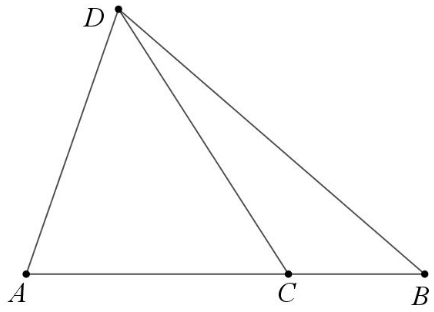
Appendix – De stelling van Stewart

DICK KLINGENS

1. Opdracht 1

Allereerst nog een, wellicht overbodige maar korte, toelichting bij het Engelse citaat.
"The space [en zij v de oppervlakte van die 'space'; dk] to which the square of x has the same ratio that y has to z" betekent zo iets als: $\frac{x^2}{v} = \frac{y}{z}$. Zodat: $v = x^2 \cdot \frac{z}{y}$.

figuur 1



En dan is, zie figuur 1:

$$AD^2 + BD^2 \cdot \frac{CA}{BC} = AB \cdot AC + CD^2 \cdot \frac{BA}{BC}$$

Dit kan geschreven worden als:

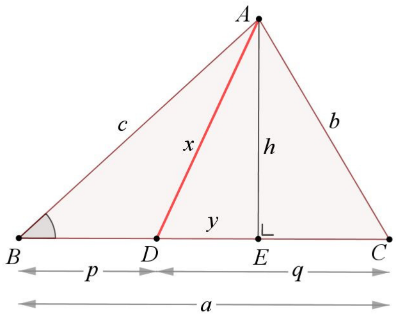
- $AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot CA = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot BA$

Of ook:

- $CD^2 \cdot AB = AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC - AB \cdot AC \cdot BC$

2. Drie (of ten hoogste twee?) elementaire bewijzen van de stelling van Stewart (opdracht 2)

figuur 2a



2.1. Met 'drie keer Pythagoras'

In figuur 2a (met D op het lijnstuk BC en $AD = x$) is AE de loodlijn op BC, waarbij $AE = h$. En daarbij is $DE = y$.
Nu is in driehoek ECA en in driehoek BEA:

$$b^2 = h^2 + (q-y)^2$$

en

$$c^2 = h^2 + (p+y)^2$$

Dan is:

$$\begin{aligned} b^2p + c^2q &= (h^2p + pq^2 - 2pqy + py^2) + (h^2q + p^2q + 2pqy + qy^2) \\ &= h^2(p+q) + y^2(p+q) + pq(p+q) \\ &= (p+q)(h^2 + y^2 + pq) \end{aligned}$$

De 'derde keer Pythagoras' geeft in driehoek DEA: $x^2 = h^2 + y^2$.
Zodat:

- $b^2p + c^2q = a(x^2 + pq)$ of $x^2a = b^2p + c^2q - apq$

2.2. Met twee keer de cosinusregel

Volgens de cosinusregel, en zie weer figuur 2a, is in driehoek BDA en in driehoek BCA:

$$x^2 = p^2 + c^2 - 2pc\cos(B) \quad \text{en} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$

Vermenigvuldiging van deze relaties met respectievelijk a en p, gevolgd door een aftrekking geeft dan:

$$x^2a - b^2p = (p^2a + c^2a) - (a^2p + c^2p) = ap(p-a) + c^2(a-p)$$

Zodat ook in dit geval (natuurlijk) voor de lengte x van het lijnstuk AD geldt:

- $x^2a = b^2p + c^2q - apq$

Opmerkingen

1. Als slechts de *verhouding* tussen de deellijnstukken BD en CD op de zijde BC gegeven is, zeg $BD : CD = u : v$, dan is:

$$BD = p = \frac{u}{u+v} \cdot a \quad \text{en} \quad CD = q = \frac{v}{u+v} \cdot a$$

zodat daarmee:

$$x^2 a = b^2 \cdot \frac{u}{u+v} \cdot a + c^2 \cdot \frac{v}{uv} \cdot a - a \cdot \frac{uv}{(u+v)^2} \cdot a^2$$

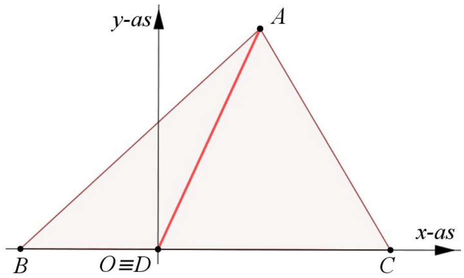
En dit leidt tot een – in een enkel geval – ‘meer bruikbare’ formule van Stewart:

(1)… $x^2(u+v) = b^2 u + c^2 v - \dfrac{uv}{u+v} a^2$

2. En natuurlijk, de cosinusregel wordt bewezen door twee keer de stelling van Pythagoras toe te passen. Er is daarmee eigenlijk weinig verschil tussen de bewijzen in 2.1 en 2.2. ◊

2.3. Een analytisch bewijs

figuur 2b



Door ‘handig’ een assenstelsel te definiëren kan een eenvoudig analytisch bewijs geven worden – eigenlijk ook niets anders dan het herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras.

Kies het punt D (op BC) als oorsprong van een xOy-assenstelsel waarvan de x-as de drager is van het lijnstuk BC; zie figuur 2b.

Dan is met $A = (u, v)$, $B = (-p, 0)$, $C = (q, 0)$ en p, $q > 0$ en $p + q = a$:

$$AD^2 \cdot a = (u^2 + v^2)(p+q) = u^2 p + v^2 p + u^2 q + v^2 q$$
$$AC^2 \cdot p = ((u-q)^2 + v^2)p = u^2 p + u^2 q - 2pqu + pq^2$$
$$AB^2 \cdot q = ((u+p)^2 + v^2)q = u^2 q + v^2 q + 2pqu + p^2 q$$

Zodat na optelling, met $p^2q + pq^2 = pq(p + q) = apq$ en $AD = x$, ook nu blijkt:

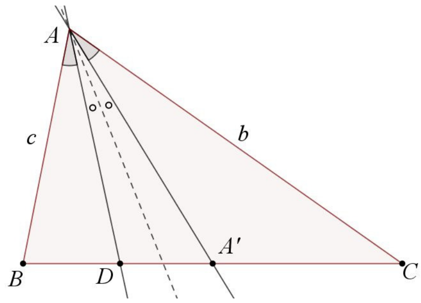
- $x^2 a = AC^2 \cdot p + AB^2 \cdot q - apq = b^2 p + c^2 q - apq$

3. Iets over symmedianen

Definitie. Een **symmediaan** van een driehoek is het spiegelbeeld van een zwaartelijn in de bissectrice die door hetzelfde hoekpunt gaat als die zwaartelijn.

Stelling 1. Een symmediaan verdeelt de overstaande zijde (inwendig) in stukken waarvan de lengtes zich verhouden als de kwadraten van (de lengtes van) de opstaande zijden.

figuur 3



Bewijs. Zie figuur 3. De A-symmediaan (de symmediaan door het hoekpunt A) van driehoek ABC snijdt de zijde BC in het punt D. Het punt A' is het midden van BC. Aangetoond moet worden dat:

- $BD : CD = BA^2 : CA^2 = c^2 : b^2$

Hierna wordt gebruik gemaakt van de functie Φ die de oppervlakte van een meetkundig object bepaalt.[2]

Op grond van de spiegelingseigenschappen is $\angle BAD = \angle A'AC$ en $\angle BAA' = \angle DAC$. De lengte van het lijnstuk AD wordt aangegeven met m_a, de lengte van AA' met z_a. Nu is wegens $BA' = CA'$ en de sinusformule voor Φ:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BD}{CA'} \cdot \frac{BA'}{CD} = \frac{\Phi(BDA)}{\Phi(A'CA)} \cdot \frac{\Phi(BA'A)}{\Phi(DCA)} = \frac{\frac{1}{2}\sin(BAD) \cdot c \cdot m_a}{\frac{1}{2}\sin(A'AC) \cdot b \cdot z_a} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin(BAA') \cdot c \cdot z_a}{\frac{1}{2}\sin(DAC) \cdot m_a \cdot b} = \frac{c^2}{b^2} \quad \Diamond$$

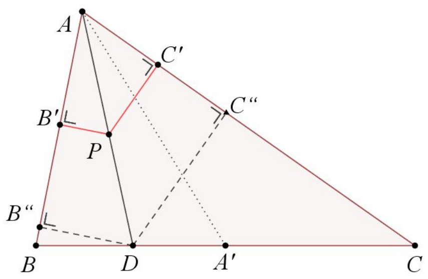
Opmerkingen

1. Deze eigenschap kan worden gebruikt om aan te tonen dat een punt van de zijde BC (in dit geval D) op de A-symmediaan van driehoek ABC ligt. Analoog geldt een en ander natuurlijk ook voor de B- en C-symmediaan.

2. Zie ook paragraaf 4.5 (raaklijn en buitensymmediaan). ◊

Stelling 2. De afstanden van een punt P op de A-symmediaan tot de zijden AB en AC verhouden zich als (de lengtes van) die zijden.

figuur 4



Bewijs. De projecties van P op AB, AC zijn B', C', die van D daarop zijn B'', C''. Er moet bewezen worden:

▪ $PB' : PC' = c : b$

Voor de oppervlaktes van de driehoeken BDA en DCA geldt:

$$\frac{\Phi(BDA)}{\Phi(DCA)} = \frac{BD}{CD} \overset{\text{volgens stelling 1}}{=} \frac{c^2}{b^2}$$

Daarbij is tevens:

$$\Phi(DCA) = \tfrac{1}{2} DC'' \cdot b = \tfrac{1}{2}(PC' \cdot k) \cdot b \text{, waarbij } k = \frac{AD}{AP}$$

En zo is ook:

$$\Phi(BDA) = \tfrac{1}{2} DB'' \cdot c = \tfrac{1}{2}(PB' \cdot k) \cdot c$$

Voor de verhouding van de oppervlaktes van de beschouwde driehoeken is dan:

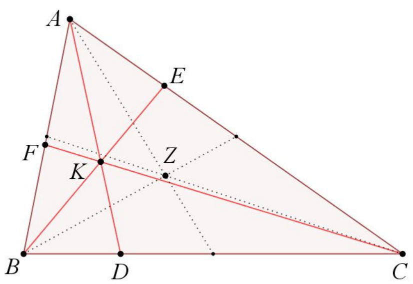
▪ $\dfrac{\Phi(BDA)}{\Phi(DCA)} = \dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{PB' \cdot c}{PC' \cdot b} \Rightarrow \dfrac{PB'}{PC'} = \dfrac{c}{b}$ ◊

Als ‘toegift’ bij stelling 1 kan nu eenvoudig bewezen worden:

Stelling 3. De symmedianen van een driehoek zijn concurrent. Het gemeenschappelijke snijpunt is het zogeheten **Lemoine-punt** (ook wel **symmediaanpunt**) van de driehoek.

Opmerking. Het Lemoine-punt van een driehoek wordt in de wiskundige literatuur meestal aangegeven met de letter K. ◊

figuur 5



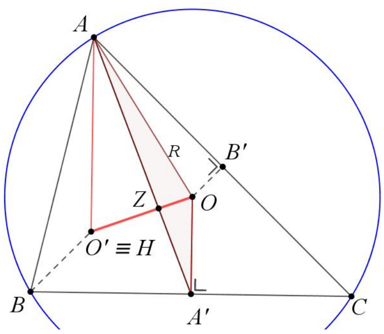
Bewijs. In figuur 5 zijn AD, BE en CF de symmedianen van driehoek ABC.
Volgens stelling 1 is $BD : CD = c^2 : b^2$.
En daaraan analoog is ook:
$CE : AE = a^2 : c^2$ en $AF : BF = b^2 : a^2$
Dan is, rekening houdend met de oriëntatie van de deellijnstukken op de zijden van de driehoek:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = -1$$

Met de stelling van Ceva [1] volgt hieruit dat de lijnen AD, BE, CF – en dat zijn dus de symmedianen – door eenzelfde punt K gaan. ◊

4. Rekenen aan enkele bijzondere lijnstukken in de driehoek

figuur 6a



4.1. Het lijnstuk *OZ*

Zie figuur 6a. Bij de vermenigvuldiging met het zwaartepunt Z als centrum en factor -2 gaat het punt A' (het midden van BC) over in het punt A. Het punt O (het middelpunt van de omcirkel) gaat daarbij over in het punt O'.
Omdat OA' loodrecht staat op BC, staat de beeldlijn $O'A$ ook loodrecht op BC.
De lijn AO' is dus een hoogtelijn van driehoek ABC.
Met eenzelfde redenering is ook de lijn BO' een hoogtelijn. Dus valt het punt O' samen met het hoogtepunt van de driehoek:

▪ $O' \equiv H$

Merk op dat de punten H, Z en O collineair zijn [3] en dat $HZ : ZO = 2 : 1$.

In driehoek $AA'O$ is daardoor volgens formule (1) in paragraaf 2:

$$OZ^2 \cdot 3 = OA^2 \cdot 1 + OA'^2 \cdot 2 - \tfrac{2}{3} AA'^2$$

In de A'-rechthoekige driehoek $A'CO$ is $OA'^2 = OC^2 - A'C^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2$ (*stelling van Pythagoras*).
En daarmee is, gebruikmakend van relatie (5.0) in het artikel zelf (de zwaartelijnformule):
$3OZ^2 = R^2 + 2(R^2 - \frac{1}{4}a^2) - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(b^2+c^2) - \frac{1}{4}a^2)$
Zodat:

- $OZ^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$

4.2. Het lijnstuk *OH*

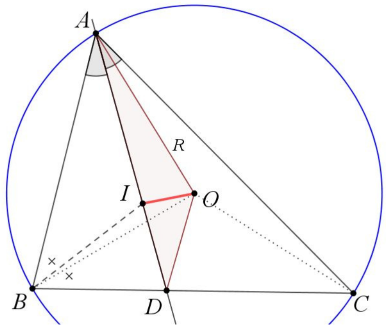
In paragraaf 4.1 bleek: $OH = 3OZ$, zodat: $OH^2 = 9OZ^2$. En dan is:

- $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$

4.3. Het lijnstuk *OI*

Het uitdrukken van OI^2 (waarbij I het snijpunt is van de bissectrices) in elementen van driehoek ABC heeft wat meer voeten in de aarde, indien althans *alleen* gebruik gemaakt wordt van de formule van Stewart [4, a].
Vooraf eerst een 'hulpformule'. In een *gelijkbenige* driehoek ABC met top A (dus met $b = c$) en met $BD = p$ en $CD = q$ is: $AD^2 \cdot a = b^2 \cdot p + c^2 \cdot q - apq = ab^2 - apq$.
Dus is in een *A-gelijkbenige* driehoek met een willekeurig punt D op BC:
(*)... $AD^2 = b^2 - pq$

figuur 6b



In figuur 6b, waarin ABC een *willekeurige* driehoek is, geeft de hulpformule (*) in de O-gelijkbenige driehoek BCO:
(2)... $OD^2 = R^2 - BD \cdot CD$
In driehoek ABC is AD een bissectrice zodat volgens de bissectriceformule:
(3)... $AD^2 = bc - BD \cdot CD$
Ook is BI in driehoek BAD een bissectrice. Volgens de bissectricestelling is dan:
$ID : IA = BD : AB = (\frac{c}{b+c} \cdot a) : c = a : (b+c)$

Dan is in driehoek AOD met formule (1) van paragraaf 2:

(4a)... $OI^2 \cdot (a+b+c) = OA^2 \cdot a + OD^2 \cdot (b+c) - \dfrac{a(b+c)}{a+b+c} \cdot AD^2$

Met $a + b + c = 2s$, met $BD \cdot CD = \dfrac{ac}{b+c} \cdot \dfrac{ab}{b+c} = \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$ en door het toepassen van de relaties (2) en (3) gaat relatie (4a) over in:

(4b)... $OI^2 \cdot 2s = R^2 \cdot a + \left(R^2 - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}\right)(b+c) - \dfrac{a(b+c)}{2s}\left(bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}\right)$

Delen door $2s$ en uitwerken van de 'grote' haakjes, en vervolgens een term buiten haakjes halen, leiden dan tot:

(4c)... $OI^2 = R^2 \cdot \dfrac{a}{2s} + R^2 \cdot \dfrac{b+c}{2s} - \dfrac{a^2bc}{2s(b+c)} - \dfrac{abc(b+c)}{4s^2} + \dfrac{a^3bc}{4s^2(b+c)}$

$$= R^2 - \frac{abc}{2s}\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{2s} - \frac{a^2}{2s(b+c)}\right)$$

En dan is:

(5a)... $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{2s}$

want na enig rekenwerk blijkt dat $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b+c}{2s} - \dfrac{a^2}{2s(b+c)} = 1$.

Twee bekende (?) formules voor de oppervlakte Φ van driehoek ABC zijn:

$\Phi = rs$ en $\Phi = \dfrac{abc}{4R}$

En met die identiteiten blijkt dan (*eindelijk*):

(5b)... $OI^2 = R^2 - 2Rr$

Opmerking. Relatie (5b) wordt de **formule van Euler** (voor de om- en incirkel van een driehoek) genoemd; zie ook [4, *b*]. ◊

4.4. Hoogtelijn

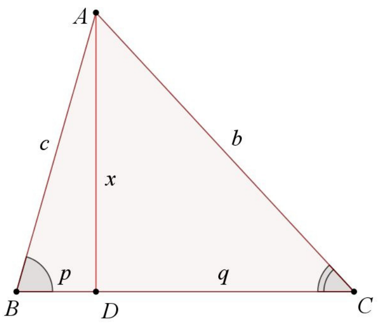
Indien van driehoek ABC twee hoeken bekend zijn, dan is de lengte van de hoogtelijn op de zijde die het gemeenschappelijk been vormt van die hoeken, eenvoudig te berekenen.
Geldt voor het punt D op de zijde BC van driehoek ABC dat $BD : CD = \cot(B) : \cot(C)$, dan is, en zie daarvoor figuur 7a, met AD (waarvan de lengte gelijk is aan x) loodrecht op BC:

$$BD = \frac{\cot(B)}{\cot(B)+\cot(C)} \cdot a$$

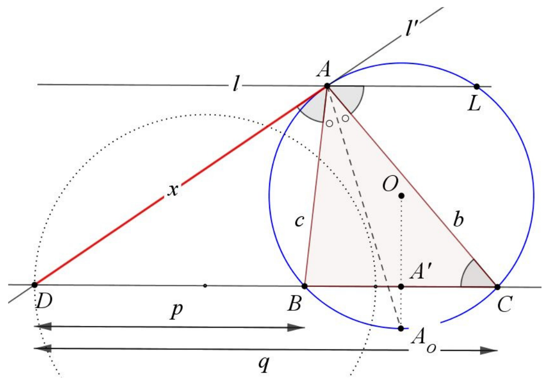
zodat:

- $x = \dfrac{BD}{\cot(B)} = \dfrac{a}{\cot(B)+\cot(C)}$

figuur 7a



figuur 7b



4.5. Raaklijnstuk aan de omcirkel

Zie figuur 7b, waarin de aan BC evenwijdige lijn l door het hoekpunt A van driehoek ABC gaat en l' het spiegelbeeld van l is in de bissectrice AA_o van hoek A. Nu is, met D als snijpunt van l' en BC:
- vanwege de spiegeling: $\angle DAB = \angle CAL$;
- vanwege de evenwijdigheid: $\angle ACB = \angle CAL$.
Daaruit volgt dat $\angle DAB = \angle C = ½$ bg(AB). Met andere woorden: de lijn l' is de raaklijn in A aan de omcirkel van driehoek ABC. Met x als lengte van het (raak)lijnstuk DA is dan:

(6a)... $x^2 = DA^2 = DB \cdot DC = pq$

Toepassing van de stelling van Stewart in driehoek ADC geeft dan:

$$AB^2 \cdot CD = AD^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BD - BC \cdot BD \cdot CD$$

of ook:

(6b)... $c^2 q = x^2 a + b^2 p - apq$

Uit de relaties (6a) en (6b) volgt dan $c^2 q = b^2 p$ of:

(6c)... $p : q = c^2 : b^2$

Nu is $p = \dfrac{c^2}{c^2 - b^2} \cdot a,\ q = \dfrac{b^2}{c^2 - b^2} \cdot a$, waarmee dan uit (6a) volgt:

(7)... $x = \dfrac{abc}{|b^2 - c^2|}$

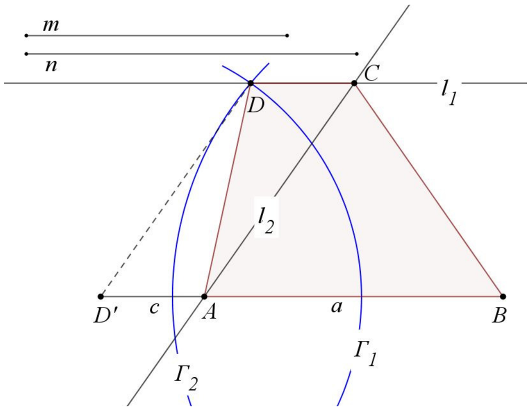
Opmerking. Op grond van de relatie $BD : CD = c^2 : b^2$ (vergelijk relatie (6c) met het gestelde in stelling 1) wordt de lijn AD de ***A*-buitensymmediaan** van driehoek ABC genoemd. ◊

5. ‘Stewart’ in een vierhoek

5.1. Trapezium-constructie

Van het trapezium $ABCD$ zijn de evenwijdige zijden AB, CD en de diagonalen AC, BD in lengte gegeven; opvolgend zijn dat a, c en m, n.
Opdracht. Construeer dit trapezium met passer en liniaal.

figuur 8



Oplossing. Als uitgangspunt voor de constructie in figuur 8 dient een lijnstuk $D'B$, met daarop een punt A, waarbij $D'A = c$ en $AB = a$.

De beschrijvingen van de te gebruiken constructiestappen komen min of meer overeen met functies in het programma *GeoGebra*[5].

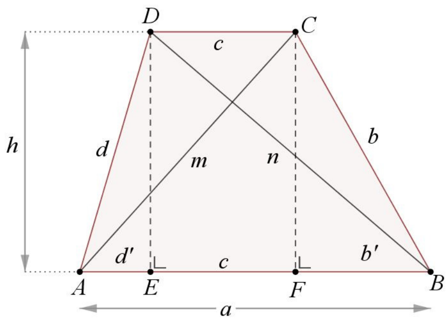
De achtereenvolgens uit te voeren constructiestappen zijn:

1. Passer(D', m) $\equiv \Gamma_1$
2. Passer(B, n) $\equiv \Gamma_2$
3. Snijpunt(en)(Γ_1, Γ_2) $\equiv D$
4. Lijnstuk(D', D)
5. EvenwijdigeLijn(D, AB) $\equiv l_1$
6. EvenwijdigeLijn(A, $D'D$) $\equiv l_2$
7. Snijpunt(l_1 , l_2) $\equiv C$
8. Veelhoek(A, B, C, D, A)

Dan is $ABCD$ het trapezium dat aan de gegevens voldoet.

5.2. Een ander bewijs van een relatie in een trapezium

figuur 9



In een trapezium $ABCD$ (AB // CD) waarvan a, b, c, d de lengtes zijn van de zijden en m, n de lengtes van de diagonalen, geldt:

(6)… $m^2 + n^2 = b^2 + d^2 + 2ac$

Het bewijs van deze relatie kan gegeven worden door herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras.

In figuur 9 zijn E, F de voetpunten van de loodlijnen uit D, C op AB; h is de hoogte van het trapezium.

Met $AE = d'$ en $BF = b'$ is ‘met vier keer Pythagoras’ in de rechthoekige driehoeken ACF, BDE, ADE, BCF:

$$m^2 = h^2 + (d' + c)^2 \qquad h^2 + d'^2 = d^2$$
$$n^2 = h^2 + (c + b')^2 \qquad h^2 + b'^2 = b^2$$

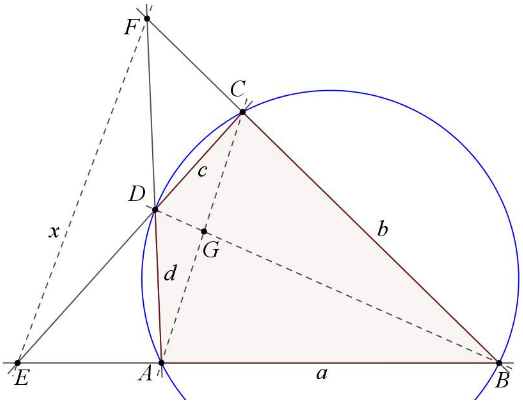
Zodat:

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= (d^2 + 2cd' + c^2) + (b^2 + 2b'c + c^2) \\ &= b^2 + d^2 + 2c(d' + b' + c) \\ &= b^2 + d^2 + 2ac \end{aligned}$$

6. Extra

In het euclidische vlak is een **volledige vierzijde** (vv) een figuur die bestaat uit 4 rechte lijnen (de zijden van de vv), waarvan er geen twee evenwijdig zijn, en hun 6 snijpunten (de hoekpunten van de vv).
Een verbindingslijn van twee hoekpunten die *geen* zijde is, is een diagonaal van de vv.

figuur 10



De diagonalen van de vv in figuur 10 zijn dus de lijnen *AC*, *BD*, *EF*.
De diagonaal *EF* wordt soms wel aangeduid als de *derde diagonaal* van de vv.

Liggen de punten *A*, *B*, *C*, *D* op een cirkel, dan spreekt men soms (en niet geheel correct) van een *ingeschreven volledige vierhoek* of van een *volledige koordenvierhoek*.

Opdracht 4. In een vv is het kwadraat van (de lengte van) de derde diagonaal gelijk aan de som van de machten van de eindpunten van die diagonaal bij de omcirkel van de vierhoek [6]. Dus geldt in de configuratie van figuur 10:

- $EF^2 = ED \cdot EC + FD \cdot FA$.

Bewijs deze eigenschap.

Aanwijzing. Pas om te beginnen de stelling van Stewart toe in driehoek *EFC*.

7. Noten

[1] Voor een bewijs van de stelling van Ceva en van de stelling van Menelaos zie (bijvoorbeeld):
DICK KLINGENS (1999): *Transversalen – de stelling van Ceva en van Menelaos*. Elektronisch bereikbaar via:
http://www.pandd.demon.nl/transvers.htm

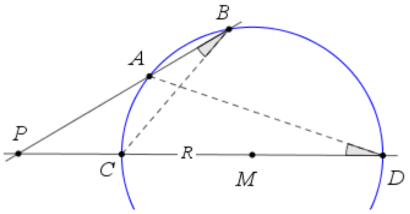
[2] De oppervlakte van driehoek *ABC* wordt ook aangegeven met Φ. In dit geval is Φ een constante.

[3] De lijn door de punten *H*, *Z* en *O* is de zogeheten **lijn van Euler** van de driehoek (naar Leonhard Euler, 1707-1783, Zwitserland).
Zie WIKIPEDIA EN:
https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_line

[4] Zie voor andere berekeningen bijvoorbeeld:
[a] DICK KLINGENS (2007): *Over de lengte van OH, OZ en OI in een willekeurige driehoek*. PDF-bestand, te downloaden via:
http://www.pandd.nl/downloads/ohoz.pdf
en:
[b] DICK KLINGENS (2000): *Om- en incirkel.* Elektronisch bereikbaar via:
http://www.pandd.demon.nl/omincirkel.htm

[5] *GeoGebra* is een (dynamisch) computerprogramma voor meetkunde, algebra, analyse, statistiek en ruimtemeetkunde. Zie:
http://www.geogebra.org

[6] **Definitie.** De **macht** $\mu(P)$ van een punt *P* bij een cirkel met middelpunt *M* en straal *R* is:
$\mu(P) = PM^2 - R^2$
Als een rechte lijn door *P* de cirkel snijdt in de punten *A* en *B* dan is ook $\mu(P) = PA \cdot PB$.



De lijn door *P* en *M* snijdt de cirkel in de punten *C* en *D*. De driehoeken *PDA* en *PBC* zijn dan gelijkvormig (*hh*), zodat:
$PA : PC = PD : PB$ of $PA : (PM - R) = (PM + R) : PB$
En dan is:
$PA \cdot PB = PM^2 - R^2 = \mu(P)$

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).
E-mailadres: *dklingens@gmail.com* -- website: *http://www.pandd.nl*

:-:

:-: