereerd en aangeleverd, zie figuur 1.

De visie van *AlgebraKit* is gebaseerd op de filosofie van TPACK, waarin de nadruk wordt gelegd op het belang van een effectieve verbinding tussen technologische, vakdidactische en vakinhoudelijke kennis.[2] De adaptiviteit zorgt ervoor dat deze verbinding tot stand komt.
Twee brugklassen hebben in schooljaar 2018-2019 gedurende een periode van vier maanden gewerkt met *Wistrainer* in plaats van het maken van opgaven uit het boek. Gedurende deze periode zijn data verzameld uit toetsresultaten en motivatie-enquêtes. Deze zijn vergeleken met twee controleklassen, die alleen uit het boek en in een schrift hebben gewerkt, zie figuur 2.



figuur 2 De indeling van de interventie – en controleklassen

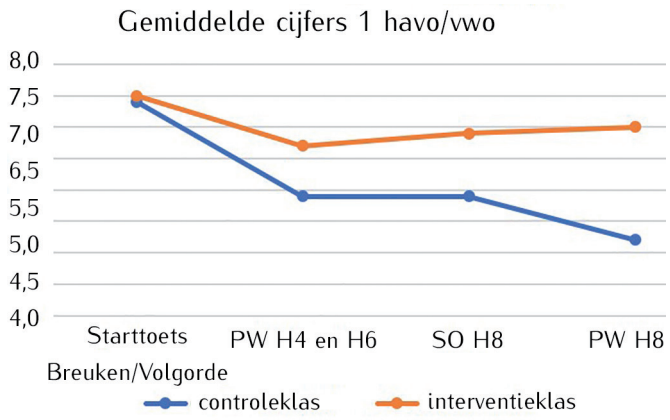
> "Bijna alle leerlingen ervaren veel plezier aan het werken met *Wistrainer* en doen dit liever dan werken uit het boek."

Resultaten

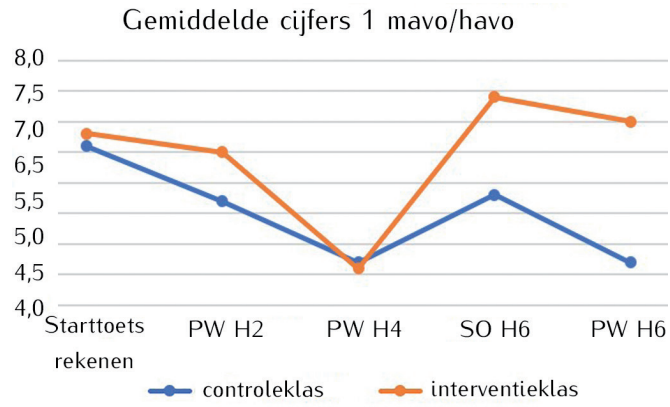
De toetsresultaten van de interventie- en controleklassen tijdens de interventieperiode laten zien dat bij het oefenen in *Wistrainer* de interventieklassen gemiddeld hoger scoren dan de controleklassen, zie figuur 3 en 4 op de volgende bladzijde.

>

Toetsresultaten interventie- en controleklas 1 havo/vwo



figuur 3 Toetsresultaten interventie- en controleklas 1 havo/vwo



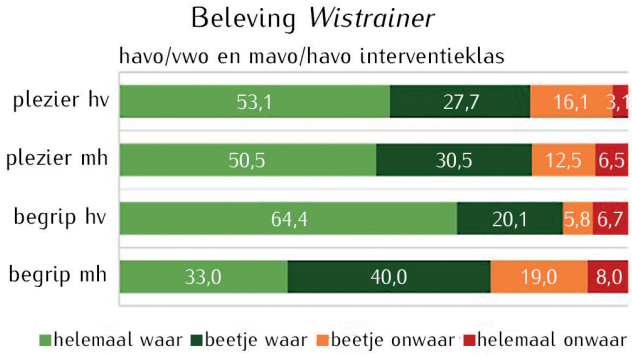
figuur 4 Toetsresultaten interventie- en controleklas 1 mavo/havo

Bij zowel havo/vwo als mavo/havo worden de verschillen van de gemiddelde toetscijfers tussen de interventie- en controleklassen in de loop van de interventieperiode steeds groter. Alleen H4 van de mavo/havo klassen wijkt hiervan af. Deze klas had in de periode waarin dit hoofdstuk werd behandeld les van de tweede interventiedocent. Naast het lage gemiddelde toetscijfer is opvallend dat er in deze periode heel weinig opgaven digitaal zijn gemaakt, zie tabel 1. De docent gaf als reden hiervoor dat het werken met *Wistrainer* bij haar erg moeizaam is verlopen en veel frustratie bij zowel docent als leerlingen heeft veroorzaakt. De belangrijkste redenen hiervoor waren: niet gewend zijn aan het werken met digitale middelen, niet optimaal zijn van de randvoorwaarden (slechte Wifi-verbinding en niet werkende online applicatie) en de afleidingen van het internet bij de leerlingen, waar de docent niet goed mee kon omgaan.

Interventieklas mavo/havo	Hoofd-stuk 2	Hoofd-stuk 4	Hoofd-stuk 6
Percentage gemaakte opgaven	73,4%	41,0%	98,7%
Interventieklas havo/vwo	**Hoofd-stuk 4**	**Hoofd-stuk 6**	**Hoofd-stuk 8**
Percentage gemaakte opgaven	96,3%	85,0%	99,3%

tabel 1 Percentage gemaakte opgaven per hoofdstuk in Wistrainer

Uit de resultaten van de enquête over het werken met *Wistrainer* blijkt dat ruim 80% van beide klassen met plezier met *Wistrainer* heeft gewerkt, zie figuur 5. Ook zijn de scores op begrip hoog, 73% van de mavo/havo leerlingen en 85% van de havo/vwo leerlingen zegt dat wiskunde bij het oefenen in *Wistrainer* beter wordt begrepen dan bij werken uit het boek.



figuur 5 Uitkomsten in percentages van de enquête over het werken met Wistrainer van de twee interventieklassen

Conclusies

De resultaten van dit onderzoek tonen aan dat *Wistrainer* een positief effect heeft op de wiskundeprestaties van mavo/havo en havo/vwo brugklasleerlingen. Leerlingen uit beide interventieklassen presteren duidelijk beter op de wiskundetoetsen dan leerlingen uit de controleklassen, waarbij de verschillen tussen de gemiddelde wiskunde-cijfers bij bijna alle toetsen significant zijn. In de loop van de interventieperiode worden deze verschillen steeds groter. Het grootste verschil wordt drie weken na de interventieperiode gezien. Dit geeft als eerste indruk dat de lesstof bij leerlingen uit de interventieklassen beter beklijft.

Verder komt duidelijk naar voren dat bijna alle leerlingen van de interventieklassen veel plezier ervaren aan het werken met *Wistrainer* en dit liever doen dan werken uit het boek. Plezier en inzet zijn belangrijke aspecten van de intrinsieke motivatie.[12] Hieruit zou geconcludeerd kunnen worden dat de intrinsieke motivatie voor het online oefenen van reken- en algebraïsche vaardigheden groter is dan voor werken uit het boek. In beide klassen geven bijna alle leerlingen aan dat ze wiskunde beter begrijpen door het oefenen in *Wistrainer*. Dit komt overeen met de toetsresultaten, die in de interventieklassen hoger zijn dan in de controleklassen. Na afloop van de interventieperiode gaven ook bijna alle leerlingen aan dat ze het jammer vonden om weer uit het boek en in het schrift te moeten gaan werken. De ervaringen van de eerste interventiedocent zijn zeer positief. Uit de ervaringen van de tweede interventiedocent kan geleerd worden dat een docent zelf ook intrinsiek gemotiveerd moet zijn om met de klas digitaal te werken en achter de onlinemethode moet staan. Beide docenten zien bij goede randvoorwaarden veel mogelijkheden in *Wistrainer*. Het actuele overzicht van de al dan niet behaalde leerdoelen helpt de docent om sneller en efficiënter individuele en klassikale hulp te bieden. Dit is bij het werken in een schrift veel minder goed zichtbaar en het controleren van schriften kost een docent meer tijd. Ook is opgevallen dat leerlingen veel meer opgaven maken en vragen aan de docent stellen bij het werken met *Wistrainer*. Na een aantal keren het verkeerde antwoord te hebben ingevoerd willen leerlingen graag weten wat ze fout doen. Hierdoor begrijpen ze de lesstof sneller en beter. Tot slot zien leerlingen met *Wistrainer* of ze de tussenstappen, die in het schrift vaak ontbreken of niet nagekeken worden, goed opschrijven.

Noten

Voor de noten bij dit artikel zie:

vakbladeuclides.nl/956kesteren

Over de auteur

Ellen van Kesteren is wiskundedocent op het Spinozalyceum te Amsterdam.
E-mailadres: *e.vankesteren@spinozalyceum.nl*

Ivo Claus, Ger Limpens, Irene van Stiphout

Prototypes rond statistiek en datasets

Schoolexamens statistiek met grote datasets. Moeilijk om zelf te maken, maar gelukkig worden we op prototypes getrakteerd door het jarige Cito.

Inleiding

Vanwege het 50-jarig bestaan heeft Cito getrakteerd op gratis schoolexamens statistiek met grote datasets en ict voor havo wiskunde A. De waardering van het veld voor deze traktatie heeft geleid tot schoolexamenopgaven voor vwo wiskunde A een jaar later. Na deze ervaringen deelt Cito haar deskundigheid met wiskundesecties. In de loop van 2020 zullen wederom grote datasets met bijbehorende vragen en correctiemodellen ter beschikking worden gesteld.

Aanleiding

Sinds 2015 is statistiek met grote datasets en ict onderdeel van de examenprogramma's voor havo wiskunde A en voor vwo wiskunde A/C en een verplicht onderdeel van het schoolexamen. Vanuit het veld kregen we signalen dat het vinden van grote datasets en het construeren van bijbehorende vragen nog niet meevalt. Het 50-jarig bestaan van Cito bood de toetsdeskundigen wiskunde de gelegenheid een prototype van schoolexamens hierover te maken en gratis ter beschikking te stellen. Het maken van >

schoolexamens is geen kerntaak voor Cito maar voor deze gelegenheid kon gelukkig een uitzondering worden gemaakt.

2018: Havo wiskunde A

Voor de constructie van de opgaven heeft Cito twee ervaren constructeurs aangetrokken die zeer bekend zijn met statistiek in het nieuwe examenprogramma. Deze constructeurs zijn onder leiding van de toetsdeskundigen aan de slag gegaan. Dit heeft uiteindelijk geleid tot twee sets schoolexamenopgaven, zie tabel 1.

Excel en VuStat

Om docenten de vrijheid te geven, is besloten om de opgaven en correctiemodellen in Word te maken. Op deze manier kunnen opgaven naar believen worden aangepast, aangevuld of verwijderd. Omdat op scholen verschillende software wordt gebruikt voor het omgaan met grote datasets, is ervoor gekozen om de databestanden in het formaat van twee gangbare softwarepakketten mee te leveren: als Excel-bestand en als VuStat-bestand.[1] De opgaven kunnen met beide programma's gemaakt worden. De correctiemodellen zijn gebaseerd op het gebruik van VuStat omdat dit naar onze mening leerlingvriendelijker is dan Excel voor wat betreft statistische analyses.

Classificering

In een Excelbestand zijn kenmerken van opgaven meegeleverd. Hiermee kunnen docenten keuzes van opgaven maken. De kenmerken hebben betrekking op het aantal punten per vraag, het subdomein uit de syllabus waarover de vraag gaat en een classificering van de vraag.
De vragen zijn ingedeeld in de volgende categorieën: *procedureel*, *conceptueel* en *computervaardigheid*. Een vraag is procedureel genoemd als de vraag het uitvoeren van een standaardprocedure betreft, bijvoorbeeld het berekenen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval aan de hand van de formulekaart. Bij vragen die conceptueel zijn genoemd, gaat het om meer dan alleen het uitvoeren van een standaardprocedure. Denk hierbij bijvoorbeeld aan vragen waarbij de leerling moet aangeven waarom een bepaalde procedure niet werkt, of onjuist is, of waarbij de leerling het verschil tussen twee groepen moet bepalen, zonder dat daarbij wordt verteld welke maat hij hiervoor moet gebruiken. We merken op dat de mate waarin een vraag procedureel of conceptueel is, afhangt van de voorkennis van een leerling. Vragen die leerlingen al eens hebben gezien of waarmee specifiek geoefend is in de les, kun je al gauw als minder conceptueel zien. Onze indeling moet daarom met enige voorzichtigheid worden geïnterpreteerd. De vragen worden beantwoord met behulp van Excel of VuStat. Beide vragensets vereisen dat leerlingen overweg kunnen met het betreffende programma. Vragen die hier sterk een beroep op doen zijn bijvoorbeeld het maken van een cirkel- of staafdiagram, frequentietabel, kruistabel of het splitsen van variabelen. Een enkele vraag is geclassificeerd als alleen een computervaardigheid. De meeste vragen zijn geclassificeerd als computervaardigheid in combinatie met procedureel of conceptueel. Tot slot zijn er twee vragen die alleen betrekking hebben op het toepassen van een definitie. In deze vragen wordt niet naar een berekening gevraagd of naar het uitvoeren van een procedure maar bijvoorbeeld om het benoemen van het type variabele als kwalitatief of kwantitatief.

Enquête

In de WiskundE-brief is een bericht geplaatst waarin docenten werden uitgenodigd om zich aan te melden. Om enigszins te voorkomen dat leerlingen zich zouden aanmelden, is een check gedaan op de BRIN-code van de school en het e-mailadres van de docent. Het materiaal is als zipbestand gestuurd naar ruim 300 wiskundedocenten. Na een maand is onder deze docenten een enquête uitgezet. Iets minder dan 25% van de aangeschreven docenten heeft gereageerd. Uit deze reacties bleek dat de opgaven en het correctiemodel zeer worden gewaardeerd.

Titel	Staandehoudingen	COOL
Omschrijving dataset	bevat gegevens van staandehoudingen in het verkeer in de staat Florida in de Verenigde Staten	bevat gegevens van havo-leerlingen die eindexamen hebben gedaan
Aantal records	1740	6976
Aantal vragen	16	28
Duur toets	90 minuten	afhankelijk van de keuze van de vragen
Aard van de opgavenset	compleet schoolexamen	vragen om zelf een schoolexamen uit samen te stellen
Niveau	havo wiskunde A	havo wiskunde A

tabel 1 Kenmerken van de datasets en bijbehorende opgavensets voor havo wiskunde A

Titel	Speeddating	Schoolverlaters
Omschrijving dataset	bevat gegevens van deelnemers aan een speeddating-experiment in de VS	bevat gegevens van schoolverlaters en hun vervolgopleidingen in Nederland
Aantal records	8388	3690
Aantal vragen	18	23
Duur toets	90 minuten	afhankelijk van de keuze van de vragen
Beschrijving opgavenset	compleet schoolexamen	vragen om zelf een schoolexamen uit samen te stellen
Niveau	vwo wiskunde A; in Excelbestand is aangegeven welke vragen geschikt zijn voor havo wiskunde A/ vwo wiskunde C	vwo wiskunde A; in Excelbestand is aangegeven welke vragen geschikt zijn voor havo wiskunde A/ vwo wiskunde C

tabel 2 Kenmerken van de datasets en bijbehorende opgavensets voor vwo wiskunde A

Men vond de opgaven goed op niveau en divers genoeg. De meeste respondenten laten leerlingen Excel gebruiken en hadden interesse in een vergelijkbare set voor vwo.

2019: vwo wiskunde A/C

In december 2019 zijn wederom twee datasets opgeleverd, nu met schoolexamens die geschikt zijn voor vwo wiskunde A, zie tabel 2. In de meegeleverde analyse van de opgaven is per vraag aangegeven of deze past binnen de examenprogramma's van vwo wiskunde C en van havo wiskunde A. Ook dit materiaal is verspreid onder meer dan 300 docenten die zich als geïnteresseerden hadden aangemeld. Op basis van de constructie van de vier sets binnen Cito is een beknopte handleiding ontwikkeld. Hierin staat onder meer beschreven waar geschikte datasets gevonden kunnen worden, welke eigenschappen een dataset geschikt maken, welke voor- en nadelen er zijn wat betreft software en hoe gezorgd kan worden voor een diversiteit in vragen. Wil je deze handleiding ontvangen? Stuur dan een mail naar *se-statistiek@cito.nl* dan sturen we je deze toe.

2020 en verder ...

De ervaringen die we hebben opgedaan met de constructie van deze prototypes van schoolexamens willen we delen met het veld. Daarom hebben we in het najaar van 2019 een oproep gedaan aan scholen in de WiskundE-brief en in de nieuwsbrief van de NVvW om zich bij ons te melden met als doel om samen materiaal te ontwikkelen. Sinds december 2019 zijn een wiskundesectie en een docentenontwikkelteam aan de slag om datasets te vinden en opgaven met bijbehorende correctiemodellen te construeren.
De bedoeling is dat al het ontwikkelde materiaal beschikbaar wordt gesteld via WisBase.[2] Deze site, gehost door de NVvW, biedt toetsmateriaal voor docenten. Op de site kun je gratis een account aanmaken. Voor het inzien van toetsen is het niet nodig om zelf materiaal in te sturen en ook niet om lid te zijn van de NVvW. De prototypes van schoolexamens statistiek die door Cito zijn ontwikkeld, zijn in WisBase opgenomen. We willen je uitnodigen om jouw eigen toetsen statistiek met grote datasets en ict aan WisBase toe te voegen. Op die manier kun je elkaar werk uit handen nemen en ontstaat er een ruime keuze.
Heb je schoolexamenmateriaal ontwikkeld en wil je feedback van Cito? Dan nodigen we je uit om de dataset, opgaven en het correctiemodel naar *se-statistiek@cito.nl* te mailen.[3]

Tot slot

Met het materiaal dat we hebben ontwikkeld hopen we dat we een bijdrage hebben geleverd aan de kwaliteit van schoolexamens statistiek met grote datasets en ict. Door de handleiding en ons materiaal beschikbaar te maken, hopen we handvatten te hebben aangereikt aan docenten om zelf schoolexamens statistiek met grote datasets en ict te kunnen maken. Wij zien jouw materiaal met plezier tegemoet!

Noten

[1] Voor meer informatie over VUSTAT, zie *http://www.vusoft.be/index.html*
[2] Zie https://*wisbase.nl/*
[3] We houden hierbij een slag om de arm: mocht de belangstelling te groot worden, dan zijn we genoodzaakt een keuze te maken.

Over de auteurs

Ivo Claus, Ger Limpens en Irene van Stiphout zijn toetsdeskundigen bij Cito.
E-mailadres: *se-statistiek@cito.nl*.

Martin Kindt

Haakjes, hokjes, hekjes

'Haakjes' zijn de leestekens van de algebra-taal. Aan de neiging om die weg te willen werken moet lang niet altijd worden toegegeven. Met 'hokjes' worden de cellen in een vermenigvuldigingstabel bedoeld. En 'hekjes'?
Daar kun je een probleem van maken.

Sturen met haakjes

De boer had een varken en de vader van de boer was ook de moeder van het varken.
Dit was een van de vele grapjes waar mijn vader, taalliefhebber, mij op trakteerde in mijn jeugd. Hij las deze zin hardop, met volslagen onbegrip van mijn kant tot gevolg. Door een rustpauze in te lassen na 'vader' en de klemtoon op de volgende 'van' te leggen, werd alles duidelijk. Schriftelijk kan dit raadsel eenvoudig worden opgelost met een komma achter 'vader'. Komma's sturen betekenis!

In de algebra sturen we betekenis met haakjes. Zeg je bijvoorbeeld '*het kwadraat van x plus y*', dan kun je niet weten of er $x^2 + y$ of $(x + y)^2$ wordt bedoeld. Je redt het ook niet met '*x plus y in het kwadraat*' want dat kan even goed slaan op $x + y^2$ als op $(x + y)^2$. Tussen twee haakjes, hier ligt een kans voor een aardig sommetje: *voor welke waarden van x en y maakt het niet uit welke van de drie interpretaties je kiest?*
Dat het voor $x = y = 0$ niks uitmaakt, voel je op je klompen aan, maar dat dit ook geldt voor $x = y = ⅓$ vraagt even wat algebra. Hoe los je $x^2 + y = (x + y)^2 = x + y^2$ op? Natuurlijk: 'haakjes wegwerken' bij de middelste vorm.

'Haakjes wegwerken, is populair jargon voor wat in rekenmachinetaal 'expand' of 'uitwerken' heet. 'Haakjes toevoegen' hoor je zelden, terwijl dat toch een net zo'n belangrijke actie in algebra kan zijn. Bij de invoer van functies in de GRM of bij het gebruik van computeralgebra heb je daar om de haverklap mee te maken.
En dan is er ook nog zoiets als 'haakjes vergeten'. Hoe vaak heb ik dat vroeger niet gezien?
De leerling wil bijvoorbeeld -5 substitueren voor x in de vorm $x^2 + 6x + 4$. Hij schrijft doodleuk op:

$-5^2 + 6 \cdot -5 + 4 = 25 - 30 + 4 = -1$.
Als leraar rekende ik dit in zo'n geval niet fout, maar schreef op zijn minst twee rode haakjes om die eerste -5. In de klas vergeleek ik wel $(0 - 5)^2$ met $0 - 5^2$ om de noodzaak van de haakjes duidelijk te maken.
Het verstandig plaatsen van haakjes, ook waar het misschien niet per se noodzakelijk is, maar om te verduidelijken, verdient veel aandacht. Daartoe kun je ook uitdagende probleempjes voorleggen. Bijvoorbeeld[1]:

Plaats zo nodig haakjes in de vier vormen in het linkerlid zó dat er steeds een identiteit ontstaat:

$a + 2 \cdot a + 7 = 3a + 7$
$a + 2 \cdot a + 7 = 3a + 14$
$a + 2 \cdot a + 7 = a^2 + 2a + 7$
$a + 2 \cdot a + 7 = a^2 + 9a + 14$

Natuurlijk kan het best nog wat moeilijker, en kun je er eventjes een sport van maken. Nog aardiger: laat de leerlingen zelf zulke opgaven ontwerpen, dat verdiept en het bevordert reflectie!

De Horner-vorm

Wat maakt de kwadratische functie zo belangrijk dat er zoveel aandacht aan wordt besteed? Ik heb het nooit kunnen ontdekken, maar dat zij al heel lang een plaag is voor een zekere categorie leerlingen is een feit. In de jaren zeventig hadden we in het kader van het project Wiskivon[2] een proefschool voor lbo/mavo in Utrecht. De lerares Nanda kon heel wat aan, maar wat was nu een simpele en inzichtelijke manier om die ellendige kwadratische functies te lijf te gaan? Samen bedachten we dat 'x buiten haakjes brengen' bij twee termen een optie kon zijn. Neem bijvoorbeeld: $x^2 - 6x + 4 = x(x - 6) + 4$. Als je $x = 0$ invult komt er 4 uit en dit gebeurt ook voor $x = 6$. Je hebt dan twee punten op de grafiek, te weten (0, 4) en

(6, 4), die 'even hoog' liggen. Maar dan weet je ook dat de symmetrieas door het punt (3, 0) moet gaan, enzovoort. Dit sloeg aan bij de leerlingen en Nanda was blij.
Tegenwoordig gebruiken de leerlingen een rekenmachine om bij een zekere x de bijpassende y te berekenen, maar er is een tijd geweest dat dit zonder hulp van elektronica moest. Zo van: bereken $f(11)$ als $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Wel, $11^2 - 6{\cdot}11 + 4 = 121 - 66 + 4 = 59$.
Vergelijk dit eens met: $11 \times (11 - 6) + 4 = 59$. De laatste berekening is makkelijker en sneller!
Met hervorming tot $f(x) = x(x - 6) + 4$ is tijdwinst te boeken. Dat had niemand minder dan Newton al in de gaten waar hij bijvoorbeeld
$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0$
herschreef[3] als

$$\overline{\overline{\overline{y-4} \times y+5} \times y-12} \times y+17=0$$

Waarmee hij bedoelde:
$(((y - 4)y + 5)y - 12)y + 17 = 0$
Newton gebruikte dus overkappingen in plaats van haakjes. Ieder polynoom kan op deze wijze worden herschreven. Ik vermoed dat de GRM, via zo'n gestapelde vorm, functiewaarden berekent bij een gegeven polynoomfunctie! Dat scheelt rekentijd en spaart de batterij. Deze 'Horner-vorm' is de meest zuinige om functiewaarden bij polynomen te berekenen.[4]

De hokjes van Sawyer

Een van de aardigste boeken over didactiek van de algebra is *Vision in Elementary Mathematics* van W.W. Sawyer, dat ooit (1969) in vertaling is uitgegeven als Prismaboek met de titel *Aanschouwelijk Algebra*.
Het vermenigvuldigen van veeltermen wordt daarin vormgegeven met tabellen. Zo wordt bijvoorbeeld $(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 2x + 3)$ gegoten in een tabel:

	x^2	$-2x$	$+3$
x^2	x^4	$-2x^3$	$3x^2$
$-4x$	$-4x^3$	$8x^2$	$-12x$
$+5$	$5x^2$	$-10x$	15

De gelijksoortige uitkomsten staan in de diagonalen van 'linksonder naar rechtsboven'. Samennemen daarvan leidt tot een vijfterm van de graad 4, zodat de conclusie is $(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 2x + 3) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 22x + 15$.
De lezer zal het beamen, daar kan geen 'papegaaienbek' tegen op!

Ooit heb ik als leraar zo'n stuk of twintig stencils met zulke tabellen ter invulling gemaakt en die op een vrijdag uitgedeeld aan mijn brugklas met de opdracht thuis een paar van die werkbladen in te vullen. Het weekend was zeer regenachtig en de volgende maandag kwam een meisje triomfantelijk in de les met alle tabellen foutloos ingevuld en mijn hoop de klas een paar dagen voor te zijn met lesmateriaal was vervlogen. Zou dat ook gebeurd zijn als ik dezelfde opgaven op de traditionele manier, dus 'lineair' had afgedrukt?

Terug naar Newtons vierdegraads veelterm. Hij demonstreerde zijn rekenwijze door als voorbeeld de substitutie $y = p + 3$ stapsgewijs toe te passen. Zijn tekst luidde, vrijwel letterlijk vertaald:

> De nieuwe vergelijking wordt
>
> $\overline{p - 1} \times \overline{p + 3} = p^2 + 2p - 3$ en
> $p^2 + 2p + 2$ maal $p + 3 = p^3 + 5p^2 + 8p + 6$
> en $p^3 + 5p^2 + 8p - 6$ maal $p + 3 =$
> $p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 18$
> en dit geeft $p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 1 = 0$

Ik doe dit na, maar dan met Sawyers aanpak:

	p	$+3$
p	p^2	$3p$
-1	$-p$	-3

$+ 5 \rightarrow p^2 + 2p + 2$

	p	$+3$
p^2	p^3	$3p^2$
$2p$	$2p^2$	$6p$
2	$2p$	6

$- 12 \rightarrow p^3 + 5p^2 + 8p - 6$

	p	$+3$
p^3	p^4	$3p^3$
$5p^2$	$5p^3$	$15p^2$
$8p$	$8p^2$	$24p$
-6	$-6p$	-18

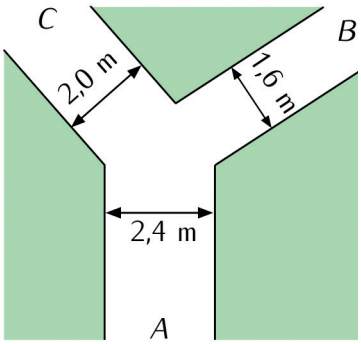
$+ 17 \rightarrow p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 1$

>

Maar dit soort algebra doen we toch al lang niet meer op school? Dat is waar, maar de vraag is of we daar dan misschien toch in tekortschieten. Het stoeien met wat meer ingewikkelde vormen, het organiseren van herleidingen, vooral ook als er meer variabelen in het spel zijn, kan zowel de vaardigheid als het inzicht in algebra vergroten.

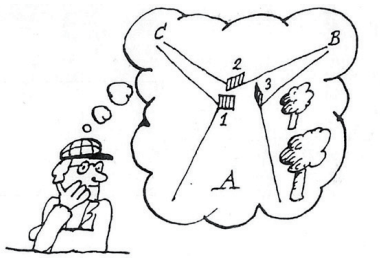
Hekjesproblemen

Geïnspireerd door het werk van Sawyer legde ik mijn leerlingen ooit het volgende probleem voor:[5]
Bij een driesprong komen drie landweggetjes bij elkaar die respectievelijk 1,6 m, 2,0 m en 2,4 m breed zijn. Regelmatig worden er over die wegen kudden vee geleid. Als zo'n kudde bijvoorbeeld geleid moet worden van A naar B (of omgekeerd) wordt de weg naar C door middel van draaihekken afgesloten, zie figuur 1 en 2.



figuur 1

Een slimme ambtenaar heeft bedacht dat je met drie hekken, elk draaiend om een paal geplaatst in een hoekpunt van de door de wegen ingesloten driehoek, kunt volstaan om naar believen één van de wegen precies af te sluiten.



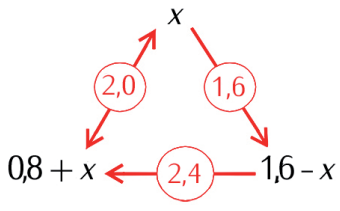
figuur 2 illustratie uit Wiskrant 9 (1977)

De vraag is nu hoe breed moet elk van die hekken zijn, wil het precies passen? Er zijn verschillende strategieën mogelijk.

(1) *Trial and error*
(2) Stel de breedte van één van de hekjes x, druk de breedte van de andere twee ook uit in x en stel een vergelijking op in x.
(3) Stel de breedte van de hekjes x, y en z. Dit leidt tot drie vergelijkingen in x, y en z (waarbij in elke vergelijking één variabele ontbreekt).
(4) Bedenk dat de som van de breedtes van de hekjes gelijk moet zijn aan de halve omtrek van het driehoekige kruispunt.

Methode (4), zou je de gezond-verstand-methode kunnen noemen. Dit gaat zó: de halve omtrek van de driehoek is 3 m. De twee hekjes die de weg naar A afsluiten zijn samen 2,4 m breed, dus blijft er voor het derde hekje 0,6 m over. Net zo vind je voor de andere hekjes de breedte 1,0 m en 1,4 m.
Proef op de som: $0{,}6 + 1{,}0 = 1{,}6$; $0{,}6 + 1{,}4 = 2$ en $1{,}0 + 1{,}4 = 2{,}4$.

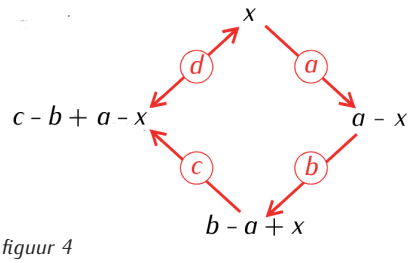
In mijn klas stuurde ik destijds aan op methode (2), omdat ik mijn leerlingen met 'haakjes' en 'minnen' wilde laten opereren. Ik geef de drie hekjes nu zonder verdere uitleg aan met AB, BC en CA.
Stel hekje $BC = x$. Dan: hekje $BA = 1{,}6 - x$ en hekje $AC = 2{,}4 - (1{,}6 - x) = 0{,}8 + x$.
Daar was het Sawyer in zijn boek (en mij in mijn les) om te doen: als je 1,6 van 2,4 aftrekt krijg je 0,8, als je minder van 2,4 aftrekt, krijg je natuurlijk meer, in dit geval + x.
Hekje BC en hekje AC moeten samen de weg naar C kunnen afsluiten, $x + 0{,}8 + x = 2{,}0$ dus $x = 0{,}6$.
Je kunt deze aanpak schematisch weergeven, zie figuur 3:



figuur 3

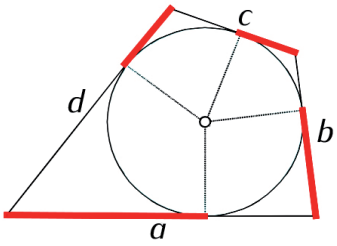
Kan het ook bij een viersprong?

Het is verleidelijk om dan ook eens te kijken naar situaties waarbij meer dan drie wegen bij elkaar komen. Eerst maar eens een viersprong. En om gelijk maar te generaliseren stel ik de breedtes van de vier wegen voor door a, b, c en d. Het bijpassende oplossingsschema wordt dan, zie figuur 4:



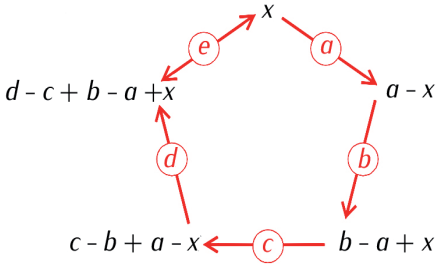
figuur 4

En zie: het gaat alleen goed in het speciale geval $c - b + a = d$ ofwel als $a + c = b + d$.
Kortom, wil er een oplossing zijn, dan moeten van het vierhoekige plein waar de wegen elkaar ontmoeten de sommen van de paren overstaande zijden aan elkaar gelijk zijn. In dit geval kun je de breedte van het hekje langs de kortste zijde (zeg *a)* vrij kiezen (mits < a). De breedtes van de andere hekjes liggen dan vast en het gaat altijd goed.
Met een vierhoek waarvoor $a + c = b + d$ is er iets speciaals aan de hand. Sla een oud meetkundeboek er op na en je vindt dat zo'n vierhoek een *raaklijnenvierhoek* moet zijn,[6] met andere woorden, dat zo'n vierhoek een ingeschreven cirkel heeft, zie figuur 5.



figuur 5

De raaklijnstukken kunnen nu als hekjes worden gezien waarmee de wegen op overstaande zijden worden afgesloten. Er blijft dan één route voor een kudde schapen over. Dit geldt vanzelf ook voor elk ander viertal hekjes dat voldoet.
Het wordt nu nog eens duidelijk dat het bij een driesprong altijd lukt met de hekjes. Elke driehoek heeft immers een ingeschreven cirkel en de raaklijnstukken uit de hoekpunten representeren dan het - in dit geval unieke - drietal hekjes.
Ik ga nog één stapje verder. Het schema bij een vijfsprong



figuur 6

Het gevolg is dat er precies één oplossing is, namelijk $x = \frac{1}{2}(a - b + c - d + e)$.
Helaas, met vijf hekjes kun je slechts twee wegen afsluiten en er blijven dan nog drie wegen open, zodat de kudde zich gemakkelijk in twee groepen kan splitsen.

Noten

[1] Zie Kindt, M. (2011). Principles of Practice. In P. Drijvers (Red.), *Secondary Algebra Education* (pp. 137-178). Rotterdam: Sense Publishers.
[2] Wiskivon (= wiskunde in het vo) was een project van de voorloper van het Freudenthal Instituut, het IOWO.
[3] Uit Newtons boek met de titel *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (uitgegeven in 1711).
[4] Zie Knuth, D. (1938). *The Art of Computer Programming.*
[5] Sawyer introduceerde dit als 'het berenprobleem', waarbij een man zijn driehoekige erf deels kan afsluiten voor beren. Ik heb de context destijds aangepast en erover geschreven in het artikel Tussen twee haakjes (*Wiskrant 9*, november 1977)
[6] Voor een fraai bewijs van de stelling zie bijvoorbeeld Fladt, K. (1932). *Elementargeometrie band 1*, B.G. Berlijn: Teubner.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

Aansluiting tussen voortgezet en hoger onderwijs

PWN-commissie Onderwijs

Hoe kan de aansluiting tussen het voortgezet en hoger onderwijs worden verbeterd? In dit artikel wordt de reactie beschreven van docenten in het hoger onderwijs op de plannen van het PWN en de NVvW.

platform wiskunde nederland

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Inleiding

Het Platform Wiskunde Nederland (PWN) en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) presenteerden in 2018 een voorstel voor een nieuwe opzet van het wiskundeonderwijs in de bovenbouw van havo en vwo. Het voorstel beoogde onder meer een betere aansluiting tussen voortgezet en hoger onderwijs. In 2019 is in een reeks interviews met vervolgopleidingen geverifieerd of de voorgestelde herinrichting tot een betere aansluiting zal leiden. Wij geven hier een synthese van deze interviews.

Knelpunten

Het visiedocument van PWN en NVvW over wiskunde in het voortgezet onderwijs[1] signaleerde knelpunten in de bovenbouw van havo en vwo. Door de ontkoppeling van de wiskundevakken en de profielen, de reductie in onderwijstijd en discrepanties in de instroomeisen van vervolgopleidingen kampt de huidige structuur met een aantal problemen. Deze betreffen onder andere de dubbelzinnige invulling van wiskunde A, dat zowel natuur- als maatschappijprofielen moet bedienen, de kwetsbare positie van de kleine vakken wiskunde C en D, het havo-vak wiskunde B, dat door bijna geen enkele hbo-opleiding wordt geëist, en het ontbreken van statistiek in wiskunde B.

Nieuwe opzet

De nieuwe opzet gaat uit van de wiskundekennis en -vaardigheden die de vervolgopleidingen vragen en kent, zowel voor havo als vwo, drie groepen van leerlingen en drie bijbehorende clusters van onderwerpen. De drie groepen bestaan uit leerlingen die kiezen voor (1) culturele of sociale studies of studies in de gezondsheidszorg, (2) economische of toegepaste bètastudies en (3) fundamentelere bètastudies of technische studies. Voor iedere groep is het domein *informatieverwerking en onzekerheid* (kansrekening, schatten, toetsen, beschrijvende statistiek) relevant, aangevuld met onderwerpen uit de *discrete wiskunde* (grafen, netwerken). De tweede groep heeft daarnaast *algebra, analyse* en *meetkunde* nodig. Voor de derde groep geldt dit in nog sterkere mate.

Interviews

Om de geldigheid van ons voorstel te toetsen, hebben wij 22 vervolgopleidingen geselecteerd die de breedte van het hoger beroeps- en wetenschappelijk onderwijs bestrijken. Per opleiding is een instituut benaderd dat in de Keuzegids van 2018 door de studenten hoog was gescoord en is een interview afgenomen met de onderwijscoördinator of een docent die vertrouwd was met het aan wiskunde gerelateerde onderwijs. Wij vroegen naar de rol en inhoud van de wiskunde in de opleiding, naar de wensen en problemen die er zijn in de instroom vanuit het voortgezet onderwijs, en naar de mening over ons voorstel. De interviews zijn vastgelegd in een apart document.[2] Een eerste samenvatting ervan werd al gegeven in een update van het visiedocument.[3] Merk op dat wij met één docent over twee opleidingen spraken en dat één opleidingsdirecteur ons vroeg het verslag niet te publiceren en de resultaten anoniem te verwerken.

Reacties

De belangrijkste bevinding is dat alle gesprekpartners ons voorstel positief ontvangen. Men vindt de indeling in drie groepen valide en stemt op hoofdlijnen in met de drie clusters van onderwerpen. Opleidingen hebben in de huidige structuur moeite aan te sluiten bij de voorkennis van hun instromende studenten. De oorzaak hiervan is dat

zowel wiskunde A als wiskunde B in de gezondheids- en economieprofielen voorkomen (geen enkele opleiding noemt wiskunde C), door de vrijblijvende positie van wiskunde D, en door de toelaatbaarheid van mbo'ers tot hbo-opleidingen.

De opleidingen in groep (1) in onze steekproef zijn enthousiast over de aandacht voor statistiek en gerelateerde onderwerpen in het voorstel. De *culturele en sociale studies* van hbo en wo hebben ten aanzien van hun instroom geen specifieke behoefte aan andere wiskundige onderwerpen. De *studies in de gezondheidszorg* noemen ook rekenvaardigheid als belangrijk aandachtspunt.

De opleidingen in groepen (2) en (3) onderschrijven het belang van statistiek in de vooropleiding. Zij missen dat in het huidige wiskunde B. Zij hechten daarnaast veel belang aan algebra en analyse. Meetkunde wordt alleen genoemd in relatie tot leren redeneren. Het valt op dat men vaardigheden als redeneren, kritisch denken, inzicht hebben en modelleren vaak identificeert als instroomproblemen. Wat betreft algebraïsche vaardigheid is er daarentegen een diffuus beeld: sommige opleidingen menen dat dit sterker moet, terwijl andere juist vinden dat hierin recent voldoende verbetering is opgetreden.

Interessant is de vraag welke opleidingen bij de *economische en toegepaste bètastudies* horen en welke bij *fundamentelere bètastudies of technische studies*. In het wo lijkt dit eenvoudig: opleidingen die nu wiskunde B als ingangseis hebben vallen in groep (3). De indeling correspondeert met de wiskundige inhouden die in de opleiding aan bod komen. Parallel hieraan loopt de omgang met wiskundige ict: studies in groep (3) nemen afstand van de grafische rekenmachine maar gebruiken een grote variatie aan wiskundesoftware; studies in groepen (1) en (2) nemen hier een minder expliciet standpunt in.

In het hbo is het onderscheid tussen groepen (2) en (3) ingewikkelder. Vrijwel geen enkele opleiding stelt op dit moment wiskunde B als ingangseis. Er is een breed instroombeleid, waarvoor men desgevraagd twee oorzaken aangeeft: de grote mate van differentiatie die toch al moet plaatsvinden vanwege toelaatbaarheid vanuit het mbo, en de wens om zoveel mogelijk studenten te kunnen toelaten. Tegelijk worstelen veel opleidingen wel met het wiskundeniveau van de instromende studenten. Een herbezinning lijkt hier op zijn plaats.

Er blijken grote verschillen te bestaan binnen dezelfde studie aan verschillende instellingen; de hbo-opleidingen informatica en ict zijn een voorbeeld. De opkomst van de *data science* veroorzaakt in diverse studies een sterkere behoefte aan wiskundige voorkennis; denk bijvoorbeeld aan statistische evidentie in rechtszaken en aan de mathematisering van de biologie. Het is onmogelijk om een curriculum voor het voortgezet onderwijs te maken dat aan de instroomwensen van alle vervolgopleidingen voldoet. Ook het hoger onderwijs heeft hier een taak. Opleidingen waar de wiskunde nieuw binnentreedt moeten hieraan wennen.

Conclusie

Wij mogen concluderen dat ons voorstel voor de herinrichting van wiskunde in de bovenbouw van havo en vwo valide is. Ook is het een verbetering van de huidige situatie, door de brede opname van statistiek, het gerichter aanbieden van algebra en analyse, en het uniformiseren van de voorkennis die van startende studenten verwacht kan worden.

Noten

[1] *Wiskunde in het voortgezet onderwijs.* Zie: *platformwiskunde.nl/wp-content/uploads/2018/01/20180117-wiskunde-in-vo.pdf*

[2] *Aansluiting tussen voortgezet en hoger onderwijs: een verslag van 21 interviews.* Zie: *platformwiskunde.nl/wp-content/uploads/2020/01/verslagen-openbaar.pdf*

[3] *Wiskunde in het voortgezet onderwijs: aandacht voor de bovenbouw.* Zie: *platformwiskunde.nl/wp-content/uploads/2020/01/20191031-W-vo-bb.pdf*

PWN-Commissie Onderwijs

Theo van den Bogaart; Marjan Botke; Wim Caspers; Bas Edixhoven; Jan Hontelez; Jan Karel Lenstra (voorzitter); Heleen van der Ree (secretaris); Ebrina Smallegange; Hester Vogels.

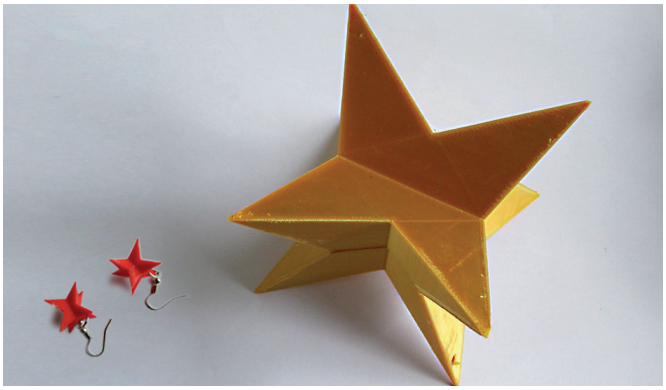
Rob van Oord

Dagen met sterren

Op de 26e NWD waren er veel voordrachten waar sterren een rol in speelden.

Dodecaster

De NWD 2020 stonden voor mij in het teken van de sterren. De workshop die Marjan Botke en ik hebben gegeven eindigde met de dodecaster[1], die je in een kubus vindt als holte, na het inklappen van een dodecaëder in een kubus. Henk Hietbrink had speciaal voor de NWD met een 3D-printer een aantal van die sterren voor ons gemaakt en zelfs oorbelletjes, zie figuur 1.

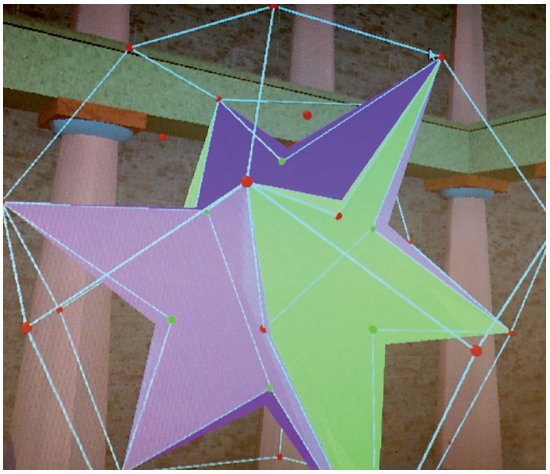


figuur 1 Dodecaster en oorbelletjes 3D-print

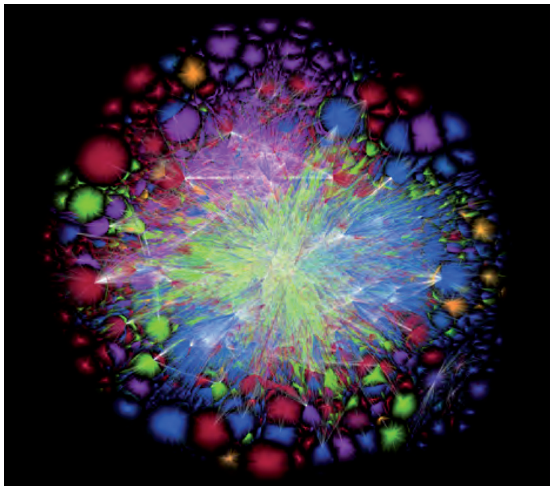
In de workshop van Sjaak Kamerling[2] en zijn Spaanse vriend José Rodriguez was het voor José een uitdaging om deze ster in virtuele reality (NeoTrie) te construeren, zie figuur 2. Vol trots toonde José hoe hij die ster gemaakt had. Hij staat nu ook op zijn website.[3]

Lichtstralen spiegelen

In de startlezing legde Nelly Litvak[4] uit hoe je uit grote verzamelingen data van netwerken snel relevante informatie kunt halen. De bijbehorende plaatjes bevatten ook veel sterren van netwerken, zie figuur 3.



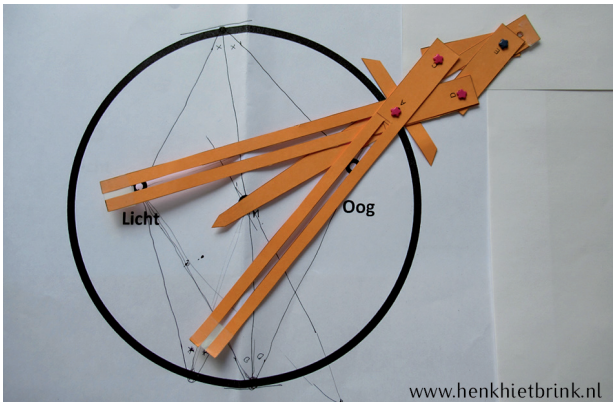
figuur 2 Dodecaster in NeoTrie



figuur 3 Sociaal netwerk van Nelly Litvak

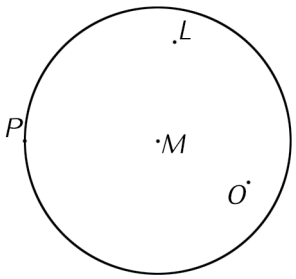
Na de startlezing was ik bij de workshop van Henk Hietbrink.[5] Hij had in oude manuscripten een tekening gevonden van een instrument (een variant van Marcolongo

op een instrument van Leonardo da Vinci) dat je kunt gebruiken om lichtstralen van lichtbron naar oogpunt te tekenen bij spiegelen in een lijn en bij spiegelen via de buitenkant van een cirkel, of via de binnenkant van een cirkel. Deze techniek is van belang bij het ontwerpen van anamorfosen voor een bolvormige of cilindervormige spiegel. Meer hierover kun je vinden in zijn artikel hierover in Uitwiskeling.[6] We maakten een soort passer (van karton, met splitpennen om sommige onderdelen te kunnen bewegen) waarmee we snel het punt op de lijn of op de cirkel konden vinden, waarin de lijn van lichtbron naar oogpunt gespiegeld wordt, zie figuur 4.



figuur 4 Weerspiegelpasser

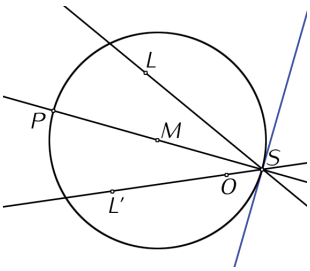
We werden uitgedaagd om met de 'passer' een (of meer) punten op de cirkel van het werkblad te 'construeren' waarheen je moet kijken om vanuit het oog O de lichtbron L weerspiegeld te kunnen zien, zie figuur 5.



figuur 5 Werkblad

Uitgangspunt bij spiegelen in een cirkel is dat je de raaklijn neemt in een punt op de cirkel en dat daarbij de hoek van inval gelijk moet zijn aan de hoek van terugkaatsing. De middellijn die door het raakpunt S gaat maakt in dat geval ook gelijke hoeken met de invallende en teruggekaatste lichtstraal: $\angle LSM = \angle OSM$, zie figuur 6.

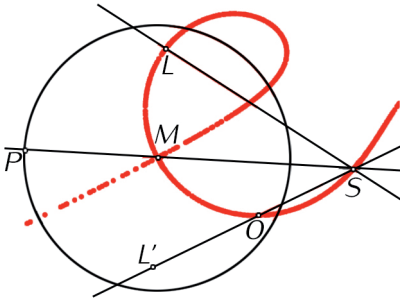
Soms zijn er binnen een cirkel vier mogelijke spiegellijnen van lichtbron naar oogpunt te tekenen. Je kunt dit



figuur 6 Spiegelen in een cirkel

begrijpen als je bijvoorbeeld met GeoGebra alle mogelijke weerspiegelpunten tekent, waarbij je ervoor zorgt dat de bissectrice van de spiegellijnen door het middelpunt van de cirkel gaan, zie figuur 6. Deze kromme snijdt de cirkel soms in vier punten, zie figuur 7. In dat geval verwachtte Henk dus meer dan twee oplossingen te zien bij ons deelnemers.

Ik beschrijf het recept voor de constructie van de kromme van de spiegelpunten: Gegeven zijn de cirkel met middelpunt M, en daarbinnen de punten O (oog) en L (lichtbron). Teken voor een willekeurig punt P op de cirkel de lijn PM. Teken het spiegelbeeld L' van L bij spiegelen in lijn PM. S is het snijpunt van lijn L'O en lijn PM. Zet het spoor aan van S terwijl je P over de cirkel beweegt. Overal waar dit spoor van het punt S de cirkel doorsnijdt is S een gevraagd punt waarbij de lichtstraal uit L in de cirkel weerspiegeld wordt naar het oog O. In figuur 7 zie je vier van deze mogelijke spiegelpunten op de cirkel. Ik daag de lezer uit om zelf met GeoGebra aan de slag te gaan en met 'Spoor aan' bij gegeven L en O dergelijke S-krommen te construeren.



figuur 7 Spiegelpuntenkromme

Leonardo en de sterren

Op de zaterdag woonde ik de inspirerende lezing van Dirk Huylebrouck[7] over Leonardo da Vinci en zijn kijk op veelvlakken en sterren. Onder zijn redactie was het vijftiende-eeuwse boek Divina Proportione van >

Luca Pacioli met tekeningen van Leonardo da Vinci door Emma Grootveld vertaald in het Nederlands. Dirk had hetzelfde inklapbare model van de dodecaëder als ik gemaakt heb, maar hij kende niet de vorm van de dodecaster die de holte vormt die ik in onze workshop had laten zien. Ik was blij dat ik hem een exemplaar van zo'n ster kon geven. De tekeningen in het boek zijn gemaakt door Rinus Roelofs. In het Atrium stonden tafels vol met schitterende sterren die door hem zijn ontworpen en gemaakt, zie figuur 8. Aansluitend op de lezing van Dirk liet Rinus in animaties zien hoe je van de ene ster naar de andere kunt transformeren. Het was ook zeer verhelderend om te zien hoe de opengewerkte sterren van Escher daar vanzelf tevoorschijn kwamen.

figuur 8 Modellen van Rinus Roelofs

Noten

[1] Zie file:///C:/Users/876298/Downloads/fi_nwd_2020_rob_van_oord.pdf en file:///C:/Users/876298/Downloads/fi_nwd_2020_rob_van_oord_hand-out.pdf

[2] Zie file:///C:/Users/876298/Downloads/fi_nwd_2020_sjaak_kamerling.pdf en file:///C:/Users/876298/Downloads/fi_nwd_2020_kamerling_hand-out.pdf

[3] Zie *https://youtu.be/Y13cOyvJG10*

[4] Zie *file:///C:/Users/876298/Downloads/nwd2020_n_litvak_webversie.pdf*

[5] Zie *http://www.fransvanschooten.nl/fvs_nwd2020_add.htm*

[6] Zie *http://www.staff.science.uu.nl/~hietb101/gnpdf/Uitwiskeling_Weerspiegeling.pdf*

[7] Zie file:///C:/Users/876298/Downloads/fi_nwd_2020_dirk_huylebrouck.pdf

[8] Een uitgebreid verslag van deze NWD kun je vinden in het *Nieuw Archief*, juni 2020.

Over de auteur

Rob van Oord is docent wiskunde, van augustus 1974 tot augustus 2014 op het Coenecoop College in Waddinxveen, daarna als invaller op scholen in de regio. Hij is lid van de NVvW werkgroep havo-vwo en redactielid van de Zebra-reeks. E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Kleintje didactiek

Lonneke Boels

Continu of discreet

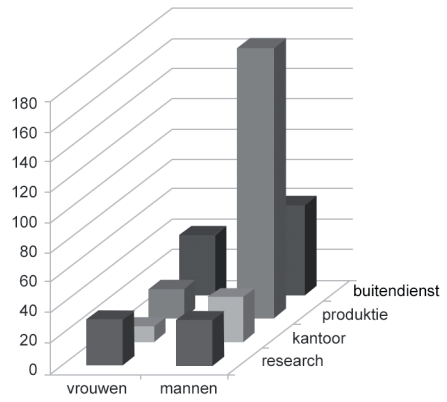
In een eerder artikel schreef ik over meetniveaus bij statistiek.[1] Zowel in de syllabus van havo wiskunde A als in sommige schoolboeken lijkt het alsof discreet en continu meetniveaus zijn, vergelijkbaar met nominaal en ordinaal, terwijl dat onjuist is. Hoe zit het dan wel?
Variabelen zijn in theorie discreet of continu. Een variabele is discreet als er geen tussenliggende waarnemingen mogelijk zijn. Als we op nominaal of ordinaal niveau meten (denk bij nominaal bijvoorbeeld aan geslacht[2] en bij ordinaal bijvoorbeeld aan medailles zoals brons, zilver en goud) dan zal duidelijk zijn dat dit discrete variabelen zijn. Kwalitatieve[3] variabelen zijn dus

altijd discreet. Een continue variabele is een variabele waarbij in theorie, elke waarde tussen twee gegeven waarden kan worden aangenomen.
Discreet en continu is in de statistiek vooral een theoretisch concept. In de praktijk[4] zijn de metingen voor kwantitatieve variabelen namelijk altijd discreet. Dit komt door de beperkingen van je meetinstrument. Een voorbeeld: de lengte van leerlingen kan misschien in mm nauwkeurig worden gemeten maar dan houdt het doorgaans toch wel op.
Verder denken sommige leerlingen dat discreet betekent dat je hele getallen hebt (integers) en dat lengte daarom niet discreet is. Een eenvoudige manier om duidelijk te maken dat het daar niet om gaat, is door de lengte dan om te zetten in een andere maat, zoals millimeter waardoor uitsluitend nog hele getallen in de set van mogelijke waarnemingen voorkomen (vanwege de nauwkeurigheid van je meetinstrument). De kommagetallen van lengte in meter zijn nu omgezet naar hele getallen in millimeter. Maar lengte is (in theorie) nog steeds continu. Dus dat je iets kunt weergeven als een heel getal, betekent niet dat het per se discreet is.

1 Het bedrijf

Een bedrijf met 400 personeelsleden heeft vier afdelingen waar zowel mannen als vrouwen werken. In het jaarverslag staat een 3D-diagram waarin je onder meer kunt aflezen dat op de afdeling produktie veel meer mannen dan vrouwen werken. Zie de figuur.

figuur



1 Om welke twee statistische variabelen gaat het hier? Geef bij elk van deze twee variabelen aan of ze kwalitatief of kwantitatief is, discreet of continu, en nominaal of ordinaal.

figuur 1 Uit: bijlage bij de syllabus wiskunde A havo 2017

Het onderscheid tussen continu en discreet is, zoals hiervoor uitgelegd, uitsluitend theoretisch. Het is bovendien zo dat niet alle kwantitatieve variabelen continu zijn.[5] Dat laat mij achter met de vraag wat ik leerlingen dan moet leren over continue variabelen in de statistiek. In de bestaande schoolboeken heb ik nog geen antwoord op deze vraag gevonden.[6] In het pilotmateriaal van cTwo vind ik ook geen antwoord op mijn vraag waarom dit onderscheid voor leerlingen zinvol is, wat het praktisch nut is, en vooral: hoe ze dat bij een examenvraag zouden moeten toepassen. En de voorbeeldexamenvraag I,1, zie figuur 1, bij de syllabus gaat uitsluitend over kwalitatieve, nominale variabelen en inderdaad, die zijn altijd discreet.

Met dank aan Paul Drijvers voor zijn commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Noten

[1] Boels, L. (2017). Kleintje didactiek. Meetniveaus. Euclides, jaargang(93)3.

[2] Je kunt de verzameling geslacht natuurlijk groter maken dan alleen man en vrouw maar ook dan blijft het aantal mogelijkheden beperkt.

[3] Zoals in het artikel over meetniveaus uitgelegd[1], is het feitelijk niet de variabele die kwalitatief is maar het niveau waarop deze wordt gemeten. Maar in het Nederlands ontbreekt een woord hiervoor. Ik gaf toen het voorbeeld dat Paul Drijvers en Marcel Voorhoeve gebruikten van de variabele temperatuur die je op kwalitatief niveau kunt meten (warm, koud, enzovoorts) of op kwantitatief niveau (bijvoorbeeld graden Celsius).

[4] Dit geldt zeker voor de statistiek van wiskunde A op de havo maar ook meer in het algemeen geldt dat statistiek uitspraken doet over data, populaties, enzovoorts dus over de praktijk.

[5] Hierover in een volgend artikel meer.

[6] Op de site van collega Hofstede wordt een voorbeeld van diamantsorteerders gebruikt die een onduidelijke indeling in gewichtsklassen hebben als de klassen 5-6 gram en 7-8 gram zijn en een ruwe diamant van 6,8 gram moet worden ingedeeld (ruwe diamanten worden hier gesorteerd naar gewicht). Dit probleem zou zich alleen voordoen als de variabele continu is. Maar omzetting van de gewichten naar milligrammen of klassengrenzen op één decimaal (in grammen) zou het probleem van de sorteerders ook oplossen. Dus bijvoorbeeld de klassen 5,5-6,4 gram en 6,5-8,4 gram. Zie *http://www.hhofstede.nl/modules/klassenindeling.htm*

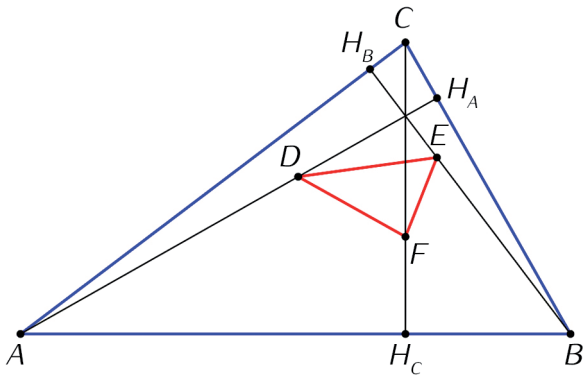
Herman Bloem, Igor Hoveijn, Floor van Lamoen

Twee gelijkvormige driehoeken

Een verrassende constructie van een gelijkvormige driehoek in een driehoek met behulp van de hoogtelijnen.

Inleiding

Uitgaande van een gegeven driehoek zijn talloze nieuwe driehoeken te construeren. In sommige gevallen is de nieuwe driehoek gelijkvormig met de gegeven driehoek. Een voorbeeld is de driehoek met als hoekpunten de snijpunten van de zwaartelijnen met de overstaande zijden. Meestal zal de nieuwe driehoek niet gelijkvormig zijn met de gegeven driehoek. De voetpunten driehoek bijvoorbeeld, waarvan de hoekpunten de snijpunten van de hoogtelijnen met de overstaande zijden zijn, is in het algemeen niet gelijkvormig met de gegeven driehoek. Hier construeren we een familie van nieuwe driehoeken, waarvan één lid altijd gelijkvormig is met de gegeven driehoek. We hebben nergens vermelding van deze driehoek kunnen vinden, daarom formuleren we hierover een stelling met een bewijs. Voor achtergrond in meetkunde verwijzen we bijvoorbeeld naar Molenbroek [3], Hartshorne [2], Coxeter [1] en Ostermann & Wanner [4].



figuur 1 Driehoek ABC en de daarmee gelijkvormige driehoek DEF

De stelling is een bijproduct van een studie naar iets anders, we zullen verderop kort aangeven hoe deze daaruit volgt. Eerst formuleren we een constructie en daarna de stelling. Gegeven een driehoek ABC. Laten H_A, H_B en H_C de voetpunten zijn van de hoogtelijnen uit A, B en C. Laat vervolgens D het punt zijn op twee derde van het lijnstuk AH_A gerekend vanaf A. Op dezelfde manier worden de punten E en F geconstrueerd op BH_B respectievelijk CH_C, zie figuur 1.

Stelling 1. De driehoek DEF is gelijkvormig met driehoek ABC.

De stelling heeft nog minstens twee gevolgen. Het eerste is in feite al bevat in het bewijs van de stelling.

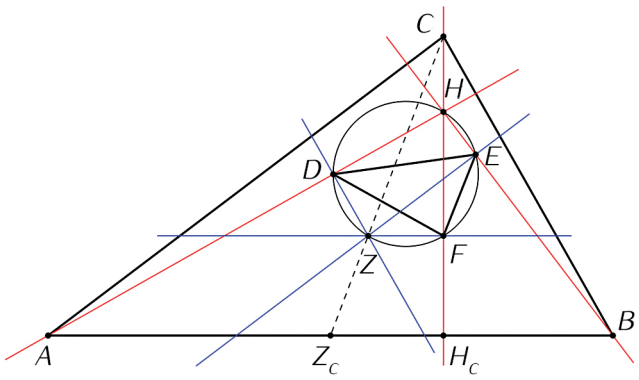
Gevolg 2. Het orthocentrum (middelpunt van de omgeschreven cirkel) van driehoek DEF ligt midden op het lijnstuk ZH en dus op de Eulerlijn. Hierin is H het hoogtepunt en Z het zwaartepunt van driehoek ABC.

Gevolg 3. De omgeschreven cirkel van driehoek DEF is een element van de cirkelbundel gedefinieerd door de omgeschreven cirkel en de negenpuntcirkel van driehoek ABC.

In de volgende paragraaf geven we een meetkundig bewijs voor stelling 1 en gevolg 2. Een bewijs voor gevolg 3 is van een geheel ander karakter, dat geven we hier niet. Verder bespreken we de achtergrond van de stelling en in dat kader geven we tot slot nog een heel ander bewijs.

Meetkundig bewijs

Het meetkundige bewijs van stelling 1 maakt gebruik van gelijkvormigheid, de stelling van Thales en eigenschappen van koordenvierhoeken. De driehoeken *ABC* en *DEF* tezamen met een aantal hulplijnen zijn weergegeven in figuur 2.



figuur 2 De driehoek ABC en de driehoek DEF. De hoogtelijnen zijn in rood aangegeven, H is het hoogtepunt van ABC. Door het zwaartepunt Z zijn lijnen door D, E respectievelijk F in blauw aangegeven. H_C en Z_C zijn de snijpunten van de hoogtelijn en de zwaartelijn door C en de zijde AB.

Bewijs van stelling 1. De punten Z en F liggen op twee derde van de cevianen CH_C en CZ_C. Daarom is lijnstuk ZF evenwijdig aan AB (idem $ZE \parallel AC$ en $ZD \parallel BC$) en dus staat ZF loodrecht op HF. Met de stelling van Thales ligt F op de cirkel met middellijn HZ. Op dezelfde manier volgt dat de punten D en E op die cirkel liggen. De vijf punten H, D, Z, F en E liggen dus op één cirkel. In het bijzonder is $DZFE$ een koordenvierhoek. Dan geldt dat hoek DFE gelijk is aan hoek DZE en aangezien hoek DZE gelijk is aan hoek ACB geldt voor de driehoeken ABC en DEF dat hoek F gelijk is aan hoek C. Evenzo is hoek D gelijk aan hoek A en hoek E is gelijk aan hoek B. De driehoeken ABC en DEF zijn daarom gelijkvormig. □

Hieruit volgt direct het bewijs van gevolg 2.
Bewijs van gevolg 2. Uit het voorgaande bewijs volgt dat ZH een middellijn is van de omgeschreven cirkel van driehoek DEF. Het middelpunt van die cirkel ligt dus in het midden van ZH. □

Meetkundige constructie

Stelling 1 is gevonden in een studie die begint met de vraag welke driehoek ontstaat als ieder hoekpunt in de overstaande zijde gespiegeld wordt. Na deze meetkundige formulering vatten we deze constructie op als een afbeelding op de verzameling van driehoeken. Als we vervolgens een parameter invoeren krijgen we een familie van afbeeldingen. Een bijzonder lid van deze familie leidt direct tot bovenstaande stelling. De formulering als afbeelding heeft vele voordelen, het nadeel is dat de meetkunde uit het zicht raakt. Daarom is voor dit bijzondere geval gezocht naar een meetkundig bewijs voor de stelling.
Om de meetkundige constructie toe te lichten gebruiken we figuur 1. We beginnen met de driehoek ABC. Vervolgens maken we een nieuwe driehoek DEF als volgt. Laat A' het beeld zijn van spiegeling van punt A in de lijn door B en C en neem $D = A'$. Op een zelfde manier construeren we B' en C' en nemen we $E = B'$ en $F = C'$. Onder deze constructie wordt de driehoek ABC als het ware 'uitgeklapt'. De vraag is wat het verband is tussen de driehoeken ABC en DEF anders dan dat DEF het beeld van ABC is. Daar willen we hier niet uitgebreid op ingaan. Stelling 1 is gevonden in een generalisatie van de bovenstaande constructie en deze gaat als volgt. We introduceren een parameter waarmee we een hele familie van constructies krijgen.
In de constructie met parameter $t \in \mathbb{R}$ maken we eerst de punten A', B' en C' als boven. Vervolgens nemen we D op de lijn door A en A' zodanig dat $|AD| = |t| \cdot |AA'|$. Als $t > 0$ is het lijnstuk AD hetzelfde gericht als AA' en voor $t < 0$ is de richting tegengesteld. Op dezelfde manier construeren we E en F. Voor $t = 1$ is driehoek DEF de 'uitgeklapte' driehoek ABC als boven en voor $t = \frac{1}{2}$ is DEF de zogenaamde voetpuntendriehoek van ABC (driehoek $H_AH_BH_C$ in figuur 1). Stelling 1 over gelijkvormige driehoeken vinden we voor $t = \frac{1}{3}$.

De familie van constructies heeft de volgende eigenschappen.

1. Zij is equivariant met betrekking tot translaties, rotaties, spiegelingen en uniforme schaling.
2. Het beeld van een gelijkbenige driehoek is een gelijkbenige driehoek.
3. Het beeld van een gelijkzijdige driehoek is een gelijkzijdige driehoek.

Constructie in ℂ en bewijs

Een andere kijk op de meetkundige constructie krijgen we als we coördinaten voor driehoeken introduceren.
Als eerste identificeren we het vlak $\mathbb{R}^2$, waarin de driehoek ligt, met $\mathbb{C}$. De drie hoekpunten A, B en C identificeren we met de complexe getallen a, b en c. De driehoek ligt dus vast als het drietal complexe getallen (a, b, c) gegeven is. Omdat de constructie equivariant is met betrekking tot translaties, kunnen we één van de

hoekpunten in de oorsprong van $\mathbb{C}$ leggen, we kiezen daarvoor a. Het drietal gaat dan over in $(0, b-a, c-a)$.

De constructie is ook equivariant met betrekking tot rotaties en uniforme schalingen, dus we kunnen één van de overgebleven hoekpunten op de reële as in het punt 1 leggen, daarvoor kiezen we $b-a$. Het drietal gaat dan over in $(0, 1, \frac{c-a}{b-a})$. De driehoek is nu met één complex getal vastgelegd.
Voortaan noemen we het drietal $(0, 1, z)$ de *genormeerde* driehoek z. Dit heeft zin omdat de *vorm* van een driehoek invariant is onder translaties, rotaties en uniforme schalingen. Complexe getallen optellen komt meetkundig overeen met transleren, complexe getallen vermenigvuldigen komt overeen met roteren en schalen.
Het voordeel van het gebruik van complexe getallen is dat spiegelen heel gemakkelijk is. In een genormeerde driehoek komt hoekpunt C overeen met een complex getal z, dus C' in de meetkundige constructie komt overeen met de complex geconjugeerde $\overline{z}$ van z. Om niet steeds complex geconjugeerden met strepen aan te hoeven geven, voeren we de volgende notatie in

$$u = z = x + y\mathbf{i} \text{ en } v = \overline{z} = x - y\mathbf{i}$$

In *complex geconjugeerde coördinaten* u en v gaan we nu de parameter afhankelijke constructie beschrijven.
We hebben hierboven al gezien dat het punt C' overeenkomt met v, dus het punt F komt overeen met $u + t(v - u)$. Met verwisselen van hoekpunten is in te zien dat E overeenkomt met $1 + t(\frac{u}{v} - 1)$ en D met $t\frac{u-v}{1-v}$. We hebben nu de hoekpunten van de driehoek DEF, rest nog deze te normeren zoals hierboven beschreven:

$$(t\tfrac{u-v}{1-v},\ 1 + t(\tfrac{u}{v} - 1),\ u + t(v-u)) \to (0, 1, F_t(u, v))$$

We kunnen dit als volgt samenvatten. Een genormeerde driehoek komt overeen met het complexe getal u. Het genormeerde beeld van deze driehoek komt overeen met het complexe getal $F_t(u, v)$ waarin:

$$F_t(u,v) = v\frac{(1-2t)u + 2tv + (t-1)uv - tv^2}{tu + (1-t)v - 2tuv + (2t-1)v^2}$$

De parameter afhankelijke constructie hebben we hiermee vervangen door een parameter afhankelijke *afbeelding* $F_t : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die we alleen bekijken op $\{(u, v) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid v = \overline{u}\}$.
Het bewijs van stelling 1 is met behulp van de afbeelding F_t direct te geven.

Bewijs van stelling 1. Neem, in de parameter afhankelijke meetkundige constructie, $t = \frac{1}{3}$. Dan ligt het punt D op $\frac{2}{3}$ van het lijnstuk AH_A, zie figuur 1. Evenzo liggen E en F op $\frac{2}{3}$ van de lijnstukken BH_B respectievelijk CH_C. Voor de afbeelding F_t geldt dan $F_{\frac{1}{3}}(u, v) = v$ voor alle u en v. Aangezien de genormeerde driehoeken u en $v = \overline{u}$ gelijkvormig zijn, zijn de driehoeken ABC en DEF gelijkvormig. □

Tot slot nog een paar opmerkingen.

1. De driehoeken met $A = B$ kunnen we niet op onze manier normeren, deze ontbreken dus in de beschrijving.
2. Er zijn verschillende genormeerde driehoeken die met z gelijkvormig zijn. Een daarvan is $\overline{z}$, de andere laten we hier buiten beschouwing.
3. Uit het feit dat $F_{\frac{1}{3}}(u, v) = v$ voor alle u en v, volgt dat de oriëntaties van de driehoeken ABC en DEF altijd verschillend zijn.
4. Naar aanleiding van dit bewijs rijst de vraag of er nog meer waarden van t zijn waarvoor de genormeerde driehoek u gelijkvormig is met $F_t(u, v)$. Dat blijkt alleen nog voor $t = 0$ het geval te zijn.
   Dan is $F_0(u, v) = u$ voor alle u en v.

Noten

[1] Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry.* Hoboken: Wiley.
[2] Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond.* Berlijn: Springer.
[3] Molenbroek, P. (1948). *Leerboek der vlakke meetkunde.* Groningen: Noordhoff.
[4] Ostermann, A. & Wanner, G. (2012). *Geometry by its History.* Berlijn: Springer.

Over de auteurs

Herman Bloem, docent 1e en 2e graads wiskundeopleiding, NHL-Stenden te Leeuwarden, E-mailadres: *Herman.bloem@nhlstenden.com.* Igor Hoveijn, docent 1e graads wiskundeopleiding, NHL-Stenden te Leeuwarden, E-mailadres: *igor.hoveijn@nhlstenden.com.* Floor van Lamoen, afdelingsleider en docent wiskunde aan het Ostrea Lyceum te Goes, E-mailadres: *lmo@ostrealyceum.nl*

Boekbespreking

Alex van den Brandhof

Eenzaamheid, trauma's, rouw en liefde: roman over een wiskundedocent

Titel: Met iedere regendruppel huilt mijn mislukte leven in de natuur
Auteur: Gerardo Soto Y Koelemeijer
Uitgever: Uitgeverij Anabasis
ISBN: 978-90-903-2135-6, 320 pagina's paperback
Prijs: € 22,99

Onder de lezers van dit tijdschrift is Gerardo Soto Y Koelemeijer vooral bekend als auteur van de boeken *Wiskundigen mogen niet huilen*, *Wie is er bang voor wiskunde?* en het Zebraboekje *De (max,+)-algebra*. Deze wiskundeleraar van het Stedelijk Gymnasium Leiden schrijft echter ook romans. Zijn derde, *Met iedere regendruppel huilt mijn mislukte leven in de natuur*, is onlangs verschenen.

> "Verhalen zijn niet alleen voor een vak als geschiedenis weggelegd."

Hoofdpersoon is Pieter Heuvelburcht, een neerslachtige wiskundeleraar van 52 jaar die al ruim dertig jaar op 'het lyceum' werkt. Hij hekelt de moderne onderwijscultuur en de werkwijze van de schoolleiding. Holle begrippen als 'doorpakken' – verschrikkelijk vindt Heuvelburcht het. Hij heeft schoon genoeg van de school en besluit het roer radicaal om te gooien. Heuvelburcht zegt zijn baan op om een nieuw leven in Madrid te beginnen. Bij zijn afscheid, waar Heuvelburcht overigens totaal niet op zat te wachten, is hij in zijn element. In een lange monoloog geeft hij een vlijmscherpe repliek op de hedendaagse onderwijscultuur. Een heerlijke tirade, waarin Soto Y Koelemeijer ongetwijfeld zijn eigen visie op het onderwijs laat doorschemeren.

Vanaf het moment dat Heuvelburcht in Madrid is, verandert het vertelperspectief. Van de hij-vorm gaat Soto Y Koelemeijer over in de ik-vorm, bedoeld om meer actie in het verhaal te brengen. Heuvelburcht ondernéémt ook daadwerkelijk actie, al lopen die veelal uit op een fiasco. *Met iedere regendruppel huilt mijn mislukte leven in de natuur* gaat over eenzaamheid, trauma's, rouw en liefde. Ondertussen snijdt Soto Y Koelemeijer diverse thema's aan, zoals het kapitalistische systeem, in Heuvelburchts ontmoetingen met de uit Guinee-Bissau afkomstige Mutis. Naarmate het boek vordert, wordt het Heuvelburcht steeds duidelijker dat zijn leven een grote mislukking is. Alleen de jaren die hij doorbracht met Bart, Heuvelburchts beste, en eigenlijk enige, vriend, waren de moeite waard. Maar Bart is dood. Marije en Fátima, voor wie Heuvelburcht intense gevoelens koestert, kunnen zijn depressies niet verhelpen. Het ene debacle na het andere dient zich aan. De ellende spoelt hij weg met veel alcohol. Heuvelburcht verlangt naar het einde.
Op een mooie manier vlecht Soto Y Koelemeijer de tragische gebeurtenis die in 2017 plaatsvond op het Stedelijk Gymnasium in Den Bosch in zijn boek. Toen sprong daar een wiskundeleraar voor de ogen van leerlingen van het dak van de school. (Nee, Heuvelburcht gaat niet dood.) En geniaal is de wijze waarop de schrijver een soort Droste-effect in het boek weet te creëren.
Soto Y Koelemeijer presenteert zijn eigen visie op goed onderwijs bij conferenties als 'researchED' en de Nationale Wiskunde Dagen. Een van zijn stokpaardjes is het vertellen van verhalen in de les, waarnaar hij sinds 2017 onderzoek doet. Aan het eind van *Met iedere regendruppel...* komt de protagonist erachter dat die verhalen niet alleen voor een vak als geschiedenis zijn weggelegd. Komt er dan toch nog licht aan het einde van de lange donkere tunnel waarin Heuvelburcht zich al die tijd begaf?

Over de recensent

Alex van den Brandhof (*www.alexvandenbrandhof.nl*) combineert zijn baan als wiskundeleraar op het Gymnasium Muttenz (Zwitserland) met wetenschapsjournalistiek. Hij schrijft onder meer over wiskunde voor *NRC*.
E-mailadres: *brandhof@gmail.com*

Mieke Abels

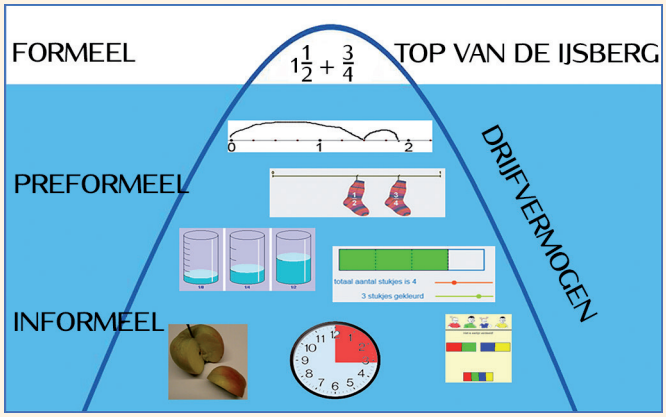
Het Flzier gericht op...

Het drijfvermogen van de ijsberg

Iedere docent zou het moeten kennen: de metafoor van de ijsberg. Dit model helpt na te denken over de rol van voorkennis van leerlingen en in te zien wat er eventueel is misgegaan in het leerproces.

Het ijsbergmodel

Het ijsbergmodel[1] heb ik leren kennen toen ik in het project Speciaal Rekenen werkte en later heb ik het uitgebreid toegepast bij het ontwerpen van een lessenserie voor de DWO (Digitale Wiskunde Omgeving).[2] Aan de hand van het voorbeeld van breuken zal ik uitleggen wat er met de metafoor wordt bedoeld.



figuur 1 Een ijsbergmodel voor breuken

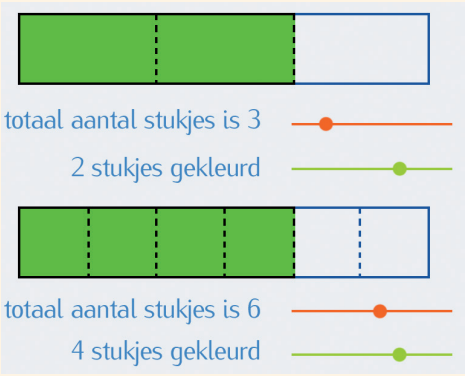
Op een bepaald moment van het leertraject leren leerlingen formeel rekenen met breuken. Dit vormt hier de top van de ijsberg. De metafoor stelt dat de top pas boven water komt als het gedeelte onder water voldoende drijfvermogen voortbrengt. In deze context betekent dat: leerlingen kunnen pas formeel met breuken rekenen, als ze kunnen teruggrijpen op activiteiten en situaties met betrekking tot breuken die 'onder water liggen'. Het drijfvermogen van de ijsberg wordt dus gegeven door de activiteiten en situaties op informeel en preformeel niveau. Deze moeten dus in het leertraject voorafgaan aan de activiteiten op het formele niveau.

Van informeel naar preformeel

Informele situaties zijn bijvoorbeeld het 'eerlijk verdelen' of 'stukjes op een strook kleuren'. Op dit niveau spreken leerlingen met behulp van benoemde breuken, zoals 'één van de vier stukjes appel', 'drie van de vier stukjes gekleurd' of, iets formeler 'een kwart appel'. De breuken treden op als uitdrukking om een deel van iets concreets aan te geven.

Op het preformele niveau worden modellen geïntroduceerd, zoals het rechthoekmodel en een getallenlijn. Stroken kunnen deels gevulde maatbekers zijn waarvan de inhoud moet worden overgegoten. Op de getallenlijn kun je breuken plaatsen en sprongen maken om ze op te tellen. In het ontwerp van een leertraject moet op dit niveau aandacht uitgaan naar het ontdekken en toepassen van getalsrelaties en strategieën.

Laten we een voorbeeld geven van hoe een preformeel model het formele rekenen ondersteunt. Bij het optellen van ongelijknamige breuken zoals $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ kun je met behulp van een strook een gelijkwaardige breuk voor $\frac{2}{3}$ vinden, zie figuur 2.



figuur 2 Een preformeel model voor gelijknamig maken

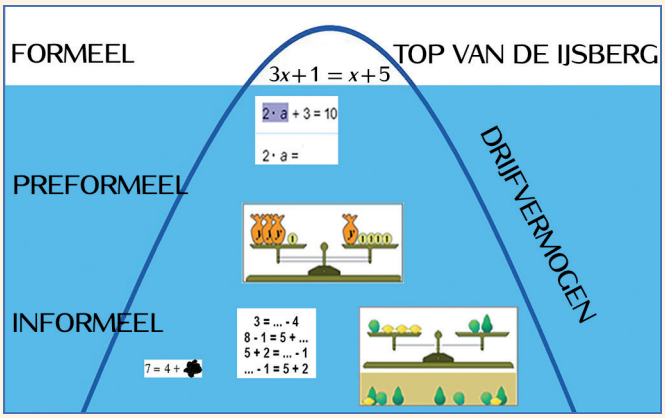
Met behulp van dit model kunnen de leerlingen zien wanneer het totaal aantal stukjes twee keer zoveel is, dat er dan ook twee keer zoveel stukjes gekleurd zijn. Dit geeft inzicht in de regel: je krijgt een gelijkwaardige breuk wanneer je teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

'Ik snap breuken!'

Ik herinner mij een zeer goede leerling, Bram, vwo 3. Tijdens de les waarin zijn klas bezig was met het onderwerp variabelen en breuken, kwam hij naar mij toe.
Bram: 'Mieke, ik heb nooit iets van breuken gesnapt. Ik weet niet hoe ik deze sommen moet doen.'
Ik: 'Na afloop van de lessen. Ok?'
Tsja, waar begin je dan? Eerst maar eens kijken wat hij wel kon met breuken zonder letters.
Ik: 'Hoe tel je $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{6}$ op?'
Bram: 'Nou, je doet 3 keer 6 en dan weet ik het niet meer.''
Ik: 'Weet je wat gelijknamig maken is?'
Bram: 'Nee.'
Ik kende het ijsbergmodel toen nog niet, maar nu kan ik een analyse geven van wat er met Bram is gebeurd. Bram kon zich een formele stap herinneren (3 keer 6 doen), maar begreep niet waarom dat moest. Als slimme leerling is hij te snel gaan rekenen op formeel niveau en heeft hij te weinig tijd gekregen om te werken aan zijn drijfvermogen.
Ik ben met Bram aan de slag gegaan met informele en preformele situaties en modellen.
Na bijna een uur stond hij op van zijn stoel en riep juichend: 'Ik snap breuken!'

Tot slot

Het maken van een ijsbergmodel kan natuurlijk voor alle wiskundige onderwerpen. Ik raad van harte aan om dit eens te doen met een collega, met name voor een onderwerp waar leerlingen veel moeite mee hebben.[3] Breng er het drijfvermogen van de leerlingen mee in kaart, dan wordt het misschien duidelijk waar iets is misgegaan in het leertraject en hoe dat te repareren is, zoals bij Bram (zie kader). Ter inspiratie vind je in figuur 3 een voorbeeld voor een ander onderwerp: vergelijkingen.
Op informeel niveau hebben de leerlingen in de basisschool al kennis gemaakt met inktvleksommen en stipsommen waar ze de ontbrekende getallen moeten invullen. Deze activiteiten zijn een basis voor een strategie die in het preformele niveau verder ontwikkeld gaat worden en leidt tot de bordjesmethode. Informele en preformele activiteiten met een weegschaal die in evenwicht moet blijven, geven een basis voor een model dat gebruikt wordt om op formeel niveau vergelijkingen op te lossen met als aanpak: wat je links doet, moet je ook rechts doen



figuur 3 Een ijsbergmodel voor vergelijkingen met afbeeldingen uit de DWO

Noten

[1] Boswinkel, N. & Moerlands, F. (2003). *Het topje van de ijsberg.* Zie: *http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/5467.pdf*

[2] Abels, M. (2015). Het FIzier gericht op breukenmodules. *Euclides, 90*(7). Zie: https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/090_2014-15_07.pdf

[3] Webb, D. (2017). *The Iceberg Model: Rethinking Mathematics Instruction from a Student Perspective. Zie: https://www.researchgate.net/publication/321251745_The_Iceberg_Model_Rethinking_Mathematics_Instruction_from_a_Student_Perspective*

Over de auteur

Mieke Abels is jarenlang docent wiskunde geweest in het vo. Ze is betrokken geweest bij verschillende ontwikkel- en onderzoeksprojecten voor rekenen/wiskunde. Ook na haar pensioen blijft ze actief bij het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.J.Abels@uu.nl*

Klaas Pieter Hart

0,999... = 1!

Een beschouwing naar aanleiding van het artikel 0,999... = 1? van Jos Groot in *Euclides* 95-3[1]. Met als conclusie dat het antwoord op de impliciete vraag natuurlijk 'ja' is.

Inleiding

Over 0,999... kunnen de gemoederen zeer verhit oplopen. In de goede oude tijd van nieuwsgroepen als sci.math vloog men elkaar regelmatig in de haren over de gelijkheid 0,999... = 1. In het artikel 0,999... = 1?[1] beargumenteert Jos Groot dat deze gelijkheid niet opgaat in de hyperreële getallen van de niet-standaard analyse. Helaas bevat die argumentatie een alleszins begrijpelijke fout. In dit artikel laat ik zien wat die fout is en ook dat 0,999... = 1 in de niet-standaard analyse gewoon opgaat.

Wat betekent 0,999... en wat bedoelen we met 0,999... = 1?

In het artikel van Jos Groot ontbreekt een belangrijk ding, namelijk een ondubbelzinnige afspraak over de betekenis van 0,999... . Door het ontbreken van die afspraak wordt het hele artikel al vanaf het begin ondergraven.
Daarom, om met Bernhard Riemann te spreken:
Also zuerst: Was hat man unter 0,999... zu verstehen?
(In zijn Habilitationsschrift[2] luidde hij met de zin
'Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ zu verstehen?'
de definitie van de (Riemann-)integraal in.)
Het antwoord op die vraag luidt in de analyse: 0,999... (een nul met oneindig veel negens achter de komma) is een *informele schrijfwijze* voor het reële getal bepaald door

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9\cdot 10^{-n}$$

Die schrijfwijze is weer een afkorting van

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} 9\cdot 10^{-n}$$

De axioma's voor $\mathbb{R}$ impliceren dat deze limiet bestaat: de rij is monotoon stijgend en begrensd (alle termen zijn kleiner dan 1). Dus: 0,999... is een andere (informele) schrijfwijze voor bovenstaande limiet.

Ten tweede: de gelijkheid 0,999... = 1 claimt dat die limiet gelijk is aan 1:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} 9\cdot 10^{-n} = 1$$

En die claim is per definitie een korte formulering van: voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een K zó dat voor alle $k \geq K$ de ongelijkheid

$$\left|1-\sum_{n=1}^{k} 9\cdot 10^{-n}\right| < \varepsilon$$

geldt.
Dat laatste laat zich snel bewijzen. Bijvoorbeeld door eerst op te merken dat

$$1-\sum_{n=1}^{k} 9\cdot 10^{-n} = 10^{-k}$$

en vervolgens de archimedische eigenschap te gebruiken om vast te stellen dat voor elke $\varepsilon > 0$ een K bestaat met $10^{-k} < \varepsilon$ voor $k \geq K$.
Samengevat: 0,999... is een suggestieve schrijfwijze voor de waarde van een oneindige som en 0,999... = 1 claimt, terecht, dat die waarde gelijk is aan 1.Maar hoe werkt dit hyperreëel? Wat zegt de niet-standaard analyse echt over 0,999...?

Decimale ontwikkelingen

Eerst even iets over decimale ontwikkelingen, waarbij we ons beperken tot de reële getallen in het eenheidsinterval. We gebruiken die ontwikkelingen om resultaten van onze berekeningen overzichtelijk/inzichtelijk weer te geven.
Achter de suggestieve notatie $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ zitten een stelling en een daaruit voortvloeiende afspraak.
De stelling heeft twee componenten.
De eerste zegt: elke *functie*
$f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bepaalt een reëel getal x_f in $[0, 1]$ door

$$x_f = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cdot 10^{-n}$$

Dat die som bestaat volgt op dezelfde wijze als hierboven: de rij partiële sommen is monotoon stijgend en begrensd door 1.
De tweede zegt het omgekeerde: bij elk reëel getal x in $[0; 1]$ bestaat een functie f zó dat $x = x_f$
De afspraak die hieruit voortvloeit is dat we d_i schrijven in plaats van $f(i)$ en de functie f suggestief als $0,d_1d_2d_3...$ noteren. Die notatie is een eigen leven gaan leiden en we vereenzelvigen vaak de uitdrukking $0,d_1d_2d_3...$ met het getal x_f zelf.

Hyperreëel werken

Voor we kijken wat de hyperreële interpretatie van 0,999... zal zijn moeten we twee dingen uit het boek van Keisler citeren.[3]
Ten eerste is er het Uitbreidingsprincipe (extension principle).
Uitbreidingsprincipe:

(a) De reële getallen vormen een deelverzameling van de hyperreële getallen en de ordeningsrelatie $<$ is de beperking van de ordeningsrelatie $<^*$ van de hyperreële getallen.
(b) Er is een hyperreëel getal dat groter is dan 0 maar kleiner dan elk positief reëel getal.
(c) Voor elke reëelwaardige functie f van één of meer variabelen is er een bijbehorende hyperreële functie f^* van hetzelfde aantal variabelen. We noemen f^* de natuurlijke uitbreiding van f.

In het artikel van Jos Groot komen (a) en (b) aan de orde maar (c) niet, zelfs niet impliciet. Dit legt de kiem voor de bovengenoemde fout.
Onderdeel (c) wordt ook gebruikt om verzamelingen uit te breiden, via de uitbreiding van hun karakteristieke functies. Binnen de verzameling $\mathbb{R}^*$ van de hyperreële getallen krijgen we zo de uitbreiding van de verzameling der natuurlijke getallen als $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{R}^* : \chi^*_{\mathbb{N}}(x) = 1\}$.

Verder is er het Overdrachtsprincipe (Transfer Principle). Dit wordt in [1] in het geheel niet genoemd, en dat is dan ook waar de eerder genoemde fout verder ontkiemt en opgroeit.

Overdrachtsprincipe. Elke reële uitspraak die geldt voor één of meer functies geldt voor de natuurlijke (hyperreële) uitbreidingen van die functies.
Zo neemt, bijvoorbeeld, de uitbreiding van de karakteristieke functie van $\mathbb{N}$ alleen de waarden 0 en 1 aan. Immers, er geldt $(\forall x \in \mathbb{R})(\chi_{\mathbb{N}}(x) = 0 \vee \chi_{\mathbb{N}}(x) = 1)$, en dus geldt

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\chi^*_{\mathbb{N}}(x) = 0 \vee \chi^*_{\mathbb{N}}(x) = 1).$$

We weten dat $\mathbb{R}$ aan de archimedische eigenschap voldoet:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \neq 0 \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(|x| < n|y|))$$

In het bijzonder is er voor elke $x \in \mathbb{R}$ een $n \in \mathbb{N}$ met $x < n$, dus

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(x < n)$$

Pas het Overdrachtsprincipe toe:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists n \in \mathbb{N}^*)(x <^* n)$$

voor elke $x \in \mathbb{R}^*$ is er een $n \in \mathbb{N}^*$ met $x <^* n$.
Neem een positief hyperreëel getal ε dat kleiner is dan elk positief reëel getal, een infinitesimaal dus. Voor elk positief reëel getal x geldt $\varepsilon < x^{-1}$, en dus ook $\varepsilon^{-1} > x$. Er is dan een $n \in \mathbb{N}^*$ met $\varepsilon^{-1} <^* n$; die n is dus kennelijk een `oneindig groot natuurlijk getal' want voor elk 'gewoon' reëel getal x geldt $x <^* n$.
Hierbij is het Overdrachtsprincipe gebruikt om in te zien dat de gewone rekenregels van $\mathbb{R}$ ook in $\mathbb{R}^*$ gelden.

Opmerking 1

Hierboven, en ook hieronder, schrijven we de uitspraken in (standaard) logische taal. Dat is met opzet en nodig: de niet-standaard analyse is door Robinson in [4] ontwikkeld binnen de mathematische logica. Het Uitbreidingsprincipe en het Overdrachtsprincipe zijn vereenvoudigingen van technische gereedschappen die bij dat ontwikkelen gebruikt zijn.

Opmerking 2

De beweegredenen van Robinson waren, waarschijnlijk, tweeledig. Ten eerste is er een algemene stelling van Skolem die laat zien dat bekende oneindige structuren als $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ strikte uitbreidingen hebben die op het niveau van eerste-orde-logica niet te onderscheiden zijn van die structuren zelf. Robinson paste, wellicht gewoon uit nieuwsgierigheid, die stelling toe op $\mathbb{R}$ en verkreeg zo een lichaam $\mathbb{R}^*$ dat (onze) $\mathbb{R}$ als een echte deelverzameling bevat. Die $\mathbb{R}^*$ voldoet aan het Uitbreidingsprincipe als hierboven geformuleerd; voor (a) en (c) volgt dat uit de stelling van Skolem, en het getal uit (b) kun je maken uitgaande van een element van $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$. Het Overdrachtsprincipe is een wat toegankelijker formulering van het ononderscheidbaar zijn van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*$.
Daarnaast moet al snel gebleken zijn dat door van buiten naar $\mathbb{R}^*$ te kijken onderscheid gemaakt kan worden tussen onze 'echte' reële getallen en de nieuwe elementen van $\mathbb{R}^*$ en dat, dankzij de getallen uit onderdeel (b) van het Uitbreidingsprincipe, analyse met 'oneindig kleine' en 'oneindig grote' getallen bedreven kon worden, net als in >

de goede oude tijd van Fermat, Newton, Leibniz, Euler, en andere groten uit de analyse. Robinson heeft dat systematisch uitgewerkt en zo is het gebied van de niet-standaard analyse tot stand gekomen. Dat dit type analyse niet tot in alle hoeken van de wiskunde is doorgedrongen is wellicht te wijten aan het feit dat men een strikt onderscheid moet maken tussen wat wij van buiten aan $\mathbb{R}^*$ observeren en wat in $\mathbb{R}^*$ geldig is als structuur op zichzelf. En het artikel van Jos Groot laat zien dat dat niet eenvoudig is en tot fouten leidt.

Opmerking 3

We kunnen nu de fout uit [1] laten zien. Zoals hierboven is te zien, is de vertaling van een reële uitspraak in feite die uitspraak zelf, maar dan met aan elk symbool dat geen variabele is een sterretje gehangen, om aan te geven dat we met de natuurlijke uitbreiding van dat ding van doen hadden. Wat in het artikel gebeurt is dat naar de rij $\langle x_n \rangle_n$ gekeken wordt, waarbij $x_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k}$ ('een nul met n negens' dus). Vervolgens wordt geconcludeerd dat voor onze infinitesimale ε het volgende geldt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x_n <^* 1 -^* \varepsilon <^* 1) \qquad (*)$$

met geen sterretje bij $\mathbb{N}$ en x_n, en wel een sterretje bij $<$ en het minteken. Hieruit concludeerde Jos Groot dat $0{,}999\ldots \leq 1 - \varepsilon < 1$.

En hier gebeurt waar hierboven voor is gewaarschuwd: het strikte onderscheid tussen wat wij van buiten zien en wat intern in $\mathbb{R}^*$ geldt. (En ja, ik ben ook een paar keer in die val getrapt.) Om te beginnen: wat misschien niet opvalt maar wel cruciaal is, is dat de term 'infinitesimaal' (of 'oneindig klein') door ons op bepaalde hyperreële getallen wordt geplakt. Intern in $\mathbb{R}^*$ bestaat dat onderscheid niet; een 'inwoner' van $\mathbb{R}^*$ ziet geen overgang tussen onze reële getallen en de infinitesimalen. Daarom schreef ik hierboven ook dat we 'kennelijk' een oneindig groot natuurlijk getal gevonden hadden: wij zien van buiten een onderscheid tussen de 'gewone' natuurlijke getallen en het oneindig grote natuurlijke getal n; echter, voor $\mathbb{R}^*$ is die n ook een gewoon natuurlijk getal. Formule $(*)$ is een waarneming van buiten maar niet iets waar de niet-standaard analyse iets mee kan. Wij zien van buiten nog iets meer: als $a \in \mathbb{R}^*$ voldoet aan $x_n <^* a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dan geldt $a \geq 1$ of $1 - a$ is infinitesimaal. Als ε positief en infinitesimaal is dan is 2ε dat ook en ook geldt $x_n < 1 - 2\varepsilon < 1 - \varepsilon$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

De conclusie, voor ons, is dat er *geen kleinste* hyperreëel getal is dat groter is dan alle x_n. Op de plek waar Jos Groot 0,999... denkt te zien, zit een gat in $\mathbb{R}^*$. Dat gat is te vergelijken met, bijvoorbeeld, het gat in $\mathbb{Q}$ dat in $\mathbb{R}$ opgevuld wordt met $\sqrt{2}$. Ik heb [1] bij een college Logica besproken en er stak (gelukkig) een student de hand op en zei 'Maar er zijn toch ook oneindig grote natuurlijke getallen?' Inderdaad: als we 0,999... in de hyperreële wereld willen interpreteren zullen we rekening met alle natuurlijke getallen van $\mathbb{R}^*$ moeten houden, ook die er voor ons 'oneindig groot' uitzien.

0,999... hyperreëel

De hyperreële interpretatie van 0,999... gaat via de natuurlijke uitbreiding
$f^* : \mathbb{N}^* \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
van onze constante functie f en de natuurlijk uitbreiding $\langle x_k^* : k \in \mathbb{N}^* \rangle$ van de rij $\langle x_k : k \in \mathbb{N} \rangle$, gedefinieerd door

$$x_k = \sum_{n=1}^{k} 9 \cdot 10^{-n}.$$

Overdrachtsprincipe, de eerste keer. In $\mathbb{R}$ geldt

$$(\forall k \in \mathbb{N})(x_k < 1)$$

Dus in $\mathbb{R}^*$ geldt:

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)(x_k^* <^* 1)$$

Dit betekent dat voor elke $k \in \mathbb{N}^*$ de partiële som x_k^* kleiner dan 1 is.

Overdrachtsprincipe, de tweede keer.

Verder geldt in $\mathbb{R}$ ook:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(x_k > 1 - \varepsilon)$$

(Omdat de rij stijgend is geldt $x_l > 1 - \varepsilon$ dan voor alle $l > k$.) Deze formule is dus ook geldig in $\mathbb{R}^*$. Maar dat betekent dat voor elk positief getal ε in $\mathbb{R}^*$ (standaard of infinitesimaal) er een $k \in \mathbb{N}^*$ is met $x_k^* > 1 - \varepsilon$.

Kortom: de hyperreële interpretatie van 0,999... is als de hyperreële som van de natuurlijke uitbreiding van de reeks $\sum 9 \cdot 10^{-n}$. We hebben net vastgesteld dat die som ook gelijk is aan 1. Er is ook hyperreëel geen speld tussen 0,999... en 1 te krijgen.

In het artikel [5] van Bryan Dawson wordt dit laatste ook vastgesteld en daar wordt wat dieper op de structuur van de natuurlijke uitbreiding van onze constante functie f ingegaan.

Noten

[1] Groot, J. (2019). 0,999... = 1?, *Euclides 95*(3), 18 - 20.

[2] Riemann, B. (1868). Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 13*, 87 - 132. Habilitationsschrift, 1854.

[3] Keisler, H.J. (2012). *Elementary calculus. An infinitesimal approach* (3rd ed.). Mineola NY: Dover Publications, 2012. (Section 1.5)
[4] Robinson, A. (1961). Non-standard Analysis. *Indagationes Mathematicae (Proceedings) 64*, 432 – 440. DOI 10.1016/S1385-7258(61)50044-3.
[5] Dawson, B. (2016). *0,999... = 1: An Infinitesimal Explanation. Math Horizons 24*, 5 - 7, DOI 10.4169/mathhorizons.24.2.5.

Met dank aan Wim Caspers (TU Delft) voor het meelezen.

Over de auteur

Klaas Pieter Hart is wiskundige en werkt aan de TU Delft.
E-mailadres: *k.p.hart@tudelft.nl*

Reactie van Jos Groot

Harts afleiding is correct. Alleen gaat hij uit van een andere betekenis van 0,999... dan degene die ik impliciet heb verondersteld, namelijk een som met een oneindig hypernatuurlijk aantal termen van de vorm $9 \cdot 10^n$. Als gedeeltelijk excuus mag wellicht gelden dat mijn stukje in eerste instantie bedoeld was voor het wiskundetijdschrift voor jongeren, Pythagoras.Daardoor zette ik meer in op het prikkelen van de nieuwsgierigheid dan op rigoro-siteit. Zie verder deze twee artikelen van Karin U. Katz en Mikhail G. Katz.[1] [2] Het tweede artikel gaat over hoe scholieren tegen het probleem aankijken. Het werken met infinitesimalen spreekt scholieren vaak aan omdat het bij hun intuïtie aansluit. Zo hebben velen de intuïtie dat $0{,}999\ldots < 1$ is. Zij hebben dus gelijk binnen het systeem van de hyperreële getallen, althans met één interpretatie van het probleem.

Met dank aan prof. dr Sylvia Wenmackers (KU Leuven).

Noten

[1] Zooming in on infinitesimal 1–. 9.. in a post-triumvirate era, zie *https://arxiv.org/pdf/1003.1501.pdf*
[2] When is .999... less than 1?, zie *https://arxiv.org/pdf/1007.3018.pdf*

WISKUNDERONDLEIDING

Ik ben uw gids in dit wiskundepand.
Volgt u mij maar naar de hoek van de hoeken.
Boeiend en leerzaam, maar 't is wel riskant
als u ze zonder mijn hulp zou bezoeken.

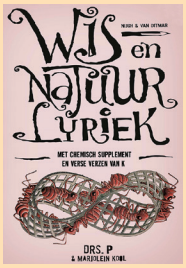
Pas dus goed op, want hier liggen bijeen
hoeken die negentig niet overschrijden.
Die noemt men scherp en u ziet al meteen
dat je ermee in je vingers kunt snijden.

Hoeken die boven de negentig gaan
zijn te gevaarlijk om mee te gaan spelen.
Men noemt ze 'stomp', want ze kunnen spontaan
als je niet kijkt linkse hoeken uitdelen.

Ook honderdtachtig mept hard op je oor,
laat je gestrekt in de touwen belanden.
Hoeken van nul zijn gesloten waardoor
ieder gesprek in een zwijgen zal stranden.

Dan komt er nu nog een hoogtepunt aan:
loodrechte hoeken. Da's altijd weer scoren.
Wilt u daarvoor hier het hoekje om gaan?
Fooien ontvang ik heel graag van tevoren.

Marjolein Kool

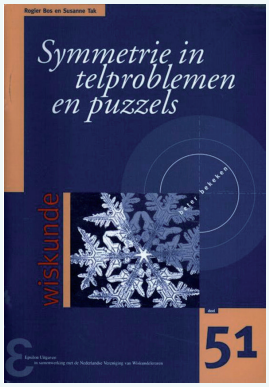


De dichtbundel Wis- en natuurlyriek van de Drs. P en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid.

Boekbespreking

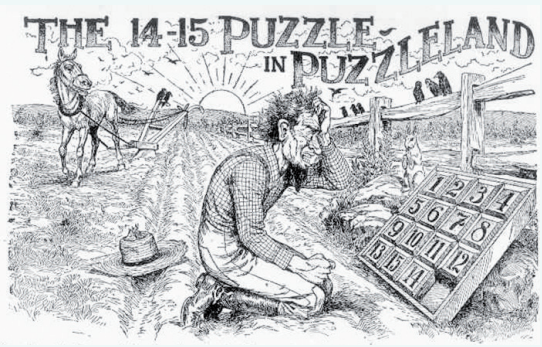
Jacques Jansen

Symmetrie in telproblemen en puzzels



Titel: Zebra-reeks 51 Symmetrie in telproblemen en puzzels
Auteur: Rogier Bos en Susanne Tak
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2017)
ISBN: 978-90-5041-166-0, 68 pagina's (softcover)
Prijs: € 10,00

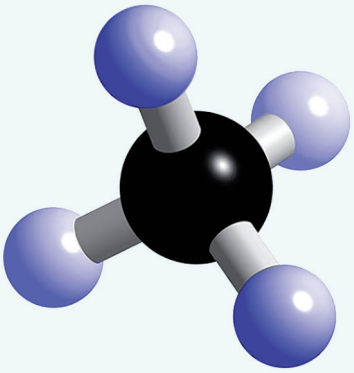
Symmetrie kan alle kanten uitgaan, dat blijkt wel uit boeken zoals *Het Symmetriemonster* van Marcus du Sautoy en *Een passie voor symmetrie* van Jan van de Craats. Het beslaat een groot terrein in de wiskunde. Gelukkig hebben de auteurs zich beperkingen opgelegd - dat kan ook niet anders met het zebraformat van maximaal 68 pagina's - en is dit zebraboekje heel overzichtelijk geworden. Tien hoofdstukken waarbij de inhoudelijke kant terug te vinden is in de hoofdstukken 2 tot en met 9. In hoofdstuk 10 staan in het kort de uitwerkingen van alle opdrachten behalve dan van de eindopdrachten uit hoofdstuk 9.



figuur 1 Sam Loyd, puzzelaar / wiskundige

Inhoud

Hoofdstuk 2 begint met twee opdrachten, opgave 1 met een regelmatige zeshoek en opgave 2 met het aantal tafelschikkingen aan een ronde tafel met zeven personen. Opgaven die je nu al kunt oplossen (begin eerst met twee personen, dan met drie, dan met vier, enzovoorts.), maar in de hoofdstukken verderop krijg je gereedschap om een goede uitwerking in elkaar te zetten. Dat gereedschap blijkt bij deze opdrachten niet echt nodig te zijn maar bij wat ingewikkelder problemen kan het goed van pas komen. Zeven personen kun je op 7! manieren op een rijtje zetten, bijvoorbeeld op stoelen in een rij in een bioscoop. Bij een ronde tafel hebben we draaisymmetrie van de orde 7 en vallen er van die 7! heel veel mogelijkheden weg (4320). Als iedereen één plaats opschuift wordt de tafelschikking niet verstoord. Vervolgens twee plaatsen opschuiven tot en met zeven plaatsen. En zo wordt ook de permutatie geïntroduceerd. Het aantal mogelijkheden verkrijg je door 7! te delen door 7 en dat geeft 6!
Je kunt ervoor kiezen om te beginnen met allerlei prachtige kleurrijke afbeeldingen, bijvoorbeeld in de ornamentale kunst. De auteurs kozen ervoor om snel over te gaan tot doe-activiteiten. Dat doen ze in hoofdstuk 3 en hier behandelen ze de wiskunde van de verwisselkunde. Ze kiezen hierbij voor het methaanmodel: CH_4.



figuur 2 Model van CH_4

Het wiskundig model van CH_4 is de tetraëder of wel het regelmatig viervlak. In opgave 7 vragen ze om een regelmatig viervlak te tekenen en om de zeven verschillende draaisymmetrieassen van het methaanmolecuul te beschrijven. Soms kun je zulke modellen bij de scheikundesectie wel lenen. Misschien stuit je dan op praktische problemen maar ik zou de leerlingen – het kan met uiteenlopende materialen - een draadmodel laten

maken of met behulp van een bouwplaatje een tetraëder van karton in elkaar laten zetten. Hoofdstuk 4 behandelt combinatoriek. Bijvoorbeeld, op hoeveel manieren je een kubus per zijvlak monochroom kunt kleuren met tien kleuren. Hier kun je natuurlijk eindeloos variëren door allerlei eisen te stellen. Voor de meeste docenten onder ons geen onbekende materie.
In hoofdstuk 5 ga je rekenen aan draai- en spiegelsymmetrieën. Algebra met diverse rekenregels. In hoofdstuk 6 ga je verder met permutaties en het oefenen met het vereenvoudigen van samenstellingen van permutaties. De basis is dan gelegd voor de kern van het boekje.

Wat is de kern van het boekje?

Hoe kun je op een slimme manier gebruik maken van symmetrie bij bepaalde telproblemen en puzzels? Het antwoord van de auteurs: 'maak gebruik van de telstelling van Burnside'. Deze stelling zien zij als centraal resultaat van dit zebraboekje.
In hoofdstuk 7 vertellen ze wat de stelling inhoudt en hoe je hem moet toepassen. In hoofdstuk 8 wordt de stelling bewezen. Hoofdstuk 9 bevat de eindopdrachten waarbij de stelling ook weer hier en daar toegepast kan worden. Mocht je als docent niet op de hoogte zijn van de telstelling dan biedt Wikipedia uitkomst, zie het kader.

Laat G een eindige groep van transformaties van een verzameling X zijn, en X^g voor elke $g \in G$ de verzameling van elementen in X die invariant zijn onder g, d.w.z. $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$. De beeldverzamelingen G_x van de elementen $x \in X$ onder de groep zijn de banen X / G in X.
Het lemma van Burnside geeft een uitdrukking voor het aantal banen.

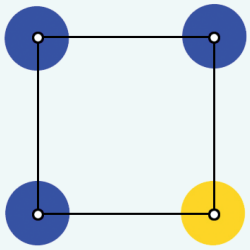
$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

Het aantal banen is een natuurlijk getal of oneindig, en gelijk aan het gemiddelde aantal invariante elementen, dat dus een natuurlijk getal of oneindig is.
Bron: Wikipedia

Schrik niet! Deze tekst moet natuurlijk voor de leerlingen en ook voor ons docenten *toegankelijk* gemaakt worden.

Toegankelijk maken van de telstelling

De auteurs verwijzen eerst naar opgave 16 uit hoofdstuk 4, waarin gevraagd wordt om met twee kleuren vier cirkels in een vierkant te kleuren. De cirkels liggen op de hoekpunten van het vierkant. De kleuren zijn blauw en geel. Zie figuur 3.



figuur 3

Er zijn natuurlijk $2^4 = 16$ mogelijkheden. Maar zijn ze ook echt verschillend als je het vierkant kunt draaien en spiegelen? Alles kan blauw of geel zijn en dat levert twee echte mogelijkheden op. Drie van de zelfde kleur kan op twee manieren. Over blijft de situatie dat twee van dezelfde kleur zijn. Ook dat kan op twee manieren (zijde of diagonaal gelijke kleur). We komen dus met de kleuren blauw en geel op zes echt verschillende mogelijkheden.
Er wordt opgemerkt dat dit probleem knap lastig wordt met drie verschillende kleuren. Het aantal echte mogelijkheden zal in ieder geval minder dan 81 (3^4) zijn.
De telstelling brengt uitkomst.

De telstelling van Burnside: Het aantal echt verschillende kleuringen is gelijk aan het gemiddeld aantal invariante kleuringen per symmetrie.

De auteurs merken terecht op dat ook deze formulering lastig te begrijpen is. Dus gaan ze verder met het voorbeeld van het vierkant met de vier cirkels.
Een kleuring is invariant onder symmetrie als die er voor en na het uitvoeren van de symmetrie hetzelfde uitziet.
De symmetrieën van het vierkant zijn de vier draaiingen en de vier spiegelingen. Ga dat maar na.
Vervolgens wordt elke symmetrie onderzocht op invariante kleuringen. Bij de triviale symmetrie hebben we zestien invariante kleuringen. Bij een draaiing van 90° tegen de wijzers van de klok in heb je twee invariante kleuringen: alle cirkels geel of alles blauw.

>

NIEUW
voor 2020

Programmeren in Python

Klaar voor de toekomst

Binnenkort kunnen leerlingen de populaire programmeertaal Python gebruiken op hun TI-Nspire™ CX II-T handhelds en software. Daarmee schrijven ze zelf Python-programma's, slaan die op en voeren die uit. Perfect toe te passen bij STEM-projecten!

Beschikbaar bij de start van het schooljaar in september 2020

TI-84 Plus CE-T Python Edition

Met de nieuwste grafische rekenmachine kunnen leerlingen programmeren in Python! Naast de vertrouwde functies heeft deze grafische rekenmachine een speciale Python App.

Voordelen

- Geschikt voor STEM-projecten
- Experimenten doen
- Programmeren en apparaten zoals de robotauto TI-Innovator™ Rover aansturen
- Optimaal voorbereid op het toekomstgerichte curriculum

"Met programmeren in Python doen leerlingen algemene vaardigheden op, zoals logisch nadenken en opgaven analyseren."

Guido van Rossum
ontwikkelaar van Python

python™

education.ti.com/nederland

Texas Instruments

©2020 Texas Instruments

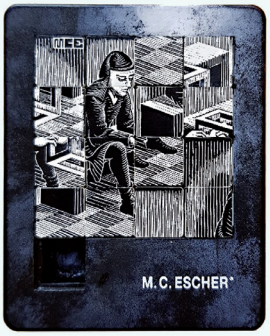
Symmetrie	Aantal	Invariante kleuringen
Triviale symmetrie	1	16
Draaiingen over 90° en 270°	2	2
Draaiing over 180°	1	4
Spiegelingen in horizontale en verticale middelloodlijn	2	4
Spiegelingen in de diagonalen	2	8

Dit wordt overzichtelijk in een tabel gezet. De symmetrieën geef ik nu niet in notaties aan maar beschrijf ik met woorden. Het aantal echt verschillende kleuringen wordt nu berekend met een gewogen gemiddelde. Er zijn acht symmetrieën, dus:
$\frac{1}{8}(1\cdot 16 + 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + 2\cdot 4 + 2\cdot 8) = \frac{48}{8} = 6.$
En deze uitkomst hadden we al eerder via het gezonde verstand gevonden. Maar er zijn natuurlijk veel problemen waarbij het puzzelen en proberen niet meer voldoet. Bijvoorbeeld bij een regelmatige vijfhoek met vijf cirkels in de hoekpunten met drie verschillende kleuren. De vraag is natuurlijk hoeveel echt verschillende kleuringen zijn er? Het is overigens aardig om nu de formulering van Wikipedia te gaan bekijken en na te gaan of de vertaalslag van de auteurs goed gelukt is. Bijvoorbeeld. Wat zijn de betekenissen van de symbolen G en X in de context van het vierkant met de vier cirkels?

Hoogtepunt

Een van de hoogtepunten van het boekje is het probleem van puzzelaar/wiskundige Sam Loyd met zijn schuifpuzzel. In 1879 daagde hij de mensen uit, met als beloning een publiekelijke prijs van duizend dollar, om de letters n en o te verwisselen in een 15-puzzel. Je hebt vijftien vierkante vakjes, gevuld met de letters a tot en met o, met één open vakje. (of je werkt met de cijfers 1 tot en met 15 zoals in figuur 1 te zien is). In het boekje staat een saaie variant afgebeeld, schrijven de auteurs.

In een vitrine bij mij thuis liggen een paar schuifpuzzels. Zie figuur 4, een voorbeeld van een 16-puzzel. Meestal is bij het oplossen van de puzzel sprake van *trial and error*. Hier ga je gericht met behulp van permutaties aan de slag.



figuur 4

Verleiden

De telstelling van Burnside wordt in hoofdstuk 8 niet echt bewezen. Dat is jammer maar ook begrijpelijk. Het is eigenlijk een stelling van de Franse wiskundige Augustin Louis Cauchy (1789-1857) uit de groepentheorie en is veel abstracter dan wat de auteurs formuleerden. Kijken we bijvoorbeeld naar het object 'gelijkzijdige driehoek' dan zijn er drie lijnspiegelingen en drie rotaties die tezamen een groep vormen. Maar dan moet je weer weten wat een groep is. Meestal is dit stof voor eerstejaars wiskundestudenten. Dit zebraboekje is dan ook een mooie poging om onze exacte leerlingen te verleiden tot een studie wiskunde, met o.a. in het vooruitzicht het begrijpen van de Galoistheorie dat zwaar leunt op symmetrieën.

Wat verder opvalt

Nieuwe begrippen voor de leerlingen zoals permutatie, cykel, conjugatie, conjugeren, chiraliteit, enzovoort worden cursief gedrukt maar niet heel scherp geformuleerd. De vraag is echter, is dat storend? Er wordt weinig verteld over de wiskundigen William Burnside en Alan Turing. Wat historische feiten over de beroemde Enigma machine had best gemogen.

Tot slot

Het is knap van de auteurs om zo'n abstracte stelling terug te brengen tot aanvaardbare leerstof voor exacte leerlingen. En ik hoef je toch niet te overtuigen wat het belang van symmetrie is. Een schoolmediatheek moet natuurlijk beschikken over alle zebraboekjes. En ook dit boekje hoort in je eigen boekenkast. En nog belangrijker: 'stimuleer leerlingen om met dit boekje aan de slag te gaan'.

Over de recensent

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

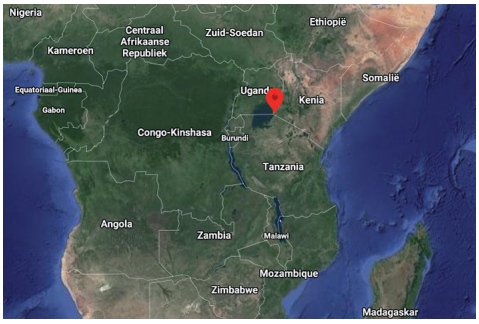
Wereld Wiskundefonds

Leo Bakker

Boeken voor Vocational Open School in Shirati, Tanzania

Enige beroepsopleiding in de omgeving

Twee jaar geleden kwam ik voor het eerst op de Vocational Open School om te kijken op welke wijze we deze school vanuit Doopsgezind Wereldwerk verder zouden kunnen ondersteunen. Wat me meteen opviel was dat er helemaal geen boeken waren op deze school! En er ontbraken meer dingen op deze beroepsopleiding: materialen, apparatuur, gekwalificeerde docenten, en zelfs de helft van de studenten was er niet. Kortom, deze school kampte met een groot scala aan problemen. Daar moesten oplossingen voor komen, want deze school is de enige beroepsopleiding in het Mara District waar ruim 150.000 jongeren wonen. Een zeer arm district, met weinig ondersteuning vanuit de overheid. Wat er wél was: een gedreven groepje mensen die de school tot een succes wil maken en jongeren een kans wil geven om een beroep te leren.



figuur 1 Shirati, Tanzania, op het drielandenpunt met Kenia en Oeganda

Studiefonds en woningen voor leraren

Stap voor stap zijn de problemen in kaart gebracht, oplossingen bedacht en projecten gestart om de problemen aan te pakken. Bijvoorbeeld het probleem van de leerlingen die er niet waren. Zij hadden geen geld om schoolgeld te betalen (hoe weinig dat ook is), en haakten halverwege het jaar af. Een ramp voor de leerling, maar ook voor de school. Door het instellen van een studiefonds samen met ouders, de lokale kerk en doopsgezind Wereldwerk worden de uitvallers geholpen en kan vrijwel iedereen die het jaar gestart is nu ook het jaar volmaken. Of een ander voorbeeld, gekwalificeerde docenten: door het opknappen van wat lerarenhuisjes wordt het nu aantrekkelijker om op deze school te komen werken en is het mogelijk om docenten langer te behouden voor de school.

figuur 2 De aangeschafte boeken

> "De headmaster is zelf naar Mwanza getogen en heeft daar alle relevante boeken opgekocht."

School zonder boeken

Maar dan die boeken, een school zonder boeken. Wij kunnen het ons niet voorstellen en het kan ook gewoon niet. Daarom was iedereen heel blij dat het Wereldwiskunde Fonds wilde bijspringen met een mooi bedrag om boeken te kopen. Maar dat is nog niet zo simpel. Hoe kom je daar in die uithoek in Tanzania aan boeken? Bestellen is geen optie, veel te duur. Dus de headmaster is zelf met het openbaar vervoer naar Mwanza getogen (acht uur reizen) en heeft daar in de twee boekwinkels die dit stadje rijk is alle relevante boeken opgekocht. Wat wiskundeboeken en enkele vakgerichte boeken waar de school heel blij mee was. Mijn eerste reactie toen ik de foto's zag, was dat sommige boeken er wel zeer gebruikt uitzagen. En dat klopt ook, sommige zijn ook tweede- of soms wel derdehands. Zo werkt dat daar. Maar de school was er heel blij mee en heeft intussen een zeer bescheiden 'bibliotheek' ingericht waar de boeken staan als ze niet in het lokaal gebruikt worden.
Het kostte de headmaster drie dagen, maar hij had het er graag voor over en hij is het Wereldwiskunde Fonds zeer dankbaar voor de mooie bijdrage. De school is goed op weg en gaat er wel komen, alleen kan het even duren.

Over de auteur

Leo Bakker is werkzaam bij de stichting Kennisnet, de ondersteuningsorganisatie voor het onderwijs met betrekking tot de inzet van ict in het onderwijs. Met een achtergrond in het ontwikkelingswerk is hij verbonden aan de stichting Doopsgezind Wereldwerk en coördineert en ondersteunt van daaruit een aantal projecten in het Mara District in Noord-Tanzania waaronder de Vocational Open School in Shirati. Enkele weken per jaar bezoekt hij de projecten voor advies en ondersteuning. Wil je meer informatie of heb je vragen, mail dan gerust. E-mailadres: *leobakker@caiway.nl*

Verschenen:

Podcast: 'De Fascinatievolger'

Titel: De Fascinatievolger, deel 16: Floris van Doorn
Uitgever: Meromorf Press
Beluisteren: via deze link[1]

Als nieuwsgierigheid de motor is en fascinatie de richtingaanwijzer, waar kom je dan terecht? In de podcast *De fascinatievolger* interviewt Judith Lengkeek (Verte Vertelling[2]) wiskundigen en andere wetenschappers over de rol die nieuwsgierigheid en fascinatie in hun werk speelt. De doelen hiervan zijn om 1) wiskunde een gezicht te geven 2) op een toegankelijke wijze zuivere wiskunde te introduceren 3) jongeren, en met name meisjes, vertrouwen te geven dat wiskunde ook voor hen is weggelegd.

In deze editie, deel 16, een interview met Floris van Doorn (University of Pittsburgh) over homotopy type theory, bewijsassistenten, FABstracts, Gödels onvolledigheidsstelling, verbanden tussen wiskunde en informatica, en een vooruitblik van wiskunde in de toekomst. Eerder dit jaar verschenen de delen 11 t/m 15. Deel 11 t/m 13: een drieluik rond het Nederlands Mathematisch Congres (NMC) met onder anderen choreografe Roos van Berkel, die samen met Tom Verhoeff (TU/e) de stelling van Lehman in dans uitvoerde op het NMC en de NWD, een verslag van de bijeenkomst van European Women in Mathematics Nederland en interviews met Jan Wiegerinck (voorzitter KWG), Marieke Kranenburg (instituutsmanager van het Korteweg-de Vries instituut) en Wil Schilders (directeur PWN). Deel 14 met Daan Crommelin over zijn onderzoek naar extreme gebeurtenissen in een klimaatsysteem, zoals vloedgolven, vanuit wiskundig perspectief. Deel 15 met Hinke Osinga (University of Auckland, NZ). Zij vertelt over studiekeuzes van jongeren in Nieuw-Zeeland, kritisch denken, Maryam Mirzakhani en het Geometry Center in Minneapolis in verband met het belang van visualiseren van wiskunde, en het beroemde haakwerk van de Lorenzvergelijking.

Alle delen zijn ook terug te luisteren via de site van Meromorf Press[3] en via podcastluisteren.nl[4]

Noten

[1] *https://soundcloud.com/user-864747685/*
[2] *zie https://www.vertevertelling.nl/*
[3] *http://www.meromorfpress.co.uk/Podcast/Podcast.html*
[4] *https://podcastluisteren.nl/pod/De-fascinatievolger-wetenschapspodcast*

Boekbespreking

Marloes van Hoeve

Het grenzeloze brein

Titel: Het grenzeloze brein
Auteur: Jo Boaler
Uitgever: HarperCollins
ISBN: 978-94-027-0435-8, 272 pagina's paperback
Prijs: €19,99 (E-book €12,99)

Mindset

Jo Boaler is de schrijfster van het boek *Mathematical Mindset* waarin ze de theorie van Carol Dweck over *fixed* en *growth mindset* toepast op de wiskundelessen. Dit boek was vier jaar geleden de aanzet tot de aanvraag van mijn post-doc-onderzoek. Het onderzoek van Carol Dweck gaat met name over hoe je omgaat met nieuwe uitdagingen, frustratie of als je een grens tegenkomt. Op dat moment kun je op twee manieren denken; of je denkt *fixed* (ik val door de mand, iedereen ziet dat ik niet slim ben en dit kan ik nooit veranderen, mijn intelligentie ligt vast) of je denkt *growth* (wat kan ik hier van leren, verandering is altijd mogelijk). Als je met een growth mindset naar de situatie kijkt, dan kan er meer, dan onderneem je zelf meer, dan voelt het soms nog wel heel rot, en dan heb je tegelijkertijd het idee dat er beweging mogelijk is, groei. Dit is natuurlijk in een klaslokaal met leerlingen die zo af en toe tegen de grenzen van hun eerste kunnen aanlopen een fijne manier van denken.

Grenzeloos potentieel

Toen ik het nieuwe boek van Boaler doorbladerde dacht ik meteen; dat had ik zelf kunnen of moeten schrijven. Maar goed, dat heb ik niet gedaan. En het mooie is dat zij als professor aan de Stanford University zoveel meer toegang heeft tot mooie anekdotes, nieuwste onderzoeken en inzichtelijke praktijkvoorbeelden. Ze vertaalt al haar bevindingen van haar onderzoek in de klas naar manieren die voor iedereen overal en altijd bruikbaar zijn. Haar belangrijkste boodschap is dat we allemaal een grenzeloos potentieel hebben. In haar boek staan de volgende zes strategieën beschreven over hoe we dat kunnen bereiken.

> "Hersenen veranderen continu en kunnen veel meer leren en veranderen dan vroeger werd gedacht."

Neuroplasticiteit

1 Neuroplasticiteit verandert alles. Uit recent neurowetenschappelijk onderzoek blijkt steeds weer dat als we iets nieuws leren onze hersenen sterker worden en er nieuwe neurale verbindingen worden gevormd. Dit staat in groot contrast met hoe er vroeger over hersenen werd gedacht. Dus als wij als docenten onze leerlingen het idee geven dat ze 'daar de hersenen niet voor hebben', dan klopt dat niet. Hersenen veranderen continu; we kunnen altijd blijven leren.

Vergissingen en worstelingen

2 Het moment dat je vergissingen maakt en dat je worstelt, dat zijn de beste momenten voor groei van je hersenen.
Hierbij is het van belang om vertrouwen te hebben in de eerste stap, dus dat er inderdaad neuroplasticiteit is, bewegelijkheid en groei van de hersenen. Voor leerlingen is het van belang om groei te ervaren, door te werken met vragen die uitdagend zijn, die op de grens liggen van wat ze kunnen. En ze moeten hieraan werken in een omgeving die het maken van vergissingen aanmoedigt en die leerlingen ook uitleg geeft wat het voordeel is van het maken van vergissingen. Het is in onze scholen, waarin resultaten zo belangrijk zijn, best een uitdaging om de boodschap uit te dragen dat vergissingen goed zijn. Uit haar onderzoek blijkt dat non-evaluatieve zelftesten en peer-testing het beste werken. Voor iedereen is het fijn om ook niet de hele tijd het idee te hebben dat je alles moet weten, je staat dan meer open voor anderen, laat je kwetsbaarheid zien en je deelt je onzekerheid.

Invloed van overtuigingen

3 *Als we onze overtuigingen veranderen functioneren onze hersenen, en ons hele lichaam, meetbaar anders.*
Onze gedachten hebben een enorme invloed op ons lichaam en onze spieren. Dit bouwt ook weer voort op stap 1 en stap 2, want met vertrouwen in neuroplasticiteit en met het inzicht dat fouten maken momenten van groei kan geven, ontstaan er meetbare veranderingen in de hersenen. En onderzoek toont aan dat wat je gelooft echt veranderingen geeft in hoe je brein functioneert.
Bij deze strategie noemt ze ook het lastige dilemma van talent; als kinderen op jonge leeftijd veel feedback krijgen over hoe slim ze zijn dan kunnen ze een fixed mindset ontwikkelen. En als ze daarna op een school komen waar ze zich onderling gaan vergelijken kunnen ze het gevoel krijgen dat ze niet goed genoeg zijn. Het is belangrijk dat leerlingen begrijpen dat ze allemaal te allen tijde kunnen leren, met de juiste leerstrategie en mindset. Dus als docenten moeten we vertellen over de groei van hersenen, en dat niet iedereen gelijk begint, en dat iedereen kan leren anders te denken. Dus zowel nieuwe dingen leren als een nieuwe mindset aannemen. Ze eindigt dit hoofdstuk met het belang van docenten. Docenten (en ouders) kunnen de paden van leerlingen helpen veranderen door in ze te geloven, door hun strijd en vergissingen te waarderen, en door de verschillende manieren van denken te respecteren.

Multidimensionale benadering

4 *Leren en de ontwikkeling van neurale paden worden geoptimaliseerd als nieuwe ideeën worden overwogen vanuit een multidimensionale benadering.*
Leerlingen moeten nieuwe strategieën uitproberen en als ze vastzitten input vragen van anderen. Als we verschillende gebieden in de hersenen stimuleren, bijvoorbeeld door aandacht, herinnering, redeneren, communicatie en visualisatie, dan versterken onze hersenen zich en wordt het leren gemaximaliseerd. Je kunt vragen om een andere presentatie van het idee te geven, bijvoorbeeld een beweging, een schets, een film of een graphic novel. Of je kunt leerlingen vragen om een goede redenering te geven waarom het antwoord klopt. Dit multidimensionale denken geeft de mogelijkheid voor communicatie in en ontwikkeling van de hersenen. Meer bewegelijke en flexibele hersenen zijn het gevolg van de synchroniciteit die plaatsvindt als meerdere breingebieden samenwerken. Ook de rol van de docent is hierbij weer belangrijk, de uitnodiging daarbij is om je eigen mindset te onderzoeken, je houding ten opzichte van je lessen, en om de inhoud en het leven op een multidimensionale manier te benaderen.
Speel meer met de inhoud, en ervaar vrijheid los van tekstboeken en opereer meer vanuit het vertrouwen van je eigen kennis en kunde en die van de leerlingen. Niet alleen is het multidimensionale aspect goed voor ieders hersenen, het leert je ook dat er altijd meerdere oplossingswegen zijn.

> "Als school gecombineerd wordt met creativiteit, openheid, buiten-de-box-denken, zonder het accent op snelheid, dan is dat wonderlijk bevrijdend."

Neem de tijd

5 *Snel denken is niet een talent, leren wordt geoptimaliseerd als we onze ideeën en ons leven met creativiteit en flexibiliteit benaderen en daar de tijd voor nemen.*
Als we stress hebben en onder druk staan wordt ons werkgeheugen belemmerd. Bij toetsen onder tijdsdruk wordt het werkgeheugen minder, kun je antwoorden niet berekenen, maak je je ongerust en juist dan kunnen schadelijke overtuigingen en patronen de kop opsteken. En kan er eigenlijk niet meer getoetst worden wat oorspronkelijk de bedoeling was. Het is een gevoelig systeem, want het blijkt bijvoorbeeld dat de hoeveelheid stress die ouders uiten over een vak als wiskunde invloed heeft op de resultaten van hun kinderen. En docenten die zeggen 'laten we dit even snel doen zodat we daarna weer iets makkelijks kunnen doen', of die over een ander vak zeggen 'dat kon ik ook nooit', dit zijn allemaal uitspraken die leerlingen kunnen beïnvloeden.
Als je snel leert versterk je alleen bestaande verbindingen terwijl wanneer je langzaam nadenkt, dan zorg je voor permanente veranderingen door nieuwe structuren in het brein. Nodig leerlingen uit om niet te vergelijken, als een ander bijvoorbeeld eerder klaar is. Het is belangrijk om leerlingen er ook conceptueel bij te betrekken, bijvoorbeeld door uit te leggen waarom een methode werkt, en daar dus ook antwoord op te geven als een leerling dat vraagt. Bij wiskunde kun je denken aan *number-talk*, door bijvoorbeeld niet alleen te vragen hoeveel is 5×18, maar door ook te vragen hoe ze bij het antwoord komen, of ze er een tekening bij kunnen maken. Dan leren leerlingen dat iedereen dit op een andere manier berekent, en wat de waarde is van al die verschillende manieren. Als school >

THE
FUTURE IS HERE

HP Prime

Grafische Rekenmachine

Voordelen van de HP Prime

- Touchscreen; nooit meer gedoe met het instellen van de window
- Supersnelle processor; nooit meer wachten tot een grafiek getekend is
- Ingebouwde handleiding; je kunt direct aan de slag!

En de prijs?
Die is hetzelfde als die van de concurrent!

www.hp-prime.nl

gecombineerd wordt met creativiteit, openheid, buiten-de-box-denken, zonder het accent op snelheid, dan is dat wonderlijk bevrijdend, voor de lessen en voor het leven.

Verbinding

6 *Verbinden met mensen en met ideeën versterkt neurale verbindingen en leren.*

Als we ons verbinden met andere mensen en hun ideeën dan zijn er zoveel voordelen voor onze hersenen en voor onze manier van leven. Bijvoorbeeld in een klas kunnen leerlingen opgeven omdat ze zich alleen voelen in hun worsteling. Terwijl als ze erover in gesprek gaan, blijkt dat er veel meer te zijn die worstelen en kunnen ze leren van elkaar. Met samenwerken zijn er ook weer andere gebieden in de hersenen die worden aangesproken, onder andere het 'sociale brein'. Docenten kunnen samenwerken bevorderen door te zorgen voor open minds (bijvoorbeeld door verschillen te waarderen), open opdrachten (vraag bijvoorbeeld eens aan leerlingen om uit te wisselen hoe zij het zien, hoe zij iets interpreteren) en door onzekerheid te omarmen (open staan om je ook als docent soms oncomfortabel te voelen bij het idee dat je iets niet weet, en dit te delen). Denken is een sociale bezigheid, ook als je alleen denkt neem je ideeën van anderen mee. Door dit bewuster te gaan doen en in communicatie met anderen kun je weer nieuwe ideeën opdoen. Het blijkt dat mensen die hun ideeën aan anderen kunnen uitleggen en communiceren, in ieder vakgebied, meer effectieve probleemoplossers zijn en een grotere bijdrage kunnen geven in het werken in groepen of bedrijven.

Tot slot

Samenvattend zijn er de volgende drie belemmerende overtuigingen

— hersenen zijn fixed;
— worsteling is een teken van zwakte;
— alleen als je snel denkt ben je een goede leerling.

en de volgende drie uitnodigende strategieën

— gebruik een multidimensionale aanpak;
— verander je overtuiging en daarmee je manier van denken en je hersenen;
— verbind je met mensen en andere ideeën.

De laatste zin van het boek is 'Probeer een dag uit je leven te leven met deze grenzeloze benadering en je zult het verschil opmerkingen; weet dat je altijd de sterren kunt bereiken'. Het mag allemaal wat Amerikaans klinken, ik weet inmiddels zeker dat het dichter bij de waarheid ligt dan te zeggen 'Je zult dit nooit leren' !

Over de auteur

Marloes van Hoeve geeft wiskunde op het Goois Lyceum te Bussum. Zij is in 2000 gepromoveerd op geologisch onderzoek naar cyclische veranderingen in de laat-neogene vegetatie uit lacustriene afzettingen in Griekenland. In de periode van 2015 tot en met 2019 onderzocht zij als post-doc vo twee dagen per week, aan de Universiteit Utrecht, de rol van mindset in de wiskundelessen.
E-mailadres: *mvhoeve@gsf.nl*

Duur foutje in de rij van Fibonacci

Henk Rozenhart

'Boundaries of infinity' door N.F. Attard, 2012. De Panne (België).

De rij van Fibonacci wordt nog wel eens door kunstenaars gebruikt. Dat het niet altijd goed gaat blijkt uit een artikel dat mij werd toegestuurd door Nico Alink.

Bij de laatste drie getallen gaat het mis. De kunstenaar had niet goed gerekend. Een duur foutje, want het kunstwerk kostte € 100.000. 'Och, de toren van Pisa staat ook scheef en net daardoor is het zo'n aantrekkingspool', zegt professor Huylebrouck. 'Wie weet loopt het vanaf nu storm in De Panne. Maar voor 100.000 euro had de kunstenaar toch op z'n minst zijn berekeningen mogen nakijken.'

Bron: www.nieuwsblad.be

Wis en Waarachtig

Programmeurs profiteren van talenknobbel

Niet de onvervalste wiskundenerds, maar mensen met een talenknobbel zouden weleens het beste kunnen zijn in het programmeren van computers. Dit blijkt uit onderzoek van de universiteit van Washington, dat in maart gepubliceerd werd in het gezaghebbende tijdschrift *Nature*. Mensen die goed zijn in talen, doorzien namelijk ook goed de structuren van programmeertalen, terwijl het verband tussen programmeertalent en typische bètavaardigheden als wiskunde veel minder groot is dan gedacht. Hoewel er relatief weinig proefpersonen betrokken waren bij het onderzoek – er werden nog geen veertig mensen gevolgd – zijn de resultaten volgens onderzoeksleider Chantel Prat toch belangrijk: in veel programmeerstudies is een grote rol weggelegd voor wiskunde, wat alfa's afschrikt – en daarmee ook relatief veel vrouwen. Een andere inrichting van de opleidingen trekt volgens Prat weer een nieuwe groep mensen aan in het vakgebied.
Bron: Onze Taal, nr. 4, april 2020

Bewijs *ABC*-vermoeden

In 2012 leverde Schinichi Mochizuki van de Kyoto-universiteit in Japan een enorm bewijs af van het *ABC*-vermoeden. Het besloeg vijfhonderd pagina's, verdeeld over vier artikelen. Het bewijs was geschreven in een nogal ondoorgrondelijke stijl. Getaltheoretici vonden het dan ook behoorlijk lastig om de onderliggende ideeën te doorgronden. Mochizuki pakte het vermoeden aan door een nieuw type wiskunde te ontwikkelen: de zogenoemde inter-universale Teichmüller-theorie.
Nu is het werk van Mochizuki eindelijk geaccepteerd door een peer-reviewed wetenschappelijk tijdschrift: *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*. Een publicatiedatum is nog niet bekend. Mochizuki is zelf hoofdredacteur van het betreffende tijdschrift. Hij heeft echter geen rol gespeeld in de beslissing om het bewijs te publiceren, zo meldt *Nature*.
In 2018 meldden de Duitse wiskundigen Peter Scholze en Jakob Stix echter dat ze een 'ernstig, niet te dichten gat' hadden gevonden in Mochizuki's bewijs. 'Sinds de brieven van Scholze en Stix zijn zeker meer wiskundigen van mening dat het bewijs gebreken vertoont', zegt Andrew Booker, hoogleraar wiskunde. Wiskundige Akio Tamagawa zei echter dat het bewijs niet wezenlijk was aangepast in reactie op de kritiek van Stix en Scholze.
Bron: https://newscientist.nl

John Conway overleden

John Horton Conway

Op 11 april is John Conway op 82-jarige leeftijd overleden aan het coronavirus. Conway was een veelzijdig wiskundige. Hij vond drie zogenaamde sporadische groepen (Co1, Co2 en Co3) en publiceerde samen met vier co-auteurs *The Atlas of Finite Groups*, een van de belangrijkste boeken op het gebied van de groepentheorie. Ook was hij de ontdekker van de surreële getallen (een uitbreiding van de reële getallen). John Conway stond ook bekend als de man van de wiskundespelletjes. Hij bedacht de nodige spelletjes en verzamelde deze, samen met Elwyn Berlekamp en Richard Guy, in het boek *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. Maar bij velen zal hij vooral bekend zijn vanwege zijn Game of Life.
Bron: https://www.nytimes.com (15-04-2020)

Abelprijs naar toepassing 'dronkenmansloop'

Gregory Margulis en Hillel Furstenburg

De Abelprijs 2020 is gewonnen door Hillel Furstenberg (1935) en Gregory Margulis (1946). Zij krijgen de prijs

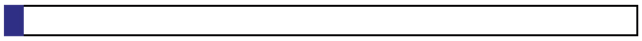
van 7,5 miljoen Noorse kronen (ruim 600.000 euro), voor hun toepassing van de theorie van de dronkenmansloop in de hogere wiskunde. Wie zich in één dimensie beweegt, kan alleen maar vooruit of achteruit. Een dronkenmanswandeling in één dimensie is een route die op een lijn wordt afgelegd, waarbij de route door een reeks muntworpen wordt bepaald. Bij 'kop' ga je een stap naar voren, bij 'munt' een stap naar achteren. Een vraag die je dan kunt stellen is: hoe groot is de kans dat je ooit weer op je beginpunt terechtkomt? Die kans blijkt 1 te zijn, mits de munt zuiver is. Niet zo gek, als je bedenkt dat je met een kans van 0,5 al na twee stappen ('kop-munt' of 'munt-kop') weer terug bij af bent. Toch duurt het gemiddeld genomen heel erg lang voor je weer op je startpunt staat. De theoretische verwachtingswaarde van het aantal benodigde muntworpen om terug te keren is zelfs oneindig. Je kunt er ook in meerdere dimensies naar kijken: Furstenberg en Margulis konden met de theorie van toevalswandelingen de groepenstructuur van Liegroepen (symmetriegroepen van objecten in hogere dimensies) in kaart brengen.

Bron: https://www.nrc.nl (23-03-2020)

WiTje: Eenvouwdig

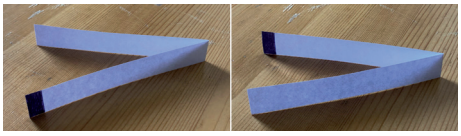
Wiskunde in teams

We beginnen met een strook papier met een uiteinde zwart gemarkeerd:



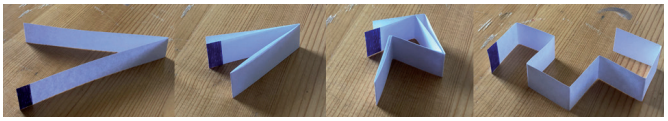
Zet de strook op zijn zijkant voor je op tafel met het zwarte stukje naar je toe. Dan kun je op twee manieren vouwen:

1 Vouw van je af, dus linksom. Het rechtereind komt dan achter het linkereind. Dat geven we aan met de letter *l*.
2 Vouw naar je toe, dus rechtsom. Het rechtereind komt dan vóór het linkereind. Dat noteren we met de letter *r*.

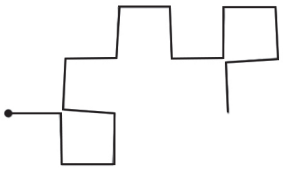


links *rechts*

Je kunt vervolgens een *vouwrecept* uitvoeren, een combinatie van vouwen, bijvoorbeeld *lrr*. Wanneer je alle vouwen vervolgens openmaakt tot een hoek van 90°, dan krijg je de figuur rechts.



Probeer zelf eens met een strook papier of met de app[1] het volgende patroon te maken:



Met drie keer vouwen krijgen je zeven hoeken. Bij iedere hoek ga je rechtsaf (R) of linksaf (L). Bij het vouwrecept *lrr* hoort zo het *looppatroon* RRLLRLL. Deze opdracht is gebaseerd op de Wiskunde B-dag van 2012. Daarin vind je meerdere uitdagingen, maar de belangrijkste zijn: kun je uit een vouwpatroon het looppatroon voorspellen, zonder te vouwen? Kun je voor een looppatroon bepalen of er een vouwrecept bij hoort? Succes!

Noot

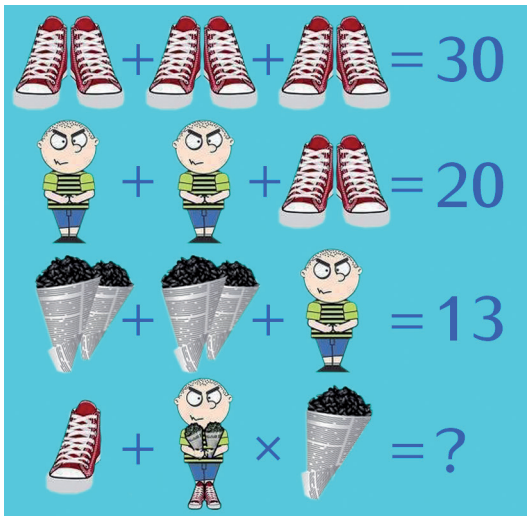
[1] *https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28862/documents/sliderappletNL/eenvouwdigNL.html*

Bron: Wiskunde B-dag 2012

Vastgeroest Coronatijden

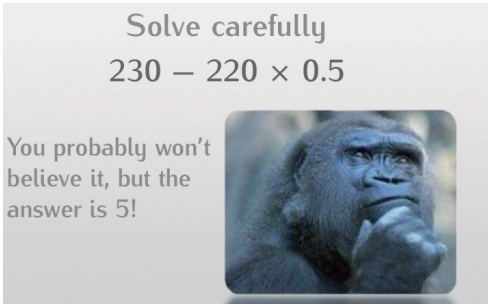
Ab van der Roest

Als leraar hebben we het zwaar tijdens de coronatijden. Natuurlijk niet zo zwaar als personeel in de gezondheidszorg, maar toch. Wat is een leraar zonder leerlingen? Ja, digitaal via Zoom hebben we contact. Ik geef mijn les en leerlingen stellen vragen. Ik stel hen vragen, dus het lijkt heel wat. Maar die vragende gezichten zie ik niet. En dat is toch precies wat je nodig hebt wanneer je lesgeeft. Je vertelt iets en als je vraagt of iedereen het begrepen heeft, krijg je zelden tot nooit reactie. Je zou je kunnen verbeelden dat je goed kunt uitleggen, maar bij een toets krijg je dan de echte reactie. Vragende gezichten, daar kun je op inspelen.
Toch is het niet alleen kommer en kwel. Opeens krijgen de leden van de hardloopclub respect voor docenten: we hebben een vitaal beroep. Als ze zelf hun kinderen moeten helpen met wiskunde, zitten ze vaak snel onthand. Maar nog een andere ontwikkeling. Er gaan opeens allerlei logische puzzels rond in de appgroep en de wiskundeleraar mag het beslissende woord spreken. Een paar voorbeelden, misschien heb je ze al een keer gezien.



figuur 1

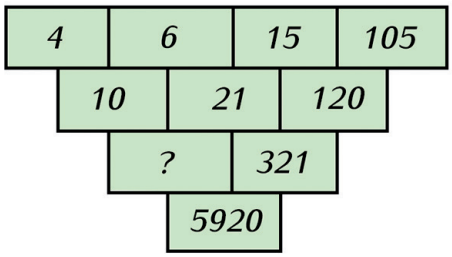
Op de plaats van het vraagteken moet staan: 43.
Bruikbaar in elk leerjaar en de eerste vijf minuten van de digitale les zijn voorbij.



figuur 2

Deze ga ik in vwo-4 wiskunde A gebruiken.

En ten slotte de volgende die me heel veel hoofdbrekens kostte. Het antwoord? Je hebt het misschien al gezien is natuurlijk 79.



figuur 3

Ondanks de vreemde omstandigheden dus ook positieve ontwikkelingen en laten we proberen die ook altijd te zien.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Verenigingsnieuws

Jaarvergadering/studiedag 2020

Eerste uitnodiging

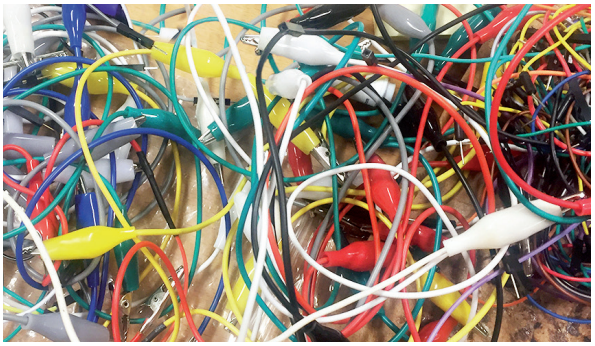
Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 7 november 2020.**
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.15 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.

Het bestuur houdt er rekening mee dat de jaarvergadering/studiedag niet op de ons zo bekende manier doorgang kan vinden. Andere scenario's worden onderzocht. Zodra er meer duidelijkheid ontstaat rond de beperkende maatregelen m.b.t. het coronavirus, laten we je via Euclides, de nieuwsbrief en de website weten hoe de jaarvergadering/studiedag dit jaar vormgegeven wordt.

Thema van de studiedag: Netwerken

Het thema van deze studiedag is *Netwerken*. Netjes werken is belangrijk bij het doen van wiskunde en bij wiskunde leren. Je gedachten op papier zetten, schetsen, een probleemsituatie zo organiseren dat die met wiskundige middelen kan worden opgelost. Activiteiten die om net werken vragen. Hoe stimuleer je dat in je wiskundeles? Bij dit thema kun je natuurlijk ook denken aan het gelijknamige onderwerp binnen de discrete wiskunde. Een klassiek onderwerp, zie het vraagstuk over de zeven bruggen van Koningsbergen, met vele toepassingen in techniek, sociologie, terrorismebestrijding, verspreiding van virussen en informatica. Heeft dat onderwerp, met onder andere grafen, matrices en combinatoriek, wel de plek die het verdient in ons curriculum? Naast mooie lessen rond deze onderwerpen zal die vraag ook ter discussie staan. Tot slot kun je bij dit thema denken aan het belang van netwerken voor het bijhouden en uitwisselen van kennis en ervaringen met collega's met sociale media, professionele leergemeenschappen en platforms voor onze beroepsgroep. Tijdens de studiedag zullen we zeker netwerken. Laat deze dag weer een inspirerende bijeenkomst worden! Een bijeenkomst voor degenen die al langer meelopen en voor zij die net werken. Heb je ideeën voor een workshop over dit thema of misschien wel over een heel ander onderwerp? Dan horen we die graag! Mail naar Lidy Wesker-Elzinga *nvvw.nl*), Sharon Calor (*s.calor@nvvw.nl*) of Michiel Doorman (*m.doorman@nvvw.nl*).

Laat de coronacrisis je niet weerhouden om je waardevolle ideeën rond het thema van de studiedag met je collega's te delen. Wiskundeonderwijs zal, in diverse vormen, door blijven gaan. De behoefte aan inspirerende voorbeelden blijft onverminderd groot. Je bijdrage wordt zeer op prijs gesteld.



10.00-11.00 uur – Jaarvergadering
(Concept) Agenda:

1. Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange
2. Jaarrede van de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2019
4. Jaarverslagen 2019/2020
   4.1. Jaarverslag van de NVvW
   4.2. Jaarverslag van *Euclides*
5. Financiën
   5.1. Jaarrekening en balans 2019/2020
   5.2 Verslag kascommissie en decharge van de penningmeester
   5.3 Vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6. Bestuursverkiezing
7. Rondvraag
8. Sluiting van de jaarvergadering

Programma studiedag

Nadere informatie volgt.

Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 7 november 2020

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op 7 november 2019. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree (e-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*)

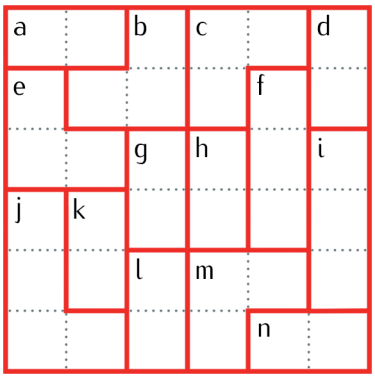
Puzzel 95-7

Lege Latijnse vierkanten vullen

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Voor de zomervakantie een puzzel waarbij geen noemenswaardige wiskunde nodig is, dus ook voor familie en vrienden. En voor iedereen die graag sudoku's oplost, maar wel anders. Wel vragen we om bij alle oplossingen de redenatie/strategie in grote lijnen aan te geven. Dus niet alleen de resultaten van een computerprogramma. In tegenstelling tot een goede sudoku, waarin het altijd mogelijk is via redenatie een volgend getal in te vullen, zul je bij deze puzzels soms iets moeten uitproberen. We starten met een leeg vierkant met n bij n vakjes. Daarin moeten getallen van 1 tot en met n worden ingevuld, zodanig dat in elke rij en elke kolom de getallen van 1 tot en met n precies één keer voorkomen, of wel het wordt een *Latijns vierkant*. Net als bij een sudoku mag er slechts één oplossing zijn, maar zonder verdere eisen wordt daar natuurlijk niet aan voldaan. Er bestaan zulke puzzels waarbij het vierkant in gebiedjes is ingedeeld en bepaalde eisen worden gesteld aan de sommen van de getallen in die gebiedjes. Dus anders dan bij een sudoku mogen er dan wel gelijke getallen worden ingevuld binnen een gebied. Daarover gaat deze puzzel.

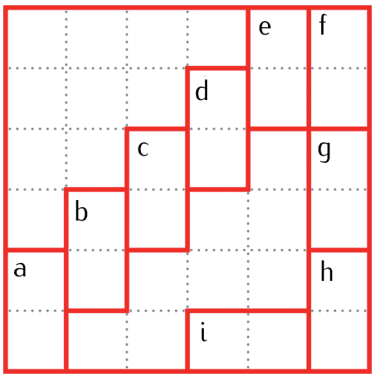
Opgave 1: Een vierkant met 6×6 vakjes is verdeeld in 14 gebieden, in elke rij en elke kolom (dus niet per se in de diagonalen) staan de getallen 1 tot en met 6, elk precies één keer, zie figuur 1. In elk van de 14 gebieden is de som van de getallen gelijk. Hoe staan de getallen in dat vierkant?



figuur 1

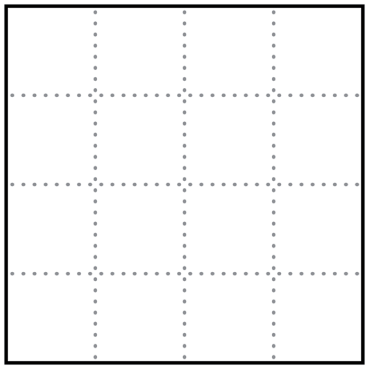
Dit soort puzzels wordt niet algemeen gebruikt in dagbladen of puzzelboekjes, omdat het aantal mogelijke vullingen voor kleinere vierkanten met bovenstaande eisen zeer beperkt is. En grotere vierkanten zijn meestal niet met logisch nadenken op te lossen. Daarom maakten wij een variatie op dit concept door bovendien te stellen dat ook op de twee diagonalen de getallen 1 tot en met n moeten worden ingevuld.

Opgave 2: In deze opgave bestaan rijen, kolommen en diagonalen uit de getallen 1 tot en met 6, elk precies één keer. De indeling in gebieden is gegeven, zie figuur 2, en van een deel van de gebieden is ook de som gegeven. De gebieden a, b, c, d en e bevatten de sommen 7, 6, 5, 4 en 3, in die volgorde. De andere vier gelabelde gebieden hebben de sommen 6, 7, 8 en 9 niet per se in deze volgorde. Aan jou om dit vierkant te vullen.



figuur 2

En ten slotte starten we met een echt leeg vierkant van 4×4 waarin de rijen, kolommen en diagonalen gevuld moeten worden met de getallen 1 tot en met 4, zie figuur 3. Daarbij moet je zelf een indeling in gebieden bedenken waarbij de sommen in die gebieden opvolgende aantallen zijn. De gebieden bestaan uit een of meer vakjes waarbij de vakjes (net als in de vorige opgaven) steeds met een hele zijde aan elkaar grenzen. Het is de bedoeling dat je een indeling maakt in gebieden zodat een puzzel ontstaat. Het maximaal aantal punten krijg je als je puzzel slechts één unieke oplossing heeft. Maar indelingen met meer dan één oplossing leveren ook punten op.



figuur 3

Opgave 3a: Een reeks opeenvolgende getallen die de sommen vormen van de gebieden is alleen mogelijk bij bepaalde aantallen gebieden. Bepaal daarom welke aantallen gebieden mogelijk zijn in een 4 × 4 Latijns vierkant met de getallen 1 tot en met 4.

We zoeken een puzzel in een 4 × 4 matrix waarin alle rijen, kolommen en diagonalen bestaan uit de getallen 1 tot en met 4 (elk precies één keer). Deze moeten worden ingevuld zodanig dat de sommen van de gebiedjes een rij opeenvolgende getallen vormt (je weet niet welk gebied welke som heeft).

Opgave 3b: Zoek een indeling in gebieden met zo min mogelijk oplossingen, liefst één, en geef de/een oplossing van de zo ontstane puzzel.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij jouw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken.
De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 10 september 2020 binnen zijn.

Ladderstand en uitwerking puzzel 95-5

De inzendtermijn van puzzel 95-5 is uitgesteld tot 15 augustus, omdat we merkten dat door de coronacrisis maar weinig mensen genoeg tijd hadden om de puzzel te maken. De ladderstand t/m puzzel 95-5 zal daarom in *Euclides* 96-2 gepubliceerd worden en de uitwerking zal tegelijkertijd op de site staan.

Mededeling

Wiskundige beelden: tentoonstelling Rinus Roelofs

Op initiatief van de Hengelose kunststichting HeArtpool toont de Hengelose kunstenaar/wetenschapper Rinus Roeloefs zes monumentale mathematische beelden die vorig jaar te zien waren op het plein van Museum CosmoCaixa in Barcelona. De opstelling op het Stationsplein in Hengelo wordt aangevuld met nog twee nieuwe beelden. De tentoonstelling krijgt de titel *Structuren – Beelden Buiten*.
Roelofs (1954) stelt dat in de renaissance wiskunde en kunst sterk met elkaar verbonden waren. Wetenschap, wiskunde en kunst waren soms in één persoon vertegenwoordigd. De twee disciplines zijn sindsdien uit elkaar gegroeid en inspiratiebronnen uit beide werelden kwamen niet verder dan het eigen vakgebied. Heel bescheiden treedt Roelofs in de voetsporen van de door hem bewonderde voorgangers die kunst en wiskunde wisten te integreren: M.C. Escher, Richard Buckminster Fuller, Frei Otto en Leonardo da Vinci. Zijn doel is dat wij vol verwondering naar de schoonheid van wiskundige structuren en objecten kijken. In het werk van Roelofs zijn kunst en wetenschap onlosmakelijk met elkaar verbonden. Roelofs heeft zowel toegepaste wiskunde gestudeerd, promoveerde recent in Leuven en studeerde in 1983 af aan de kunstacademie Aki in Enschede. De kunstenaar exposeerde onder andere in de VS, Japan, China, Duitsland, Spanje en recent in het Escher Museum in Den Haag. Bij de tentoonstelling verschijnt een publicatie van de stichting Ars et Mathesis.
Bron: *https://www.hengelosweekblad.nl*

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2020

21/08 22/08 28/08 29/08 — AMSTERDAM en EINDHOVEN
Vakantiecursus 'Speltheorie: van strategisch beslissen tot 'eerlijke' oplossingen'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Vr 11/09 — Eindhoven
Finale wiskunde olympiade 2019

Za 07/11 — Veenendaal
Jaarvergadering/studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 96

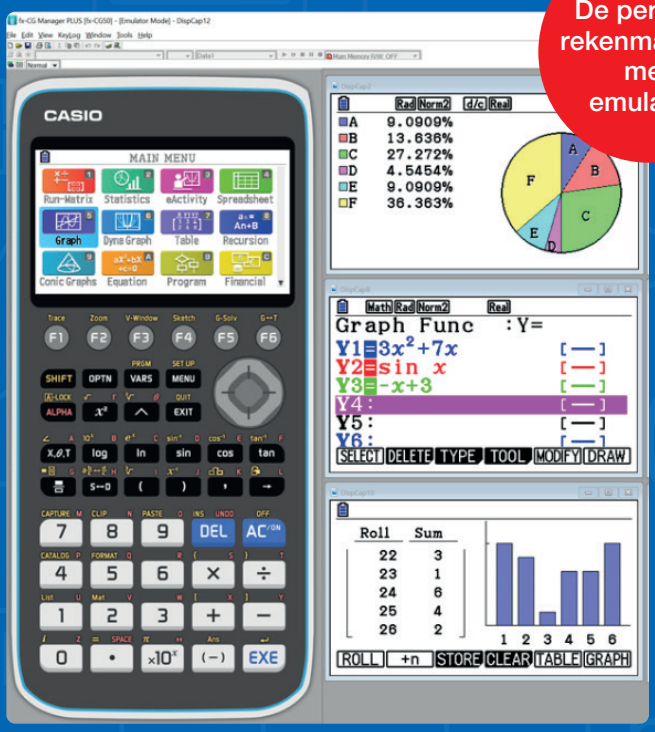
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	8 september 2020	15 juni 2020
2	27 oktober 2020	24 augustus 2020
3	15 december 2020	12 oktober 2020
4	26 januari 2021	16 november 2020
5	16 maart 2021	4 januari 2021
6	4 mei 2021	1 maart 2021
7	22 juni 2021	26 april 2021

CASIO

Op Casio kunt u rekenen

Casio fx-CG50

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken



fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

MODERNE WISKUNDE

NIEUW!
Moderne Wiskunde 12e editie Tweede Fase

– Eenvoudig differentiëren door verschillende leerroutes
– Uitgebreide examentraining voor alle vaardigheden
– Met vernieuwde statistiektool én Examensprint
– Eenvoudig switchen tussen het boek en de digitale leeromgeving.

Vraag nu gratis beoordelingsmateriaal aan op
modernewiskunde.noordhoff.nl/tweedefase