EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Wat bedoelen ze toch met ... proces-object?
Waarom is wiskunde zo moeilijk voor veel mensen? Een reden hiervoor is dat wiskundige concepten meerdere kanten blijken te hebben: een proces-kant en een object-kant.

Wiskundig denken
Wat weten we over de denkwijze van wiskundigen? En hoe pas je dat toe in de les?

Sometimes my math is bigger than paper
Wiskundeles in de VS. Hoe werkt het als je elke leerling een whiteboard geeft om op te werken?

Betrouwbaarheidsintervallen
Hoe gebruik je een betrouwbaarheids-interval op de juiste manier?

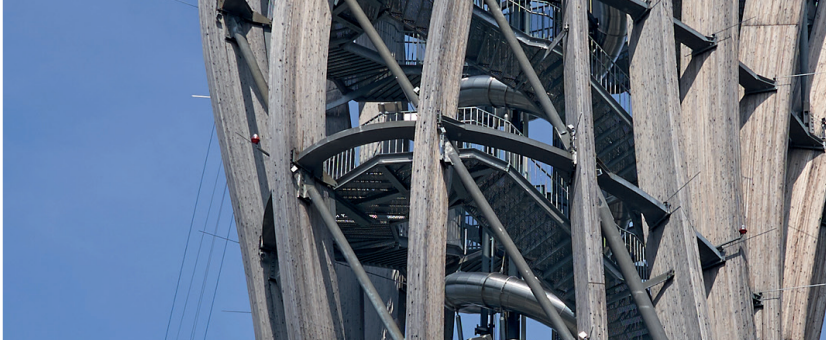
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

NR.6

JAARGANG 96 - MEI 2020

INHOUDSOPGAVE

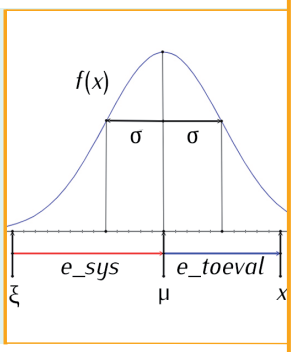
EUCLIDES JAARGANG 95 NR6



IN DIT NUMMER

WAT BEDOELEN ZE TOCH MET... PROCES-OBJECT?
Irene van Stiphout
4

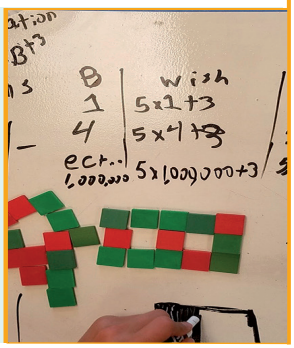
DE BETROUWBAARHEIDS-TRUC
Simon van der Salm
10



WIS EN WAARACHTIG
12

HET WISKUNDIG DENKEN VAN DE WISKUNDIGE
Corwin van Schendel
14

MATH BETWEEN US
SOMETIMES MY MATH IS BIGGER THAN PAPER
Jana Dean
17



BOEKBESPREKING
DENKRAAM
Harm Bakker
19

HOOGTELIJNEN IN EEN DRIEHOEK
Jan Otto Kranenborg
20

HET FIZIER GERICHT OP....
NIEUWE WISKUNDECURSUS VOOR HET TECHNISCH HBO
Nathalie van der Wal
Arthur Bakker
24

WISKUNDE COOL DANKZIJ SMARTPOOL
Rolf Slotboom
26

WORTELS VAN DE WISKUNDE
Desiree van den Bogaart
28

TWEE KROMMEN GENAAMD 'FOLIUM'
Martin Kindt
32

WITJE: DE GETALLEN OP HET DARTBORD
Ruud Stolwijk
37

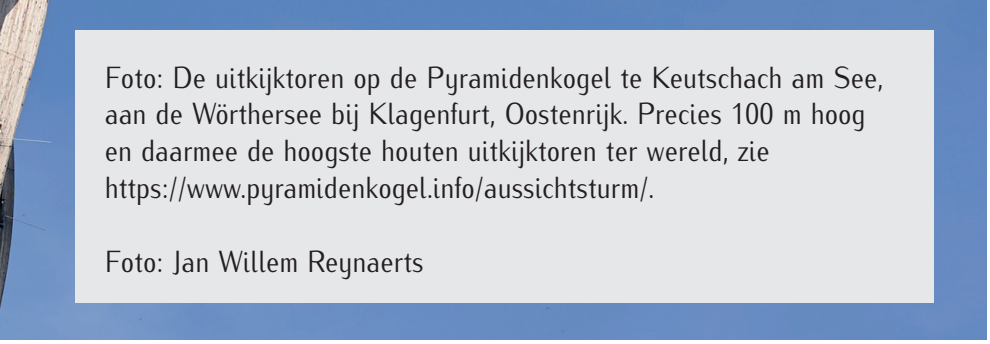


Foto: De uitkijktoren op de Pyramidenkogel te Keutschach am See, aan de Wörthersee bij Klagenfurt, Oostenrijk. Precies 100 m hoog en daarmee de hoogste houten uitkijktoren ter wereld, zie https://www.pyramidenkogel.info/aussichtsturm/.

Foto: Jan Willem Reynaerts

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

VIJF VRAGEN AAN...
Dédé de Haan 38

DE STELLING VAN STEWART
Dick Klingens 40

VASTGEROEST
Ab van der Roest 44

PUZZEL
Birgit van Dalen
Quintijn Puite 45

STUDIEDAG 2020 OVER NETWERKEN 45

SERVICEPAGINA 46

Oproep: ervaringen met online lesgeven

Hoe verliepen de wiskundelessen bij jou op school tijdens de coronacrisis? Zijn er mogelijkheden ontstaan die je ook in gewone tijden nog zou willen inzetten? Zijn er materialen gemaakt die je zou willen delen?

Graag willen we beschrijvingen van ervaringen en lesmateriaal opnemen in de alternatieve examen-special: nummer 1 van het volgend schooljaar. Stuur je bijdrage naar de redactie voor 1 juli 2020!

Kort vooraf

In het vorige Kort vooraf had ik het nog over mijn 'aan naïviteit grenzend optimisme'. Die naïviteit zat hem voornamelijk in het feit dat ik (en ik niet alleen, denk ik) er geen seconde bij had stilgestaan dat die uitbraak ook naar Europa zou komen... Inmiddels zijn de scholen alweer wekenlang dicht en zijn de examens afgelast. Met als een van de gevolgen dat er op scholen allerlei creatieve processen zijn ontstaan om het onderwijs toch gaande te houden. Noodoplossingen, waarvan je hoopt dat je ze in de toekomst niet nog een keer hoeft toe te passen. Maar ook: mogelijkheden die na de pandemie juist wél tot een nieuw repertoire gaan behoren. Die mogelijkheden willen we in kaart brengen.
Uiteraard komt de examenspecial, de eerste *Euclides* van het nieuwe schooljaar, te vervallen. In plaats daarvan willen we over jullie ervaringen van de afgelopen weken berichten en dan met name de pareltjes waar iedereen iets aan zou kunnen hebben in 'normale' tijden. We zien ze graag tegemoet, eventueel met links naar materialen die je zelf hebt gemaakt en die je wilt delen.
In deze *Euclides* zie je de eerste editie van een nieuwe rubriek van Jana Dean: *Math between US*. Jana gaat regelmatig vertellen over haar belevenissen als docent in de VS. We hebben besloten om de oorspronkelijke Engelse tekst in *Euclides* te plaatsen en de vertaling op de website te zetten. Laat vooral weten wat je daarvan vindt! Op de site staat een stelling waar je op kunt reageren. Een andere rubriek, de Wortels van de wiskunde, krijgt na zestien afleveringen een nieuwe status: 'zeer onregelmatig verschijnend'. Dat is een mooie manier om te zeggen dat de rubriek ophoudt, maar misschien toch ook niet helemaal. Hoe dan ook is een woord van dank voor Jeanine Daems en Desiree van den Boogaart (en een keer Peter Lanser) voor alle interessante artikelen op zijn plaats!

Tom Goris

Irene van Stiphout

Wat bedoelen ze toch met... proces-object?

In de rubriek Wat bedoelen ze toch met... ? staat in elke aflevering een spraakmakend begrip uit de wiskundedidactiek of de onderwijskunde centraal. Hoe vertaalt zich dit begrip naar de onderwijspraktijk? Irene van Stiphout schrijft over het begrip proces-object.

Inleiding

Over de hele wereld hebben veel leerlingen moeite met het leren van wiskunde. Maar waarom is wiskunde zo moeilijk voor veel mensen? Een reden hiervoor is te vinden in de aard van de wiskunde: wiskundige concepten blijken meerdere kanten te hebben.

Voorbeeld

In het basisonderwijs leren leerlingen wat het antwoord moet zijn op het sommetje

$$5 + 2 =$$

De uitkomst van dit sommetje is 7. Zijn er meer goede antwoorden? Dat hangt er vanaf hoe je het bekijkt. Een antwoord zou kunnen zijn $5 + 2 = 5 + 2$, of $5 + 2 = 2 + 5$ en er zijn meer mogelijkheden:

$$\begin{aligned} 5 + 2 &= 1 + 6 \\ &= 3 + 4 \\ &= 0 + 7 \end{aligned}$$

Uiteraard zijn er nog veel meer mogelijkheden. De vraag die hieronder ligt, is of deze alternatieven als antwoord gezien kunnen worden. Hierin speelt de precieze betekenis van het =-teken een rol. Het =-teken kan gezien worden als een aankondiging van het resultaat van de actie die links ervan is aangekondigd, als een ENTER-knop op de rekenmachine.

Dit wordt wel een operationele blik op het =-teken genoemd.[1] Vanuit dit perspectief is 7 het enige juiste antwoord op het sommetje $5 + 2 =$. Een andere blik op het =-teken is een relationele blik. Vanuit dit perspectief betekent het =-teken vooral dat wat links en wat rechts ervan staat gelijk is aan elkaar. In de algebra speelt die relationele blik een grote rol. In uitdrukkingen als $a(a + b) = a^2 + ab$ hangt het er maar net vanaf welke actie wordt uitgevoerd. Als het gaat om de techniek van haakjes wegwerken, dan lees je van links naar rechts. Maar als het gaat om buiten haakjes halen, dan zou je de expressie van rechts naar links willen lezen:

$$a^2 + ab = a(a + b)$$

In dit voorbeeld past een relationele betekenis van het =-teken beter. De kern is dat wat links en rechts van het =-teken staat gelijk is aan elkaar. Die verschillende betekenissen van hetzelfde symbool is vaker te vinden in de wiskunde.

Proces-object

In 1991 verscheen een belangwekkend artikel van Anna Sfard.[2] In dat artikel gaat ze in op de vraag wat wiskunde zo moeilijk maakt voor veel leerlingen. Hiervoor is ze gaan kijken naar de aard van de wiskunde. Wat voor eigenschappen heeft wiskunde die kunnen verklaren dat wiskunde moeilijk is? Sfard betoogt dat veel wiskundige symbolen en representaties meerdere kanten hebben: een *proces*-kant en een *object*-kant.

Als voorbeeld noemt Sfard getallen. Lange tijd werden er alleen wat wij nu natuurlijke getallen noemen gebruikt om te tellen. Onderwijspsycholoog Piaget[3] observeerde bij kinderen een fase waarin ze aanwijzend kunnen tellen, zie figuur 1. Het meisje wijst en telt tegelijkertijd. Daarbij snapt ze dat er een een-op-een-relatie bestaat tussen de telwoorden en, in dit geval, het aantal vingers. Als wordt gevraagd naar het aantal vingers, zal ze opnieuw gaan tellen.

figuur 1 Meisje (5 jaar) telt aanwijzend haar vingers

Het meisje wijst en telt tegelijkertijd. Daarbij snapt ze dat er een een-op-een-relatie bestaat tussen de telwoorden en, in dit geval, het aantal vingers. Als wordt gevraagd naar het aantal vingers, zal ze opnieuw gaan tellen.
Dit voorbeeld illustreert dat natuurlijke getallen geworteld zijn in het proces van tellen, betoogt Sfard. Om verder te kunnen is het belangrijk dat leerlingen een objectblik op getallen ontwikkelen. Dit is niet eenvoudig: als jonge kinderen wordt gevraagd 'hoeveel is vier en vier', dan kunnen ze deze vraag nog niet beantwoorden omdat 'vier' nog een kenmerk is van een groep dingen. Vier vingers of vier knikkers bestaat voor ze, maar 4 als *onbenoemd* getal bestaat nog niet. Het object 4 moet nog door de leerling geconstrueerd worden. In de loop der tijd kwamen daar verhoudingen van natuurlijke getallen bij, het delen. Het beeld van verhoudingen moest worden opgerekt toen bleek dat getallen als $\sqrt{2}$ geen verhouding van natuurlijke getallen zijn. Nog weer later kwamen er negatieve getallen, reële getallen en zelfs complexe getallen bij. Steeds valt hierin een patroon te herkennen: een bepaald proces wordt op een gegeven moment als een geheel gezien waarna een ontwikkeling verdergaat.

Een ander voorbeeld is een functie. In de onderbouw wordt dit onderwerp gestart vanuit woordformules in contexten. Deze woordformules beschrijven hoe je het een kunt berekenen gegeven het ander. Voorbeelden hiervan zijn:

— het bedrag in euro's = het aantal dagen keer 20 plus 8
— het aantal weken keer 5 = het spaarbedrag
— het aantal kilometer keer 0,89 plus 10 = de totale kosten.

In deze voorbeelden wordt het verband (of de onderliggende functie) gepresenteerd als een rekenvoorschrift. Er is een input, in het eerste voorbeeld het aantal dagen, en er is een output, het bedrag in euro's. De woordformule of de functie wordt hier gezien als een proces. Verderop in de leerlijn worden van deze (woord)formules eigenschappen bekeken.
Zo zijn er verschillende representaties mogelijk, verschillende manieren om verbanden weer te geven: grafiek - tabel - formule. Andere eigenschappen zijn de mate waarin het verband stijgend/dalend is, of het verband een maximum of minimum heeft, of een asymptoot.
Door naar eigenschappen te kijken, worden die verbanden (of functies) dingen of objecten die een op zichzelf staande betekenis hebben. Sfard betoogt dat het voor het begrijpen van verbanden belangrijk is om beide kanten, de proces-kant en de object-kant, te kunnen zien. Als twee verschillende kanten van dezelfde munt. Zolang een functie alleen nog een machientje is, lukt het niet om over eigenschappen na te gaan denken.
Het dubbele karakter van wiskunde is bij meerdere wetenschappers terug te vinden. Gray & Tall[4] introduceerden het woord *procept*, een samentrekking van de woorden *proces* en *concept*. Met een procept wordt een notatie bedoeld die tegelijkertijd een proces en een object voorstelt. Een voorbeeld is het getal -7. Dit kan worden gezien als het proces van ergens 7 van aftrekken. Tegelijkertijd is het ook een getal op zich: -7. Andere voorbeelden die Gray & Tall noemen:

— de breuk $\frac{3}{4}$ beschrijft zowel de deling 3 : 4 als de uitkomst daarvan;
— $3x + 2$ beschrijft zowel de optelling van 2 bij $3x$ als het resultaat van deze optelling;
— de goniometrische verhouding

$$\text{sinus} = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$$

is zowel het proces van het berekenen van de sinus als de waarde daarvan.

Ze wijzen erop dat het begrijpen van wiskunde gaat om de vaardigheid om flexibel te kunnen schakelen en vrij te kunnen bewegen tussen die verschillende betekenissen. De geschiedenis van de ontwikkeling van de wiskunde laat zien dat het versmelten van die verschillende betekenissen en het verwerven van de flexibiliteit ingewikkeld is. Sfard spreekt van *reification* ofwel 'verdinglijking'.

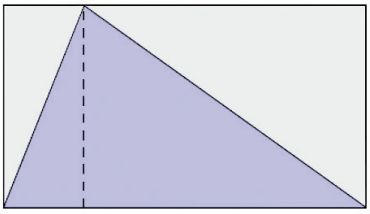
Proces-object in de onderbouw

Het denken in termen van proces en object kan behulpzaam zijn om meer grip te krijgen op problemen die leerlingen ervaren. Daarnaast kan het helpen om helder >

te krijgen wat het hebben van inzicht in een bepaald onderwerp betekent. Want hoewel iedereen het belang van wiskundig inzicht ziet, is vaak lang niet zo duidelijk wat het hebben van inzicht precies betekent. Aan de hand van twee voorbeelden gaan we hier verder op in.

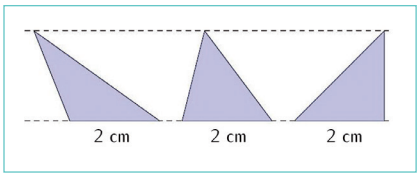
De oppervlakte van een driehoek

Wat komt er kijken bij het berekenen van de oppervlakte van een driehoek? Een simpel antwoord is het kunnen gebruiken van de formule ½ × *basis* × *hoogte*. Een volgende stap kan zijn dat leerlingen begrijpen waar die formule vandaan komt. Dit kan bijvoorbeeld gezien worden door de driehoek *in te lijsten*, zie figuur 2.



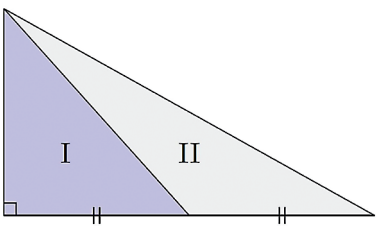
figuur 2 De driehoek wordt ingelijst. Hierdoor is te zien dat de oppervlakte van de driehoek gelijk is aan de helft van de oppervlakte van de rechthoek.

Nog een stap verder is het besef dat de oppervlakte gelijk blijft als de hoogte maar gelijk blijft, zie hiervoor figuur 3.



figuur 3 Drie driehoeken met gelijke oppervlakte

De driehoeken in deze figuur hebben allemaal dezelfde basis, namelijk 2 cm, en ook allemaal dezelfde hoogte. Dat betekent dat ze alle drie dezelfde oppervlakte hebben. Het besef dat je met de hoekpunten kunt schuiven over denkbeeldige lijnen evenwijdig aan de tegenoverliggende zijde gaat een stap verder in het begrip van oppervlakte van een driehoek. Een voorbeeld van een opgave waarin dit inzicht aan de orde komt, staat in figuur 4.



figuur 4 Is de oppervlakte van driehoek I kleiner dan, gelijk aan of groter dan die van driehoek II?

Hoewel er geen afmetingen in getallen gegeven zijn, is uit de figuur af te leiden dat de oppervlakte van deel I en deel II aan elkaar gelijk zijn. Beide driehoeken hebben immers gelijke basis en hoogte. Juist omdat er geen getallen staan, worden leerlingen uitgedaagd om te redeneren over de formule voor de oppervlakte en de betekenis daarvan.

Globaal kijken naar vergelijkingen

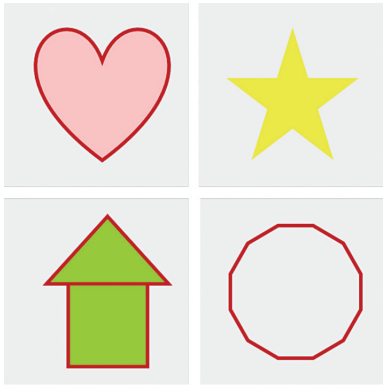
In de algebra wordt gesproken over globaal kijken.[5] Bij globaal kijken gaat het om een bepaalde houding: niet meteen gaan rekenen, maar eerst kijken hoe een uitdrukking in elkaar zit. Dan kan het zijn dat het handig blijkt om een deel van een expressie als een geheel te zien. Het volgende voorbeeld is geschikt voor de onderbouw van havo en vwo. Hierin leren leerlingen om kwadratische vergelijkingen op te lossen. De vraag is echter in hoeverre leerlingen begrijpen wat het betekent dat een getal een oplossing is. Neem de volgende opgave.

Het getal p is een oplossing van de vergelijking $x^2 + x = 6$.
Bereken $p^2 + p + 4$.

Een standaardreactie is om de vergelijking $x^2 + x = 6$ op 0 te gaan herleiden en vervolgens te ontbinden: $(x - 2)(x + 3) = 0$. Dat leidt tot de oplossingen $x = 2$ of $x = -3$. Vervolgens kan een van deze getallen worden ingevuld voor p in $p^2 + p + 4$ en kan de uitkomst 10 worden gevonden. Hierbij kan de leerling zich afvragen of het uitmaakt of het getal 2 of -3 wordt ingevuld.
Maar het kan ook anders. Gegeven is dat p een oplossing is van de vergelijking $x^2 + x = 6$. Dit zegt iets over p, namelijk dat $p^2 + p$ gelijk is aan 6. Gevraagd is om $p^2 + p + 4$ te berekenen. We weten dat $p^2 + p$ gelijk is aan 6, dus we krijgen $p^2 + p + 4 = 6 + 4 = 10$.
In de tweede aanpak wordt de expressie $p^2 + p$ als een geheel gezien. In dit verband wordt ook wel gesproken van globaal kijken. Je zou kunnen zeggen dat er een soort substitutie plaatsvindt: $p^2 + p$ wordt in de tweede aanpak vervangen door 6. En vanaf dan is het simpel: $6 + 4 = 10$. De vaardigheid om een deel van een expressie als een geheel te zien, kan gezien worden als onderdeel van objectvorming. Het proces $p^2 + p$ wordt een geheel en daarmee een object.
Om leerlingen te sturen naar de tweede aanpak zou de vergelijking $x^2 + x = 6$ vervangen kunnen worden door $x^5 + x = 6$. Dan is de eerste aanpak geen optie meer.

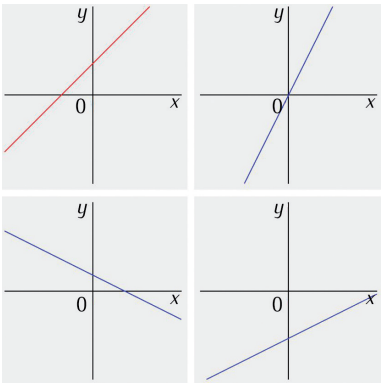
Wat te doen in de klas?

Om objectvorming te stimuleren kan het helpen om opgaven te bespreken waarin meerdere perspectieven aan de orde komen. Een mooie bron hiervoor is de website *which one doesn't belong.* [6] Dit is een Canadese website waarin allerlei viertallen staan, zie figuur 5 en 6.



figuur 5 Geef van elke figuur van deze vier een reden waarom die niet bij de andere drie hoort.

In beide figuren zijn vier verschillende kleine figuren afgebeeld. De vraag is om van elk daarvan één of meerdere redenen te geven waarom die figuur niet past bij de andere drie figuren. In figuur 5 zijn mogelijke argumenten: de figuur linksboven, het hartje, heeft als enige figuur ronde vormen. De figuur linksonder bestaat als enig uit twee delen. De ster rechtsboven is de enige figuur zonder rand, en de figuur rechtsonder is de enige die niet is ingekleurd. Een ander voorbeeld staat in figuur 6. In deze figuur staan vier assenstelsels met in elk assenstelsel een lijn. De vraag is wederom om van elke figuur één of meer redenen te geven waarom die figuur niet past bij de andere drie figuren.



figuur 6 Geef van elke figuur van deze vier een reden waarom die niet bij de andere drie hoort

In de figuur linksboven is de lijn rood, de andere drie hebben een blauwe lijn. De figuur rechtsboven is de enige waarbij de lijn door de oorsprong gaat. De figuur linksonder is de enige met een dalende lijn. Blijft over de figuur rechtsonder: wat heeft die voor afwijkende eigenschap? Het mooie van deze werkvorm is dat het niet zozeer gaat om goed of fout maar meer om de kwaliteit van het argument. De uitdaging is om meerdere argumenten per figuur te bedenken. Hieronder staat een lijstje van mogelijke argumenten. De lezer wordt uitgedaagd om hier nieuwe argumenten aan toe te voegen!

- Linksboven: als enige rood, enige die richtingscoëfficiënt 1 lijkt te hebben, enige die helemaal niet in het vierde kwadrant komt (rechtsboven is een twijfelgeval)
- Rechtsboven: enige die door oorsprong gaat, enige met richtingscoëfficiënt groter dan 1, enige die symmetrisch is in de oorsprong, enige waarbij de lijn door de letter O gaat.
- Linksonder: enige die daalt, enige die niet door het derde kwadrant gaat, enige die de kleinste driehoek afsnijdt met de assen.
- Rechtsonder: enige die x-as niet snijdt in de figuur, enige waarbij de lijn door de letter x loopt, enige die niet door het tweede kwadrant loopt.

Tot slot

Proces-object gaat over de wiskunde en over het wiskundig denken. Kern hierin is dat veel wiskundige symbolen en notaties een proceskant hebben en een objectkant en dat wiskundig denken gaat over flexibel kunnen schakelen tussen die verschillende kanten. Met het oog op de toekomst is het ontwikkelen van flexibiliteit in het denken van belang. Standaard rekenwerk lijkt steeds meer te worden uitbesteed aan computers. Het denkwerk dat overblijft vraagt om begrip op een hoger niveau.[7] Het denken in termen van proces-object kan helpen om grip te krijgen op de moeilijkheden die leerlingen ervaren. Het kan verleidelijk zijn om in het onderwijs op een enkel perspectief te focussen. Gray & Tall betogen dat dit er juist voor kan zorgen dat leerlingen minder goed gaan presteren. Om flexibiliteit te creëren in het denken zijn meerder perspectieven nodig. De docent kan leerlingen uitdagen om met verschillende oplossingen te komen. Dat kan al met de eenvoudige sommetjes aan het begin van dit artikel door de grenzen te verleggen:

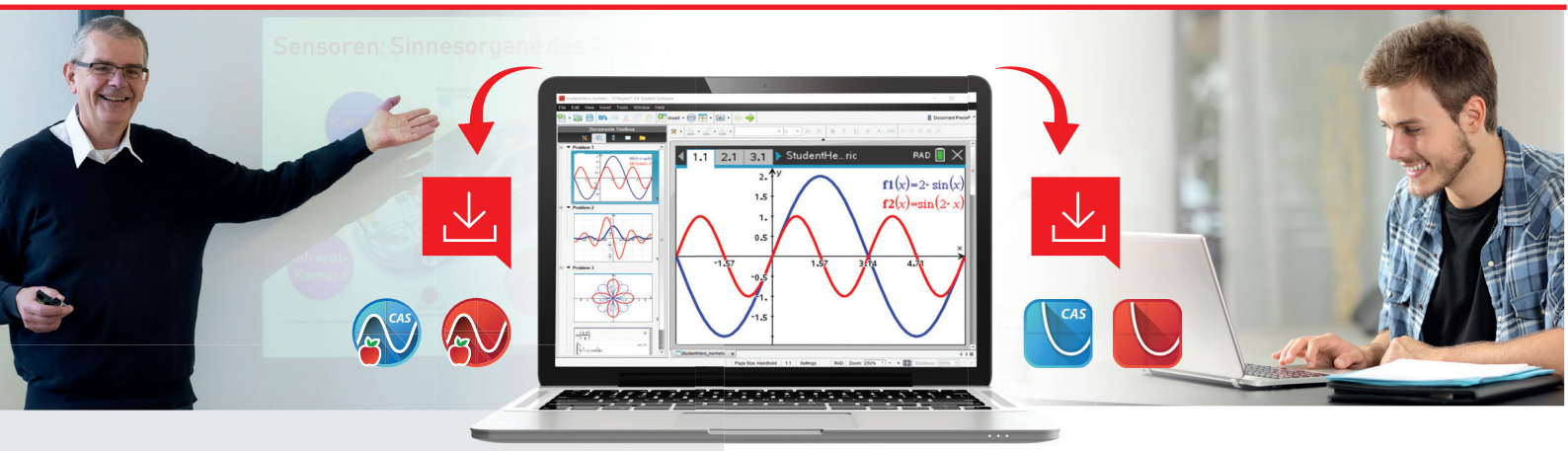
$$\begin{aligned} 5 + 2 &= 3 + 4 \\ &= \frac{287}{41} \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= \sqrt{49} \\ &= 2^3 - 1 \\ &= \ldots\ldots \end{aligned}$$

>

Ondersteuning bij afstandsonderwijs

Gratis software en tips voor content

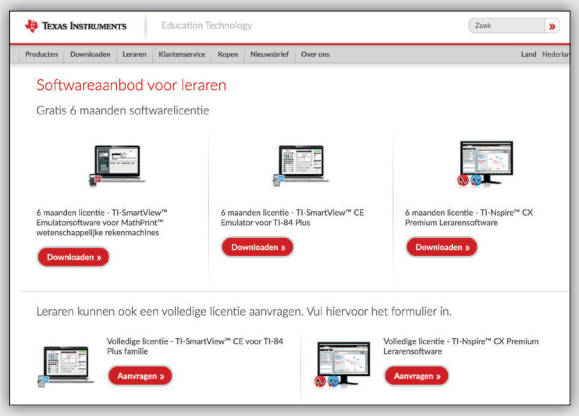
Vanuit Texas Instruments ondersteunen we u en uw leerlingen graag in deze periode van schoolsluitingen! Wij bieden extra mogelijkheden voor afstandsonderwijs.



Gratis 6 maanden softwarelicenties

Leraren en leerlingen kunnen diverse 6 maanden licenties **gratis downloaden**. Handig om online samen te werken!

education.ti.com/nl/afstandsonderwijs



Lesmateriaal, webinars en instructievideo's

Bekijk het content portal van lerarennetwerk T³ Nederland. Daar kunt u lesmaterialen, video's, tutorials, pdf's en webinars gebruiken voor leerlingen die thuis aan leerstof werken.

www.t3nederland.nl

TI coderen in 10 minuten

Een leuke activiteit voor thuis is het leren van de basisprincipes van programmeren. Leerlingen kunnen zelf aan de slag met de onlineactiviteit 'TI coderen in 10 minuten'!

education.ti.com/nl/activities/ti-codes

Texas Instruments

©2020 Texas Instruments

Noten

[1] Alibali, M., Knuth, E., Hattikudur, S., McNeil, N., & Stephens, A. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 221 - 247.

[2] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

[3] Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. Londen: Routledge and Kegan.

[4] Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

[5] Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant,Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs,* 10(2), 29-33.

[6] *www.wodb.ca*

[7] Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F-L & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(1), 105-123.

[8] In het begin van deze eeuw was 'Wat bedoelen ze toch met ... ' een rubriek in de *Nieuwe Wiskrant*. Het SLW (Samenwerking Lerarenopleidingen Wiskunde) gaat deze oude edities hergebruiken, eventueel na herziening, in het digitale materiaal dat het SLW ontwikkelt voor de cursussen vakdidactiek. Ook worden er nieuwe edities bij geschreven waarvan dit de eerste is.

Over de auteur

Irene van Stiphout is werkzaam als lerarenopleider bij de HAN en als toetsdeskundige bij Cito. Ze vertegenwoordigt de HAN in de Samenwerkingsgroep Lerarenopleidingen Wiskunde 2e graads (SLW).
Emailadres: *irene.vanstiphout@han.nl*

Nieuw delen Zebra-reeks

Besmettelijke Ziekten
met GeoGebra-rekenblad
Don Klinkenberg en Swier Garst
Door de corona-crisis uiterst actueel boekje. Over hoe wiskundige modellen kunnen helpen bij het voorspellen van hoe een ziekte zich zal verspreiden.

Optimaliseren in Netwerken
Rob van Oord, Jan Schrik en Steven Wepster
Over hoe je logistieke problemen kunt oplossen met algoritmen waarmee je de routes kunt optimaliseren.

Epsilon Uitgaven

Zebra-reeks, € 10 per deel
www.epsilon-uitgaven.nl

Simon van der Salm

De betrouwbaarheidstruc

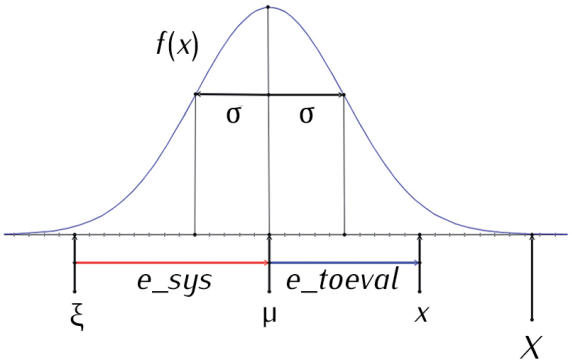
Nu betrouwbaarheidsintervallen in het wiskundecurriculum van havo en vwo voorkomen, is het van belang kritisch te kijken naar het begrip betrouwbaarheid. Het is bijvoorbeeld fout om zeggen: 'met een kans van 95% ligt het populatiegemiddelde tussen 98 en 102'. Hoe moet het dan wel?

Fisher en Neyman

De titel van dit artikel is hetzelfde als de titel van hoofdstuk 12 van het boek van Salsburg[1] over de geschiedenis van de statistiek in de twintigste eeuw. In dat hoofdstuk beschrijft Salsburg een lezing van Jerzy Neyman tijdens een symposium van de Royal Statistical Society in 1934[2]. Er ontspon zich een warrige discussie tussen enerzijds Ronald A. Fisher (1890 – 1962), de toenmalige gigant van de statistiek (variantieanalyse), en anderzijds Jerzy Neyman (1894 – 1981), het met hem concurrerende Poolse talent (hypothesetoetsen). Het ging over het zojuist door Neyman geïntroduceerde betrouwbaarheidsinterval. Fisher kon maar niet begrijpen waar Neyman het over had. Hetzelfde gold ook voor de symposiumvoorzitter G.M. Bowley, maar die formuleerde een fundamentele vraag die Neyman aan het denken zette.
De centrale vraag van die discussie heeft heel wat studenten statistiek uit de slaap gehouden: als de betrouwbaarheid γ van een intervalschatting een kans is, van welke eventualiteit is die betrouwbaarheid dan een kans?

Meettechniek

Het feit dat Neyman, in verband met betrouwbaarheidsintervallen, bewust een ander woord voor *kans* koos, is een teken van zijn besef dat nauwkeurig taalgebruik in deze zaak van groot belang is. Een illustratief voorbeeld, vinden we in de meettechniek, in het bijzonder bij de analyse van meetonzekerheid. In een meetproces doet de meting van een *continue*, fysische grootheid X (de meetgrootheid), om de veronderstelde, constante, *werkelijke waarde* ξ daarvan te achterhalen, zich voor als het waarnemen van waarden x (meetwaarden) uit een normale verdeling X met *verwachtingswaarde* μ en populatie *standaardafwijking* σ. Zie figuur 1.



figuur 1 De normale verdeling van de meetwaarden x

In het vervolg speelt de systematische meetfout (bias, onjuistheid) geen rol. In het laboratorium moet ieder meetresultaat voorzien worden van een berekening van de standaard meetonzekerheid, dat wil zeggen toevals-meetonzekerheid (imprecisie van de meting) uitgedrukt door middel van een standaardafwijking of een veelvoud van een standaardafwijking. In veel gevallen wordt de verwachtingswaarde μ geschat door een steekproef-gemiddelde $\overline{x}$. De standaard meetonzekerheid van deze schatting is de standaardmeetfout:

$$s_e = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

Hierin is n de steekproefomvang en is s de steekproef standaardafwijking. Voor $n > 30$ wordt het meetresultaat gepresenteerd als 68%-betrouwbaarheidsinterval:

$$\mu = \overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

Voor steekproeven met $n \leq 30$ en/of andere γ dan 68% moeten we (2) aanpassen door gebruik te maken van een bedekkingsfactor die wordt afgeleid uit de T-verdeling van Student:

$$\mu = \overline{x} \pm t_{n-1,\gamma} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (3)$$

Waarin: $t_{n-1,\gamma} = T^{inv}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$

Buiten de meettechniek wordt gewoonlijk gekozen voor $\gamma = 95\%$, waarbij een t-waarde hoort in de buurt van 2. Ook de betrouwbaarheid $\gamma = 99\%$, met een t-waarde in de buurt van 3, komt wel voor.

Foute formulering

Het wordt in de meettechniek heel gewoon gevonden te zeggen:

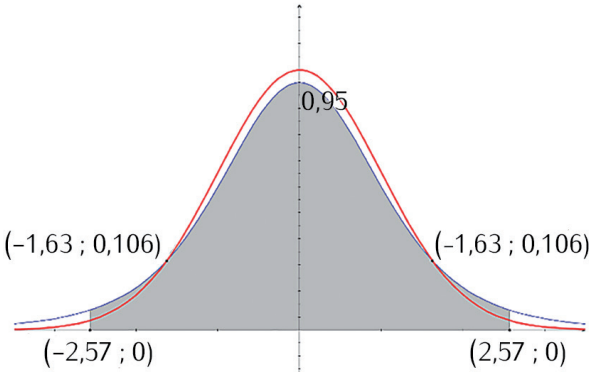
'Ik ben er met een kans van 68% zeker van dat de werkelijke waarde μ *in het interval* $\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}$ *ligt'.*

In de eerste plaats, wat betekent '68% (95%) zeker zijn' van iets? Meestal zal men zoiets antwoorden als: 'De kans dat μ in het interval (2) ligt is 68% (95%)'. Dit lijkt duidelijk, maar blijkt bij nader inzien fout te zijn. En daar treffen we precies het centrale punt van de discussie tussen Fisher en Neyman. De parameter μ wordt immers verondersteld een constante parameter te zijn. Kansuitspraken betreffen stochastische variabelen en niet een constante parameter. Hooguit zou je kunnen zeggen: μ ligt wel in het interval of μ ligt niet in het interval. Maar wat stelt iemand zich in deze uitspraak voor bij die kans 68% (95%)? Daaruit volgt de scepsis van Fisher over het betrouwbaarheidsbegrip.

De voorzitter van het symposium, Bowley, was pienter genoeg om in te zien dat Neyman het woord *betrouwbaarheid* γ van 68% (95%) introduceerde omdat die zelf ook niet zo goed scheen te weten hoe het begrip *kans* hier moet worden geïnterpreteerd. Er lijkt geen duidelijk kansmodel aan ten grondslag te liggen.

Voorbeeld met 95% betrouwbaarheid

Om een duidelijk beeld te krijgen van het correcte antwoord op bovenstaande vraag, hebben we, net zoals Neyman, maar een paar regels wiskunde nodig. We bepalen bijvoorbeeld het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de schatting van μ door $\bar{x}$. Zie figuur 2, met daarin (zwart) de grafiek van de dichtheid van de Student T-verdeling met vijf vrijheidsgraden (steekproefomvang $n = 6$) en gearceerde betrouwbaarheid van $\gamma = 95\%$. De rode grafiek is de grafiek van de kansdichtheid van de standaardnormale verdeling Z. We zien dat de *staartjes* van de T-verdeling aanzienlijk dikker zijn dan de *staartjes* van de Z-verdeling.



figuur 2 Student T-verdeling met vijf vrijheidsgraden (steekproef n = 6), voor de betrouwbaarheid van 95%

Neyman ging, *grosso modo*,[3] als volgt te werk.

1. Kies een vaste γ, bijvoorbeeld 95% (zie figuur 2).
2. We zoeken een van γ afhankelijke grenswaarde G_γ, zodat voor het steekproefgemiddelde geldt

$$P\left(\bar{X} - \mu < G_\gamma\right) = \gamma \qquad (4)$$

3. We weten $\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim T_{n-1}$. (5)

4. Na bepaling van de bij γ horende waarde van t ($t = 2{,}57$ in figuur 2), vinden we de equivalentie:

$$(4) \leftrightarrow \bar{X} - t_{n-1,\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1,\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (6)$$

Dus kennelijk $G_\gamma = t_{n-1,\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}}$.

5. Definieer twee stochasten voor de grenzen van het interval:

$$G_L = \bar{X} - t_{n-1,\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}}; G_R = \bar{X} + t_{n-1,\gamma}\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (7)$$

6. Dan vinden we de equivalentie

$$(4) \leftrightarrow P\left(G_L < \mu < G_R\right) = \gamma \qquad (8)$$

7. Die weer equivalent is met $P\left(< G_L, G_R > \ni \mu\right) = \gamma$.(9)

Het ongebruikelijke symbool $\ni$ is het omgekeerde van 'element van', in deze context heel bruikbaar.

Wat zegt (9) nou precies? ...De *kans* dat het stochastische interval $< G_L, G_R >$ de verwachtingswaarde μ ook daadwerkelijk *bedekt* (*insluit*), is γ x 100%. We doen dus een kansuitspraak over een *stochastisch interval* en niet over de constante parameter μ, dus over iets stochastisch en niet over iets constants, zoals dat hoort. Door (9) zo te formuleren, kun je de bovengenoemde foute formulering voorkomen. >

Er is nog een reden om het woord *bedekt* te gebruiken. In de metrologie wordt het interval van de standaard meetonzekerheid (γ = 68%) *uitgebreid* door het toepassen van, wat men een *bedekkingsfactor* (coverage factor) (hier dus de *t*-waarde) noemt. Neyman hanteerde een *frequentistische interpretatie* van de kans (9). Als we een steekproef nemen met steekproefomvang *n*, en we berekenen steekproefgemiddelde $\bar{x}$ en steekproef standaardafwijking *s* dan is:

$$\bar{x} - t_{n-1,\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1,\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (10)$$

een *realisatie* van het stochastische interval $<G_L, G_R>$. Als we *oneindig* veel van deze realisaties zouden kunnen bepalen, zullen de meesten (γ x 100%) de parameter μ wel *bedekken*, oftewel *insluiten*, en zullen sommigen (100 – γ) x 100% de parameter μ niet bedekken, dus niet insluiten. Dus met een *kans* van γ x 100% vinden we een interval dat de parameter μ bedekt. Het is deze frequentistische kans op het vinden van een *interval* dat μ bedekt, die Neyman de *betrouwbaarheid* noemde. Wat voor dit voorbeeld, van de schatting van de verwachtingswaarde μ door het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ geldt, geldt veel algemener voor alle schatters, wat het enorme succes verklaart van de betrouwbaarheidsintervallen van Neyman.

Conclusie

Wat voor Neyman aanvankelijk een trucje was om een onduidelijke uitspraak over een specifieke kans gewoon aan te duiden met een nieuw woord, bleek bij nader inzien een gouden greep. In plaats van de foute formulering hierboven dient men te zeggen dat de kans $P(<G_L, G_R> \ni \mu) = \gamma$ inhoudt dat γ x 100% van oneindig veel gerealiseerde intervallen van $<G_L, G_R>$ de parameter μ *bedekken*, oftewel *insluiten*. Dat is de ware betekenis van betrouwbaarheid en van betrouwbaarheidsinterval. Iets wat Neyman pas formuleerde na het bewuste symposium.

Noten

[1] Salsburg, D. (2001). *The Lady Tasting Tea, How statistics revolutionized science in the twentieth century.* New York: W.H. Freeman and Company.

[2] Neyman, J. (1934). On The Two Different Aspects of the Representative Method. *Journal of the Royal Statistical Society, 97*(4), pp. 558-625.

[3] Ibidem, pp. 563 -565.

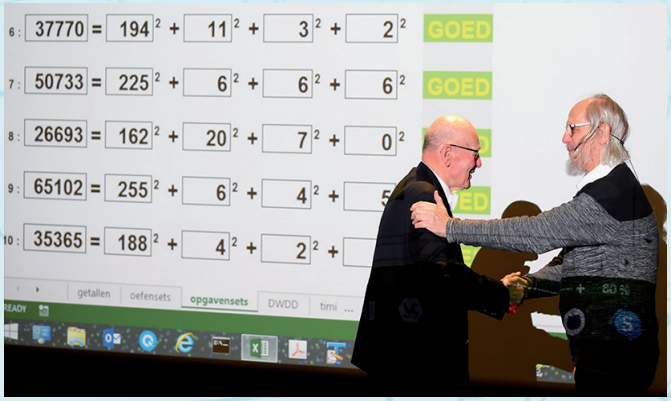
Over de auteur

Simon van der Salm was 27 jaar docent wiskunde en statistiek aan de hts-E in Hilversum, daarna vijf jaar leraar wiskunde havo-vwo en is sinds 2007 docent in diverse vakken bij de opleidingen Medische Techniek voor de ziekenhuizen. Hij ging op 1 juni 2019, na 43 jaar onderwijs geven, met pensioen.

Wis en Waarachtig

Willem Bouman vestigt nieuw wereldrecord hoofdrekenen

Willem Bouman vestigde begin februari op de Technische Universiteit in Eindhoven zijn vijfde wereldrecord hoofdrekenen. In nog geen vijf minuten tijd wist de 80-jarige tien zeer ingewikkelde sommen uit te rekenen die door een computer waren bedacht. Het leek even mis te gaan. Bij som zeven in de eerste set ging Bouman in de fout, toen het mobieltje van zijn vrouw afging. 'Dit is een zogenaamde jaagfout,' aldus Bouman. In de tweede set lukte het hem wel om tien sommen foutloos uit te rekenen. De droom van Willem, die ook wel *King of Prime* wordt genoemd, was om als eerste persoon ooit minstens tien getallen van vijf cijfers uit te schrijven als de som van vier



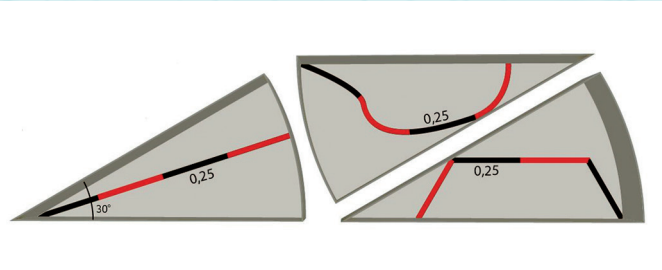
Willem Bouman wordt gefeliciteerd door Benne de Weger (TUe).
Foto: Bart van Overbeeke

kwadraten. Eerder wist hij al vier andere records binnen te slepen zoals 'opgaande delingen' en 'vier opeenvolgende priemgetallen berekenen uit een getal van zestien cijfers'.
Het record wordt bijgeschreven op de site *recordholders.org*, een site met veel aandacht voor rekenrecords. In 2017 verscheen *De kunst van het hoofdrekenen* (uitgegeven door Epsilon), waarin Willem Bouman schrijft over de door hem gebruikte methoden.
Bron: https://www.omroepbrabant.nl

Worm past onder 'taartpunt'

In nummer 4 van deze jaargang schreef Rogier Bos over Mosers wormprobleem, een open probleem dat centraal stond in de Wiskunde B-dagopdracht van 2018. Bos gaf een bewijs dat een worm van lengte 1 bedekt kan worden door een dekentje in de vorm van een halve cirkel met straal ½. Ook schreef Bos over kleinere bedekkingen en noemde een record uit 2006: een dekentje met oppervlak 0,27091.
Al in 1973 vermoedde John Wetzel dat je met een cirkelsector ('taartpunt') van straal 1 en een hoek van 30° elke worm van lengte 1 kunt overdekken. De oppervlakte van deze cirkelsector is 0,2618. Van dit vermoeden zijn onlangs, onafhankelijk van elkaar, twee verschillende bewijzen geleverd. Het ene door Chatchawan Panraksa (Mahidol University Bangkok) en Wacharin Wichiramala (Chulalongkorn University Bangkok), het andere door Yevgenya Movshovich (University of Illinois).
Het duo uit Bangkok deelde het probleem op in vier verschillende gevallen en gaven voor elk van deze een sluitende redenering, daarbij gebruik makend van stellingen uit de meetkunde. Movshovich gebruikte een andere, meer analytische aanpak. Beide bewijzen zijn nog onder review, maar Wetzel is positief.

Toch kan het wormprobleem nog niet worden geschrapt uit de lijst onopgeloste problemen: misschien bestaat er nog wel een kleinere convexe vorm die elke worm kan overdekken. Een cirkelsector met een hoek kleiner dan 30° werkt in elk geval niet, zie de afbeelding.



Bron: NRC 25 en 26 januari 2020

Brein maanreizen overleden

Katherine Johnson

De Amerikaanse Katherine Johnson, die achter de schermen een belangrijke rol speelde in de Amerikaanse ruimtevaart, is maandag 24 februari jl. op 101-jarige leeftijd overleden. De wiskundige Johnson berekende de juiste momenten om te lanceren en de juiste routes. Zo bepaalde zij de baan van Neil Armstrong en Buzz Aldrin naar de maan in 1969. Astronauten als John Glenn wilden pas de ruimte ingaan wanneer Johnson de berekeningen van computers had gecontroleerd. Toen de vlucht van Apollo 13 in 1970 op een ramp dreigde uit te lopen, hielp zij de bemanning om veilig terug te keren naar de aarde. Haar rol was uitzonderlijk, omdat Johnson als donkere vrouw in het diepe zuiden van de Verenigde Staten veel vooroordelen moest overwinnen. Ze ontving de twee hoogste Amerikaanse onderscheidingen, de Presidential Medal of Freedom in 2015 en de Congressional Gold Medal in 2019. De film *Hidden Figures* uit 2016 gaat over Johnson en haar collega's.
Bron: BN De Stem 25 februari 2020

Corwin van Schendel

Het wiskundig denken van de wiskundige

Door het denken van wiskundigen te onderzoeken hoopt Corwin van Schendel te kunnen ophelderen wat wiskundig denken nu echt is. Dit levert ideeën op voor het onderwijs.

Inleiding

Wiskundig denken, wat een prachtig idee om leerlingen beter voor te bereiden op vervolgonderwijs, beroep en hun burgerschap door op creatieve wijze authentieke problemen op te lossen. Wiskunde is voor leerlingen op deze manier meer dan een gereedschapskist voor routineproblemen. In 2015[1] kreeg het dan ook een plek in de curricula voor havo en vwo. Helaas lijkt de innovatie al minder merkbaar: op centrale examens stagneert het aantal opdrachten dat tot wiskundig denken te rekenen is.[2] Mogelijk komt deze stagnatie doordat het onvoldoende duidelijk is wat wiskundig denken nu écht is.
Al snel werd me tijdens mijn onderzoek[3] duidelijk dat er niet één definitie van wiskundig denken in internationale context is. Er zijn veel definities en ideeën, boeken en rapporten. De meeste roepen een gevoel van herkenning op, maar alle herkenbare aspecten op één hoop gooien levert geen werkbare innovatie op. Dus moet er geprioriteerd worden.
Om daartoe een aanzet te doen zijn tien wiskundige onderzoekers geïnterviewd, om duidelijk te krijgen hoe een wiskundige denkt. Ondanks dat er op meer plaatsen wiskundig wordt gedacht dan aan wiskundige onderzoeksinstituten van universiteiten én het vervolgens nog maar de vraag is wat hiervan wenselijk is om bij te brengen aan onze leerlingen, is het te hopen dat de resultaten een helderder beeld geven van wat wiskundig denken zou kunnen zijn.

Het onderzoek

De interviews bestonden uit drie fases. In fase 1 werden de wiskundigen breed bevraagd over hun manier van denken als ze wiskunde bedrijven, bijvoorbeeld: wat doe je als je met wiskunde bezig bent, hoe denk je daarbij en wat is beslissend voor doorbraakmomenten? In fase 2 werden de wiskundigen gevraagd om tien punten te verdelen over een twintigtal mogelijke aspecten van wiskundig denken (zie tabel 1), opgesteld vanuit vakdidactische literatuur en (inter)nationale rapporten. In fase 3 werden didactische modellen voorgelegd, over probleem oplossen, modelleren en abstraheren, thema's die in de Nederlandse innovatie een centrale plek innemen.[1]

In fase 1 van het interview kwam een aantal thema's regelmatig terug, zie tabel 2. In fase 2 kreeg een aantal aspecten veel meer punten dan andere aspecten, zie tabel 1. Het bleek hierbij weinig uit te maken of iemand theoretisch of toegepast wiskundige is. Dit, samen met de gesprekken over de vakdidactische modellen, waarvoor ik naar het uitgebreide onderzoek verwijs,[3] leidde tot een aantal inzichten over het wiskundig denken van de expert.

> "Inzicht 1: creativiteit is essentieel voor wiskundig denken."

Creativiteit is essentieel

Creativiteit uit zich niet alleen bij het bedenken of bewijzen van stellingen. Het komt juist ook tot uiting door vakgebieden te combineren of een aanpak uit één vakgebied proberen toe te passen op een ander vakgebied. Dit kan in de klas bijvoorbeeld door in de bovenbouw bij analytische meetkunde wat meer stil te staan bij hoe opmerkelijk krachtig de link tussen meetkunde en algebra nu écht is. Of door voor vwo-leerlingen wiskunde D vooral te benadrukken dat de normale kansverdeling een integraal is van een Gaussische functie.

Aspect	Puntentotaal theoretici	Puntentotaal toegepaste wiskundigen	Totaal	Aantal stemmers op dit aspect
Creativiteit	7	7	14	9
Visualiseren	6	4	10	8
Probleemoplossen	5	3	8	7
Abstraheren	4	4	8	8
Schoonheid van wiskunde	6	2	8	8
Bewijzen	4	3	7	7

tabel 1 Puntenverdeling in fase 2

**Begrippen die minder punten kregen waren: modelleren, ordenen, formules manipuleren, logisch redeneren, heuristieken gebruiken, schema's en representaties gebruiken, optimaliseren, interfereren, zelfvertrouwen, terug redeneren, precies werken, werk van anderen bekritiseren, overeenkomsten in redeneringen of methoden zoeken, strategisch denken, weten wanneer je gelijk hebt.*

Thema	Aantal vermeldingen	In unieke interviews
Creativiteit	14	9
Samenwerken	11	10
De juiste vraag stellen	10	7
Wat is een concept?	9	9
Idee, of juist het bewijs?	9	9
De rol van voorbeelden	6	5
Weten wanneer je gelijk hebt	5	5

tabel 2 Frequenties van thema's in fase 1

Gerelateerd hieraan is het onderzoeksresultaat dat wiskunde voor de professional nooit begint met een probleemstelling. De fase om een probleem te formuleren is juist interessanter. Bij authentiek wiskundig denken is het zelf formuleren van *de juiste vraag* essentieel. Voor leerlingen kan dit erg tijdrovend zijn, maar dit kan zo nu en dan de moeite waard zijn in de les. Mogelijk kunnen leerlingen prima zelf ontdekken door een aangereikte opgave dat sinus, cosinus en tangens werken als verband tussen twee zijdes en één hoek in driehoeken met een rechte hoek en dat de stelling van Pythagoras alleen werkt in rechthoekige driehoeken. Zo kunnen zij een essentiële voorwaarde voor stellingen prima zelf formuleren en checken. Om deze creativiteit te stimuleren en te zorgen dat leerlingen minder vastlopen op ingewikkelde algebraïsche stappen, is *samenwerken* een belangrijk onderdeel van wiskundig denken. Ondanks dat wiskunde een individuele aangelegenheid kan lijken, werd samenwerken vaak genoemd in de interviews, zie tabel 2.

Wiskundige taal en abstractie

Er is mogelijk een stereotypering dat de wiskundige alsmaar blijft abstraheren. Het tegendeel bleek waar: voor de wiskundige moet een abstractiestap altijd een doel hebben. Misschien is bijvoorbeeld schuiven en rekken zonder doel of toepassing daarom wel te abstract voor leerlingen. Rijke voorbeelden speelden voor de wiskundigen een belangrijke rol. In plaats van redeneren over abstracte theorieën dachten de wiskundigen vaak aan een bepaald voorbeeld, dat genoeg informatie geeft over de abstracte theorie. Ze gaven bijvoorbeeld aan dat ze in hun redenaties in plaats van aan (abstracte) groepen, eerder aan gehele getallen denken. >

Zogezegd zoomt de wiskundige eerder in dan uit; redeneert deze eerder op een lager dan een hoger abstractieniveau. Deze conclusie is overigens getrokken op basis van hoe de wiskundigen hun eigen werk *beschrijven*, mogelijk opereren ze zonder dat te expliciteren ook op een hoger abstractieniveau.

Misschien moeten we leerlingen vooral aanmoedigen om bij het nadenken over abstracte vragen, aan een concreet voorbeeld te blijven denken: bijvoorbeeld door bij breukrekenen met variabelen steeds na te gaan of een stap zou kloppen met concrete getallen. Vervolgens is het dan wel belangrijk om stil te staan bij de generaliseerbaarheid: 'maakt het echt uit dat in al deze stappen dit getal staat?'

> "Inzicht 2: de rol van wiskundige taal en abstraheren is overschat of verkeerd begrepen."

Wat is de relatie tussen *bewijstaal* en een *idee*, *plaatje* of *voorbeeld*? De wiskundigen vonden die laatste groep de belangrijkste. Veel tijd werd besteed aan visualisaties, voorbeelden, bewijsschetsen en ideeën, alvorens het werd opgeschreven. Een wiskundige vergeleek wiskunde met muziek: alsof je een muziekstuk verzint en als laatste stap van je creatieve proces op opnemen drukt. Deze opname is het bewijs. Een bewijs kan, volgens de wiskundigen, wel leiden tot het ontdekken van redenatiefouten en uitzonderingen, en is noodzakelijke taal van het vakgebied, maar niet de hoofdzaak van hun bezigheid. In de klas is het aantal nulpunten van een tweedegraadsfunctie bespreken aan de hand van de grafiek, in plaats van aan de hand van (de discriminant van) de *abc*-formule, dan mogelijk genoeg én levert voldoende inzicht op. En het levert tijd op in plaats van dat het tijd kost.

In de klas

Met deze inzichten kun je concluderen dat wiskundig denken niet alleen om die moeilijke opdracht aan het eind van het hoofdstuk draait, maar juist om het begin. De introductie van een concept is een goed moment om iets aan wiskundig denken te doen, bijvoorbeeld door in te zoomen op waarom het te bespreken concept relevant is. Of door leerlingen de juiste voorwaarden bij de stelling die centraal staat in de paragraaf zelf te laten formuleren.

Bovendien roepen de interviews de vraag op of we niet te veel focussen op wiskundige notatie, en te weinig op interessante voorbeelden en visualisaties. Laten we leerlingen vooral blijven aanmoedigen om opgaves te proberen en om visualisaties te maken.
Nog korter: wiskundig denken vindt niet alleen aan het einde plaats, maar juist ook tussendoor en vooral aan het begin van een onderwerp of opgave, met daarbij meer focus op visualisaties en voorbeelden in plaats van formuletaal. Daarmee wordt wiskundig denken misschien makkelijker om te implementeren.

Noten

[1] cTWO. (2012). *Denken & doen: Wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: cTWO.

[2] Drijvers, P. & Kodde-Buitenhuis, H. (2019). Wiskundig denken in de centrale examens Wiskunde B van havo en vwo. *Nieuw Archief voor Wiskunde*. NAW 5/20 nr. 4 december 2019, p. 252

[3] Schendel, van. C. (2019). Mathematical Thinking: Short Circuits Between the Mathematicians' Work and Educational Theories. *Via: https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/382860*

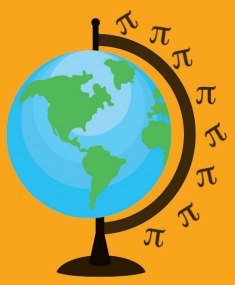
Over de auteur

Corwin van Schendel is wiskundedocent op O.R.S. Lek en Linge te Culemborg en sinds eind 2019 bestuurslid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Hij behaalde zijn master Science Education and Communication aan de Universiteit Utrecht en deed zijn masteronderzoek over de relatie tussen het denken van wiskundigen en wiskundig denken onder begeleiding van Paul Drijvers.
E-mailadres: *corwinvs@gmail.com*

Math between US

Sometimes my math is bigger than paper

Jana Dean



In deze column vertelt Jana Dean over haar ervaringen als wiskundedocent en haar experimenten op een middelbare school in Washington State, USA.

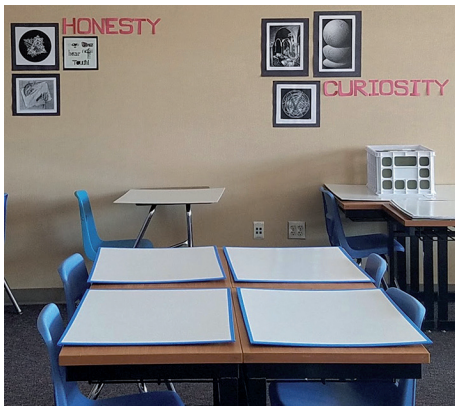


figure 1 The new whiteboards

'Whiteboards make everything easier'

As the paint dried and the press board curled in the sun, I wondered if I had wasted valuable end-of-summer hours on classroom prep that I'd regret. I want students doing math for as much of my class as possible, and I want to see my students' math thinking. For under a hundred dollars, my desktop white boards have solved more problems than I thought possible. A few months into the school year, I am sold. The whiteboards put math power directly in students' hands in ways I've never seen before.

Students tell me 'whiteboards make everything easier.' I have seen them combine the write-on surface with manipulatives to annotate patterns they find. They use the markers to keep track what they call 'little numbers' as they problem-solve. One day while doing a card-matching task, groups used the surface to debate and create categories that they could see and agree on.

I have one student who makes rectangles every day to keep his workspace organized. He tells me it helps him to know where his tools are. They also use their Chromebooks (we are a one-to-one school) to take photos of their thinking when the homework is to create a final draft of that day's task.

From across the room, I can see the progress students are making when we problem-solve. Instead of having to walk to the front to share their thinking — many of my 8th graders don't like to do this — others can travel to

The High Mountain Fencing Company is also in the business of building bullpens. However, pens to hold more than one bull are constructed differently than cow pens.

A pen for three bulles looks like this:

	Bull		Bull		Bull	

A pen for one bull looks like this:

	Bull	

A pen for two bulls looks like this:

	Bull		Bull	

How many sections of fence would it take to hold 100 bulls? 1,000? Any number?

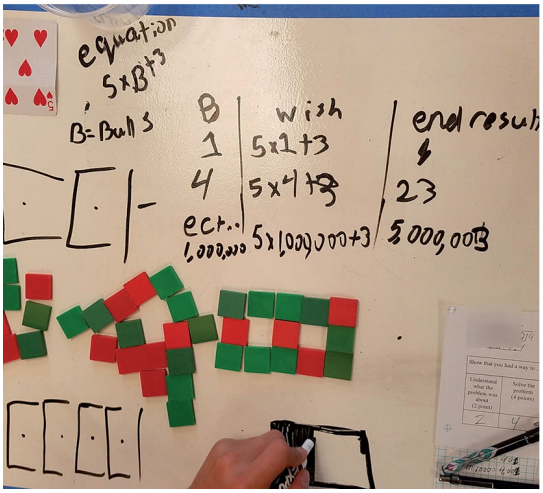


figure 2 Big thinking Bull Pens. Task credit: Math Education Collaborative[1]

them. As I walk around the room, I can think on my feet and make decisions about which desks I will showcase so that students can see and understand new tools and strategies for problem-solving. If we run out of time to talk about the math on the whiteboards, or if I can't make decisions quickly enough, I can snap a few photos with my cell phone and project them the next day to get the most of students' ideas.

Unexpectedly the whiteboards have addressed perennial middle school issue that has nothing to do with math. Instead of spending my energy handing out pencils and >

providing paper, what students need to do math is right there, to share, all day long. As a result, more of my attention is available for listening to and looking for and teaching the tools students need for math thinking.

For math only

It hasn't been all rainbows and ponies however. Some days way too much of my attention goes to eraser-marker contraptions that turn into flags, arresting elaborate doodling, and markers that placed end to end can tap a classmate seated two arm-lengths distant.
At the beginning of the year, I established that white-boards and markers would be for math only. In so doing, I created an irresistible 'rule to break,' and I've had a few students spend more time than I'd like by 'inviting' my attention with rule breaking.

Evaluation

Today, when I wondered aloud whether the whiteboards were worth it, my students admitted the challenges and most defended the tool as extremely important for their math learning. Among the challenges, they listed the distracting things they do with the markers: tapping, scratching and drawing SpongeBob memes.

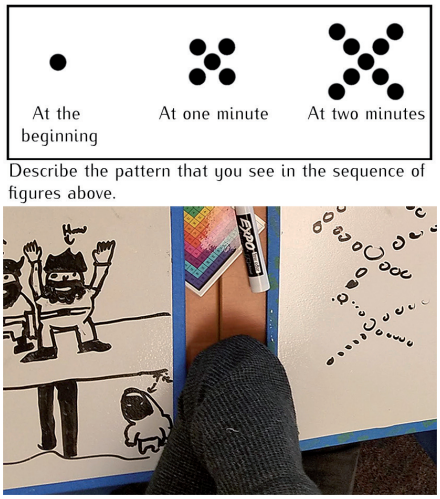


figure 3 Task credit: Mathematics Vision Project[2]

On the other hand, Maya wrote, 'Sometimes my math is bigger than paper. Whiteboards hold more of my ideas.' Kraig said, 'The whiteboard helps me make mistakes I can feel good about.' Elinore wrote, 'On the whiteboard, mistakes are for learning. They aren't permanent.' Denise asserted that 'Writing on the whiteboard helps me think better and visualize.' Rose liked that she could write down an idea right away instead of losing track of it while she takes the time to get out paper. Most of them appreciated the time they save by being able to start problem-solving right away. And since a five minutes is like three years in teacher time, the time-saving aspect of white boards seems worth the effort.

Getting ready

If I have convinced you, find a covered space equal to the area of your desktops, buy the stuff below and get busy.

— 1/4 inch pressboard, cut into six or eight pieces (instead of trying to match desk dimensions I opted for a shy match to the depth with a few inches of reveal on each side.)
— Rustoleum whiteboard paint (check the date - reviews say it works best if it is a year old or fresher)
— All-purpose white primer.
— Smooth surface disposable rollers.
— Super-sticky velcro (optional)

I followed the directions on the primer and the Rustoleum paint. I lightly sanded the pressboard and I let both primer and paint cure for two days before re-coating.
I panicked when every board curled up like the back side of a kale leaf, but it turned out to be moisture absorbed from the ground. The boards relaxed once I brought them indoors, but not for a week. In the meantime, I saved my project by velcroing boards to the desks. It took an hour (nine days of teacher time) and wasn't absolutely necessary, but it does help the boards stay as my middle schoolers shift in their seats drop their binders. I also taped the edges as I thought they would be scratchy. This also wasn't necessary. Instead of that step, you can use your time for planning lessons that inspire your students to make their math thinking visible.

Notes

[1] *https://www.mec-math.org/*
[2] *https://www.mathematicsvisionproject.org/*

Een vertaling van dit artikel staat op de website:

vakbladeuclides.nl/956dean

About the author

Jana Dean is a middle school teacher at Olympia School District 111, Olympia, Washington State, USA and a teacher-researcher at the Freudenthal Institute (Fulbright Distinguished Teacher Fellow 2019). See: *www.mathbetweenus.org*. E-mailadress: *jdean@reachone.com*

Boekbespreking

Denkraam

Harm Bakker

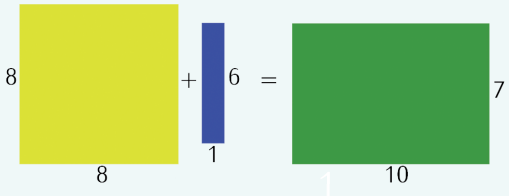
Titel: Denkraam
Ondertitel: Puzzels voor breinbazen met getallen, letters en vormen
Auteur: Jaap Klouwen
Uitgever: Veen Media (2018)
ISBN: 978-90-8571-636-5, 204 pagina's (paperback)
Prijs: € 15,00

Letters en woorden

Na *Denkwerk* en *Denkwaar* is dit de derde bundel met puzzels van deze auteur. Ik ken de eerdere delen niet, maar aangezien er geregeld wordt verwezen naar puzzels uit de eerdere delen, vermoed ik dat ze vergelijkbaar zijn in opzet. Deze uitgave bevat 75 puzzels. Zoals de ondertitel al aangeeft, komen allerlei onderwerpen langs. Ook de moeilijkheidsgraad van de opgaven varieert sterk. Om een indruk te krijgen volgen hier enkele voorbeelden uit verschillende categorieën. Een flink aantal puzzels gaat over letters en woorden. Vaak gaat het dan om woorden waarvan de letters aan een bepaalde eis voldoen. Is het je bijvoorbeeld ooit opgevallen dat het woord *vanilleyoghurt* alle klinkers uit het alfabet precies één keer bevat? Of dat het woord *stuur* wordt geschreven met letters die heel dicht bij elkaar liggen in het alfabet? Aan de lezer de taak om meer van dit soort woorden te vinden: woorden waarin alle klinkers precies één keer voorkomen dan wel woorden met een kleine standaarddeviatie als de letters worden vervangen door hun rangnummer in het alfabet.

Vormen en getallen

Uit de categorie 'vormen' het volgende verdelingsprobleem. Een vierkant van 8×8 en een rechthoek van 6×1 hebben samen een oppervlakte van 70. Gevraagd wordt om het vierkant in twee delen te knippen, zodat die twee delen samen met de rechthoek een rechthoek van zeven bij tien betegelen, zie figuur 1. In deze categorie vallen ook tangrampuzzels en een puzzel over 3d-pentomino's.



figuur 1

Bij puzzels over getallen moeten we niet zozeer denken aan rekenen, maar meer aan getallen met opmerkelijke eigenschappen. Zo is het getal 343 te schrijven als een rekenkundige uitdrukking met zijn eigen cijfers: $343 = (3 + 4)^3$. In het formaat dd-mm-jjjj wordt 4 december 2014 geschreven als 04 – 12 - 2014: het jaartal is een permutatie van de cijfers uit de dag en de maand. Er zijn verscheidene dagen in de eenentwintigste eeuw met deze eigenschap. Welk jaar heeft er de meeste?

Wiskundige kennis

De voorbeelden hierboven zijn echte puzzels. Ze vragen wat elementaire rekenvaardigheid, inventiviteit en met name investering in tijd. Bij een aantal andere opgaven is wat meer wiskundige kennis nodig om het tot een goed einde te brengen. Dat betreft bijvoorbeeld problemen waarbij het aantal mogelijkheden moet worden geteld of waar kansen moeten worden berekend. De puzzel over een ellipsvormig biljart vereist kennis over brandpunten van en raaklijnen aan de ellips en bij een aantal andere puzzels (Super-Fibonacci, Plastisch getal, ...) moet er wat algebraïsch worden gemanipuleerd.

Diverse verzameling

Maar daarmee zijn nog lang niet alle problemen ondergebracht. De verzameling is zo divers, dat een opdeling in categorieën eigenlijk niet te doen is. En heb je geen zin om zelf te puzzelen, maar denk je liever na over hoe een oplossing gevonden zou kunnen worden? Dan zijn er genoeg opgaven die zich lenen om geprogrammeerd te worden. Aan het eind van het boek worden de oplossingen gegeven. Dit beslaat ongeveer een derde van de pagina's. Bij diverse problemen worden toelichtingen en aanvullende opmerkingen gemaakt. Niet iedereen zal elke puzzel waarderen. Daarvoor is de verzameling te divers. Maar iedereen die van puzzelen houdt (dat is natuurlijk wel een voorwaarde) zal iets van zijn gading vinden. Al met al een bundel die kan zorgen voor een (flink) aantal aangename uren puzzelen.

Over de auteur

Harm Bakker is leraar wiskunde bij CSG Liudger in Drachten en docent bij de educatieve masteropleiding van NHL-Stenden in Groningen. E-mailadres: *h.bakker.marum@kpnmail.nl*

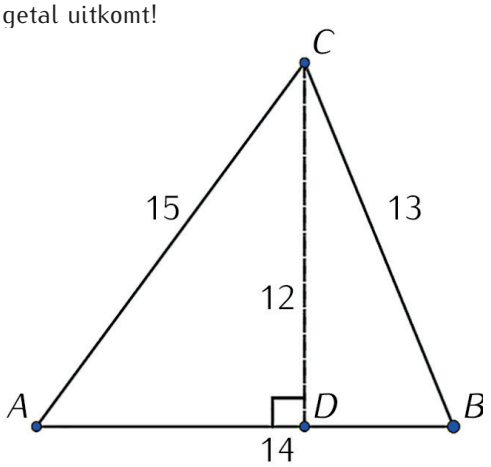
Jan Otto Kranenborg

Hoogtelijnen in een driehoek

Wanneer zijn de zijden van een driehoek én een van de hoogtelijnen geheeltallig? Jan Otto Kranenborg ging op zoek en vond een formule om speciale gevallen van die driehoeken te genereren.

Inleiding

In het boek *Honderd jaar wiskundeonderwijs* van Goffree, van Hoorn en Zwaneveld trof ik op bladzijde 58 een bijzonderheid aan. Het was een artikel van Martin Kindt, getiteld 'Over veranderingen in de schoolalgebra'. Daarin ging het om een driehoek *ABC* waarvan de lengtes van de zijden 13, 14 en 15 waren, en waarvan de hoogtelijn uit *C* precies 12 was, zie figuur 1. Opvallend dat er zo'n fraai getal uitkomt!



figuur 1

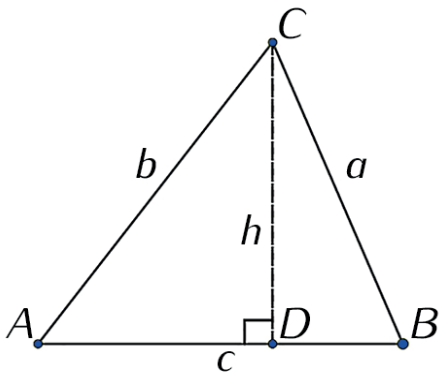
Het nodigde mij uit om op zoek te gaan naar nog meer geheeltallige voorbeelden.

Een algemene formule

Eerst leid ik een algemene formule af voor de lengte van de hoogtelijn uit *C*, zie figuur 2.

Er volgt:
$c = AD + BD = \sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{a^2 - h^2}$ zodat

$$c - \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{a^2 - h^2} \qquad (1)$$



figuur 2

Kwadrateren geeft $c^2 - 2c\sqrt{b^2 - h^2} + b^2 - h^2 = a^2 - h^2$.

Isoleer de wortel, dus $2c\sqrt{b^2 - h^2} = b^2 + c^2 - a^2$ en kwadrateer opnieuw zodat

$$4c^2\left(b^2 - h^2\right) = \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 \text{ waardoor}$$

$$4c^2h^2 = 4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2$$

Er komt dan $h_C = \frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}$. (2)

Noem nu $K = 4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2$, dan geldt dus

$$h_C = \frac{1}{2c}\sqrt{K}$$

Zou je (1) geschreven hebben als $c - \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{b^2 - h^2}$ dan gaat (2) over in

$$h_C = \frac{1}{2c}\sqrt{4a^2c^2 - \left(a^2 - b^2 + c^2\right)^2} \qquad (3)$$

Merk nu op dat
$K = 4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 = 4a^2c^2 - \left(a^2 - b^2 + c^2\right)^2$

En dus komen de uitdrukkingen (2) en (3) met elkaar overeen. De term K kan trouwens ook anders worden geschreven:

$$K = 4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 =$$

$$4b^2c^2 - \left(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2\right)$$

Ofwel

$$K = \left(a^4 + b^4 + c^4\right) - \left(\left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(a^2 - c^2\right)^2 + \left(b^2 - c^2\right)^2\right)$$

Aan deze formule voor K kun je zien dat a, b en c onderling verwisselbaar zijn.

De lengten van de twee andere hoogtelijnen kunnen nu ook in een formule uitgedrukt worden; ik gebruik het dubbele van de oppervlakte van
ΔABC: $b \cdot h_B = a \cdot h_A = c \cdot h_C$

Dus $h_A = \frac{1}{2a}\sqrt{K}$ en $h_B = \frac{1}{2b}\sqrt{K}$.

Noodzakelijk voor het geheeltallig zijn van de lengte van een hoogtelijn is dat K een kwadraat is.

De eerste voorbeelden

Laten we eens, net als in het begin, voor de zijden van een driehoek opeenvolgende gehele getallen nemen.
Ik kies $BC = a = m$, $AC = b = m + 2$ en $AB = c = m + 1$. En nu ga ik op zoek naar die gevallen, waarin de hoogtelijn uit C ook een geheel getal is.
In tabel 1 is dat gelukt; zo is bijvoorbeeld te zien dat $h_C = 45$ in het geval van $BC = 51$, $AB = 52$ en $AC = 53$.
Zeker, de geheeltallige oplossingen zijn zeer dun gezaaid. De eerstvolgende waarde van h_C is pas bij $m = 193$; dan geldt dat $h_C = 168$.
Met behulp van *Excel* vind ik tabel 1:

$a = m$	$b = m + 2$	$c = m + 1$	h_C
3	5	4	3
13	15	14	12
51	53	52	45
193	195	194	168
723	725	724	627
2701	2703	2702	2340
10083	10085	10084	8733

tabel 1

Voor deze keuzes van $a = m$, $b = m + 2$ en $c = m + 1$ gaat (3) over in

$$h_C = \frac{1}{2c}\sqrt{4a^2c^2 - \left(a^2 - b^2 + c^2\right)^2} =$$

$$\frac{1}{2(m+1)}\sqrt{4m^2(m+1)^2 - \left(m^2 - (m+2)^2 + (m+1)^2\right)^2} \quad (4)$$

Uitgeschreven komt er dan dat

$$h_C = \frac{1}{2(m+1)}\sqrt{\left(3m^4 + 12m^3 + 6m^2 - 12m - 9\right)} \quad (5)$$

De lengte van h_C kan nu verder (voor grote waarden van m) onderzocht worden. Allereerst merk ik op dat

$$h_C = \sqrt{\left(\frac{3m^4 + 12m^3 + 6m^2 - 12m - 9}{4(m+1)^2}\right)}$$

Pas ik de techniek van de staartdeling toe, dan volgt na het nodige rekenwerk:

$$\frac{3m^4 + 12m^3 + 6m^2 - 12m - 9}{4(m+1)^2} = \frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{2}m - \frac{9}{4} =$$

$$\frac{3}{4}\left(m^2 + 2m - 3\right) = \frac{3}{4}(m+1)^2 - 3 \quad (6)$$

Er volgt dat $h_C = \sqrt{\left(\frac{3}{4}(m+1)^2 - 3\right)}$. (7)

Voor grote waarden van m blijkt de lengte van de hoogtelijn te benaderen door de uitdrukking $\frac{1}{2}\sqrt{3}(m+1)$.
Dat is ook anders in te zien: voor grote waarden van m is er sprake van een gelijkzijdige driehoek met (gemiddelde waarde van de) zijden $m + 1$. Dan heeft een hoogtelijn lengte $\frac{1}{2}\sqrt{3}(m+1)$. In tabel 2 is in de laatste kolom te zien dat deze benadering steeds beter wordt:

$a = m$	$b = m + 2$	$c = m + 1$	h_C	$\frac{1}{2}\sqrt{3}(m+1)$
3	5	4	3	3,464
13	15	14	12	12,124
51	53	52	45	45,033
193	195	194	168	168,009
723	725	724	627	627,002
2701	2703	2702	2340	2340,001
10083	10085	10084	8733	8733,000

tabel 2

Hoe de termen van de kolommen zich ontwikkelen, is nog niet geheel duidelijk. Kijk ik naar de quotiënten van opeenvolgende termen uit de kolom van h_C, dan valt op dat
12/3 = 4; 45/12 = 3,75; 168/45 = 3,733;
627/168 = 3,732; 2340/627 = 3,732; 8733/2340 = 3,732.
Deze dalende rij quotiënten lijkt te dalen tot (vermoedelijk) 3,732.

Verder onderzoek naar de rij hoogtelijnen h_n geeft tabel 3:

$m = 13$	$h_0 = 12$	
$m = 51$	$h_1 = 45$	$45 = 4 \times 12 - 3$
$m = 193$	$h_2 = 168$	$168 = 4 \times 45 - 12$
$m = 723$	$h_3 = 627$	$627 = 4 \times 168 - 45$
$m = 2701$	$h_4 = 2340$	$2340 = 4 \times 627 - 168$
$m = 10083$	$h_5 = 8733$	$8733 = 4 \times 2340 - 627$

De rij h_n voldoet aan
$h_n = 4 \times h_{n-1} - h_{n-2}$ met $h_0 = 12$ en $h_1 = 45$. (8)

Het is een lineaire differentievergelijking van de tweede orde. Die kan op de volgende manier opgelost worden. Stel $h_n = g^n$ dan volgt uit $g^2 = 4g - 1$ dat $g = 2 \pm \sqrt{3}$.

Dan is $h_n = A\left(2-\sqrt{3}\right)^n + B\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ met $h_0 = 12$ en $h_1 = 45$.

Er volgt dan dat $A + B = 12$ en

$$A\left(2-\sqrt{3}\right)+B\left(2+\sqrt{3}\right)=45$$

Substitueer $B = 12 - A$, dan moet

$A\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(12-A\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=45$ gelden.

Dus $2A\sqrt{3}=12\sqrt{3}-21$, zodat $A=6-\frac{7}{2}\sqrt{3}$, en $B=6+\frac{7}{2}\sqrt{3}$.

De algemene oplossing luidt dan

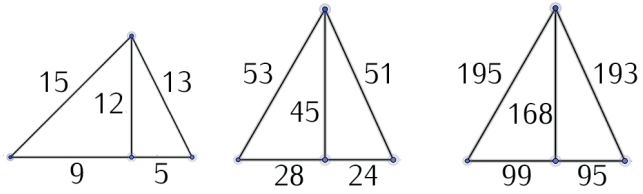
$$h_n=\left(6-\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n+\left(6+\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n$$

Blijkbaar geldt dan dat $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h_{n+1}}{h_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g^{n+1}}{g^n}=g=2+\sqrt{3}$.

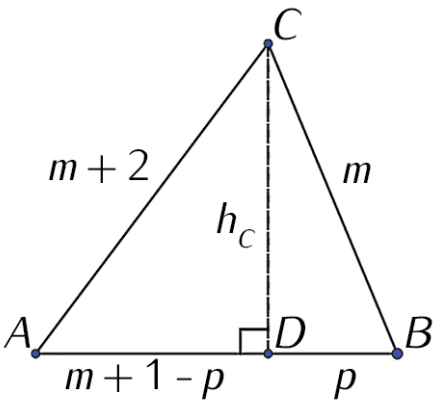
En deze waarde komt overeen met de eerder gevonden benadering 3,732.

Pythagorese drietallen

Kijken we naar de speciale driehoeken met de gevonden waarden voor de hoogtelijn uit C in tabel 3, dan zien we dat de hoogtelijn uit C driehoek ABC in twee driehoeken verdeelt, waarbij de zijden Pythagorese drietallen zijn, zie figuur 3.



figuur 3



figuur 4

Immers, noem $BD = p$ en dus $AD = m + 1 - p$, dan volgt uit de stelling van Pythagoras dat $p^2 + {h_C}^2 = m^2$.

In (7) werd gevonden dat $h_C=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\left(m+1\right)^2-3\right)}$.

Maar dan geldt

$$p^2=m^2-\frac{3}{4}\left(m+1\right)^2+3=\frac{1}{4}m^2-\frac{3}{2}m+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}\left(m-3\right)^2.$$

En dus is $BD=\frac{1}{2}\left(m-3\right)$ en $AD=\frac{1}{2}\left(m+5\right)$.

Conclusie: voor geschikte waarden van m zijn

$AD=\frac{1}{2}\left(m+5\right)$, $h_C=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\left(m+1\right)^2-3\right)}$ en $m + 2$

Pythagorese drietallen, evenals $BD=\frac{1}{2}\left(m-3\right)$, $h_C=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\left(m+1\right)^2-3\right)}$ en m.

Met geschikt wordt dus hier bedoeld dat de drie zijden van de driehoek ΔABC speciale opeenvolgende getallen moeten zijn.

De vraag is nu wel hoe de waarden van m gevonden kunnen worden. Zet de waarden van m nog eens onder elkaar, zie tabel 4, dan valt op dat de rij m_n voldoet aan de recursieve betrekking

$$m_n = 4m_{n-1} - (m_{n-2} - 2) \qquad (9)$$

$m_1 = 3$	
$m_2 = 13$	$13 = 4 \times 3 + 1$
$m_3 = 51$	$51 = 4 \times 13 - 1$
$m_4 = 193$	$193 = 4 \times 51 - 11$
$m_5 = 723$	$723 = 4 \times 193 - 49$
$m_6 = 2701$	$2701 = 4 \times 723 - 191$
$m_7 = 10083$	$10083 = 4 \times 2701 - 721$

tabel 4

Een niet homogene lineaire differentievergelijking van orde 2. Die kan ik zo niet oplossen, maar wel kan worden vastgesteld dat

$$h_C = \sqrt{\left(\frac{3}{4}(m+1)^2 - 3\right)} \text{ en}$$

$$h_n = \left(6 - \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)^n + \left(6 + \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)^n.$$

Nu kan m worden uitgedrukt in n.

Na (weer het nodige) rekenwerk volgt dan dat

$$m = -1 + 2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\left(\left(6 - \frac{7}{2}\ \ 3\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)^{n-2} + \left(6 + \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)^{n-2}\right)^2\right)} \qquad (10)$$

(de exponenten heb ik op $n - 2$ gesteld waardoor op de rekenmachine de kolommen van (9) en (10) identiek zijn).

Samenvattend

Voor driehoeken waarvan de zijden opeenvolgende lengten hebben, geldt dat een hoogtelijn een natuurlijk getal is als een van de zijden voldoet aan (10).
Voor $1 \leq n \leq 10$ staan in tabel 5 de lengten van de zijden en van de hoogtelijn.

n	m	$a = m$	$b = m + 2$	$c = m + 1$	h_C
1	3	3	5	4	3
2	13	13	15	14	12
3	51	51	53	52	45
4	193	193	195	194	168
5	723	723	725	724	627
6	2701	2701	2703	2702	2340
7	10083	10083	10085	10084	8733
8	37633	37633	37635	37634	32592
9	140451	140451	140453	140452	121635
10	524173	524173	524175	524174	453948

tabel 5

Over de auteur

Jan Otto Kranenborg is docent wiskunde op het Carolus Clusius College te Zwolle.
E-mailadres: *jokranenborg@hotmail.com*

Nathalie van der Wal, Arthur Bakker

Het FIzier gericht op...

Nieuwe wiskundecursus voor het technisch hbo

Hoe kunnen we toekomstige hbo-ingenieurs voorbereiden op de wiskundige vaardigheden die ze nodig hebben in hun werk? Wat is de update die dit wiskundeonderwijs nodig heeft? In deze FIzier bespreken we een nieuwe cursus toegepaste wiskunde die we hebben ontworpen.

Inleiding

Door automatisering en digitalisering in de afgelopen decennia is het werk van de hbo-ingenieur veranderd. Computers nemen berekeningen over en de onderliggende wiskunde wordt minder zichtbaar. Het wiskundeonderwijs in het technisch hbo is echter weinig veranderd. Het wordt meestal abstract aangeboden met beperkte ruimte voor toepassingen en is voornamelijk gericht op procedures en berekeningen. Studenten herkennen hierdoor vaak niet de wiskunde die in hun vakgebied een rol speelt, met als gevolg een lagere motivatie voor wiskunde. Wat zou een oplossing kunnen zijn?

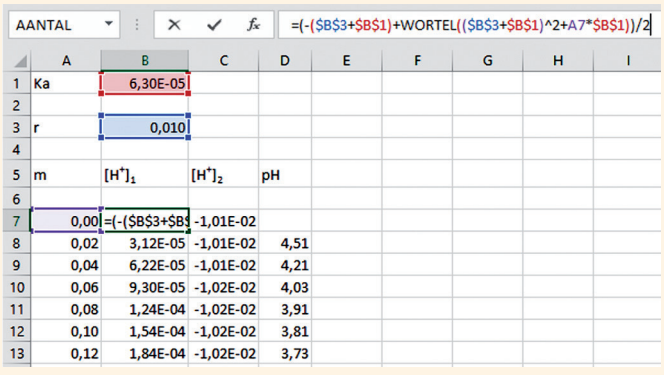
Techno-mathematical Literacies

Voorafgaand aan het ontwerp hebben we een studie uitgevoerd naar het gebruik van wiskunde in het beroepenveld van afgestudeerde hbo-ingenieurs, waarover we in de FIzier van maart 2016 berichtten.[1] Het centrale begrip is hier *Techno-mathematical Literacies* (TmL): wiskundige vaardigheden voor het digitale tijdperk.[2] Voorbeelden van TmL zijn: *sense of error*, *technical creativity* en *technical communication*.[3]

De cursus

In een interviewstudie hebben we zeven categorieën van TmL vastgesteld die door ingenieurs worden gebruikt bij het uitoefenen van hun beroep.[4] Vervolgens hebben we met een multidisciplinair ontwerpteam een nieuwe cursus toegepaste wiskunde ontwikkeld voor het technisch hbo waarin TmL als leerdoelen centraal staan. De cursus omvat twee leerlijnen. De eerste leerlijn is het oefenen van 'abstracte' basiswiskunde, waarvoor we het software-programma ALEKS[5] inzetten. Op deze manier kunnen studenten op hun eigen niveau en in hun eigen tempo, buiten de lessen om, basiswiskunde aanleren. De tweede leerlijn omvat casussen in opleidingsgerichte contexten, waar studenten tijdens de les in twee- of drietallen aan werken en waarin TmL centraal staan. In de casussen wisselen teksten en geleide opdrachten elkaar af om een bepaald probleem wiskundig op te lossen.

De eerste casus, voor het domein van de *Life Sciences*, gaat over oplossingen en zuren. Elke deelvraag is gekoppeld aan één of meer TmL. Eerst wordt gerekend aan het lineair verdunnen van een oplossing, tot een bepaalde pH wordt bereikt. In het tweede deel wordt gerekend aan de pH van een zwak zuur, dat een tweedegraads proces is. Bij een bepaalde deelvraag wordt via de evenwichtsvergelijking de H^+-concentratie berekend. Deze formule wordt in een spreadsheet aan de studenten aangeboden maar bevat een fout die moet worden opgespoord om de TmL *sense of error* te oefenen. Waar zit de fout in figuur 1?



figuur 1 Waar zit de wiskundige fout in de formule?

Onderzoekend leren

Voor de casussen-leerlijn is gekozen om met de methode van onderzoekend leren te werken, omdat TmL een onder-

zoekende houding vragen. Onderzoekend leren is een benadering van leren die zich meer richt op het proces dan op het antwoord. Het stimuleert kritisch denken, het formuleren van vragen en het probleemoplossend vermogen. De docent kan het proces ondersteunen met vragen als: hoe pak je zoiets aan, is er een bepaalde systematiek hier of hoe zou je dit op een andere manier kunnen uitleggen?
Voor dit project ziet een les op basis van casussen er als volgt uit. Het eerste uur starten we met een korte instructie. Vervolgens gaan studenten aan het werk met de casussen zonder ondersteuning van de docent. Hierna volgt het feedback-uur. Dit uur kan door de docent op verschillende manieren worden ingevuld. Als eerste mogelijkheid kan een klassikale sessie worden gehouden waarin groepjes studenten hun werk presenteren en de docent door middel van vragen (onderzoekend leren) een groepsdiscussie op gang brengt. Een tweede mogelijkheid is de klas op te delen in kleine groepjes en daarmee de casus te bespreken. In dit feedback-uur tracht de docent een brug te slaan tussen de abstracte wiskunde van de ALEKS-leerlijn en de toegepaste casussen. Een uitgebreide beschrijving van de cursus is te vinden in [6].

Pilot

Met de ontwikkelde cursus is een pilot gehouden met 59 Chemie-studenten van de Academie voor de Technologie van Gezondheid en Milieu van Avans Hogeschool. Hierna zijn een enquête en mini-interviews gehouden onder de studenten. Zowel ALEKS als de casussen werden als leerzaam ervaren door de meeste studenten, maar ze gaven ook aan de teksten in de casussen lastig te vinden. Ook moesten studenten wennen aan het feit dat ze minder instructie kregen. Verder gaven ze aan dat zij door de casussen beter inzagen waar wiskunde voor gebruikt wordt. Een student zei: 'Hier heb ik wat aan!'
Na de pilot is de cursus in het curriculum van alle opleidingen van de academie opgenomen en wordt sindsdien door een groot team van docenten aan ruim vijfhonderd studenten per jaar gegeven. Het parallel gebruiken van ALEKS en toegepaste casussen lijkt een goede keuze. Doordat de leerlijn van ALEKS zich grotendeels afspeelt buiten de klas en studenten op hun eigen niveau kunnen werken, is een efficiëntieslag gemaakt waarmee tijd is vrijgekomen voor meer inhoud.

Ben je geïnteresseerd in het gebruik van casussen in (beroepsgericht) onderwijs, neem dan een kijkje bij de gehele casus in ons artikel.[6]

Noten

[1] Bakker, A. & Wal, N. van der (2016). Het FIzier gericht op... wiskunde in het technisch hbo. *Euclides, 91*(5), 11-12.

[2] Bakker, A., Hoyles, C., Kent, P., & Noss, R. (2006). Improving work processes by making the invisible visible. *Journal of Education and Work, 19*(4), 343–361.

[3] Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., & Bakker, A. (2013). Mathematics in the workplace: Issues and challenges. In Damlamian, A., Rodrigues, J. F. & Sträßer, R. (Eds.), Educational interfaces between mathematics and industry (pp. 43–50). Londen: Springer.

[4] Van der Wal, N. J., Bakker, A., & Drijvers, P. (2017). Which Techno-mathematical Literacies are essential for future engineers? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 87–104. *https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-017-9810-x* (open access)

[5] zie *www.aleks.com*

[6] Van der Wal, N. J., Bakker, A., & Drijvers, P. (2019). Teaching strategies to foster techno-mathematical literacies in an innovative mathematics course for future engineers. *ZDM Mathematics Education, 51*(6), 885-897. *https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-019-01095-z* (open access)

Over de auteurs

Nathalie van der Wal is docent wiskunde bij Avans Hogeschool in het technische domein en buitenpromovendus bij het Freudenthal Instituut. Haar promotieonderzoek heeft als vraag hoe het wiskundeonderwijs voor het technisch hbo ingericht kan worden zodat het aankomende ingenieurs helpt de Techno-mathematical Literacies te ontwikkelen die nodig zijn in de beroepspraktijk. E-mailadres: *n.j.vanderwal@uu.nl*
Arthur Bakker is universitair hoofddocent aan het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Hij heeft aan de University of London onderzoek gedaan naar Techno-mathematical Literacies in de beroepspraktijk (2004 - 2007), en in Nederland onderzocht hoe mbo'ers beroepsgerichte wiskundige kennis kunnen ontwikkelen (2007 - 2011). E-mailadres: *A.Bakker4@uu.nl*

Rolf Slotboom

Wiskunde cool dankzij SmartPool

Poolen en tegelijkertijd wiskunde leren. Dat is het doel van het succesvolle SmartPool project dat al op 47 scholen in het hele land draait.

Wat is SmartPool?

SmartPool is pool voor de jeugd, met een combinatie van wiskunde.[1] SmartPool is bedoeld om wiskunde voor brugklassers niet alleen veel leuker te maken, maar vooral ook gemakkelijker te begrijpen.
Het bestaat uit de volgende onderdelen:

— een mobiele pooltafel;het lespakket *Wiskunde aan de pooltafel* waarin wiskundige vraagstukken worden uitgelegd aan de hand van poolsituaties;
— een instructie op school door een SmartPool trainer;
— deelname aan de speciaal voor scholen opgezette competitie, de SmartPool Cup.

Belang van SmartPool

Er is in Nederland een groot tekort aan technisch geschoolde vakmensen. SmartPool wil de interesse voor bètavakken zoals wiskunde en natuurkunde aanwakkeren. Poolbiljart blijkt namelijk een aantal overeenkomsten te hebben met die vakken. Kernwoorden zijn: analytisch, oplossingsgericht, patroonherkenning, vooruitdenken, inschatten en calculeren. Poolen kan voor jongeren zinvol zijn, niet alleen voor hun vaardigheden op het gebied van wis- en natuurkunde, maar ook ter verbetering van hun precisie en concentratievermogen, vaardigheden die bij jongeren onder toenemende druk staan, bijvoorbeeld door de komst van de smartphone. Met SmartPool kunnen scholieren op een leuke manier deze vaardigheden verder ontwikkelen. SmartPool is door de Koninklijke Nederlandse Biljart Bond (KNBB)[2] bedacht naar aanleiding van het EK Poolbiljart dat in 2018 in Nederland plaatsvond.

figuur 1 Het lespakket

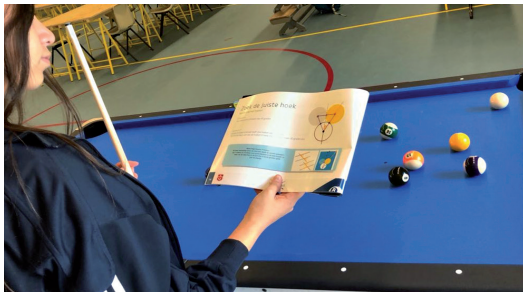
Lespakket

Erik van Haren heeft het lespakket *Wiskunde aan de pooltafel* ontwikkeld. Bijna alle scholieren (96%) die hier vorig jaar mee werkten vonden dat de wiskundelessen leuker werden door het lespakket. Ongeveer twee derde van de scholieren vond wiskundelessen makkelijker of beter te begrijpen door het lespakket. Dit blijkt uit onderzoek van het Mulier Instituut,[3] in opdracht van de KNBB.
Andere bevindingen:

— Een ruime meerderheid van de docenten ziet de waarde van de pooltafels (82% voldoende of goed) en het lespakket (83% voldoende of goed) voor het behalen van de onderwijsdoelen van wiskundelessen. Docenten zijn iets verdeelder als het gaat om de bijdrage van het lespakket aan het makkelijker en/of begrijpelijker maken van de wiskundelessen (67% voldoende of goed).
— Docenten zien dat de pooltafels en het lespakket bijdragen aan het verbeteren van de sfeer op school en de promotie van biljart/poolen onder scholieren.
— Bijna alle scholieren (97%) geven aan dat ze het leuk vinden om de mobiele, inklapbare pooltafels op school te gebruiken. Twee derde van de scholieren vindt het leuk om de opgaven uit het lespakket te maken. Ongeveer twee derde van de scholieren die gebruik heeft gemaakt van het lespakket vond de opgaven moeilijk.
— Negen op de tien docenten verwachten dat de mobiele, inklapbare pooltafels ook in de toekomst tijdens lesuren zullen worden gebruikt.

SmartPool omarmd

In het begin moest nog vaak worden uitgelegd wat de meerwaarde is van SmartPool. Inmiddels heeft de wiskundewereld SmartPool echter omarmd en krijgt SmartPool meer bekendheid. Zo gaven Willem La Riviere, directeur



figuur 2 SmartPool in actie

KNBB, en Erik van Haren, auteur van het lesmateriaal, een workshop over SmartPool op de studiedag van de NVvW. Daarin gingen zij in op vragen als: wat is de link tussen SmartPool en wiskunde? Op welke wijze kun je SmartPool integreren in je lessen? Hoe zorg je ervoor dat je wiskundelessen leuker worden door SmartPool en dat de wiskunde beter blijft hangen?
W4Kangoeroe heeft zich inmiddels verbonden aan SmartPool, en op de 55ste editie van het Nederlands Mathematisch Congres was er aandacht voor SmartPool. In *Pythagoras* stond in de vorige jaargang een SmartPool column in iedere editie.[4] Daarnaast organiseert de KNBB de SmartPool Studiedagen voor Docenten.

figuur 3 Leerlingen van het Elzendaalcollege te Boxmeer[5]

Nieuwe ontwikkelingen

Er zijn volop plannen om de volgende stappen te zetten met SmartPool:

— verbreding en verdieping van het lesmateriaal. Verbreding door lesmateriaal voor alle niveaus van het v.o. te ontwikkelen en verdieping door ook aandacht te besteden aan natuurkunde. Doel is dat dit nieuwe materiaal in 2020 gereed is.
— uitbreiding van het lesmateriaal met SmartSnooker en SmartBiljart, want ook bij biljart en snooker komt volop wis- en natuurkunde kijken!
— organisatie van de SmartPool Cup. Nu SmartPool op zoveel scholen met succes wordt toegepast en het enthousiasme bij de leerlingen zo groot is, is de vraag naar SmartPool in competitievorm steeds urgenter geworden. De finale van de eerste SmartPool Cup was gepland op 18 april 2020 tijdens de Meisjes Olympiade in Egmond aan Zee, maar is uitgesteld vanwege de coronacrisis.

Tot slot

Zou je graag SmartPool gebruiken op jouw school? Of wil je bijdragen aan de verdere ontwikkeling van het lesmateriaal? Mail naar *info@knbb.nl* onder vermelding van 'SmartPool op school' of 'Ontwikkeling lesmateriaal Smartproject'.

Noten

[1] De site van SmartPool: *https://www.smartpool.nl/*
[2] De site van de KNBB: *https://www.knbb.nl/search/node/smartpool*
[3] *https://www.mulierinstituut.nl/publicaties/24889/smartpool-docenten-en-scholieren-over-gebruik-en-tevredenheid-smartpool/*
[4] *https://www.pyth.eu/wiskunde-bij-poolbiljarten-een-introductie en https://www.pyth.eu/poolbiljarten-diverse- moeilijkheden-bij-het-potten*
[5] Uitzending Jeugdjournaal over SmartPool op het Elzendaalcollege te Boxmeer: *https://www.youtube.com/watch?v=GSeR_WuOkcI , zie ook https://www.youtube.com/watch?v=MRc0bxEcdno&feature=youtu.be&fbclid=IwAR0LV9GAzh3_FVSthK1wfOEMd2vx3FLJkl0wpAxVyr2Ak_ky3Z_ZHzYAiuM*

Zie verder:
Verslag op de site Sportinnovatie.studio 'Wiskunde weer cool dankzij SmartPool'.
https://sportinnovatie.studio/wiskunde-weer-cool-dankzij-smartpool/
Er is een crowdfunding actie gestart, *zie https://competitieveiling.nl/product/doneer-voor-pool-en-snooker-op-school/*

Over de auteur

Rolf Slotboom is hoofd Communicatie bij de KNBB. Daarnaast is hij NOBTRA-gecertificeerd trainer focus/mindset, leugendetectie en mediatraining.
E-mailadres: *rslotboom@knbb.nl*

Desiree van den Bogaart

Wortels van de wiskunde

16 De Stokjes van Napier

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek[1], de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: de stokjes van Napier.

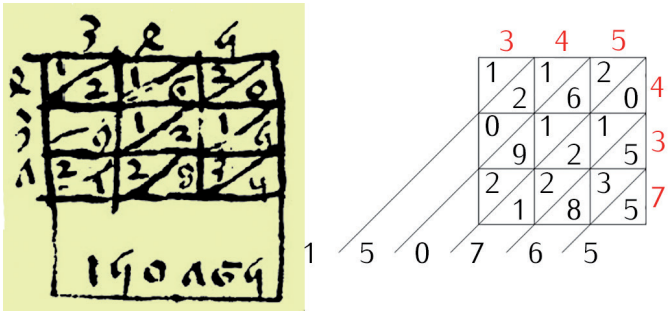
Inleiding

De Schotse wiskundige John Napier is vooral bekend vanwege het uitvinden van de logaritme, waarover al eerder een Wortel verscheen. Hij heeft echter in zijn pogingen om vermenigvuldigen te vergemakkelijken nog iets bijzonders nagelaten: de zogenaamde rekenstokjes. Deze stokjes zijn gebaseerd op een oude rekentechniek die *gelosia* wordt genoemd. Deze techniek kan prima met alleen papier en pen worden aangeleerd, maar het is nog leuker om met je leerlingen zelf de stokjes na te maken en ermee te rekenen.

Gelosia-vermenigvuldiging

Het Pamiers-manuscript[2] dateert uit de eerste helft van de 15e eeuw. Het is genoemd naar de vindplaats: de Zuid-Franse stad Pamiers. Het manuscript bevat rekentechnieken en handelspraktijken, voornamelijk uitgewerkt in voorbeelden en verhaaltjessommen, met nauwelijks uitleg of bewijsvoering. De oorspronkelijke taal is een oud-Frans dialect uit de Languedoc. Het manuscript bestaat uit drie delen. Deel één behandelt de Arabisch-Indische cijfers en het positionele getalstelsel, vervolgens de basale rekenoperaties, meetkundige reeksen, vierkantswortels en derdemachtswortels. Deel twee bevat dezelfde onderwerpen maar dan met breuken en deel drie gaat over toepassingen van dit alles in ongeveer honderd verhaaltjessommen. Een van de bijzonderheden van dit manuscript is dat het negatieve getallen toelaat als antwoord op een probleem, uit strikt wiskundig oogpunt.

Figuur 1 (links) toont een rekenoperatie volgens de zogenaamde gelosia-techniek. Gelosia betekent rooster of traliewerk. In het Engels wordt dit ook wel *lattice multiplication* genoemd. Er zijn veel filmpjes te vinden op YouTube waarin deze techniek wordt uitgelegd.



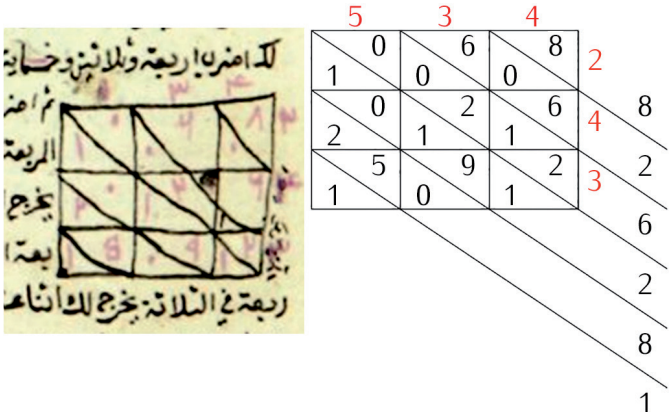
figuur 1

In bovenstaand voorbeeld worden 345 (horizontaal) en 437 (verticaal) met elkaar vermenigvuldigd. De notatie van de getallen wijkt nog enigszins af van de onze, zie bijvoorbeeld de 4. Daarnaast staat een vertaling in de Arabisch-Indische cijfers waar wij veel meer mee vertrouwd zijn. Afhankelijk van het doel van je les of het niveau van je groep, kun je ervoor kiezen om met de primaire bron met de onbekende symbolen te beginnen, of de vertaling er meteen bij te geven.
In elk vierkantje wordt een vermenigvuldiging uitgevoerd. We beginnen helemaal rechtsonder. In dat vierkantje wordt 7 x 5 = 35 uitgerekend. De diagonaal in het vierkant scheidt de tientallen (3) van de eenheden (5). In het vierkantje ernaast zien we 7 x 4 = 28. Hier worden feitelijk niet tientallen en eenheden gescheiden, maar honderdtallen (2) en tientallen (8), omdat de 4 hier staat voor 40. Linksonder zien we dan 7 x 3 = 21, gescheiden in duizendtallen (2) en honderdtallen (1). Zo worden alle vierkantjes gevuld en het antwoord gescheiden door een diagonaal. Het voordeel van deze werkwijze is dat gelijke machten van tien nu in dezelfde diagonale rij terecht zijn gekomen en dus bij elkaar opgeteld kunnen worden.
We beginnen weer rechtsonder. Hier staat de 5, dus het antwoord van 345 x 437 eindigt op een 5. Dan volgt een

diagonale rij met drie cijfers (5 + 3 + 8), de som daarvan is 16. Dat betekent dat we een 6 opschrijven op de plek van de tientallen en één 1 (honderd) onthouden voor bij de volgende diagonale rij cijfers. Daar zien we 0 + 1 + 2 + 2 + 1 plus de 1 die we onthouden hebben geeft 7. Nog drie diagonale rijen cijfers netjes afwerken geeft als eindantwoord 150765. Dat is het getal dat helemaal onderaan geschreven staat.

Oosterse bronnen

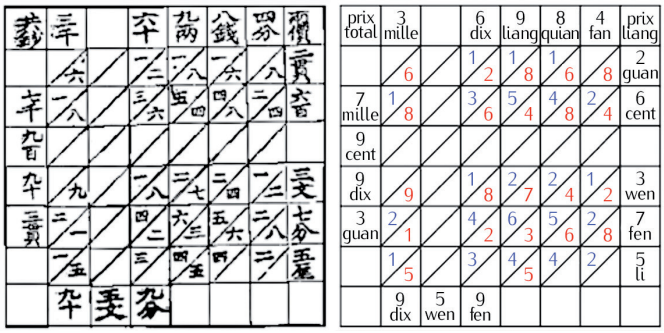
Het Pamiers-manuscript is zeker niet de enige of de oudste bron waarin de gelosia-techniek wordt gebruikt. Er zijn bronnen uit het Midden-Oosten en China waarin dit ook al gebeurt. Figuur 2 (links) toont een fragment uit *Hadha al-kitab kashf al-asrar fi'ilm al-ghubar (Onthulling van de geheimen van de rekenkunst)*, geschreven door Al-Qalasadi in 1486. Het fragment gaat over de vermenigvuldiging van 534 met 342. In figuur 2 rechts staat de vertaling in moderne notatie.



figuur 2

De diagonalen zijn hier anders getekend dan bij het eerste voorbeeld. Dat komt doordat er van rechts naar links gelezen wordt. De notatie van de getallen is echter wel gelijk aan hoe wij dat doen: rechts de eenheden, links daarvan de tientallen, en zo verder. Het getal dat verticaal (rechts) bij het rooster is geschreven, staat anders genoteerd dan bij het Pamiers-manuscript. Het bovenste cijfer is de 2, dan bij de middelste rij de 4 en onderaan de 3. Dat maakt dat als de getallen volgens de diagonalen worden opgeteld, de eenheden bovenaan komen te staan, daaronder de tientallen, de honderdtallen en zo verder. Het antwoord moet dan van onderen naar boven worden gelezen: 182628.

In China werd in dezelfde periode ook de vermenigvuldiging met het rooster gebruikt en genoteerd. Figuur 3 (links) geeft een financiële berekening voor de gouverneur van de provincie Zhejiang in 1450. In de (Franse) vertaling ernaast[3] zijn ook de benamingen van de verschillende munteenheden gebruikt.



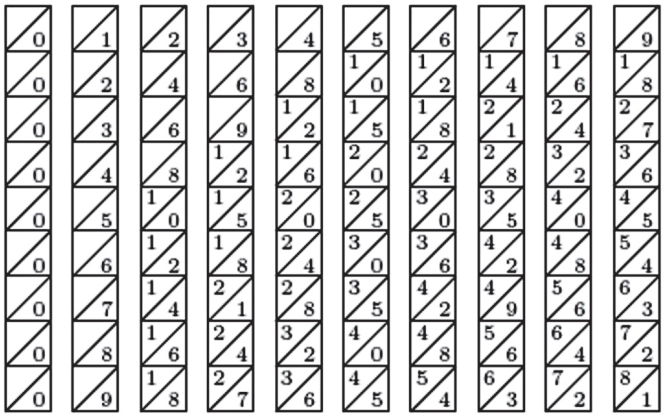
figuur 3

Het kan een hele mooie activiteit zijn om je leerlingen een aantal verschillende versies van de gelosia-techniek te laten zien, al dan niet in vertaling en de leerlingen zelf te laten achterhalen wat er gebeurt. Ze kunnen de gevonden procedure aan elkaar uitleggen, of vergelijken met hun eigen bekende manier van vermenigvuldigen, voor- en nadelen benoemen, etc. Ook hier kunnen eventueel YouTube-filmpjes bij gebruikt worden. Renaud Chorlay heeft dit gedaan met leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool[4]. Dat maakt het zeker haalbaar voor leerlingen uit onze onderbouwklassen.

Rekenstokjes van Napier

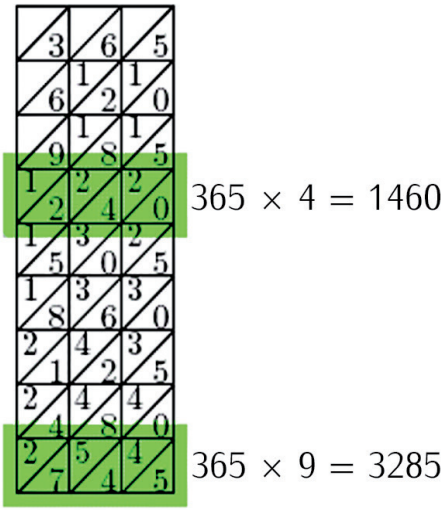
Het rekenen met de gelosia-techniek werd door Napier opgepakt in het begin van de zeventiende eeuw. Hij koos voor houten rekenstokjes als concreet gebruiksvoorwerp. In zijn boek *Rabdologiae* uit 1617 legt hij dit uit. In de appendix zet hij de inscripties in de stokjes systematisch op een rijtje. De stokjes zijn oorspronkelijk balkvormig, aan elk van de vier zijden beschreven.
Om dit zelf te kunnen toepassen, zie je in figuur 4 een beter getekende versie. Elke kolom bevat in principe een tafel. De meest linker kolom is de tafel van 0, daarna de tafel van 1, 2 tot en met 9. De diagonalen geven de scheiding tussen tientallen en eenheden weer.

Er zijn dus tien verschillende kolommen nodig, voor de getallen 0 t/m 9. Omdat sommige cijfers meer dan eens voorkomen in hetzelfde getal, is het handig om elke tafel meerdere keren op een stokje weer te geven. In de oorspronkelijke set van Napier zitten tien stokjes die aan vier kanten bedrukt zijn. Alle tafels komen precies vier keer voor. >



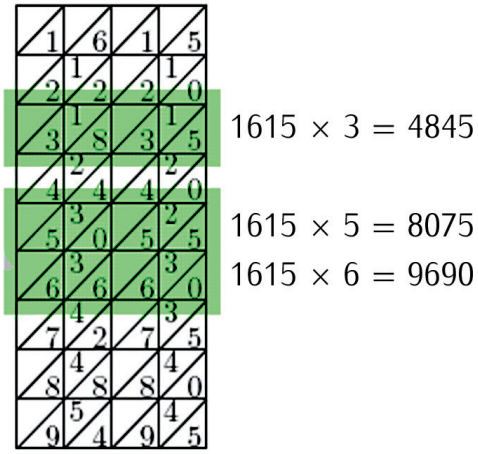
figuur 4

Met gebruik van rekenstokjes ziet de vermenigvuldiging van 365 met 4 respectievelijk 9 eruit zoals in figuur 5. Je legt de stokjes met de tafel van 3, 6 en 5 naast elkaar neer en leest dan de vierde rij af (groen gemaakt). Hier tel je weer van rechts naar links de eenheden (0), tientallen (4 + 2), honderdtallen (2 + 2) en duizendtallen (1) op, tot het eindantwoord 365 x 4 = 1460 gevonden is. De onderste groene rij geeft op vergelijkbare wijze 365 x 9 = 3285



figuur 5

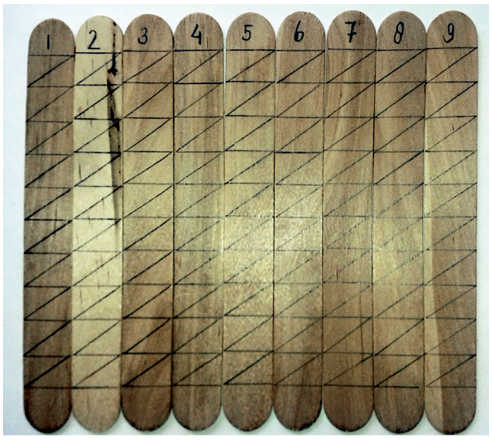
Een voorbeeld van het vermenigvuldigen van grotere getallen, zie je in figuur 6. Hier wordt 365 vermenigvuldigd met 1615. Het is nu handiger om van het getal dat uit de meeste cijfers bestaat (1615) de stokjes met de tafel neer te leggen, dan hoeven er straks minder getallen opgeteld te worden voor het eindantwoord. De tussenstappen van de vermenigvuldiging met respectievelijk 3, 5 een 6 staan rechts. Bij het berekenen van het eindantwoord moeten er nog wat nullen worden toegevoegd: 484 500 + 96 900 + 8 075 = 589 475.
Merk op dat het diagonaal doortellen van de rijen, zoals bij het eerste voorbeeld uit het Pamiers-manuscript, hier niet werkt. Je gebruikt de stokjes alleen voor het berekenen van tussenstappen, maar voor het eindantwoord is nog wel een aparte optelling van de deelresultaten nodig. Als je houdt van een uitleg in de vorm van een video: Jeanine Daems legt uit hoe rekenstokjes werken in een kort filmpje op YouTube.[5] Ze maakt daarbij gebruik van replica's van de stokjes die in het bezit zijn van Museum Boerhaave in Leiden.



figuur 6

Gebruik in de klas

De stokjes van Napier zijn goed na te maken met ijslollystokjes, zie figuur 7. Dat is een precisiewerkje met geodriehoek en fineliner, maar met wat sturing kunnen je leerlingen dit prima zelf en vinden ze dat ook leuk om te doen.



figuur 7

Studenten van de Driestar Hogeschool in Gouda hebben tijdens hun opleiding een lespakket ontwikkeld voor klas vmbo-BK-2. Het maken en gebruiken van de stokjes wordt in dit lespakket stap voor stap uitgelegd.

In de eerste les worden de stokjes gemaakt, daarna worden er in les 2 eenvoudige vermenigvuldigingen mee uitgevoerd en ten slotte worden in een afsluitende les ook vermenigvuldigingen met getallen die uit meerdere cijfers bestaan geleerd. Een voorbeeld van een opdracht uit het lesmateriaal zie je in figuur 8.

Activiteit 4

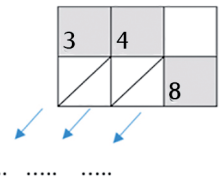
Maak de som 8 × 34 met behulp van de staafjes van Napier. Volg de stappen.

Stap 1 - Pak staafjes 3 en 4.

Stap 2 - Leg ze langs de getallen aan de rechterkant van deze bladzijde. Leg ze zo naast elkaar dat er 34 te lezen is.

Stap 3 - Kijk naar rij 8. Zet de getallen in de onderstaande tabel. Doe dat net zoals Jeroen dat deed.

Stap 4 - Tel de getallen diagonaal op.



Stap 5 - Vul in: 8 × 34 = ...

figuur 8

Het materiaal kan worden opgevraagd bij de auteurs.[6]

Noten

[1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.Q (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon.

[2] Schwartz, R.K. (2012). The Pamiers Manuscript, Convergence, *DOI:10.4169/loci003888*

[3] Daval, N. (2014) Les abaques, outils de numération et de calcul, *http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article753*

[4] Chorlay, R, (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. In Radford, L. Furinghetti, F. & Hausberger, T. (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM 2016, 18-22 July 2016)* (pp. 5-23). Montpellier, France: IREM de Montpellier. *https://hal.inria.fr/HPM2016/*

[5] *https://www.youtube.com/watch?v=oujdFKX1Kn8*

[6] Het lesmateriaal dat in dit artikel besproken wordt, kan worden opgevraagd bij Marijke Hassefras-Zuidbroek (*marijkehassefras@hotmail.com*) en Elwina Klippel (*kli@calvijncollege.nl).*

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

Vakantiecursus 2020

platform wiskunde nederland

Speltheorie: van strategisch beslissen tot 'eerlijke' oplossingen

De wiskundige John von Neumann en de econoom Oscar Morgenstern publiceerden in 1944 samen het boek *The Theory of Games and Economic Behaviour*. Ze legden daarmee de fundamenten voor het vakgebied speltheorie, waarin modellen van conflict en samenwerking centraal staan. In deze cursus maak je kennis met het gedachtegoed van enkele speltheoretici en leer je meer over wiskundige principes daarin. Hoofddocent: Prof. dr. Frank Thuijsman

Amsterdam: vrijdag 21 en zaterdag 22 augustus 2020

Eindhoven: vrijdag 28 en zaterdag 29 augustus 2020

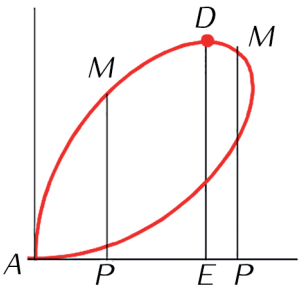
Martin Kindt

Twee krommen genaamd 'folium'

Beroemde krommen hebben soms de naam van de (al of niet vermeende) eerste ontdekker. Twee voorbeelden zijn: het folium van Descartes (uit 1638) en het folium van Dürer (1525). Beide krommen vertonen een lus in de vorm van een blad, vandaar de Latijnse naam folium. Hoewel ze daarvoor niet zijn uitgevonden, kunnen beide krommen worden gebruikt voor de oplossing van een klassiek constructieprobleem.

Uit het boek van De l'Hôpital

Het allereerste leerboek over differentiaalrekening verscheen in 1696 van de hand van markies De l'Hôpital onder de titel *Analyse des infiniments petits.*[1] Het was in feite het collegedictaat van Johann Bernoulli van wie de markies de rechten had gekocht. De bekende (naar mijn smaak wat overbodige) regel die zijn naam draagt, zou eigenlijk de regel van Bernoulli moeten heten ....
Het eerste hoofdstuk in het boek is in euclidische stijl geordend: definities, postulaten, proposities. De proposities zijn hier de bekende rekenregels voor het differentiëren. In het derde hoofdstuk, over optimaliseren, worden extreme punten van krommen bepaald. Daaruit bekijk ik het eerste voorbeeld. Dit behandelt de kromme 'waarvan de aard' – aldus de markies - wordt uitgedrukt door de vergelijking $x^3 + y^3 = axy$. Daarbij worden a, x, en y positief verondersteld, zie figuur 1.



figuur 1

Van het punt D, het hoogste punt van de kromme, berekende De l'Hôpital de coördinaten als volgt. Eerst differentiëren:

$$3xxdx + 3yydy = axdy + aydx.$$

Hieruit dy opgelost en gelijk aan 0 gesteld:

$$dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = 0$$

Er volgt dan:

$$y = \frac{3xx}{a}$$

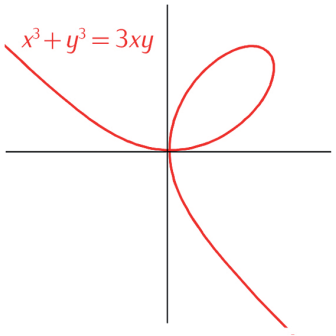
en substitutie in $x^3 + y^3 = axy$ levert op:

$$x = \frac{1}{3}a \cdot \sqrt[3]{2}$$

De markies merkt dan op dat ED de grootste van alle *ordinaten* naar punten van de kromme is. Hoe groot die maximale ordinaat is, vermeldt hij niet, maar substitutie leert dat de lengte daarvan $\frac{1}{3}a \cdot \sqrt[3]{4}$ is.

Het folium van Descartes

De kromme van figuur 1 heeft de vorm van een blaadje en dat verklaart de naam 'folium'. Zij draagt nu de naam van Descartes en ziet er zonder de beperking tot het eerste kwadrant zó uit, zie figuur 2.



figuur 2

In het vervolg kies ik voor het gemak $a = 3$, dus voor de kromme met vergelijking $x^3 + y^3 = 3xy$.
Uit die vergelijking volgt onmiddellijk de symmetrie van de kromme ten opzichte van de lijn $x = y$.
Wat opvalt in de figuur is, dat er geen punten van de kromme in het derde kwadrant liggen. Allicht: als x en y beide negatief zijn is $x^3 + y^3$ dat ook, maar is $3xy$ juist positief. De figuur suggereert een beetje dat de kromme tussen twee grenslijnen ligt die een vergelijking van de vorm $x + y = c$ hebben.
Dit kan met algebra worden opgehelderd. Hiertoe gebruik ik de identiteit:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

Daarmee kan de vergelijking van de kromme worden omgebouwd tot:

$$(x + y)^3 = 3xy(x + y + 1)$$

Voor mogelijke snijpunten van het folium met een lijn $x + y = c$ geldt dan $c^3 = 3xy(c + 1)$ en dus

$$xy = \frac{c^3}{3c+3}$$

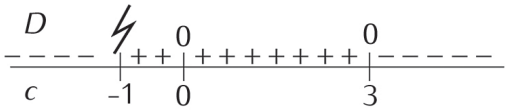
Gevolg: de coördinaten van eventuele snijpunten voldoen aan de vierkantsvergelijking:

$$x^2 - c \cdot x + \frac{c^3}{3c+3} = 0\,.$$

De discriminant D hiervan is:

$$c^2\left(\frac{3-c}{3c+3}\right)$$

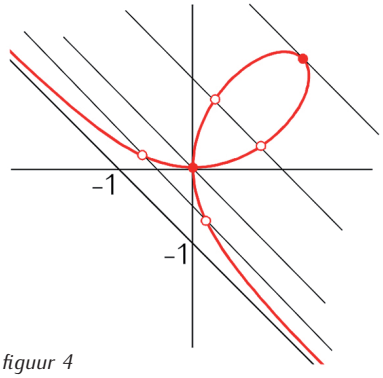
Het 'tekenverloop' van D is:



figuur 3

De conclusies hieruit zijn, zie ook figuur 4:

i. De kromme ligt tussen de beide lijnen $x + y = 3$ en $x + y = -1$.
ii. De lijnen $x + y = 3$ en $x + y = 0$ hebben één punt met de kromme gemeenschappelijk.
iii. De lijnen $x + y = c$ met $0 < c < 3$ en $-1 < c < 0$ hebben twee snijpunten met de kromme.
iv. De lijn $x + y = -1$ zou wel eens een asymptoot van de kromme kunnen zijn.



figuur 4

Leve de parametervoorstelling!

Bij de herziening van het curriculum wiskunde in 1968 werd het analyseprogramma in het toen kersverse vwo flink uitgebreid. Een van de nieuwe onderwerpen was: parametervoorstellingen van krommen. Daar was ik destijds heel verheugd over. Parametervoorstellingen hebben een dynamisch karakter en verbinden op een natuurlijke wijze analyse met kinematica. Veel later toen de grafische rekenmachine zijn intree deed, was ik opnieuw blij vanwege de mode PAR. Ik vind dat we daar in het onderwijs en in de eindexamens te weinig vruchten van hebben geplukt.

Neem het folium van Dürer. Om die te produceren op het scherm van de GRM is er een parametervoorstelling nodig. Hoe die te vinden:
Iedere lijn door O, zeg $y = tx$, snijdt het folium buiten O in één punt, zie figuur 6. Inderdaad:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 3xy \\ y = tx \end{array}\right] \longrightarrow x^3(1 + t^3) = 3tx^2$$

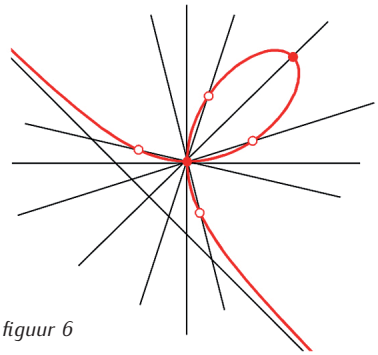
$$\downarrow$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{3t}{1+t^3}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$y = 0 \text{ of } y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

figuur 5



figuur 6

>

Kortom, het folium van Descartes luistert naar de parametervoorstelling:

$$(x,y)=\left(\frac{3t}{1+t^3},\frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

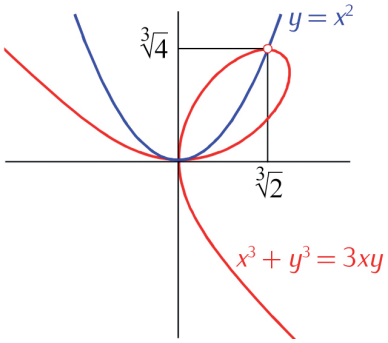
Duidelijk is nu dat de beide coördinaten naderen tot $\pm\infty$ in het geval $t \to -1$.
Dat in dit geval $x + y$ tot -1 nadert volgt dan uit:

$$\frac{3t}{1+t^3}+\frac{3t^2}{1+t^3}=\frac{3t(1+t)}{1+t^3}=\frac{3t}{1-t+t^2}$$

Hiermee is hard gemaakt dat de lijn $x + y = -1$ een asymptoot is van de kromme $x^3 + y^3 = 3xy$.

Verdubbeling van de kubus

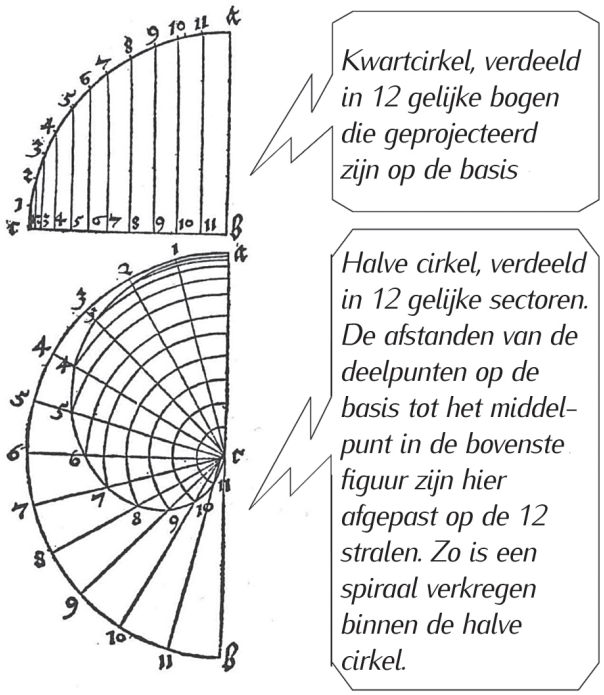
Een van de vermaarde constructieproblemen uit de Griekse wiskunde is de verdubbeling van de kubus. Ik zal de legende van de pestepidemie in Athene rond 430 v.Chr. hier niet o(p)rakelen, maar me beperken tot het daaruit voortvloeiende vraagstuk: *hoe een kubus te construeren met de dubbele inhoud van een gegeven kubus*? Dit komt neer op een constructie van het getal $\sqrt[3]{2}$.
Inmiddels weten we al zo'n 200 jaar dat dit niet lukt via snijpunten van cirkels en rechte lijnen. Via snijpunten met andere krommen lukt dat wel, bijvoorbeeld via de kegelsneden $y = x^2$ en $xy = 2$.
Het voorbeeld in het boek van markies De l'Hôpital leerde mij dat het folium van Descartes samen met een parabool, het snijpunt ($\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$) oplevert, zie figuur 7.



figuur 7

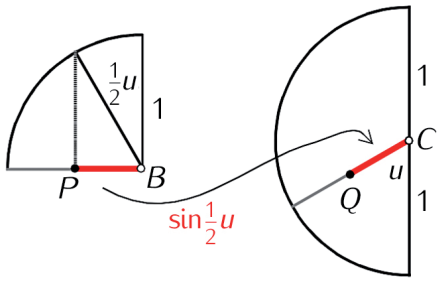
Het folium van Dürer

De beroemde schilder Albrecht Dürer (1471 – 1528) schreef tegen het eind van zijn leven een meetkundeboek voor kunstenaars en kunstliefhebbers: *Underweysung der Messung*. In het eerste deel van dit werk worden diverse kromme lijnen voorgesteld, waaronder (een deel van) de kromme die nu de naam 'folium van Dürer' draagt,[2] zie figuur 8.



figuur 8

In figuur 9 is Dürers constructie vertaald in 'goniotaal' (die toen nog moest worden uitgevonden).



figuur 9

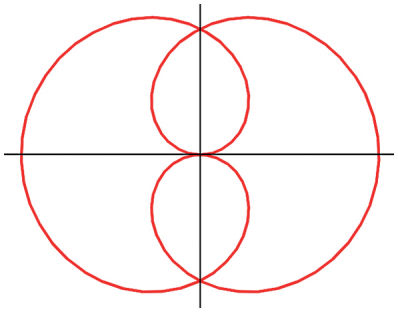
Via deze figuur kan een parametervoorstelling van Dürers kromme worden opgesteld. Bijvoorbeeld:

$$(x,y)=(\sin\tfrac{1}{2}u \cdot -\cos u,\ \sin\tfrac{1}{2}u \cdot \sin u)$$

of na substitutie $u = \pi - t$:

$$(x,y)=(\cos\tfrac{1}{2}t \cdot \cos t,\ \cos\tfrac{1}{2}t \cdot \sin t)$$

Met $0 \le t \le \pi$ levert dit Dürers kromme, maar dan een kwartslag gedraaid, zoals onmiddellijk op een GRM of met GeoGebra kan worden geverifieerd.
Bij uitbreiding van het t - domein tot $[0, 4\pi]$ komt er een symmetrische kromme tevoorschijn, zie figuur 10, die vanwege de twee bladvormige lusjes later de naam 'folium' kreeg.



figuur 10 Het complete Folium van Dürer

De x, y - vergelijking van het folium van Dürer is wel een stukje ingewikkelder dan die van het folium van Descartes. Om haar te vinden bekijk ik eerst een vergelijking in poolcoördinaten: $r = \cos\frac{1}{2}\theta$.
Van hier naar een x, y - vergelijking vraagt ouderwets rekenwerk:

$$r = \cos\tfrac{1}{2}\theta \quad \text{en} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{en}$$

$$2(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^2 - 1 = \cos\theta \;= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\downarrow$$

$$[2(x^2+y^2-1]^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

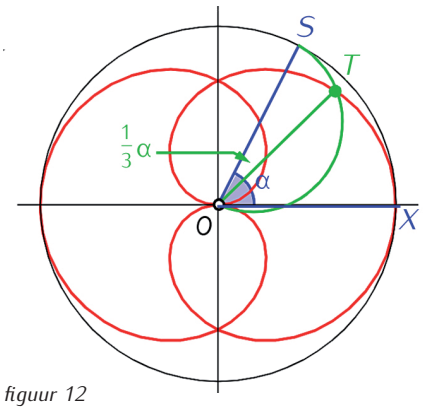
$$\downarrow$$

$$y^2 = 4(x^2+y^2)^2(x^2+y^2-1)$$

figuur 11

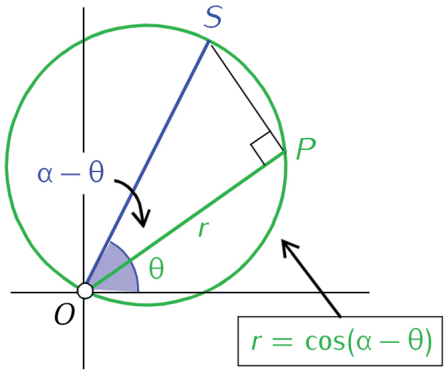
Trisectie van een hoek

Dat het folium van Dürer ook in verband kan worden gebracht met een andere oud-Griekse constructieopgave, namelijk de trisectie van een willekeurige hoek, was voor mij verrassend.
In figuur 12 is het folium met omgeschreven cirkel afgebeeld. Dat de straal van die cirkel gelijk is aan 1 volgt uit de poolvergelijking $r = \cos\frac{1}{2}\theta$. In de figuur is bovendien de hoek XOS ($= \alpha$) getekend. Op het been OS is een halve cirkel opgericht aan de kant van het been OX. Die halve cirkel snijdt het folium in het punt T.
Bewering: *de lijn OT is nu één van de trisectrices van hoek* α. Om dit te bewijzen gebruik ik vergelijkingen in poolcoördinaten van zowel het folium als de halve cirkel. Die van het folium is al genoemd, nu nog die van de cirkel met middellijn OS.



figuur 12

Zie figuur 13. OS heeft de lengte 1. Als $P(r, \theta)$ een willekeurig punt is van de cirkel met middellijn OS, geldt $OP \perp SP$. En omdat $\angle SOP = \alpha - \theta$, weet ik nu dat $r = \cos(\alpha - \theta)$ een poolvergelijikng is van de cirkel met middellijn OS.



figuur 13

Van het snijpunt T van deze cirkel met het folium van Dürer (zie figuur 12) voldoen de poolcoördinaten aan de twee vergelijkingen:

$$r = \cos\tfrac{1}{2}\theta \text{ en } r = \cos(\alpha - \theta).$$

Het is nu een kwestie van θ oplossen uit:

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos(\alpha - \theta).$$

Dit levert op:

$$\theta = \tfrac{2}{3}\alpha.$$

En hiermee is aangetoond dat OT een 'trisectrice' is van hoek α.
Bij mij rijst even de vraag: doen we op school wel wat aan poolcoördinaten, als alternatief voor 'gewone' coördinaten? Dit kan immers heel goed in de onderbouw, terwijl later poolvergelijkingen van krommen ter sprake zouden mogen komen. En is er niet een mode POL op de GRM? >

THE
FUTURE IS HERE

HP Prime

Grafische Rekenmachine

Voordelen van de HP Prime

- Touchscreen; nooit meer gedoe met het instellen van de window
- Supersnelle processor; nooit meer wachten tot een grafiek getekend is
- Ingebouwde handleiding; je kunt direct aan de slag!

En de prijs?
Die is hetzelfde als die van de concurrent!

www.hp-prime.nl

Kennis van krommen

De ondertitel van l'Hôpitals boek uit 1699 luidde: *pour l'intelligence des lignes courbes*, ofwel 'voor de kennis van krommen'. Het begrip 'kromme' definieert l'Hôpital (in navolging van Bernoulli) als 'een oneindige verzameling van oneindig kleine lijnstukken'. Zo praat je in de wiskunde dus 'recht wat krom is'. Maar serieus: de lezer zal toch toegeven dat het in ons wiskundeonderwijs niet veel zaaks is met de kennis van kromme lijnen. Er is wel (te?) veel aandacht voor de parabool, maar dan niet voor de meetkundige aspecten en de toepassingen daarbij, denk aan 'focusserende spiegel' en 'kogelbaan'.

Van tijd tot tijd komen ook de andere kegelsneden aan de beurt in het curriculum, maar dat was en is nooit van al te lange duur. En er zijn zoveel meer interessante krommen die met een modern hulpmiddel als *GeoGebra* op school zouden kunnen worden bestudeerd en die het wiskundeonderwijs zouden kunnen verrijken.[3] Ik citeer uit een lijstje van aanbevelingen door een vakontwikkelgroep wiskunde uit 1995:

— *archimedische en logaritmische spiraal,*
— *astroïde, cycloïde en trochoïde,*
— *cardioïde en slaklijnen,*
— *figuren van Lissajous.*[4]

Het is er toen niet van gekomen. Wél is er nu een mooi zebraboek (auteurs Jan Aarts en Swier Garst) waarin een aantal van deze krommen met gebruik van *GeoGebra* worden behandeld.[5]

Tot slot wil ik nog eens een lans breken (in infinitesimale stukjes) voor meer mooie krommen op school!

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld: Bradley, R.E., Salvatore J., Petrilli, C., Sandifer, E. (2015). *L'Hôpital's Analyse des Infiniments petits, an annotated translation with sources material by Johann Bernouilli*, Science Networks, Historical Studies, volume 50. Bazel: Birkhäuser.

[2] Zie ook Kindt, M. (2018). *De meetkunst van Albrecht Dürer*, Zebra 55. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

[3] Een rijke bron is: Lockwood, E.H. (1961). *A book of curves.* Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Dit was opgenomen in het advies examenprogramma's havo/vwo van de Stuurgroep Profiel Tweede Fase als onderdeel van het domein Periodieke Bewegingen waarbij een dynamische behandeling van krommen in parametervoorstelling werd aanbevolen.

[5] Aarts, J. en Garst, S. (2017). *Een verkenning van krommen (nu met GeoGebra)*, Zebra 49. Amsterdam: Epsilon uitgaven.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

WiTje: De getallen op het dartbord

Ruud Stolwijk

Wiskunde in teams

Waarom is het dartbord zoals het is?
De volgorde van de getallen is bedacht door Brian Gamlin in 1896.

Gamlin wilde 'missers' zoveel mogelijk benadelen, vandaar dat naast een hoge waarde (bijvoorbeeld 20) steeds twee lage waarden (in dit geval 5 en 1) zitten. De 'buurverschillen' zijn steeds zo groot mogelijk. Bij het perfecte bord volgens dit criterium is de som van alle buurverschillen maximaal. Het Gamlinbord is een 198-bord (dat is dus een bord waarbij de som van alle buurverschillen 198 is). Het Gamlinbord is daarmee een *bijna* perfect bord, volgens dit criterium: het maximum is dus *niet* 198.

opdracht 1
Onderzoek wat het maximum voor de som van de buurverschillen is.

opdracht 2
Niet aardig van die Gamlin om missers zoveel mogelijk af te straffen. Ontwerp daarom een bord waarin de som van alle buurverschillen minimaal is en leg uit hoe je dit gevonden hebt.

Bron: Alympiade finale 2006
zie *http://www.fisme.science.uu.nl/alympiade/nl/opgaven/opgaven2005-2006/2005-2006finale.pdf*

Dédé de Haan

Vijf vragen aan...

In de rubriek Vijf vragen aan ... leren we docenten wiskunde beter kennen. Deze keer vijf vragen aan Dédé de Haan, lerarenopleider met als passie vakdidactiek en de geschiedenis van de wiskunde.

1 Wie heeft of hebben de meeste invloed gehad op jouw keuze van een loopbaan in het wiskundeonderwijs?

Dat zijn Sieb Kemme en Jan van Maanen, bij wie ik ben afgestudeerd in Groningen (RuG), in de afstudeerrichtingen Educatief Ontwerp en Geschiedenis van de wiskunde. Ik studeerde wiskunde, 'omdat ik daar alle kanten mee op zou kunnen'. Toch viel de studie me tegen, omdat ik het niet afwisselend genoeg vond. Het was alleen maar wiskunde. Beetje naïef, wellicht, haha. Tot ik het vak geschiedenis van de wiskunde kreeg, van Jan van Maanen. We hebben toen met een aantal studenten onder leiding van Jan een boek geschreven: *Johann Bernoulli, een complexe grootheid*. Johann Bernoulli heeft namelijk tien jaar van z'n leven in Groningen gewoond en gewerkt. Het boek is nog steeds verkrijgbaar bij Epsilon. Voor dat boek heb ik in de Universiteitsbibliotheek allemaal originele brieven van Johann Bernoulli gelezen, smullen was dat! Door de geschiedenis werd mijn blik op wat wiskunde is breder en begon ik het weer boeiend te vinden.

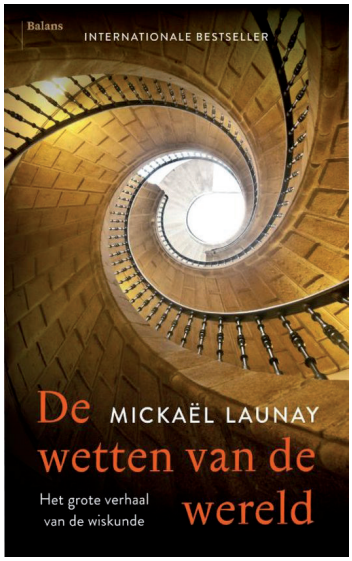
Jakob en Johann Bernoulli

Het werd toen ook logisch om de onderwijskant op te gaan: de ontwikkeling van de wiskunde in de geschiedenis zegt zo veel over hoe wij zelf wiskunde leren... Voor mijn afstuderen heb ik lespakketjes gemaakt over logaritmen, gebaseerd op de ontstaansgeschiedenis ervan.

> "In de Universiteitsbibliotheek heb ik allemaal originele brieven van Johann Bernoulli gelezen, smullen was dat!"

Vrij snel nadat ik ging lesgeven kwam ik bij het Freudenthal Instituut terecht, en van alle ontzettend creatieve en ervaren collega's daar, zoals Martin Kindt, heb ik erg veel geleerd over het ontwerpen van wiskundeonderwijs. Ook daar werd mijn perspectief op 'wat wiskunde is' weer verder verbreed, doordat ik betrokken raakte bij de Wiskunde A-lympiade, de opdracht voor teams van leerlingen in 5/6 havo/vwo waarbij een beroep wordt gedaan op hogere denkvaardigheden, en niet zozeer op procedureel rekenen. Aannames doen, representaties kiezen, redeneren, modelleren, probleem oplossen, generaliseren, gezond verstand gebruiken... Dat is wat wiskunde voor mij is, het is op een bepaalde manier naar de wereld kijken.

Overal waar ik werk probeer ik dat uit te dragen, of dat nu op Curaçao is, of als lerarenopleider in de Filippijnen, Utrecht, Leeuwarden of Groningen.



2 Welk verhalend boek over wiskunde zou jij je collega's aanraden te lezen?

Momenteel lees ik *De Wetten van de wereld*, van Mickael Launay. Een aanrader, hij beschrijft de geschiedenis van de wiskunde zeer leesbaar, met een enthousiasme zoals Marcus du Sautoy toont op de dvd *The story of maths*. Een andere roman waaraan ik bij deze vraag moet denken is *Het meten van de wereld,* van Daniel Kehlmann, over tijdgenoten Alexander von Humboldt en Carl Friedrich Gauss, die beiden de wereld meten – de een fysiek, en de ander alleen met z'n hoofd. Echt prachtig geschreven!

3 Welke stelling heeft voor jou schoonheid en verrassing?

$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

Pas toen ik zelf het lespakketje maakte over Napier, de Schotse baron die de logaritme bedacht, kwam ik erachter waarom hij hem eigenlijk had bedacht, namelijk om van een (lastige) grote vermenigvuldiging een (gemakkelijke) optelling te maken! Als je wilt weten hoeveel $a \cdot b$ is, dan zoek je in de tabel op wat de log van a is, je zoekt op wat de log van b is, die tel je bij elkaar op, en je zoekt aan de 'log-kant' van de tabel die som op. Kijk je vervolgens wat voor getal daarbij hoort en je hebt het product $a \cdot b$ gevonden. Briljant!

4 Welk kunstwerk moet volgens jou door elke wiskundeleraar gezien worden?

De cable-table van Willem Scholtens. Hij staat in Boymans van Beuningen, en ik heb hem zelf ook! Er is in 1993 (havo wiskunde B 1993_I) een examenopgave over gemaakt, en hij is echt ontzettend knap gemaakt.

Het principe waarop de structuur berust heet 'tensegrity'. Dat is een samentrekking van 'tension' en 'structural integrity'. Het verwijst naar de integriteit van structuren gebaseerd op een evenwicht tussen trek- en drukbelastingen. De trekkrachten worden opgevangen in flexibele staalkabels.

En ik vind de Prentententoonstelling van Escher ook intrigerend, maar dat komt ook omdat ik dol ben op het Droste-effect.

5 Welk advies geef jij je collega's?

Probeer erachter te komen hoe je leerlingen denken! Vraag het aan ze en bouw vanuit daar door. (Mijn zoon is wat dat betreft voor mij een erg leerzaam 'project').

En ook: Kijk om je heen en probeer de wiskunde te zien – in de symmetrie, in het perspectief, in de getallen, en krijg zo grip op de wereld om je heen. Een mooi initiatief dat daarbij kan helpen zijn foto's van situaties in de huiselijke omgeving waarnaar je met een wiskundige bril kunt kijken - te vinden via een hashtag gestart door Geeke Bruin-Muurling: #huistuinenkeukenwiskunde.

Over de auteur

Dédé de Haan werkt sinds 1993 bij het Freudenthal Instituut. Sinds 2001 werkt ze daarnaast als lerarenopleider wiskunde: van 2001-2003 in Cebu City, Filippijnen; van 2003-2012 aan de Hogeschool Utrecht en sinds 2013 aan NHLStenden Hogeschool in Leeuwarden en Groningen.

Dick Klingens

De Stelling van Stewart

Vergeten stellingen, daar zou je de stelling van Stewart onder kunnen rekenen. Aan de hand van drie opdrachten (uitdaging: probeer ze eerst zelf...) laat Dick Klingens de charme van de stelling van Stewart zien.

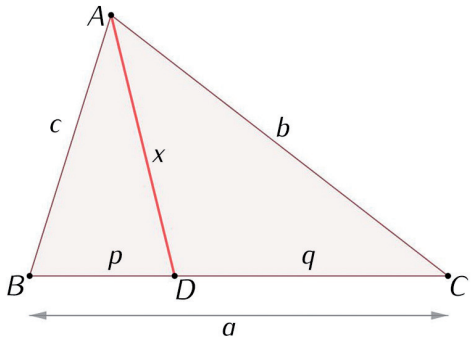
Drie opdrachten

PROPOSITION II.

In the right line AB *take any point* C *between the points* A, B; *and from the points* A, B, C *let there be drawn right lines to any point* D; *the ſquare of* AD *together with the ſpace to which the ſquare of* BD *has the ſame ratio that* BC *has to* CA, *will be equal to the rectangle* BAC *together with the ſpace to which the ſquare of* CD *has the ſame ratio that* BC *has to* BA.

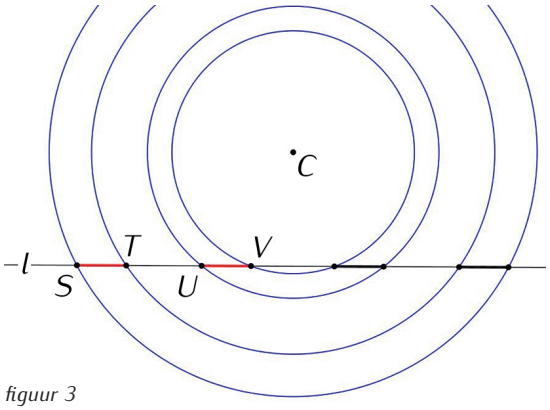
figuur 1

Opdracht 1 Geef in een formule weer wat in de tekst van figuur 1 staat.[1]



figuur 2

Opdracht 2 Zie figuur 2, waarin de namen van de punten afwijkend zijn van die welke beschreven zijn in figuur 1. Op de zijde BC van driehoek ABC ligt het (willekeurige) punt D. Druk het kwadraat van de lengte x van het lijnstuk AD uit in de lengtes a, b, c van de zijden van de driehoek en de lengtes p, q van opvolgend BD, CD.

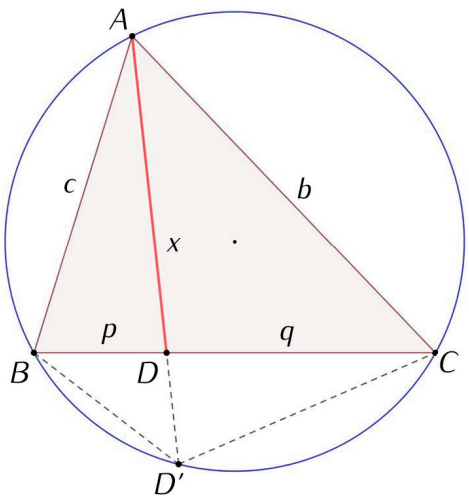


figuur 3

Opdracht 3 Gegeven zijn vier concentrische cirkels met middelpunt C. Construeer een rechte lijn l die de cirkels opvolgend zo in de punten S, T, U, V snijdt dat $ST = UV$, zie figuur 3.

De tekst in figuur 1 staat op bladzijde 2 en 3 van het boek *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics* dat in 1746 verscheen van de hand van de Schotse wiskundige Matthew Stewart (1717-1785).
Het antwoord op opdracht 2 is tevens het bewijs van de propositie in figuur 1: *de stelling van Stewart*. En opdracht 3 heeft natuurlijk met (een gevolg van) die stelling te maken (zie de paragraaf '"Stewart" in een vierhoek').
Of en hoe de opdrachten door elke individuele lezer zullen zijn uitgevoerd, is natuurlijk niet te voorspellen, maar zeker is dat er tenminste twee redelijk elementaire

bewijzen van de stelling bestaan: een bewijs gebaseerd op de stelling van Pythagoras (herhaald toegepast) en een bewijs dat gebruik maakt van de cosinusregel in bijvoorbeeld de driehoeken *ABD* en *ABC* in figuur 2; zie hiervoor paragraaf 2 in de appendix.
Ik vermoed dat er weinig lezers zijn die voor het bewijs gedacht hebben aan de stelling van Ptolemaeus: *Is een vierhoek ingeschreven in een cirkel, dan is de som van de producten van de paren overliggende zijden gelijk aan het product van de diagonalen.*[2]



figuur 4

In figuur 4 is *ABD'C* een koordenvierhoek. *D* is hier het snijpunt van de diagonalen *AD'* en *BC*. Volgens de stelling van Ptolemaeus is dan in die vierhoek:
$AC \cdot BD' + AB \cdot CD' = BC \cdot AD'$ (1)

Op grond van de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken *BD'D* en *ACD* is:
$BD' : AC = BD : AD$ en $D'D : CD = BD : AD$
zodat: $BD' = bp / x$ en $DD' = pq / x$.
En uit de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken *CD'D* en *ABD* blijkt:
$CD' : AB = CD : AD$ zodat: $CD' = cq / x$.
Relatie (1) gaat nu door substitutie van *BD'*, *DD'*, *CD'* over in:

$$b\cdot\frac{bp}{x}+c\cdot\frac{cq}{x}=a\left(x+\frac{pq}{x}\right) \qquad (2)$$

Worden het linker- en rechterlid van (2) vermenigvuldigd met *x*, dan is: $b^2p + c^2q = x^2a + apq$.
Na rangschikking geeft dit de (min of meer) gebruikelijke *formule van Stewart* [3]:
$x^2a = b^2p + c^2q - apq$ (3)

Twee zijden tot de *n*-de macht

De ligging van het punt *D* op het lijnstuk *BC* kan ook afhankelijk zijn van de lengtes van de zijden *AB* en *AC* van de driehoek. Als bijvoorbeeld $BD : CD = c^n : b^n$ is, met gehele $n \geq 0$, dan is:

$$BD=p=\frac{c^n}{b^n+c^n}\cdot a \text{ en } CD=q=\frac{b^n}{b^n+c^n}\cdot a \qquad (4)$$

Formule (3) geeft dan door toepassing van (4):

$$x^2=\frac{1}{a}\left(\frac{c^n}{b^n+c^n}\cdot ab^2+\frac{b^n}{b^n+c^n}\cdot ac^2\right)-pq=$$
$$\frac{b^2c^n+b^nc^2}{b^n+c^n}-pq=\frac{b^nc^n}{b^n+c^n}(b^{2-n}+c^{2-n})-pq \qquad (5)$$

Met formule (5) kan dan voor $n = 0, 1, 2$ de lengte van $x^2 = AD^2$ worden berekend.

n = 0

In dit geval is $BD : CD = c^0 : d^0 = 1 : 1$. Dan is het punt *D* het midden van de zijde *BC* en is *AD* de *A*-zwaartelijn (de zwaartelijn door het hoekpunt *A*) met lengte z_a van de driehoek, zodat:
$z_a^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2$ (dit is de zwaartelijnformule) (6)

Opmerking. Uit (6) volgt een mooie relatie tussen de lengtes van de zwaartelijnen en de zijden:

$$z_a^2+z_b^2+z_c^2=$$
$$(\tfrac{1}{2}(b^2+c^2)-\tfrac{1}{4}a^2)+(\tfrac{1}{2}(c^2+a^2)-\tfrac{1}{4}b^2)+(\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\tfrac{1}{4}c^2)=$$
$$\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

n = 1

Nu is $BD : CD = c : b$. Het lijnstuk *AD* is dan de *A*-bissectrice met lengte d_a van de driehoek. Zodat:
$d_a^2=bc-pq$ (dit is de bissectriceformule). (7)

Opmerking. Omdat *p* en *q* met de relaties (4) ook uit te drukken zijn in *a*, *b* en *c*, is relatie (7) als volgt te schrijven:

$$d_a^2=bc-\frac{ca}{b+c}\cdot\frac{ba}{b+c}=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

n = 2

Niet zo bekend is dat als $BD : CD = c^2 : b^2$ is, het punt *D* het snijpunt is van de *A*-symmediaan van de driehoek (met lengte m_a) met de zijde *BC*. Een symmediaan van een driehoek is het spiegelbeeld van een zwaartelijn in de bissectrice die door hetzelfde hoekpunt gaat als die zwaartelijn. >

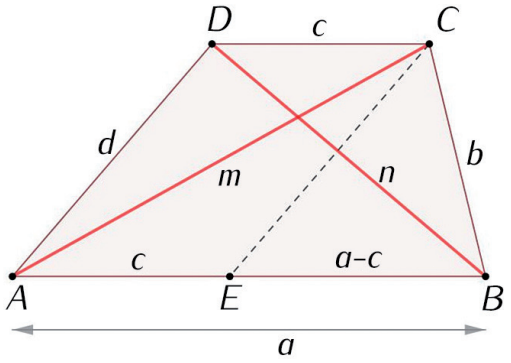
Met relatie (5) is in dit geval:

$$m_a^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}(1+1) - \frac{ac^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{ab^2}{b^2+c^2} =$$
$$\frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}(2b^2+2c^2-a^2) \qquad (8)$$

Met $n = 3, 4, \ldots$ zijn er natuurlijk ook lijnstukken AD waarvan met relatie (5) de lengte kan worden berekend. Maar daarvan zijn volgens mij geen toepassingen bekend. Zie verder ook de paragrafen 3 en 4 in de appendix.

'Stewart' in een vierhoek

Ik behandel nu een toepassing van de formule van Stewart in een trapezium. In figuur 5 is $ABCD$ een trapezium (AB // CD)[4] waarbij voor de lengtes van de zijden geldt: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$
De lengtes van de diagonalen AC, BD zijn m, n.
Verder is CE // AD, waardoor $CE = d$.



figuur 5

In driehoek ABC is dan volgens de stelling van Stewart:
$CE^2{\cdot}AB = CA^2{\cdot}BE + CB^2{\cdot}AE - AB{\cdot}BE{\cdot}CE \Rightarrow$
$d^2a = m^2(a-c) + b^2c - ac(a-c)$

Zodat: $m^2 = ac + \frac{ad^2 - cb^2}{a-c}$.

Analoog is (in driehoek ABD): $n^2 = ac + \frac{ab^2 - cd^2}{a-c}$
Dit resulteert in:
$m^2 + n^2 = b^2 + d^2 + 2ac \qquad (9)$

En verder is ook:

$$m^2 - n^2 = \frac{ad^2 - cb^2 - ab^2 + cd^2}{a-c} = \frac{a(d^2-b^2)+c(d^2-b^2)}{a-c}$$

Dit leidt tot:

$$\frac{m^2-n^2}{d^2-b^2} = \frac{a+c}{a-c} \qquad (10)$$

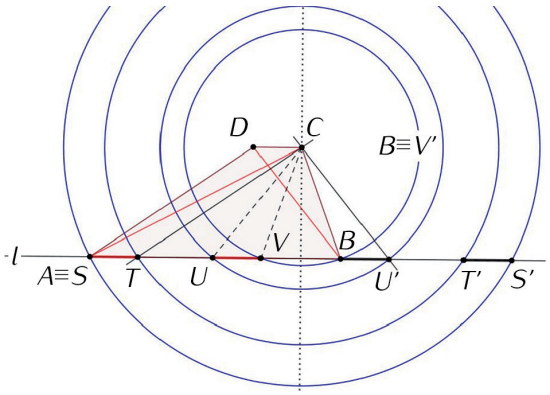
De relaties (9) en (10) maken het mogelijk bij gegeven lengtes van de niet-evenwijdige zijden (b, d) en die van de diagonalen (m, n) de lengtes van de evenwijdige zijden (a, c) van het trapezium te berekenen c.q. die zijden van het trapezium *met passer en liniaal* te construeren (dit laatste is echter niet eenvoudig).
Zijn a en c eenmaal bekend, dan is de constructie van het trapezium redelijk elementair. Een beschrijving van zo'n constructie, waarbij geen gebruik meer hoeft te worden gemaakt van b en d, is opgenomen in paragraaf 5.1 van de appendix.

Opmerkingen

1 Is vierhoek $ABCD$ een parallellogram, dan is $a = c$ (en uiteraard is ook $b = d$). Relatie (9) kan dan geschreven worden als: $m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
2 Relatie (9) kan ook worden bewezen door de stelling van Pythagoras herhaald toe te passen. Zie voor een bewijs daarvan paragraaf 5.2 van de appendix.

Over opdracht 3

In de tekst direct na opdracht 3 staat een hint naar de stelling van Stewart en naar de vorige paragraaf. Heeft die opdracht dan iets te maken met een trapezium? Ik denk dat een korte toelichting bij een plaatje hier meer zegt dan veel woorden.
Als gegeven is dat ST gelijk is aan UV, dan zijn er vanwege de symmetrie nog twee lijnstukken die daaraan gelijk zijn. In figuur 6 zijn dat de lijnstukken BU' (met $B \equiv V'$) en $T'S'$ (die lijnstukken staan in ook figuur 3).



figuur 6

De lijnstukken CS, CT, CU, CV zijn dus de stralen van de cirkels. En deze stralen kunnen gebruikt worden voor de constructie van het trapezium $ABCD$ (met $A \equiv S$), waarvan dus, via die concentrische cirkels, gegeven zijn:

— de niet-evenwijdige zijden: $AD = CT$ en $BC = CV$;
— de diagonalen: $AC = CS$ en $BD = CU' = CU$.

En in de vorige paragraaf is aangetoond dat een dergelijk trapezium (met passer en liniaal) construeerbaar is.

Vroeger

In een eerdere aflevering van *Euclides* schreef U.H. van Wijk (in Weltevreden, Batavia) ook over de stelling van Stewart.[5] Hij leidde daarbij een 'nieuwe gedaante' van de formule af, en wel in het bijzonder de toepassing daarvan in een vierhoek en in een viervlak, namelijk (ook geldig in de figuren 2 en 4):

$x^2a^2 = b^2p^2 + c^2q^2 + 2bcpq\cdot\cos(A)$

Vergelijk deze formule met formule (3). Een citaat uit dat artikel: 'Men zal misschien tegen dezen vorm van de stelling van STEWART aanvoeren, dat hij niet voor behandeling in een tweede klasse van een middelbare school in aanmerking kan komen, omdat er kennis van goniometrische verhoudingen (ook in 't 2de kwadrant!) voor geëischt wordt.'

In de appendix bij dit artikel wordt nader ingegaan op enkele items en staat een extra opgave.

vakbladeuclides.nl/956klingens

Noten

[1] Een (bijna letterlijke) vertaling: Neem op de rechte lijn AB een willekeurig punt C tussen A en B; en laten er door A, B, C rechte lijnen zijn getrokken naar een willekeurig punt D. Dan is het vierkant op AD samen met de oppervlakte waarvan het vierkant op BD dezelfde verhouding heeft als BC heeft tot CA gelijk aan de rechthoek BAC samen met de oppervlakte waarvan het vierkant op CD dezelfde verhouding heeft als BC heeft tot BA.

[2] Voor een bewijs zie bijvoorbeeld: Dick Klingens (1999): *De stelling van Ptolemaeus en de sinusregel*. Op (de website van de auteur): *http://www.pandd.demon.nl/sinregel.htm*

[3] Ikzelf heb de formule(s) van Stewart moeten leren aan het einde van de tweede klas van het voortgezet onderwijs (dat was in 1959), uit het boek: Neut, D.N. van der & Holwerda, A. (1956). *Meetkunde met de beginselen der goniometrie. Deel 2* (9e druk). Groningen: J.B. Wolters, p. 77.
En daarbij stond ook een afleiding van de formule als het punt D op het verlengde van AB ligt. Erna stond: 'Een dergelijke betrekking kan men afleiden, als D een punt is op het verlengde van BA. Ga dit na.' Want, inderdaad, er zijn eigenlijk drie *verschillende* formules van Stewart.

[4] Voor mij is een trapezium een vierhoek met *ten minste* twee evenwijdige zijden. Zo'n vierhoek zou dus ook een parallellogram kunnen zijn.

[5] Wijk, U.H. van (1929). De Stelling van Stewart. *Euclides, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken*, *6*(2), pp. 65-68. Zie: *https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/006_1929-30_02.pdf*

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018). E-mailadres: *dklingens@gmail.com* website: *http://www.pandd.nl*

Vastgeroest 24/7

Ab van der Roest

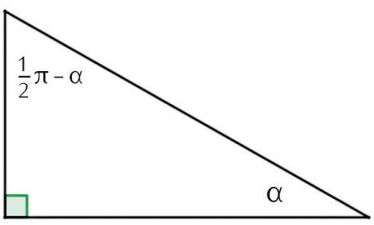
De titel is geen sommetje uit het rekendeel, maar een gedachte die bij mij opkwam, toen ik midden in de nacht, rond 2.30 uur wakker werd. Leraar ben je altijd, 24 uur per dag en 7 dagen in de week, en niet alleen tussen 8.00 en 17.00 uur. Overigens was het geen negatieve gedachte, want ik kreeg hem na een soort van aha-erlebnis.

> "Dus geen regels leren, maar plaatjes leren."

In vwo-5 ben ik bezig met goniometrie. Veel leerlingen vinden het een lastig onderwerp door de veelheid aan regels die ze moeten leren. Ik probeer hen duidelijk te maken dat ze geen regels hoeven te leren, maar dat ze schetsjes moeten tekenen en goed moeten kijken. Ik teken dus voortdurend eenheidscirkels op het bord en laat dan bijvoorbeeld zien dat $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$. Dus geen regels leren, maar plaatjes leren. Exacte waardes met behulp van de tekendriehoeken en daarnaast de eenheidscirkel.
Bij de toetsen merk ik dat de meeste leerlingen toch alleen maar de regels leren. Ze vinden dat makkelijker en het staat ook nadrukkelijk in het boek: 'Leer deze formules uit je hoofd!' Het lijkt wel of het boek meer gezag heeft dan ik.
Maar onze methode kent in ieder geval één situatie waarbij het leren van de regels echt lastiger is:

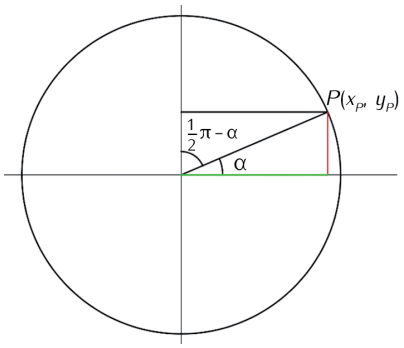
$\sin(\alpha)=\cos(\alpha-\frac{1}{2}\pi)$ en $\cos(\alpha)=\sin(\alpha+\frac{1}{2}\pi)$.

Een keer + en een keer –, dat vraagt om verwarring.
Op de toets worden hier veel fouten mee gemaakt. Deze fouten vind ik, met mijn plaatjes kijken onnodig. Kijk maar in een rechthoekige driehoek, zie figuur 1.



figuur 1

Je ziet nu onmiddellijk dat $\sin(\alpha)=\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$ en $\cos(\alpha)=\sin(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$. Nu geen lastig plus- of minteken. Toch pakken de leerlingen het niet. Misschien omdat ze er weer een extra tekening bij moeten onthouden. Hoe kan ik het aanpakken? Ik kwam er niet uit tot ik midden in de nacht wakker werd. Het kan ook gewoon met de eenheidscirkel, was mijn gedachte. Pratend met een collega over mijn vondst heb ik mijn uitleg iets bijgesteld.
Ik teken de eenheidscirkel op de standaardmanier, zie figuur 2.



figuur 2

Daarna teken ik de hoek $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ en je ziet meteen

in de rechthoek dat $\sin(\alpha)=\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$ en

$\cos(\alpha)=\sin(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$.

Oneigenlijk gebruik, want $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ is geen gerichte hoek. Maar ik hoop dat ik dat kan uitleggen.
Vreemd is wel dat zo'n manier van uitleggen midden in de nacht opkomt. Helemaal niet vervelend, maar wel leraar 24/7...

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Olympiadepuzzel 95-6

Snoepjes uitdelen

Birgit van Dalen
Quintijn Puite

PZZL

In deze jaargang vind je in nummers 2, 4, en 6 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Probeer de puzzel eens met je klas!

Een wiskundeleraar heeft een grote zak met 300 snoepjes. Hij wil snoepjes uitdelen aan zijn leerlingen, onder de volgende voorwaarden:

— elke leerling krijgt minstens één snoepje en hoogstens vijftig;
— er zijn geen twee leerlingen die evenveel snoepjes krijgen;
— er zijn geen twee leerlingen die samen een tienvoud aan snoepjes krijgen.

Aan maximaal hoeveel leerlingen kan hij snoepjes uitdelen?

Stuur je oplossingen uiterlijk 5 juni naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel nr. 4

Voor de puzzel *Labyrint* hebben we veertien inzendingen ontvangen. Deze puzzel ging om het bepalen van hoeveel tegeltjes er nodig waren voor het nieuwe doolhof in de Efteling. Zoals de meeste oplossingen lieten zien bestond dit doolhof uit 'L-vormige' groepen van tegeltjes en heggen, waarbij elk opvolgend stuk uit twee extra tegels en vier meter extra heg bestond. Het rechtvaardigen van dit patroon is nog een hele kunst: formeel wiskundig zou je dit bijvoorbeeld met inductie kunnen doen. Maar ook met een duidelijke beschrijving van de groepen en het aantal tegels en heggen bij groep n kun je een volledig bewijs geven. (Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Esther Steenkamer voor het nakijken van de inzendingen.) De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de inzenders die het goede antwoord gevonden hadden.
De cadeaubon van deze editie gaat naar Harm Bakker.

vakbladeuclides.nl/956olympiadepuzzel

Studiedag 2020 over netwerken

Oproep voor bijdragen

Het thema van deze studiedag is netwerken. Netjes werken is belangrijk bij het doen van wiskunde en bij wiskunde leren. Je gedachten op papier zetten, schetsen, een probleemsituatie zo organiseren dat die met wiskundige middelen kan worden opgelost. Activiteiten die om 'net werken' vragen. Hoe stimuleer je dat in je wiskundeles?
Bij dit thema kun je natuurlijk ook denken aan het gelijknamige onderwerp binnen de discrete wiskunde. Een klassiek onderwerp, zie het vraagstuk over de zeven bruggen van Koningsbergen, met vele toepassingen in techniek, sociologie, terrorisme, verspreiding van virussen en informatica. Heeft dat onderwerp, met o.a. grafen, matrices en combinatoriek, wel de plek die het verdient in ons curriculum? Naast mooie lessen rond deze onderwerpen zal die vraag ook ter discussie staan.
Tot slot kun je bij dit thema denken aan het belang van netwerken voor het bijhouden en uitwisselen van kennis en ervaringen met collega's met sociale media, professionele leergemeenschappen en platforms voor onze beroepsgroep. Tijdens de studiedag zullen we zeker netwerken. Laat deze dag weer een inspirerende bijeenkomst worden! Een bijeenkomst voor degenen die al langer meelopen en voor zij die net werken.

Heb je ideeën voor een workshop over dit thema of misschien wel over een heel ander onderwerp?
Dan horen we dat graag! Mail naar Lidy Wesker-Elzinga (*l.wesker@nvvw.nl*), Sharon Calor (*s.calor@nvvw.nl*) of Michiel Doorman (*m.doorman@nvvw.nl*).

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2020

21/08 22/08 28/08 29/08 — AMSTERDAM en EINDHOVEN
Vakantiecursus 'Speltheorie: van strategisch beslissen tot 'eerlijke' oplossingen'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Vr 11/09 — EINDHOVEN
Finale wiskunde olympiade 2019

Za 07/11 — VEENENDAAL
Jaarvergadering / studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskunde-wedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht.
Meer informatie is te vinden op *www.wiskundeolympiade.nl*.

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 95

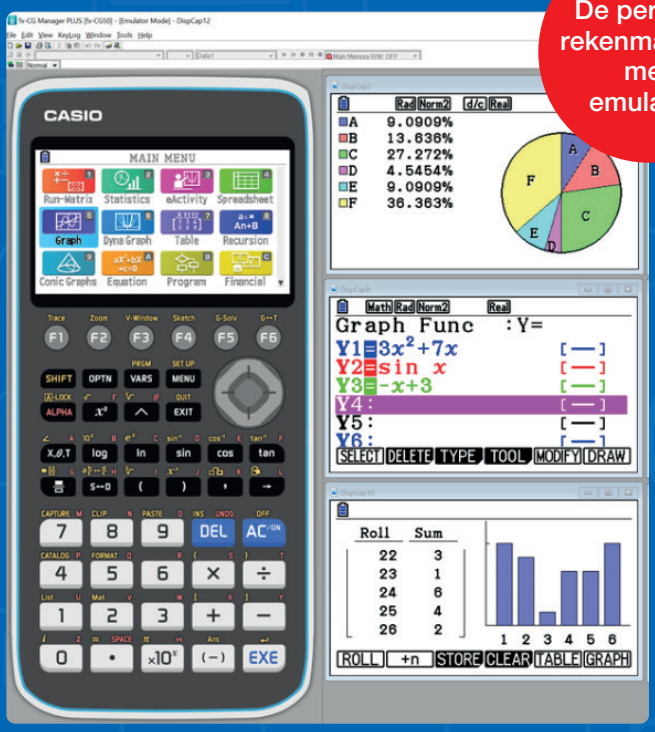
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	23 juni 2020	27 april 2020

CASIO

Op Casio kunt u rekenen

Casio fx-CG50

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken



fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

GETAL & RUIMTE

NIEUW!
Getal & Ruimte 12e editie voor de Tweede Fase

- Optimaal differentiëren met leerroutes in boek en onlineomgeving
- Perfecte mix van boek en digitaal lesmateriaal
- Wiskundig denken van de leerling maximaal stimuleren
- Introductie van de statistische cyclus, met meer aandacht voor de kwalitatieve aspecten van statistiek in wiskunde A
- Oefentoetsen met studieadvies

Vraag gratis beoordelingsmateriaal aan op
getalenruimte.noordhoff.nl/tweedefase

De beste voorbereiding op het examen!

Noordhoff

Brengt je verder