

Olympiadepuzzel

Euclides 95 nummer 4



Labyrint

Opgave

In de Efteling wordt een nieuwe attractie gebouwd: een labyrint, bestaande uit vierkante tegels van 1 bij 1 meter en afscheidingshagen van 1 meter lang per stuk. Op dit moment (zie figuur) bestaat het labyrint uit 16 tegels, terwijl er 25 meter aan afscheidingshaag is geplant: 4 meter onder de vakjes 1 t/m 4; een meter links van vakje 1; 5 meter boven vakjes 1 t/m 5; 2 meter rechts van vakje 5 en 6, et cetera. Men bouwt het labyrint op deze spiraalvormige manier verder totdat het in totaal 10.000 meter haag bevat. Hoeveel tegels zijn er dan in totaal nodig?

13	14	15	16	17	18	19
12	1 2 3 4 5					20
11	10	9	8	7	6	21

Uitwerking

We bekijken eerst labyrinten met afmetingen $n \times (n + 4)$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$. Voor $n = 1$ bekijken we het labyrint met afmetingen 1×5 , dus bestaande uit 5 tegels. Dat heeft 11 meter haag nodig: 4 meter onder de 4 tegels, 5 meter boven de 5 tegels en 2 meter aan verticale haag aan weerszijden. Om de stap naar $n = 2$ te zetten kijken we hoe het labyrint met afmetingen 2×6 , dus bestaande uit 12 tegels, uit het 1×5 -labyrint ontstaat. Er komen dan 7 nieuwe tegels bij en er komt voor elke nieuwe tegel in ieder geval 1 meter haag bij en voor de twee nieuwe hoektegels (nummers 6 en 11) nog een extra haag. In totaal komen we zo op $11 + 7 + 2 = 20$ meter haag. Gebruiken we ook nog dat $11 = 4 + 5 + 2$, dan vinden we dus dat het aantal meter haag gelijk is aan $20 = (4 + 5 + 2) + 7 + 2 = 4 + (5 + 7) + (2 + 2) = 4 + 12 + 2 \cdot 2$. Voegen we nu 9 tegels toe — we krijgen dan het labyrint met afmetingen 3×7 , dus bestaande uit 21 tegels —, dan komt er voor elke nieuwe tegel wederom in ieder geval 1 meter haag bij en voor de twee nieuwe hoektegels (nummers 13 en 19) nog een extra haag; in totaal komen we zo op $(4 + 12 + 2 \cdot 2) + 9 + 2 = 4 + 21 + 3 \cdot 2$ meter haag. Voor elke volgende n neemt het aantal meter haag steeds met 2 meer toe dan het aantal tegels, omdat er steeds twee nieuwe hoektegels bij komen. Dat betekent dat het aantal meter haag van een $n \times (n + 4)$ -labyrint gelijk is aan $4 + n(n + 4) + n \cdot 2 = 4 + n^2 + 6n = (n + 3)^2 - 5$. Nemen we nu $n = 97$, dan zien we dat een 97×101 -labyrint in totaal uit $100^2 - 5$ meter haag bestaat en daarnaast uit $97 \cdot 101 = 9797$ tegels. Bij de 9798e tegel komt er 2 meter haag bij en zitten we dus op $100^2 - 3$ meter haag. Nog 3 tegels verder zitten we op 9801 tegels en 100^2 meter haag. Na het planten van in totaal 10.000 meter haag bestaat het labyrint dus uit 9801 tegels. (En dit is niet geheel toevallig 99^2 : $n(n + 4) + 4 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$.)

Inzenders met de juiste oplossing

Paul Aakster, Harm Bakker, Jan van Doorn, Anneke Grunefeld, Hans Huisman, J.G. Kruis,

Hans Linders, Jan Meerhof, Job Porck, Jos Remijn, Frans 't Sas, Ruud Stolwijk, Monica Woldinga, Gerrit Zijlstra.

Winnaar van de cadeaubon

Harm Bakker.