EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Embodied cognition
Je zintuigen gebruiken om wiskunde te begrijpen

In de ban van een ring
Constructies zonder passer, maar met een ring

Praktijkonderzoek
Onderzoeken die leiden tot betere leerprestaties

Mindset en lesmateriaal
Optimaliseer lesmateriaal met het oog op een growth mindset

NR.5

JAARGANG 95 - MAART 2020

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 95 NR5

IN DIT NUMMER

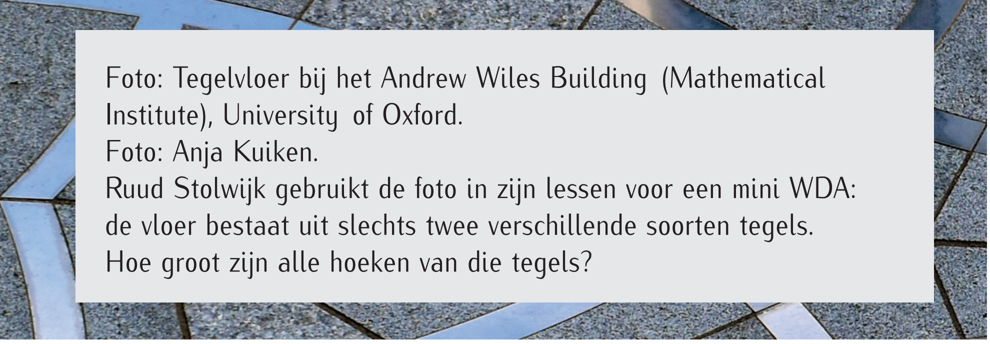


Foto: Tegelvloer bij het Andrew Wiles Building (Mathematical Institute), University of Oxford.
Foto: Anja Kuiken.
Ruud Stolwijk gebruikt de foto in zijn lessen voor een mini WDA: de vloer bestaat uit slechts twee verschillende soorten tegels. Hoe groot zijn alle hoeken van die tegels?

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

Op het moment van schrijven, 6 februari, kijk ik iedere dag op *https://www.worldometers.info/coronavirus/* om de statistieken over de coronaepidemie bij te houden. En met mij, neem ik aan, velen van jullie. Want tot vandaag lijkt het aantal besmettingen angstvallig verdacht veel op een exponentieel verband. Nu kun je op de genoemde site schakelen tussen een lineaire en een logaritmische schaal en gelukkig lijkt de trend bij die logaritmische schaal al een beetje afgevlakt te zijn. Mijn exponentiële model in Excel voorspelt namelijk niet veel goeds: op het moment van verschijnen, nu dus, zou dan 20 procent van de wereldbevolking besmet zijn. Als je de grafiek op de logaritmische schaal modelleert met een logaritmische trendlijn, dan lijkt uiteindelijk het aantal besmettingen niet boven de 200.000 te komen. Maar dan is het wellicht mijn aan naïviteit grenzend optimisme in plaats van wiskundige kennis die het model bepaalt.
Modelleren met actuele data. Vrijwel het enige voordeel dat er bij zo'n uitbraak van een virus te bespeuren valt. En volgens het Platform Wiskunde Nederland doen we dat veel te weinig met onze leerlingen. Bert Zwaneveld en Jacob Perrenet constateerden dat ook al in hun artikel in *Euclides* 92-1. Daarom is er een initiatief gestart om relatief kleine modelleeropdrachten op alle niveaus te verzamelen en beschikbaar te maken voor jullie. Binnenkort meer daarover in de diverse wiskunde nieuwsmedia.
En als het vaccin ontwikkeld is? Dan zal er aanvankelijk niet genoeg zijn en hoe verdeel je die vaccins dan optimaal? Daar kun je al mee aan de slag: de Alympiade voorrondeopdracht van vorig jaar ging daarover. En nee, het openingsartikel van deze *Euclides*, 'Embodied cognition in wiskundeonderwijs' gaat heel ergens anders over. Veel genoegen met nummer 95-5!

Tom Goris

Rosa Alberto, Rogier Bos

Het FIzier gericht op...

Embodied cognition in wiskundeonderwijs

Zou het niet goed zijn leerlingen tijdens de wiskundeles niet alleen actief bezig te laten zijn met hun hersens, maar ook met hun lichaam? Rosa Alberto en Rogier Bos bespreken een embodied lesontwerp voor leren over radialen en de sinus.

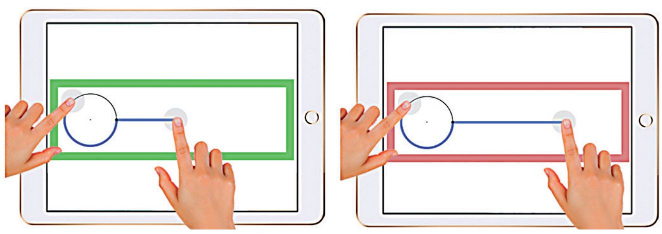
Inleiding

De grondslag voor Rosa's onderzoek vormt de psychologische theorie *embodied cognition*, een term die in het Engels beter klinkt dan in het Nederlands (belichaamde cognitie). Het centrale idee in deze theorie is dat je zintuigen niet alleen doorvoerkanalen naar de hersenen zijn en spieren niet alleen uitvoerders van bevelen; in plaats daarvan vormen ze samen met de hersens het volledige systeem dat cognitie faciliteert. Cognitie kan dus niet los gezien worden van waarnemen en handelen. Wiskundige cognitie gaat over abstracte zaken, bijvoorbeeld radialen en de sinus. Ondanks oprechte inspanningen in het wiskundeonderwijs reduceren veel leerlingen de sinus nog voor het examen tot een knop op hun rekenmachine. Van radialen onthouden ze vaak alleen de omrekenfactor naar graden, maar de relatie met de booglengte langs de eenheidscirkel gaat verloren. In het algemeen hebben leerlingen ook moeite de drie contexten waarin goniometrische functies voorkomen op de middelbare school – driehoeken (veelhoeken), eenheidscirkel en goniometrische functies – met elkaar te integreren. Rosa gaat deze problemen te lijf met een embodied onderwijsontwerp: een les met activiteiten waarin het leren wat de sinus is samenvalt met het leren coördineren van bewegingen en waarnemingen. Hieronder beschrijven we enkele van deze taken en de ervaringen tijdens proeflessen in de klas.

> "Cognitie kun je niet los zien van waarnemen en handelen."

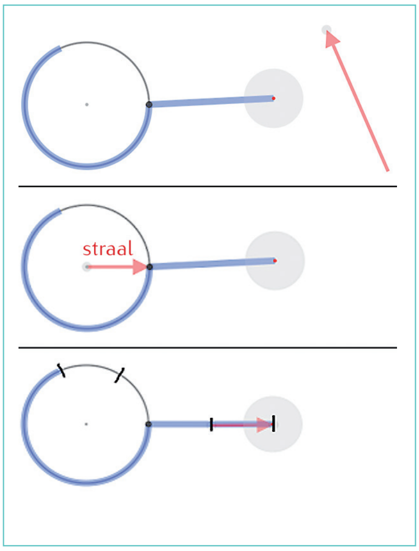
De beweging van radius naar radialen

Radialen vertalen de hoekgrootte naar de lengte van de bijbehorende boog op de eenheidscirkel. Een kromme boog meten is wel even iets anders dan iets rechts meten. De eerste activiteit heeft als doel de cirkelbeweging en de rechte beweging met elkaar in verband te brengen. Op een touchscreen kunnen leerlingen twee uiteinden van een blauwe strook bewegen. De schermrand licht groen op als de strook dezelfde lengte behoudt, en anders rood, zie figuur 1. Dat doel kan worden bereikt als de leerlingen de lengte langs de boog in verband brengen met de rechte lengte. Tijdens de les riep een leerling uit op het moment dat het lukte: 'wat hier eraf is, is net zo lang als wat er daar bijkomt'. Een andere leerling zei: 'ja maar de strook is toch eigenlijk de *x*-as maar dan in een rondje?'. Het coördineren van de handbewegingen en waarnemingen gaat samen met deze wiskundige inzichten.



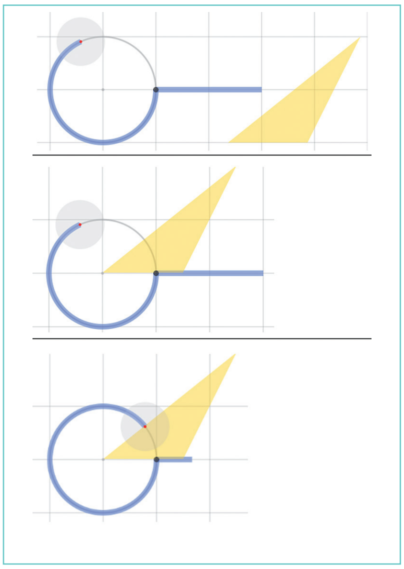
figuur 1 Verband tussen lengte van een boog en van een rechte via een afgerolde strook

De tweede activiteit biedt leerlingen de mogelijkheid in te zien dat de eenheid 'radialen' letterlijk staat voor het aantal keer dat de straal (radius) in de boog past. In deze activiteit ligt de lengte van de strook vast en is gelijk aan de omtrek. De taak is om uit te zoeken hoeveel keer langer de omtrek is dan de straal. De rode pijl, zie figuur 2, kun je zo groot als de straal maken om vervolgens op het rechte stuk één straal af te passen. Daarna gebruik je de verschuiving van de blauwe strook om een radiaal op de cirkel te markeren. Dit herhaalt zich en uiteindelijk ontdekt de leerling dat de hele cirkelomtrek net iets meer dan zes stralen lang is. Veel leerlingen waren teleurgesteld dat het niet precies zes keer paste. Ze kennen de formule voor de omtrek wel, maar herkennen 2π pas als verhouding tussen straal en omtrek na een discussie met de docent.



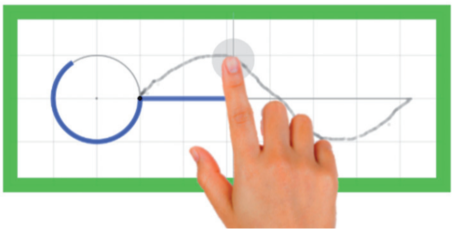
figuur 2 Het afmeten van radialen met behulp van de radius

De derde activiteit ontlokt inzicht in het verband tussen hoekmeting in een driehoek en radialen op de cirkel. Hopelijk wordt zelfs duidelijk waarom we een boogje in een hoek zetten. Inmiddels is er een rooster zichtbaar waarbij de afstand tussen de lijnen gelijk is aan één straal. De leerling schuift een hoek van de driehoek naar het midden van de cirkel en legt een zijde langs de horizontale roosterlijn. Vervolgens rolt de leerling de strook af zodat deze de driehoek omsluit. De hoekgrootte is vervolgens horizontaal af te lezen, zie figuur 3.



figuur 3 De hoek wordt gemeten door het rollen van de strook

In de vierde activiteit rol je de blauwe strook af door met de hand naar rechts te bewegen. Het doel is om de hand op dezelfde hoogte te houden als het linker uiteinde van de strook. Als dit lukt kleurt de schermrand groen en blijft er een stip achter onder je vinger. Bij voldoende stippen ziet de leerling een grafiek ontstaan, zie figuur 4.
We nodigen de lezer uit om te beredeneren dat dit de sinuskromme is. Op deze manier heeft de leerling al een bewegings- en visuele ervaring met betrekking tot de sinus, nog voordat deze formeel in de eenheidscirkel gedefinieerd is. Deze ervaringen kunnen daar dan juist de basis voor vormen.



figuur 4 De sinusgrafiek ontstaat door twee handbewegingen zorgvuldig te coördineren

> "De kracht van de digitale omgeving is dat deze directe zintuigelijke feedback geeft op het handelen van de leerling"

Digitale feedback en embodiment

Bij elk van de taken is er een wisselwerking tussen inzicht in de wiskunde en het kunnen uitvoeren van een beweging. Dit is een centraal principe voor lesontwerp gebaseerd op embodied cognition en daarmee een belangrijk thema in Rosa's onderzoek. Een ander belangrijk thema is het gebruik van technologie om dit soort leren te bevorderen. De kracht van de digitale omgeving zit hem erin dat deze directe zintuigelijke feedback geeft op het handelen van de leerling. Normaal krijgt de leerling feedback op de uitkomst van een taak en nu op de beweging tijdens de taak. Het groen of rood oplichten van de schermrand moedigt de leerling aan de beweging op doordachte wijze aan te passen.
Met de besproken taken worden alle drie genoemde contexten voor hoeken samengebracht rond de beweging van de blauwe strook. De leerlingen ontdekken de hoekmeting in radialen en de sinusgrafiek als inzichten terwijl bewegingen correct en doordacht worden uitgevoerd. Daarmee vormen die bewegingen concrete en onvergetelijke verankeringen van die concepten in >

verschillende contexten. Het hierboven besproken lesidee is ontworpen door Anna Shvarts, Arthur Bakker, Paul Drijvers en Rosa Alberto in het kader van het project *Digital turn in epistemology* gefinancierd door NWO en Noordhoff Uitgevers in samenwerking met Numworx.

De taken uit dit artikel kun je zelf uitproberen op: *https://embodieddesign.sites.uu.nl/activity/*

Noten

[1] Abrahamson, D. (2009). Embodied design: Constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 22–47. *http://doi.org/10.1007/s 10649-008-9 137-1*

[2] Shvarts, A., Alberto, R., Bakker, A., Doorman M., & Drijvers P., (in press) Embodied instrumentation: Reification of sensorimotor activity into a mathematical artifact. Proceedings of the 14th ICTMT.

Over de auteurs

Rosa Alberto doet promotieonderzoek aan het Freudenthal Instituut. Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut en redacteur voor *Euclides*.

E-mailadressen: *r.a.alberto@uu.nl* en *r.d.bos@uu.nl*

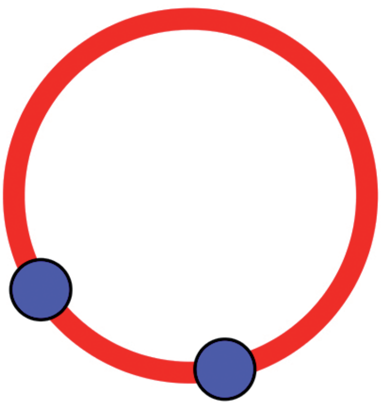
Fred Muijrers

In de ban van een ring

Constructies met passer en liniaal kennen we wel. Soms worden er aan passer of liniaal eigenschappen toegevoegd, de neusis of de vastgeroeste passer. Maar het kan nog spannender: géén passer, maar slechts één ring

Inleiding

In dit verhaal komt geen passer voor. Wel is er één ring beschikbaar. Bij twee gegeven punten kunnen we een cirkel maken door die ring op die twee punten te leggen. Natuurlijk is dat alleen mogelijk als de twee gegeven punten niet te ver uit elkaar liggen, zie figuur 1.



figuur 1

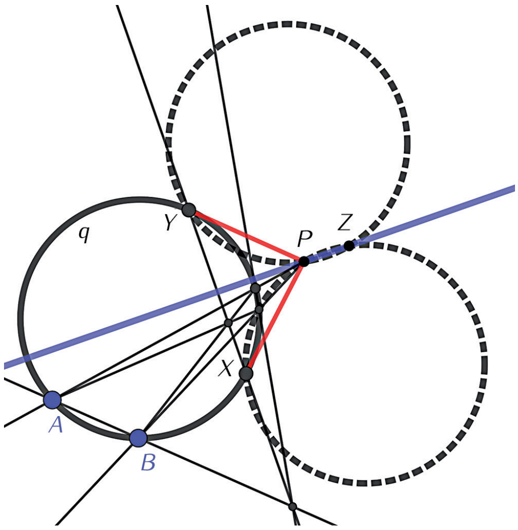
We hebben vanaf nu dus enkel de beschikking over cirkels met één vaste diameter q, maar verder onbekend, en lijnen. Zo'n cirkel noemen we een q-cirkel en die is te maken met één gegeven ring. In deze tekst wordt verstaan onder 'construeren' het gebruik van lijnen en q-cirkels, tenzij anders vermeld. Wat is er mogelijk?

Middelloodlijn als uitdaging

Bij twee gegeven punten en gewoon cirkelgebruik zijn we zo klaar als we een middelloodlijn willen maken. We kunnen de punten als middelpunten van cirkels nemen maar helaas, bij q-cirkels kennen we het middelpunt (nog) niet. Dat wordt een opgave: construeer bij een q-cirkel het middelpunt M.

Daartoe gaan we eerst op zoek naar een middellijn van een q-cirkel. Kies een punt P buiten de cirkel gelegen.

Met enige kennis over poollijnen[1] construeren we met behulp van enkele lijnen de twee raakpunten X en Y bij dat punt P, zie figuur 2.

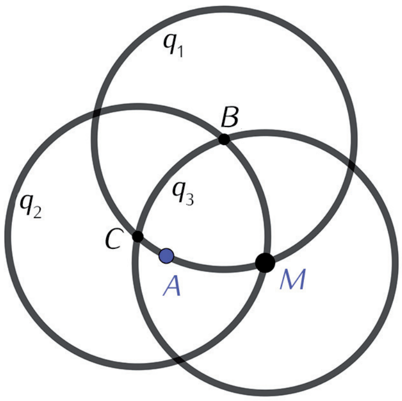


figuur 2

De twee raaklijnstukken PX en PY zijn even lang. De q-cirkels, gestippeld in figuur 2, door P en X respectievelijk P en Y snijden elkaar in P en in een punt Z. Voor deze situatie moet P 'voldoende' dicht bij de startcirkel liggen anders moet met een ander punt begonnen worden. De lijn door P en Z is symmetrielijn in dit verhaal en bijgevolg ook symmetrielijn van de gegeven start-q-cirkel. Die lijn snijdt de start-q-cirkel en we hebben een middellijn gevonden.

Door deze constructie voor een ander punt buiten de q-cirkel te herhalen vinden we nog een middellijn. Het snijpunt van deze twee middellijnen is het middelpunt M. We hebben er dus een constructie bij, die de naam CON2 krijgt: bij een q-cirkel is het middelpunt te construeren. Maar dat is niet genoeg! Nodig is ook een q-cirkel te kunnen construeren waarvan een gegeven punt M het >

middelpunt is. Dat is met CON2 nu niet meer zo moeilijk. Zie figuur 3 waarin hulplijnen en diverse hulp-q-cirkels zijn weggelaten.

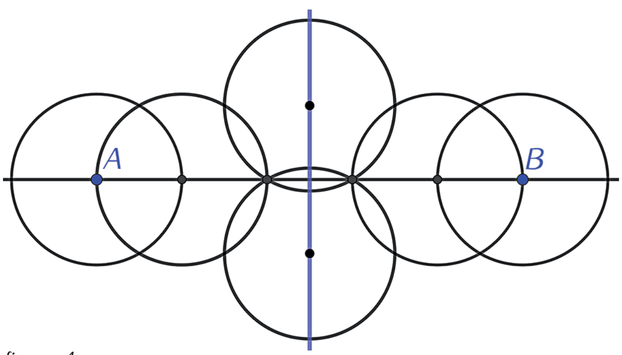


figuur 3

M en een punt A geven met CON2 cirkel q_1 met middelpunt B. B met M geven met CON2 cirkel q_2 met middelpunt C. B met C geven met CON2 cirkel q_3 met middelpunt M, de gevraagde q-cirkel dus. Deze constructie, CON3, geeft dus bij een punt M een q-cirkel met middelpunt M.

En dan nu die middelloodlijn...

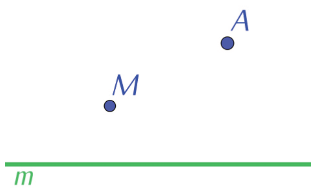
Actie a: Als de punten A en B voldoende dicht bij elkaar liggen, dan is tweemaal CON2 toepassen voldoende: verbind de middelpunten.
Actie b: Als de punten A en B te ver van elkaar liggen, dan construeren we eerst een aantal keer nieuwe punten met behulp van CON3. In figuur 4 was actie b tweemaal nodig en actie a maakte het af. In GeoGebra zijn de constructies in macro's te zetten waardoor tussenstappen niet meer zichtbaar zijn in de figuur.



figuur 4

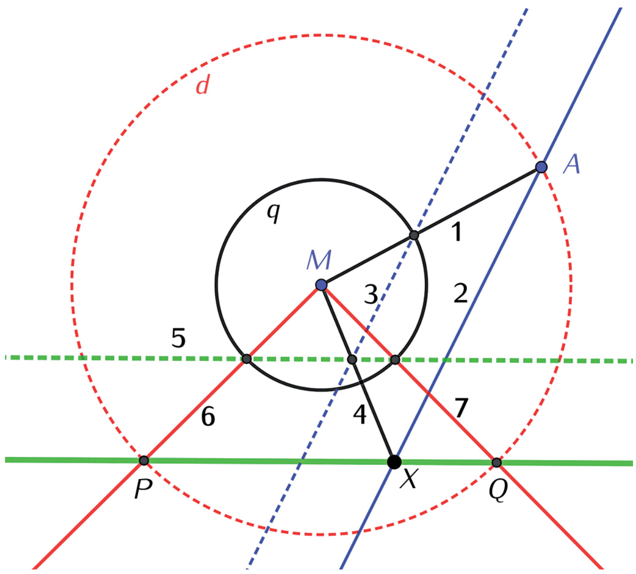
Alles mogelijk?

Een loodlijn oprichten of neerlaten uit een punt, evenwijdige lijnen met behulp van loodlijnen, deellijnen, een hoek van 60 graden, zie figuur 3... het kan allemaal met lijnen en q-cirkels en de daarmee gemaakte constructies CON2 en CON3, zoals de lezer kan nagaan. De vraag rijst: zijn nu alle passer-en-liniaal (p&l-) constructies ook met q-cirkels en lijnen te doen? P&l-constructies betreffen het snijden van twee lijnen (LL), een lijn met een cirkel (LC) en een cirkel met een cirkel (CC). We gaan eerst het geval LC onderzoeken. Gegeven zijn een lijn m en van een cirkel d zijn het middelpunt M en een punt A op d gegeven. De cirkel zelf dus niet en we hebben geen passer! Zie figuur 5. Gevraagd is de snijpunten van de lijn met de cirkel te construeren.



figuur 5

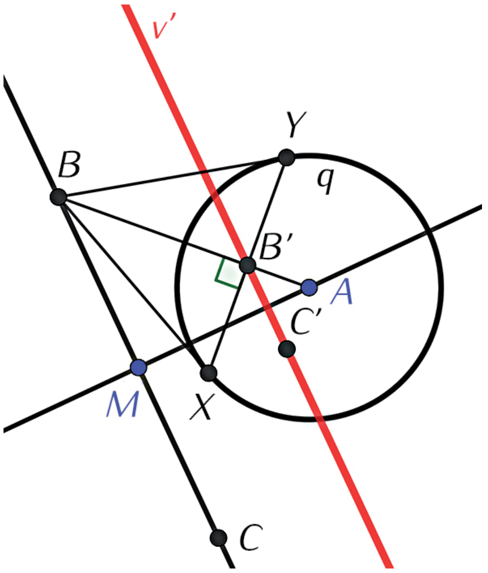
De constructie maakt gebruik van een q-cirkel met middelpunt M. Zie figuur 6. Als A op die cirkel ligt, dan zijn we al klaar. Door middel van evenwijdigheid wordt een constructie gemaakt in de q-cirkel. De gestippelde lijnen zijn evenwijdig aan de getrokken lijnen van dezelfde kleur. De nummers geven de volgorde en de lijnen aan. De snijpunten van lijn 5 met de q-cirkel worden dan weer vermenigvuldigd in M en we krijgen de gevraagde punten op d: P en Q. De cirkel d is ter illustratie erbij getekend maar speelt geen rol in de constructie. De situatie waarbij lijn m door M gaat is eenvoudiger aan te pakken en is aan de lezer.



figuur 6

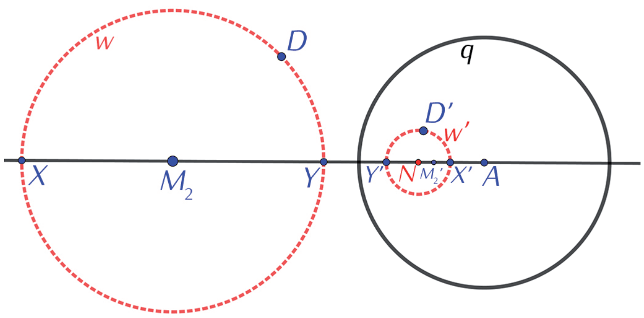
En de snijpunten van een cirkel v met een cirkel w, geval CC? Wie bekend is met inversie[2] weet dat die afbeelding handig is om cirkels op lijnen af te beelden.

Die eigenschap kunnen we nu goed gebruiken. Inversie in een cirkel is te doen met behulp van raaklijnen, zie bij figuur 2, en loodlijnen, dus met q-cirkels. Als cirkel v middelpunt M heeft en door A gaat, kies dan A als middelpunt van een q-cirkel (CON3). Die q-cirkel nemen we als inversiecirkel. Zie figuur 7. B en C zijn de snijpunten van de loodlijn in M met cirkel v, duidelijk een geval *LC*. Inversie van B en C geeft de punten B' en C'. De lijn v' door B' en C' is het inverse beeld van cirkel v.



figuur 7

Cirkel w zal mogelijk niet door A gaan. Verbind het middelpunt M_2 van w met A en construeer de snijpunten X en Y van die lijn met w: weer geval *LC*. Inversie van die snijpunten geeft een middellijn van het inverse beeld van w. Dat beeld is een cirkel w' waarvan we dus twee punten hebben en het middelpunt daarmee kunnen construeren. Let op: het middelpunt van w' (N) is niet het inverse beeld van M_2 (M_2'). Zie figuur 8 voor deze aanpak: denk figuur 7 hier overheen voor het vervolg. De gestippelde cirkels zijn weer ter illustratie toegevoegd en alle tussenstappen zijn niet meer zichtbaar.



figuur 8

Het *CC*-probleem met cirkel v en cirkel w is nu een *LC*-probleem met lijn v' en cirkel w' geworden en verder oplosbaar. De gevonden snijpunten van v' met w' moeten nog wel geïnverteerd worden in de q-cirkel.

Conclusie

Blijkbaar kunnen we elke p&l-constructie ook met q-cirkels en lijnen doen. Details voor bijzondere gevallen zijn voor de lezer. Het onderzoek om de cirkels en lijnen anders te gebruiken is een oude maar nog steeds fascinerende uitdaging. Mohr en Mascheroni[3] onderzochten al constructies waarbij alleen cirkels gebruikt mogen worden. Gebruik van enkel lijnen is minstens zo boeiend en speelt een belangrijke rol in de projectieve meetkunde. Bovenstaande aanpak is een kleine variant op wat Jacob Steiner[4] heeft beschreven: constructies met lijnen en één vast gegeven cirkel op het blad. Hij schrijft overigens dat hij mogelijk niet overal de handigste constructie heeft gebruikt en dat zal in dit artikel niet anders zijn geweest: het gaat om de uitdaging. Wat een onuitputtelijke bron voor denkactiviteiten blijft meetkunde toch...

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld *http://www.pandd.demon.nl/pool.htm*
[2] zie voor inversie o.a. Zebra-boekje nr 45.
[3] Zie *http://mathworld.wolfram.com/MascheroniConstruction.html*
[4] Steiner. J (1833). *Die Geometrischen Constructionen.* Uitgave van 1895: Engelmann, Leipzig. Op internet is deze uitgave gratis beschikbaar.

Over de auteur

Fred Muijrers was tot zijn pensioen docent aan de lerarenopleiding en coördinator van de masteropleiding tot eerstegraads leraar wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. e-mail: *fmuijrers@yahoo.com*

Irene van Stiphout

Praktijkonderzoek

Parel van de HAN-Master Leraar Wiskunde

De HAN Master Leraar Wiskunde[1] bestaat tien jaar. Een belangrijk onderdeel van de opleiding is het praktijkonderzoek. Als voorbeeld: drie onderzoeken die tot een duidelijke verbetering van de wiskundeprestaties van de leerlingen hebben geleid.

Inleiding

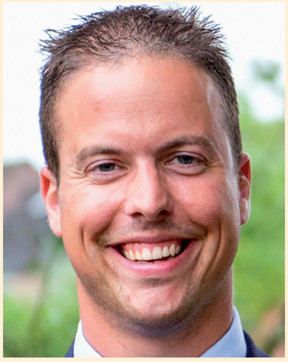
Tot begin 21e eeuw werden educatieve masteropleidingen vrijwel uitsluitend door universiteiten aangeboden, inmiddels hebben ook de educatieve hbo-masters hun plek verworven. Landelijk leiden deze masters momenteel de meeste eerstegraads wiskundedocenten op[2]. Dit studiejaar vieren de educatieve masters van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen (HAN) het 10-jarig bestaan.

De opleiding

De HAN biedt educatieve masteropleidingen aan voor de kernvakken Nederlands, Engels en wiskunde en voor het vak algemene economie. In drie jaar groeit een tweedegrader door naar eerstegrader. Als enige in Nederland zijn de onderwijsmasters van de HAN duaal van opzet. Dat wil zeggen: de student heeft een baan en sluit een leer-arbeidsovereenkomst met de werkgever. Het grootste deel van de opleiding speelt zich af op de werkvloer, in de bovenbouw. Al doende leren is de filosofie. Eén dag per week zijn er colleges. Van de 90 studiepunten in totaal worden er 60 besteed aan vakkennis en vakdidactiek. De overige 30 studiepunten worden besteed aan de onderzoeks- en professionaliseringslijn. De inhoud van de vakkennis en vakdidactiek is vastgelegd in de landelijke kennisbasis. In het derde jaar voeren studenten een masteronderzoek uit waarin een vakdidactisch probleem uit hun praktijk centraal staat. Hoewel deze onderzoeken zijn toegespitst op situaties binnen een specifieke school, zijn de resultaten vaak breder bruikbaar.

Klassengesprekken

De resultaten van havo 4 wiskunde B op mijn school bleven achter. Het was niet uitzonderlijk dat de helft van de klas een onvoldoende scoorde voor een proefwerk. Ook bleek dat leerlingen het huiswerk slecht maakten. De meest genoemde redenen die leerlingen hiervoor gaven waren: te moeilijk huiswerk, te veel huiswerk, geen tijd, te veel afleiding in de les. Omdat



Jeroen Verberkt, afgestudeerd Master Leraar wiskunde 2018

we een positieve correlatie zagen tussen het cijfer en het maken van het huiswerk is in eerste instantie gekeken naar mogelijkheden om de huiswerkattitude te verbeteren. De achterliggende gedachte was dat de resultaten beter zouden worden als het huiswerk beter gemaakt zou worden. Na gesprekken met collega's, medestudenten en docenten van de HAN werd duidelijk dat het huiswerk een groter doel dient, namelijk een hoger niveau van wiskundige bekwaamheid bereiken. Het maken van huiswerk is niet de enige manier om dat te bereiken. Ik ben me gaan richten op het voeren van klassengesprekken met de leerlingen over de verschillende ideeën en oplossingsmethoden. Tijdens de lessen besteed ik veel aandacht aan achterliggende concepten van wiskundige gereedschappen. Het denkwerk doen we nu vooral samen in de klas. Natuurlijk, er blijven opdrachten over voor thuis, maar die dienen vooral als herhaling. Op deze manier is het huiswerk een middel in plaats van een doel op zich.
In mijn onderzoek ben ik aangehaakt bij het promotieonderzoek naar klassengesprekken van Chris Kooloos van de Radboud Universiteit. Ook na mijn afstuderen ben ik met hem blijven samenwerken.
Mijn lessen zien er nu met onder andere de klassengesprekken heel anders uit. Zoals een leerling me teruggaf: 'ik ontdek dingen in mijzelf, dat ik zelf aan de slag kan, en dingen kan bedenken…'

Inhaalprogramma havo 4

Greet van Ham, afgestudeerd Master Leraar wiskunde 2016

In 2016 heb ik een inhaalprogramma ontworpen voor leerlingen van havo 4 wiskunde B die een onvoldoende scoorden op de toets over exponentiële functies. De leerling kon daarbij met behulp van een toetsevaluatieformulier tijdens de nabespreking van de toets vaststellen wat de oorzaak van de fouten was en het inhaalprogramma zelfstandig uitvoeren. Deze werkwijze leidde tot beter begrip bij de leerlingen en de achterstanden werden weggewerkt. Met het inhaalprogramma wordt niet meer gewerkt, maar het toetsevaluatieformulier gebruik ik nog steeds.
Het formulier heb ik aangepast, zodat het bruikbaar is voor ieder willekeurig hoofdstuk. Na een eerste toets moeten alle leerlingen het formulier verplicht invullen en op de achterkant een plan van aanpak voor verbetering noteren. Bij latere toetsen stel ik een grens, bijvoorbeeld leerlingen die een cijfer hebben gehaald onder de 6 moeten het formulier verplicht invullen en de overige leerlingen mogen dat vrijwillig doen. In de lessen die volgen, bespreek ik dat individueel kort na. Door die persoonlijke aandacht voelen leerlingen zich gezien en serieus genomen en het geeft mij zicht op de vorderingen van de leerlingen. Na een volgende toets bespreken we of het verbeterplan heeft gewerkt en waar het moet worden bijgesteld.

Aanpak onderzoeksopgave met stappen van Pólya

Robin van der Poel, bijna afgestudeerd Master Leraar wiskunde

We zagen dat leerlingen veel punten verliezen in de korte onderzoeksopgave in het centraal examen havo wiskunde A. In deze laatste opgave van het examen moeten leerlingen een wat groter probleem zelfstandig oplossen. Het bleek dat leerlingen vaak geen idee hadden hoe ze konden beginnen. In havo 4 en havo 5 werd weinig aandacht besteed aan het oplossen van grotere problemen. Pas in de examenvoorbereiding werd getraind met opgaven uit oude examens. In het onderzoek is met leerlingen besproken hoe ze een probleem kunnen aanpakken aan de hand van de stappen van Pólya: probleem begrijpen, (wat is nu precies het probleem? wat is gegeven?), een plan maken (wat ga ik doen?), het plan uitvoeren, terugblikken. Door ze hierover na te laten denken, kregen ze meer grip op de opgave. De havo 4-leerlingen die de training hadden gevolgd scoorden een stuk beter op de onderzoeksopgave dan de havo 5-leerlingen in hun examen. De training bleek leerlingen enorm te helpen. In interviews zeiden leerlingen dat ze vooral meer tijd hadden leren besteden aan goed lezen en het probleem begrijpen. Ze waren de zin hiervan gaan inzien. Voor de sectie is het duidelijk dat we deze training voortaan opnemen in het curriculum.

Tot slot

De praktijk en het toegepast onderzoek vormen de kracht van de professionele master oftewel hbo-master. Dit toegepast onderzoek gaat over concrete problemen die herkenbaar zijn: huiswerk dat niet of nauwelijks wordt gemaakt, tegenvallende toetsresultaten, problemen met het bedenken van een aanpak voor wat grotere problemen. Dit zijn thema's die veel collega's bekend in de oren zullen klinken. De verhalen van de drie studenten / docenten[3] hierboven laten zien dat masteronderzoeken een blijvende bijdrage leveren aan het verder verbeteren van het wiskundeonderwijs in Nederland. We kijken dan ook met veel plezier vooruit naar de komende tien jaar en de nieuwe eerstegraads docenten die nu onze opleiding volgen en straks gaan zorgen voor interessant en uitdagend wiskundeonderwijs!

Noten

[1] Meer informatie over de Master Leraar wiskunde: *www.han.nl/MLW*

[2] zie *https://duo.nl/open_onderwijsdata/databestanden/ho/ingeschreven/*

[3] Met dank aan (oud)collega Fred Muijrers, en aan wiskundedocenten Jeroen Verberkt, Greet van Ham en Robin van der Poel

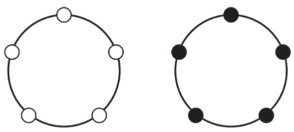
Over de auteur

Irene van Stiphout is coördinator van de HAN Master Leraar Wiskunde. E-mailadres: *irene.vanstiphout@han.nl*

Rob Bosch

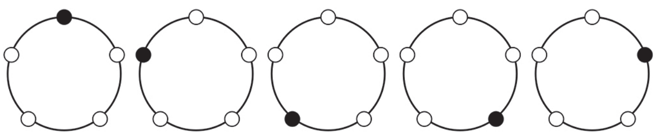
Rijtjes met witte en zwarte ballen IV

In de vorige jaargang hebben we in deze rubriek verschillende patronen met rijtjes van witte en zwarte ballen gemaakt. In de eerste aflevering van deze jaargang kijken we naar kettingen met witte en zwarte ballen (kralen is in dit verband wellicht beter maar we houden de terminologie van de vorige jaargang aan). We maken een ketting met vijf witte en zwarte ballen. Hoeveel verschillende kettingen kunnen we maken? Kettingen die door een draaiing in het vlak in elkaar overgaan, beschouwen we niet als verschillend[1].
Ten eerste zijn er natuurlijk de twee kettingen die slechts uit ballen van één kleur bestaan, zie figuur 1.



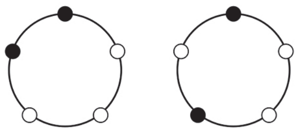
figuur 1

We vervolgen met kettingen met één zwarte bal. We kunnen de zwarte bal op vijf posities inzetten. Dat geeft vijf kettingen maar door de vijf draaiingen over veelvouden van 72° gaan deze in elkaar over zodat er slechts één ketting overblijft met een zwarte bal. De vijf niet te onderscheiden kettingen zijn in figuur 2 weergegeven.



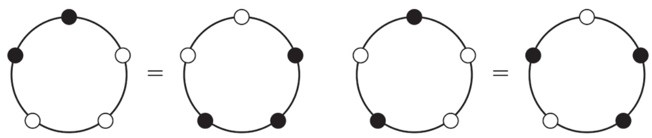
figuur 2

Op grond van een eenvoudige symmetrie (verwissel wit en zwart) zijn er ook vijf niet te onderscheiden kettingen met één witte bal. Dat geeft dus een ketting met één witte bal (of vier zwarte ballen). Het totaal staat nu op vier verschillende kettingen. We gaan verder met kettingen met twee zwarte en drie witte ballen. We gaan eenvoudig na dat er in dit geval slechts twee te onderscheiden kettingen zijn. De beide configuraties staan in figuur 3.



figuur 3

Deze twee kettingen gaan door een draaiing niet in elkaar over zodat ze essentieel verschillend zijn. Uiteraard gaan deze kettingen wel door een draaiing over veelvouden van 72° over in vijf equivalente kettingen. De teller staat nu op zes verschillende kettingen. Blijft over kettingen met drie zwarte ballen. Met de bekende symmetrie van het verwisselen van zwarte en witte ballen zien we dat het aantal kettingen met drie zwarte ballen gelijk is aan het aantal kettingen met drie witte ballen en dus gelijk is aan het aantal met twee zwarte ballen. De wit-zwart-symmetrie is weergegeven in figuur 4.



figuur 4

Het totaal aantal kettingen komt dus nu op acht; twee kettingen met ballen van dezelfde kleur en zes kettingen met zowel witte als zwarte ballen.
Met de bovenstaande overwegingen kunnen we een formule afleiden voor het aantal verschillende kettingen.

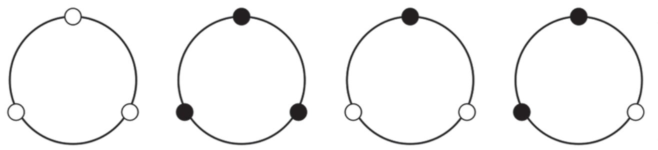
Voor iedere positie in de ketting hebben we twee keuzes wit of zwart en dat geeft dus $2^5 = 32$ kettingen. Behalve de kettingen die slechts uit ballen van één kleur zijn samengesteld, komen alle kettingen door de draaiingen over de veelvouden van 72° daarin vijf keer voor. Het totaal aantal verschillende kettingen K_5 is derhalve:

$$K_5 = \frac{2^5 - 2}{5} + 2 = 8$$

Het lijkt erop dat we een eenvoudige formule kunnen afleiden voor het aantal verschillende kettingen met n witte en zwarte ballen, namelijk

$$K_n = \frac{2^n - 2}{n} + 2$$

Controle voor $n = 3$ geeft $K_3 = \frac{2^3 - 2}{3} + 2 = 2 + 2 = 4$ en ja, dat klopt zoals we in figuur 5 eenvoudig nagaan:

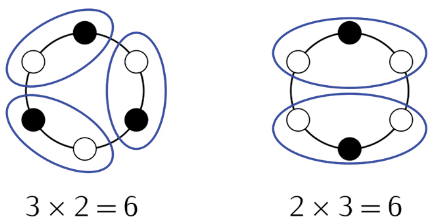


figuur 5

Voor $n = 6$ geeft de formule

$$K_6 = \frac{2^6 - 2}{6} + 2 = \frac{62}{6} + 2$$

Oeps(!), de formule geeft een breuk en dat kan natuurlijk niet. Blijkbaar hebben we toch iets over het hoofd gezien. In figuur 6 zien we waar het misgaat. Bij zes ballen is er een aantal configuraties waarin een patroon zich herhaalt. Deze patronen geven bij de zes draaiingen over veelvouden van 60° geen zes equivalente kettingen. In de linker ketting geven de draaiingen slecht twee equivalente kettingen. In de rechter ketting zijn dat er slechts drie.



figuur 6

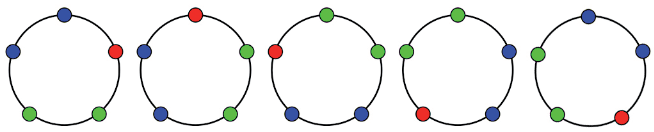
Onze formule faalt dus voor willekeurige n maar er is nog wel goed nieuws. Als n een priemgetal is dan kan zich geen herhaalpatroon voordoen in een ketting. Want dan zou dit patroon een aantal malen passen in de ketting van n ballen en dat kan bij een priemgetal niet. Dus toch nog een resultaat.

Kettingformule

Het aantal verschillende kettingen met p witte en zwarte ballen waarbij p een priemgetal is, is gelijk aan

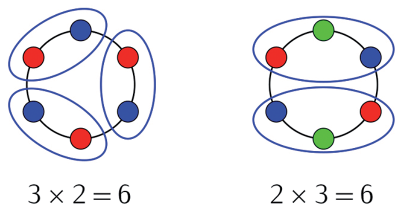
$$K_p = \frac{2^p - 2}{p} + 2$$

We geven dit stukje nog wat kleur. We maken nu kettingen met ballen van verschillende kleuren. Het aantal ballen in een ketting is p waarbij p een priemgetal is. Voor de ballen kunnen we kiezen uit a verschillende kleuren. Voor iedere positie in de ketting hebben we nu a keuzes zodat er in het totaal a^p mogelijke kettingen zijn. Er zijn a kettingen die uit ballen van dezelfde kleur bestaan. Kettingen met meerdere kleuren komen in de aangegeven a^p kettingen precies p keer voor. Deze equivalente kettingen krijgen we door draaiingen over 360°/p. In figuur 7 zien we dat de eerste ketting precies vijf equivalente kettingen geeft.



figuur 7

Er is geen rotatie anders dan over 360° die de eerste ketting in zichzelf laat overgaan. Voor het argument dat iedere meerkleurenketting in de $a^p - a$ kettingen precies p keer voorkomt, is het essentieel dat p priem is. Voor een getal dat niet priem is, bijvoorbeeld 6, faalt het argument zoals we al gezien hebben, zie figuur 8.



figuur 8

De eerste ketting kent slechts twee equivalente kettingen. Bij de tweede ketting zijn er drie equivalente kettingen. Deze situaties kunnen zich bij een priem aantal ballen niet voordoen. We kunnen onze kettingformule dus uitbreiden tot meerdere kleuren. In een ketting met >

NIEUWE
grafische rekenmachine

TI-84 Plus CE-T Python Edition

Met de nieuwste versie TI-84 Plus CE-T Python Edition grafische rekenmachine kunnen leerlingen programmeren in Python! Naast de vertrouwde functies heeft deze rekenmachine een speciale Python App.

python™

Voordelen

- Geschikt voor vakoverstijgende projecten
- Experimenten doen en apparaten zoals de robotauto TI-Innovator™ Rover aansturen
- Ideaal voor profielwerkstukken bij de bètavakken
- Optimaal voorbereid op het toekomstgerichte curriculum

Beschikbaarheid en kosten

- De TI-84 Plus CE-T Python Edition is **beschikbaar bij de schoolstart in 2020**
- De Python App is simpelweg uit te schakelen door de Nederlandse Examenstand aan te zetten
- De prijs van de nieuwe rekenmachine is gelijk aan de versie zonder Python

Training

Wilt u Python op de grafische rekenmachine leren gebruiken? Wij geven trainingen programmeren in Python en het gebruik in de klas. Stuur een e-mail aan docentennetwerk T³ Nederland: **info@t3nederland.nl**

Meer weten? Bel onze klantenservice op **00800 484 22 737** (gratis) of vul het contactformulier in: **education.ti.com/nl/csc**

education.ti.com/nederland

Texas Instruments

p ballen van a verschillende kleuren hebben we voor iedere positie a keuzes. Dit geeft a^p mogelijke kettingen. Daarvan zijn er a kettingen die slechts uit ballen van één kleur bestaan. Iedere ketting die uit ballen met meerdere kleuren wordt gevormd, komt precies p keer voor. Daarbij is het essentieel dat p priem is. We vinden zo een algemene kettingformule die we de *kettingformule van Fermat* noemen, de reden waarom wordt weldra duidelijk.

Kettingformule van Fermat

Het aantal verschillende kettingen met p gekleurde ballen waarbij p priem is en we de keuze hebben uit a kleuren is gelijk aan

$$K_p = \frac{a^p - a}{p} + a$$

Omdat Kp een geheel getal is, is $\frac{a^p - a}{p}$ ook een geheel getal. Met andere woorden $a^p - a$ is deelbaar door p. Dit is de (kleine) stelling van Fermat. De vorm waarin we die stelling meestal aantreffen, vinden we door de volgende overweging. Het priemgetal p is een deler van $a^p - a$. Er geldt dus $p \mid (a^p - a)$ en $p \mid a(a^{p-1} - 1)$. Als $\text{ggd}(a; p) = 1$ dan geldt dat $p \mid (a^{p-1} - 1)$.

In de modulovorm krijgen we:

Stelling van Fermat

Als p priem is dan geldt:
als $\text{ggd}(a; p) = 1$ dan is $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

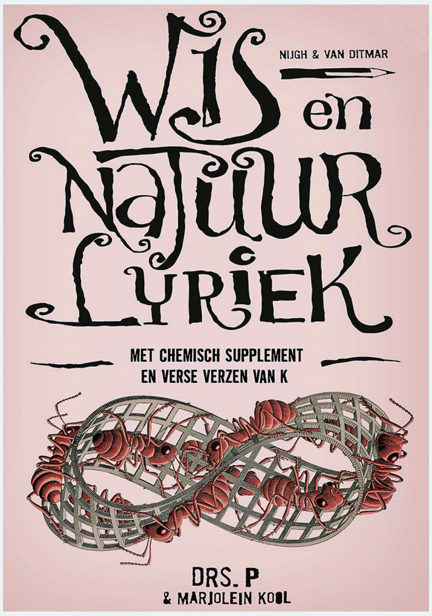
We hebben de (kleine) stelling van Fermat hierboven op een combinatorische wijze afgeleid. Voor de gebruikelijke getaltheoretische afleiding kan de lezer een willekeurig boek over elementaire getaltheorie opslaan.

Noot

[1] Kettingen kunnen ook door een spiegeling of draaiing in de ruimte in elkaar overgaan maar die beschouwen we hier als verschillend.

Over de auteur

Rob Bosch was universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie en lid van de redactie van *Euclides*. E-mailadres: *dr.robbert.bosch@gmail.com*



De prachtige dichtbundel Wis- en natuur-lyriek *van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid. BMI is een van de nieuwe gedichten.*

BMI

Deel je gewicht door je lengte-kwadraat,
kilo's door meters keer meters en zie:
wat is de naam van dit deelresultaat?
Body Mass Index, of kort: BMI!

Wie vijfentwintig nog niet overschrijdt
is niet te vet, niet te dik, niet te rond,
en ga je afvallen stop dan op tijd.
Lager dan achttien is ook niet gezond.

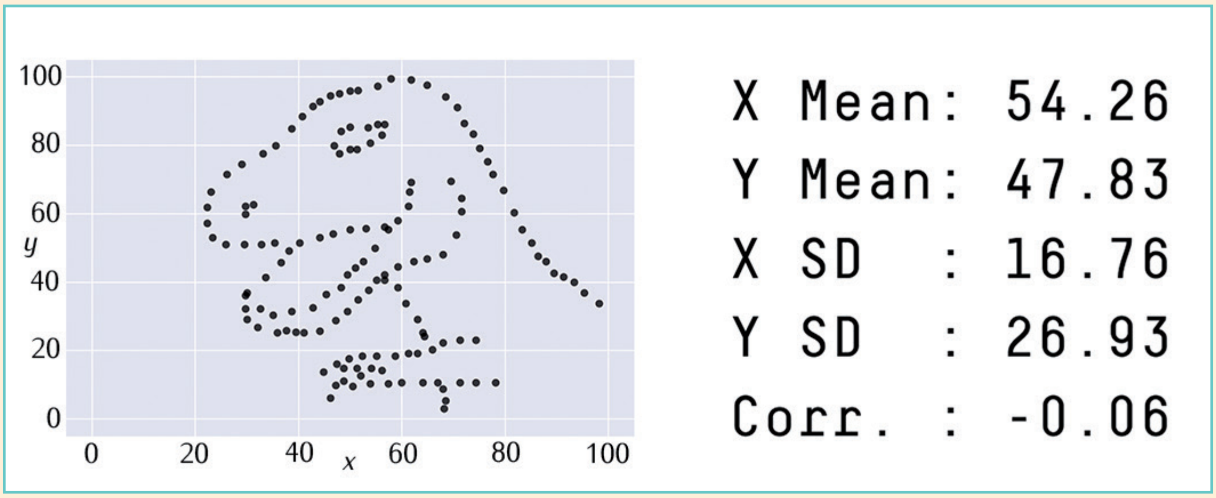
Sanne heeft BMI veertig gescoord.
Oei, San, wat minder zou goed voor je zijn!
'Ik?' roept ze nijdig wanneer ze dat hoort,
'Ik ben niet dik hoor, ik ben veel te klein!'

Marjolein Kool

Kleintje didactiek

Lonneke Boels

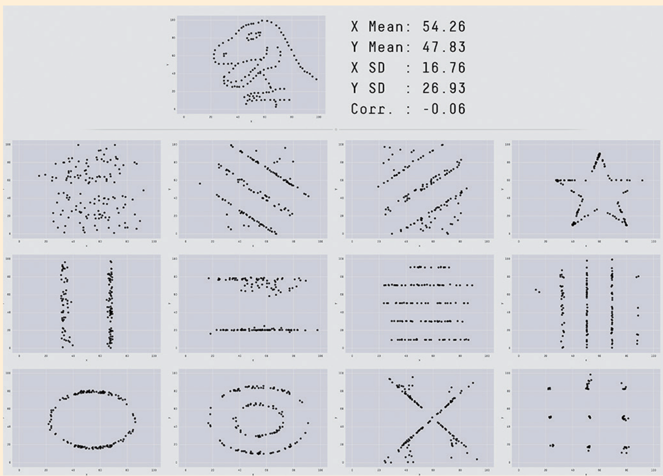
Datasaurus



figuur 1 De datasaurus houdt gemiddelde, standaardafwijking en correlatie constant

In veel wetenschappelijk onderzoek wordt het gemiddelde gebruikt als maat om een verdeling te kenmerken. In een eerder artikel schreef ik al eens over hoe misleidend deze maat kan zijn bij een univariate verdeling (een verdeling waarbij je maar op één variabele let, bijvoorbeeld het gemiddelde cijfer voor wiskunde in de landelijke examens).[1] Maar ook bij twee variabelen kunnen gemiddelde en standaardafwijking nogal misleidend zijn, zie figuur 1.

Figuur 1 geeft een voorbeeld dat je bij het onderwerp correlatie kunt gebruiken als er twee variabelen in het spel zijn. Deze grafiek staat bekend als de datasaurus en laat zien dat je bij twee variabelen die elk op zich een vaststaand gemiddelde én standaardafwijking hebben, heel verschillende grafieken kunt tekenen, zie figuur 2.[2]



figuur 2 Verschijningsvormen van de datasaurus

Noten

[1] Boels,. L. (2018). Kleintje didactiek. Statistiek: gemiddelde en verdeling. *Euclides, (93)*7, 20-21.

[2] *https://www.autodeskresearch.com/publications/samestats*

Jacques Jansen

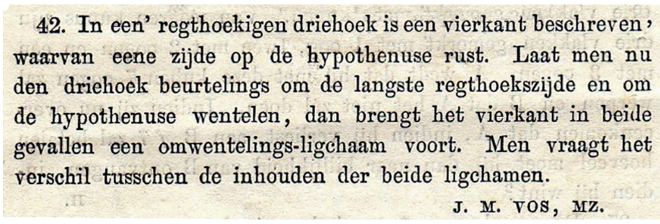
Wentelen maar

Uitdagende problemen

Inhouden en oppervlaktes uitrekenen zonder zwaar gereedschap zoals integreren. Dat was het onderwerp van een eerder artikel van Jacques Jansen. Hij vroeg zich daarin af of zijn oplossing ook opgaat voor het algemene geval. Fred Muijrers ging ermee aan de slag.

Inleiding

In 'Uitdagende problemen: Wij van de hbs' (*Euclides* 93-5) ging ik aan de slag met een opgave uit 1863. Zie figuur 1.

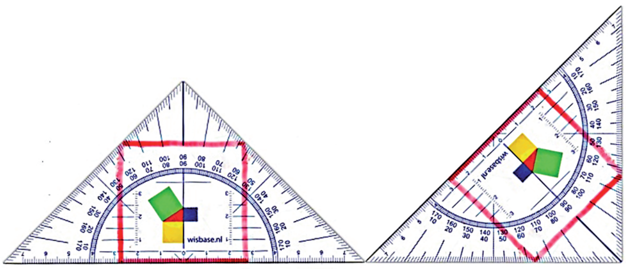


42. In een' regthoekigen driehoek is een vierkant beschreven, waarvan eene zijde op de hypothenuse rust. Laat men nu den driehoek beurtelings om de langste regthoekszijde en om de hypothenuse wentelen, dan brengt het vierkant in beide gevallen een omwentelings-ligchaam voort. Men vraagt het verschil tusschen de inhouden der beide ligchamen.

J. M. VOS, MZ.

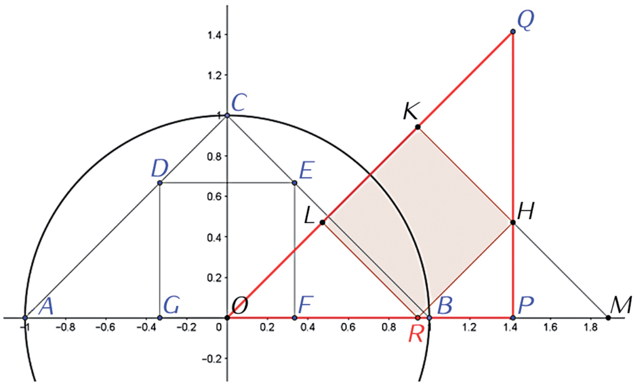
figuur 1

Deze opgave is als volgt in beeld te brengen.



figuur 2

We bekijken een bijzonder geval: 'de geodriehoek', zie figuur 2. Eerst wentelen we het vierkant om de langste zijde. Vervolgens wentelen we om een rechthoekszijde. Maar hoe komen we aan het gevraagde vierkant? Zie figuur 3. In een eenheidscirkel is gelijkbenige rechthoekige ΔABC met ingeschreven vierkant *DEFG* getekend. Op de positieve *x*-as is ook getekend ΔQOP met ingeschreven vierkant *HRLK* die congruent is met ΔABC.



figuur 3

Voor vierkant *DEFG* geldt: $GF = EF$. We stellen $OF = x$, dan $EF = 1 - x$. $GF = 2x = 1 - x$ geeft $x = 1/3$.
Een zijde van het vierkant is dus 2/3.
Merk op dat $OK = MK = 4/3$. Verder: $OM = 4/3\sqrt{2}$ en $OR = 2/3\sqrt{2}$.

Inhoud($vierkant_{\text{geroteerd schuine zijde}}$) $= (2/3)^3 \cdot \pi = 8/27 \cdot \pi$

Inhoud($vierkant_{\text{geroteerd rechthoek zijde}}$) =

inhoud(dubbelkegel)OKM) - 2·inhoud(*kleine dubbelkegel*)=

$$2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \left(\tfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \left(\tfrac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2 = \tfrac{8}{27}\sqrt{2} \cdot \pi$$

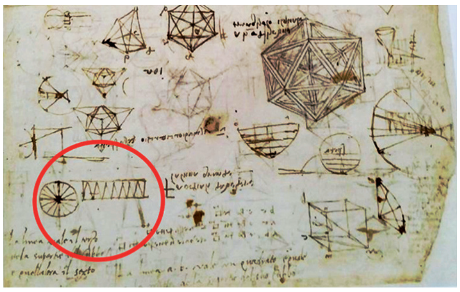
Het scheelt dus een factor √2. Wijst dat ergens op?
Het algemene geval is een grote uitdaging. Ik ben zeer benieuwd naar jouw oplossing. En gaat dat lukken zonder te integreren?

Fred Muijrers ging de uitdaging aan

'Uw artikel in de laatste Euclides *heb ik met plezier gelezen. De uitdaging bij opgave 42 ben ik aangegaan. Ik vermoed dat leerlingen op de Latijnse school meer formules tot hun beschikking hadden die zij konden gebruiken. Zonder veel rekenarij is dan de opgave goed te doen.'*

En inderdaad, Fred heeft een fraaie uitwerking op een A-viertje dat ik je beslist niet wil onthouden.
Fred merkt eerst op dat het boeiender is om naar de *verhouding* van de twee inhouden te kijken. In de opgave zelf wordt het *verschil* van de inhouden gevraagd maar ik betrap mezelf erop dat ik voor het bijzondere geval automatisch keek naar de verhouding. Het ging dus om de factor $\sqrt{2}$. Zou dat in het algemene geval ook zo zijn? Het ging er ook om een aanpak te bedenken zonder integraalrekening. Fred wijst in zijn reactie naar de onderbouw waarin leerlingen leren om een cirkel te verdelen in een flink aantal gelijke sectoren, zeg maar taartpunten. Die taartpunten leggen we om en om en bij benadering ontstaat er een rechthoek waarvan de ene afmeting de straal van de cirkel is en de andere afmeting de halve omtrek van de cirkel. In formule taal:
$\text{Opp}(cirkel) = r \cdot \pi r = \pi r^2$.

Iemand die geobsedeerd was door cirkels en cirkeldelen zoals maantjes, was Leonardo Da Vinci. Ik lees in een biografie[1] van deze beroemde kunstenaar en wetenschapper dat hij heel veel aantekenboeken had. Hij was slecht in algebraïsche vaardigheden maar wel goed in meetkunde. Zou Leonardo al op de hoogte geweest zijn hoe je uit de omtrek van een cirkel de oppervlakte kunt afleiden? Zie een stukje uit een aantekenboek van hem in figuur 4.



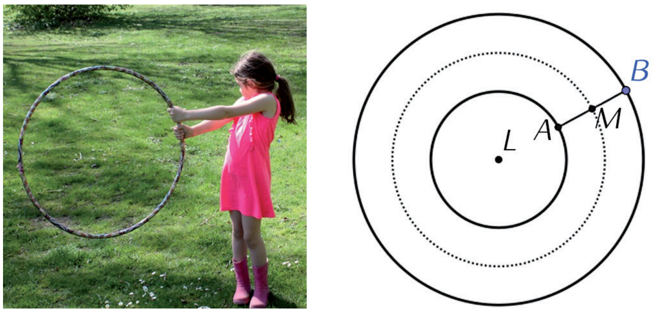
figuur 4

Een torus maken

Fred meent dat hij misschien op de hbs al leerde hoe je de inhoud van een torus, zonder integraalrekening, kon berekenen. Bekende voorbeelden van een torus zijn de fietsband en de donut, zie figuur 5. Er zijn meer soorten torussen maar we beperken ons tot deze soort. Als je weet hoe je zo'n torus kunt maken dan kun je ook de inhoud uitrekenen zonder integraalrekening.

figuur 5

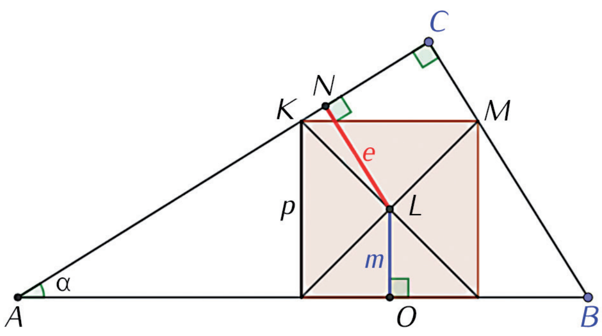
Voor het maken van een torus heb ik mijn kleindochter, die een hoepel heeft, ingeschakeld.
Zij houdt de hoepel in een verticaal vlak en draait om haar as een rondje waarbij ze de hoepel op gelijke hoogte en op gelijke afstand van haar lichaam houdt, zie figuur 6.



figuur 6

Abstraheren we de beweging en denkbeeldige banen dan zien we in het bovenaanzicht mijn kleindochter Lynn teruggebracht tot punt L (dit gaat ze niet leuk vinden) en de cirkels. Het middelpunt van de hoepel noemen we M. De straal van de hoepel noemen we r. De hoepel zelf is in het bovenaanzicht lijnstuk AB. De straal van het rondje noemen we R. $R = LM$. De ontstane torus kunnen we in gelijke heel dunne cirkelschijfjes verdelen en ze vervolgens opstapelen zodat we een rechte cilinder krijgen met hoogte $2\pi R$ (de lengte van de baan die punt M maakt) en straal r. De inhoud van de torus is dan
$\pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 \cdot R \cdot r^2$. Natuurlijk gaat het niet om de formule maar om het idee om de inhoud uit te rekenen.

Terug naar de opgave



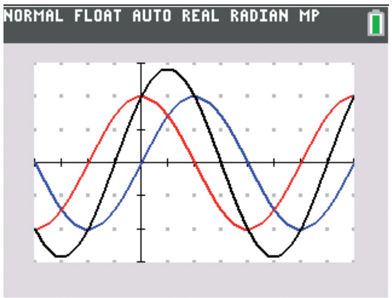
figuur 7

Zie in figuur 7 het GeoGebra plaatje van Fred. We voeren wat variabelen in.
p is de lengte van een zijde van het vierkant. $\angle BAC = \alpha$.
Punt L is het snijpunt van de diagonalen van het vierkant.
Punt O is voetpunt van L op zijde AB en $LO = m$.
Punt N is voetpunt van L op zijde AC en $NL = e$.
We wentelen het vierkant om zijde AB. De ontstane >

cilinder heeft straal p en hoogte p en de inhoud is dan $p \cdot \pi p^2$ of πp^3. We kunnen er ook anders naar kijken en bij de wenteling om zijde AB punt L als draaipunt nemen. Punt L maakt een cirkel met straal $\frac{1}{2}p$. De inhoud, laten we die aanduiden met V_1, is dan $2\pi(\frac{1}{2}p) \cdot p^2$ of πp^3. Gelukkig hetzelfde resultaat.
Dan wentelen we het vierkant om zijde AC met weer L als draaipunt die nu een cirkel maakt met straal NL, in de figuur met e aangeduid. De inhoud noemen we V_2. Er geldt $V_2 = 2\pi \cdot e \cdot p^2$. 'Na wat goniometrisch gerekend te hebben', aldus Fred, 'vinden we dan $e = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot p \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)$. Toch een uitdaging om dat na te gaan. (Vind je dat ook lezer, lees dan nog niet verder).

De verhouding van de twee inhouden

En hier dan de berekening van lijnstuk NL, van e dus. Laten we het hoekpunt linksboven van het vierkant K noemen en het hoekpunt rechtsboven M, zie figuur 7. We concentreren ons op ΔKLN waarvoor geldt dat $\angle NKL = \alpha + \frac{1}{4}\pi$, $\angle KNL = \frac{1}{2}\pi$ en $KL = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot p$.
Er geldt: $e = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot p \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)$.
$V_2 = 2\pi \cdot e \cdot p^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot p \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) \cdot p^2 = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot p^3 \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)$.
De uitdrukking $\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)$ herkennen we waarschijnlijk als de som van $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$*.
Dus $\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) = \sin(\alpha) + \cos(\alpha)$.
We vonden al eerder $V = \pi p^3$ en nu geldt $V_2 = (\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) \cdot \pi p^3$.
Ofwel: $V_2 / V_1 = \sin(\alpha) + \cos(\alpha)$. In de bijzondere situatie van de geodriehoek geldt $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ en $V_2 / V_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$ en dat hadden we al eerder gevonden. Natuurlijk kunnen we in de verhouding V_2 / V_1 de factor $\sqrt{2}$ erin houden: $V_2 / V_1 = \sqrt{2} \cdot (\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi))$.



figuur 8

* Leerlingen liet ik met de GR ontdekken welke formule hoorde bij somgrafiek van $\sin(\alpha) + \cos(\alpha)$, zie figuur 8. Ze zagen snel in, dat het een sinusoïde was. En door ze te wijzen op symmetrie in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$ vonden ze de amplitude $\sqrt{2}$. De verschuiving over $\frac{1}{4}\pi$ naar links was ook zo gevonden. Anders, als je hier niet opkomt, moet de somformule worden toegepast.

Noten

[1] Isaacson, W. (2018). *Leonardo Da Vinci. De Biografie*. Amsterdam: Het Spectrum.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

Wis en Waarachtig

Rekenles over darten

Bij darten komt heel wat hoofdrekenen kijken, laat Arnout Jaspers zien. Zo is er rekenwerk bij het uitgooien van een leg. Omdat je met een dubbel moet eindigen, is het verstandig voor een darter daar al iets eerder rekening mee te gaan houden. Als je, om maar iets te noemen, nog op 126 staat, dan kun je met drie darts uit gaan: triple 20, triple 20 en dubbel 3 is een van de mogelijkheden. Maar... mis je met de eerste dart de triple 20 en gooi je maar een enkele 20, dan kun je met de resterende twee darts de resterende 106 niet uitgooien. Topdarters gaan bij 126 daarom veelal beginnen met een triple 19. Mocht je die net missen, dan kun je de resterende 107 nog wel met twee darts uitgooien: triple 19 en dubbel bulls eye. Zo komt er bij het darts nog wel meer rekenwerk kijken. Ook de puntenverdeling van het dartbord is mede een gevolg

van het nodige rekenwerk, laat Jaspers zien.
Dit voorjaar vindt de Premier League plaats. Misschien een goede aanleiding voor een speciale rekenles?
Het artikel van Jaspers kan dan dienen als inspiratiebron.
Bron: https://www.nemokennislink.nl/publicaties/ook-bij-darten-komt-heel-wat-hoofdrekenen-kijken/

14 maart: internationale dag van de wiskunde

14 maart, voor velen van ons al Pi-dag, werd op 26 november van het vorig jaar door de UNESCO uitgeroepen tot de Internationale Dag van de Wiskunde. Met ingang van dit jaar worden via *www.idm314.org* alle landen gevraagd mee te doen aan deze dag door het organiseren van activiteiten voor zowel leerlingen als het algemene publiek in scholen, musea, bibliotheken, enzovoort. Het thema voor de eerste Internationale Dag van de Wiskunde is *Mathematics is Everywhere*.
Bron: www.idm314.org

Eerste 'Dijkstra Fellows'

David Chaum (rechts) en Guido van Rossum (links).

Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) heeft eind vorig jaar voor het eerst in haar geschiedenis de 'Dijkstra Fellowship' uitgereikt. De eretitel werd toegekend aan David Chaum en Guido van Rossum. Chaum, 'voorvader van blockchain' is bekend van zijn baanbrekende onderzoek op het gebied van privacy en cryptologie en de ontwikkeling van digitaal contant geld. Van Rossum bedacht bijna dertig jaar geleden – toen hij werkzaam was bij CWI – de wereldberoemde programmeertaal *Python*, die miljoenen gebruikers kent.
Met de Dijkstra Fellowship wil CWI hen belonen voor de baanbrekende bijdrage die zij met hun werk geleverd hebben aan de wiskunde en informatica. De fellowship is daarnaast een erkenning voor de bijdrage die zij geleverd hebben aan de reputatie van CWI als pionier op het gebied van wiskunde en informatica. De eretitel is vernoemd naar voormalig CWI onderzoeker Edsger W. Dijkstra, die met de ontwikkeling van zijn kortste pad algoritme één van de meest invloedrijke onderzoekers uit de geschiedenis van het instituut was.
Bron: www.cwi.nl/news/2019/david-chaum-and-guido-van-rossum-awarded-dijkstra-fellowship

Gratis toegang wetenschappelijke publicaties

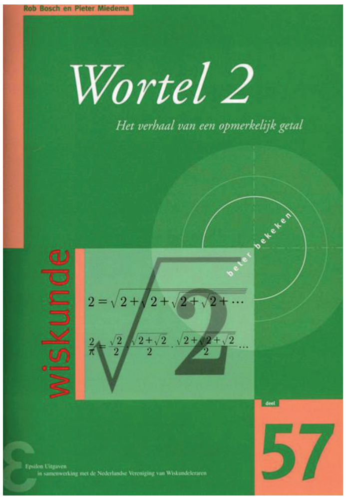
Sinds 29 oktober 2019 kunnen alle onderwijsprofessionals werkzaam op een school in het po, vo of mbo toegang krijgen tot EBSCO Education Source. Een database met wetenschappelijke artikelen over onderwijsonderzoek. Met zo'n 17.000 aanmeldingen binnen vijf weken maakt de pilot een vliegende start. Een kijkje in de statistieken:
Aanmeldingen per sector: Op 4 december 2019 waren er 16.918 aanmeldingen. 41 procent hiervan is werkzaam in het primair onderwijs, 37,5 procent in het voortgezet onderwijs en 21,5 procent in het middelbaar beroepsonderwijs.
Aanmeldingen op functie: Leraren vertegenwoordigen met 67 procent de grootste gebruikersgroep. Gevolgd door onderwijsondersteunend en overig personeel (circa 23 procent), 9 procent is schoolleider/directeur en bestuurders vertegenwoordigen minder dan 1 procent.
Zoekopdrachten: In totaal zijn er ruim 33.000 zoekopdrachten ingevoerd. Deze hebben geleid tot 14.975 aangeklikte zoekresultaten in de database. Hier zitten overigens ook publicaties tussen waarvoor betaald moet worden. Handige tip: met het aanvinken van 'Volledige tekst' in de linkerbalk zoek je uitsluitend op de 1 miljoen full-text resultaten. Dit betekent dat de volledige publicatie vrij toegankelijk is. Advies is ook om Engelse zoektermen in te voeren, want Nederlandse zoektermen geven geen of een zeer beperkt resultaat. Om je hiermee te helpen kun je op *www.voordeleraar.nl/hulp* een lijst vinden met vertaalde gangbare onderwijstermen.
Wil je meer tips voor het zoeken in EBSCO?
Kijk dan op *www.voordeleraar.nl/tips*

Deze pilot is een initiatief van de po-raad, vo-raad, mbo-Raad, het NRO en de KB. Meer info is te vinden via www.voordeleraar.nl.
Bron: www.poraad.nl/nieuws-en-achtergronden/vliegende-start-voor-pilot-gratis-toegang-tot-wetenschappelijke-publicaties

Boekbespreking

Henk Reuling

Wortel 2
Het verhaal van een wonderlijk getal



Titel: Wortel 2
Ondertitel: Het verhaal van een opmerkelijk getal
Auteurs: Rob Bosch en Pieter Miedema
Uitgever: 2019, Epsilon Uitgaven, Zebra 57, 64 pagina's
ISBN 978-90-5041-178-3
Prijs: € 10,00

Bijzondere getallen

Er was al een zebra-boekje over het getal π (deel 6) en ϕ (deel 4) en nu dan ook over een andere bijzonder getal: $\sqrt{2}$. Het is een zeer gevarieerd boekje geworden, want het getal $\sqrt{2}$ kom je op heel veel verschillende plaatsen in de wiskunde tegen. Het boekje is ook goed leesbaar en bevat een grote verzameling van veelal van elkaar losstaande onderwerpen waarbij $\sqrt{2}$ een rol speelt. Er staan voor verdieping veel verwijzingen in naar andere zebra-delen. Ik vind dat het de schrijvers niet helemaal gelukt is een doorlopende lijn in het boekje of logische samenhang aan te brengen. Maar een leerling die dit boekje doorwerkt komt in aanraking met een aantal erg mooie stukjes wiskunde!

Niveau

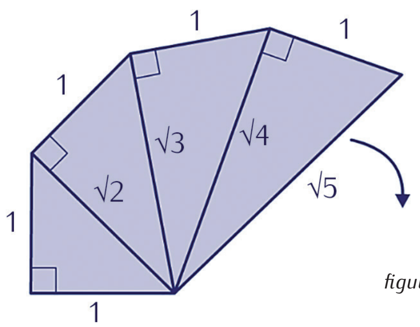
Het niveau in het boekje varieert nogal. Sommige delen kunnen de betere havo-leerlingen met wiskunde B misschien wel aan, maar het is wat betreft moeilijkheid en benodigde kennis en algebraïsche vaardigheden grotendeels op niveau vwo wiskunde B.
Van slechts een deel van de opgaven is achterin het antwoord opgenomen. Het is een keuze, maar ik had liever bij alle opgaven een uitwerking of kort antwoord gezien.

> "Een leerling die dit boekje doorwerkt komt in aanraking met een aantal erg mooie stukjes wiskunde"

Het boekje hinkt een beetje op twee gedachten: het moet allemaal wiskundig correct zijn en alles wordt netjes bewezen, maar het moet toch ook weer niet al te formeel zijn om het voor leerlingen behapbaar te houden. Met name in situaties waarbij limieten aan de orde komen of oneindigheid in het spel is, is goed merkbaar dat voor de leerlingvriendelijke weg is gekozen. Ik vind deze keuze zeer acceptabel uitpakken.

Oppervlakte 2

Het boekje begint heel voorzichtig: bestaat er een vierkant met oppervlakte 2? Deze vraag lijkt triviaal, maar hóe weet je dat zeker? Nou, gewoon door er een te tekenen! Je maakt met vier eenheidsvierkanten een vierkant van 2 bij 2, de middens van de zijden verbinden geeft een vierkant met oppervlakte 2. Dus hij bestaat. En je hebt meteen een lijnstuk van lengte $\sqrt{2}$ getekend.
Met dezelfde constructie, door binnen een vierkant met hele zijden een gedraaid vierkant te tekenen met hoekpunten die de vier zijden van het grotere vierkant in een bepaalde verhouding verdelen, kun je ook vierkanten met andere oppervlaktes tekenen en dus lijnstukken met bijvoorbeeld lengte $\sqrt{5}$ tekenen. Is soms toch wel even puzzelen. En en passant wordt hierbij ook nog de stelling van Pythagoras bewezen.
Leuke aanpak. Zelf moest ik aan onderstaande spiraal denken, zie figuur 1. Op die manier kun je op een eenvoudige manier een lijnstuk van elke lengte $\sqrt{n}$ construeren. Wel ben je dan voor grotere waarden van n even bezig. Dit plaatje had in het boekje echter niet misstaan.



figuur 1

Irrationaal

Het wordt daarna een stuk pittiger in hoofdstuk 3: er volgt het welbekende *bewijs uit het ongerijmde* van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ door naar het even en/of oneven zijn van teller en noemer te kijken in het geval $\sqrt{2} = a/b$ met a en b gehele getallen. Maar er volgt ook nog een ander bewijs (van Miklós Laczkovich, volgens de methode van *infinite descent*) en een meetkundig bewijs (door een onmogelijke, steeds kleiner wordende reeks driehoeken te construeren). Echte wiskunde!

Benaderingen van √2

In hoofdstuk 4 worden de *Pell-vergelijkingen* $a^2 = 2b^2 \pm 1$ gebruikt om steeds betere rationale benaderingen van $\sqrt{2}$ te vinden. Daarbij worden twee rijen gebruikt: een rij a_n en b_n voor de tellers en noemers van een rij breuken die aantoonbaar convergeren naar $\sqrt{2}$. Hierbij komt – nogal informeel – het bewijs door *volledige inductie* voorbij. Ik vermoed dat leerlingen dit stuk erg lastig zullen vinden. Zeker voor leerlingen die nog nooit met rijen en/of met volledige inductie hebben gewerkt. In een opgave hierbij wordt gevraagd een relatie te vinden tussen de tellers van twee opeenvolgende breuken in de rij. Waar in het hele boekje alles wordt bewezen, is dat hier ineens niet nodig. Het bewijs is ook moeilijk, ik was er wel even mee bezig, maar het was dan wel zo mooi geweest om erbij te zetten dat het bewijs achterwege gelaten mag worden omdat het (te) moeilijk is, of voor de liefhebbers is (of als onderdeel van de eindopdracht op te nemen). Ook kettingbreuken komen voorbij om benaderingen van $\sqrt{2}$ te vinden. Voor wie dit nog niet eerder heeft gezien, gaat dit stukje behoorlijk snel.

Verhoudingen

Hoofdstuk 5 maakt een uitstap naar de goniometrie. Met de dubbelehoekformules wordt een mooie regelmatige rij van cosinussen van hoeken geconstrueerd met een 'hoog $\sqrt{2}$-gehalte'. Hoofdstuk 6 gaat verder in op snellere benaderingsmethoden. Met de formule van Heron en van Newton. Interessante wiskunde. Hoofdstuk 7 gaat over verhoudingen van lijnstukken en met name lengte-breedte-verhoudingen bij rechthoeken. De *gouden verhouding* wordt aangestipt en daarna wordt de *zilveren verhouding*, waarbij $\sqrt{2}$ een rol speelt, geïntroduceerd. Leuk.
Natuurlijk mag de verhouding van de zijden van een A4-tje niet ontbreken. Maar hier mis ik wel wat belangrijke achtergrondinformatie: A0 is een vel papier van precies 1 m^2 en verhouding $1 : \sqrt{2}$ tussen breedte en lengte. Dan is prima uit te rekenen waarom een huidig A4-tje 210 bij 297 mm is. Dat inzicht blijft nu achterwege.

Eindopdracht

Hoofdstuk 8 bevat de eindopdracht. Ik citeer:
'De eindopdracht bij dit boekje is heel simpel; schrijf je eigen boekje maar dan met $\sqrt{3}$ in de hoofdrol.' Er volgen dan wat aanwijzingen om hieraan te beginnen.
Ten slotte, ik moest tijdens het lezen denken aan het volgende uitdagende probleem. Maak de getallen 1 t/m 10, elk met precies drie tweeën. Hierbij zijn alle wiskundige bewerkingen toegestaan. Er is een mooie oplossing met een 'hoog $\sqrt{2}$ gehalte'. Het antwoord staat ergens in een hoekje in deze *Euclides*...

Over de auteur

Henk Reuling is al 29 jaar wiskundedocent op het Liemers College in Zevenaar. Als pilotdocent was hij betrokken bij de nieuwste programma's voor vwo wiskunde C en wiskunde B. Hij is daarnaast al vele jaren betrokken bij de *Wageningse Methode* als auteur en programmeur van wiskundeapplicaties, en is momenteel ook voorzitter van deze stichting. E-mailadres: *h.reuling@gmail.com*.
Website: *henkreuling.nl*

Mededeling

Wiskunde Olympiade

Op 13 maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op twaalf universiteiten. De opgaven en uitwerkingen zijn na afloop gepubliceerd op *www.wiskundeolympiade.nl*. Ongeveer 1000 leerlingen waren uitgenodigd voor de tweede ronde. De leerlingen deden mee in drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer 40 leerlingen worden uitgenodigd voor de finale in september. Wie de winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekendgemaakt.

Gerard Koolstra

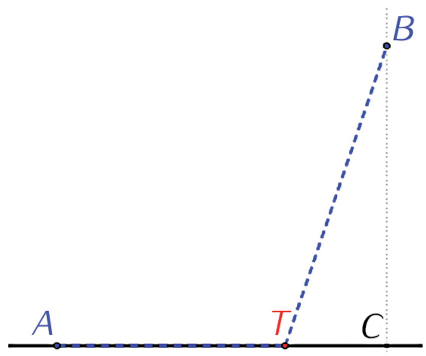
De snelste route

Natuurkundigen noemen het de brekingsindex. Het heet ook wel het James Bond-probleem. Elvis de hond kon het volgens een wiskunde A-examen instinctief oplossen. Maar Gerard Koolstra gaat er op verrassende wijze aan rekenen.

Inleiding

De *kortste* route van A na B is, als er geen obstakels zijn, een (deel van) rechte lijn. Bij het bepalen van de *snelste* route moet vaak afgeweken worden van deze koers, door extra voorwaarden, verschillende (maximum) snelheden, et cetera. Met snelste route bedoelen we (uiteraard) dat deze route de minste tijd vraagt. In plaats van de snelste route kan bijvoorbeeld ook gezocht worden naar het goedkoopste traject (bijvoorbeeld bij het aanleggen van leidingen).

Een bekend probleem



figuur 1

Zie figuur 1. Wat is de snelste (of goedkoopste) route van A naar B als AT (T op een gegeven lijn door A) een gunstiger tarief heeft dan TB? In het Centraal Examen wiskunde A vwo 2016[1] kwam een dergelijk probleem voor met in de hoofdrol de hond Elvis, die zo snel mogelijk vanuit A een stok uit het kanaal (bij B) moest halen. De lijn AC was daarbij de oever, en punt T de plek waar de hond te water gaat. Als we C definiëren als de loodrechte projectie van B op de lijn AT, dan kunnen we de kosten (in tijd of geld) van traject ATB schrijven als:

$$K = k_1 \cdot AT + k_2 \cdot \sqrt{TC^2 + CB^2} \qquad [1a]$$

waarbij k_1 en k_2 de kosten per eenheid op respectievelijk de stukken AT en TC zijn. Bij tijd kunnen de 'kosten' bijvoorbeeld uitgedrukt worden in seconden per meter. In dit geval zijn de eenheidskosten omgekeerd evenredig met de snelheid.
Uiteraard is alleen de verhouding van de kosten van belang, we kunnen de eenheden altijd zo kiezen dat geldt: $k_1 = 1$. Dan kunnen we schrijven:

$$K = AT + k \cdot \sqrt{TC^2 + CB^2} \qquad [1b]$$

Nu is k ($k > 1$) de factor die aangeeft hoeveel maal zo traag of duur het stuk TB per lengte-eenheid is vergeleken met het stuk AT. Voor $0 < k \leq 1$ is natuurlijk AB niet alleen de kortste maar ook de snelste / goedkoopste route.
We noemen de afstand AC: c , BC : b en de (variabele) afstand TC: x. We kunnen nu schrijven:

$$K(x) = c - x + k\sqrt{x^2 + b^2} \qquad [1c]$$

Door te herschalen is het aantal parameters nog wat verder terug te brengen. We kiezen de lengte-eenheid zó dat geldt: $b = 1$. Dit levert:

$$K(x) = c - x + k\sqrt{x^2 + 1} \qquad [1d]$$

Differentiëren geeft: $K'(x) = -1 + \dfrac{kx}{\sqrt{x^2+1}}$ waaruit volgt dat

$$K'(x) = 0 \iff \frac{kx}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \iff kx = \sqrt{x^2+1} \qquad [2]$$

$$\underset{[x \geq 0]}{\iff} k^2x^2 = x^2 + 1 \iff (k^2-1)x^2 = 1 \underset{[k>1]}{\iff} x^2 = \frac{1}{k^2-1}$$

$$\underset{[x \geq 0]}{\iff} x = \sqrt{\frac{1}{k^2-1}} = \frac{1}{k^2-1}\sqrt{k^2-1} \qquad [3]$$

Met bijvoorbeeld de tweede afgeleide kan eenvoudig aangetoond worden dat het hier om een minimum gaat.

In vraag 17 van het eerder genoemde CE wiskunde A-examen wordt eigenlijk gevraagd de waarde van [3] te benaderen in twee decimalen in het geval dat $k = 7$, en te laten zien dat daar 0,14 uitkomt.
De waarde van c (dus de afstand AC) lijkt niet van belang, maar als k te dicht bij 1 komt wordt TC groter dan AC, hetgeen een duidelijk onjuiste optimale route oplevert. T moet echt tussen A en C (inclusief eindpunten) liggen.
Uit $x \leq c$ volgt met [3]:

$$\sqrt{\frac{1}{k^2-1}} \leq c \quad \Leftrightarrow \quad c \geq \frac{1}{k^2-1} \qquad [4]$$

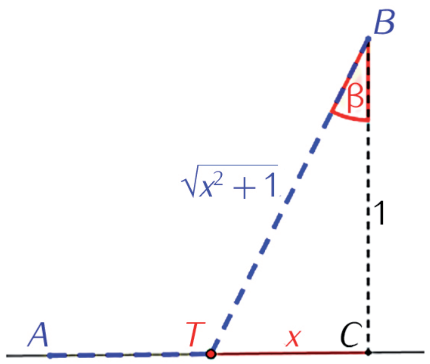
Wat betekent dit praktisch?

Als het traject TB maar 10% 'duurder' is dan AT geldt: $c \geq \sqrt{(100/21)} \approx 2{,}2$. In dat geval moet de afstand AC dus ruimt twee keer zo groot zijn als de afstand BC, om [3] te kunnen gebruiken. Als dat niet het geval is, wordt de directe route AB optimaal. In de praktijk[2] is c echter vaak veel groter dan b, en speelt dit dus eigenlijk geen rol.

Het ligt voor de hand dat als k toeneemt, de optimale waarde van x steeds dichter, en willekeurig dicht, naar 0 kruipt. Er geldt inderdaad: $\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1}{k^2-1}} = 0$.

Met behulp van [2] is k eenvoudig uit te drukken in x:

$$k = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$



figuur 2

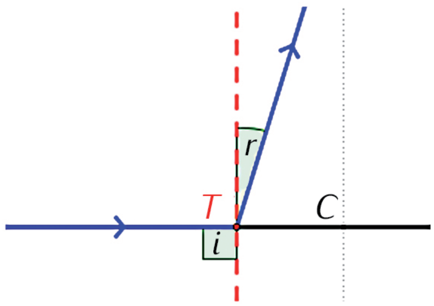
In figuur 2 is te zien dat het gaat om het omgekeerde van de sinus (ook wel de cosecans genoemd) van hoek TBC, ofwel:

$$k = \frac{1}{\sin(\beta)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{1}{k} \qquad [5]$$

Dit is in feite een bijzonder geval van de wet van Snellius die vastlegt hoe lichtstralen worden gebroken bij de overgang van een medium (bijvoorbeeld lucht) naar een ander medium (bijvoorbeeld water):

$$\frac{\sin(i)}{\sin(r)} = \frac{v_1}{v_2} \qquad [6]$$

waarin i = hoek van inval, r = hoek na breking (refractie), v_1 en v_2 = snelheden van het licht in media 1 en 2



figuur 3

In figuur 3 gaat het letterlijk en figuurlijk om een grensgeval: $\sin(i) = 1$. Verder geldt: $r = \beta$ en $v_1 / v_2 = k$. Uit [6] volgt dan $1 / \sin(\beta) = k$.
Omdat het bepalen van de optimale hoek β zo eenvoudig is, lijkt het de moeite waard om ook de kosten van de route uit te drukken in β:
$TC = \tan(\beta)$ en $TB = 1 / \cos(\beta)$. We kunnen dus de kosten als volgt schrijven als functie van β:

$$K(\beta) = c - \tan(\beta) + \frac{k}{\cos(\beta)} \qquad [7a]$$

Het omgekeerde van de cosinus wordt ook wel de secans genoemd en afgekort als sec. We kunnen dus desgewenst ook schrijven:

$$K(\beta) = c - \tan(\beta) + k\sec(\beta) \qquad [7b]$$

Differentiëren van [7] geeft

$$K'(\beta) = -\frac{1}{\cos^2(\beta)} + k\frac{\sin(\beta)}{\cos^2(\beta)} = \frac{k\sin(\beta)-1}{\cos^2(\beta)}.$$

$K'(\beta) = 0$ leidt wederom tot $\sin(\beta) = 1/k$.

Minimale kosten

Soms wordt uitdrukkelijk gevraagd naar de minimale kosten (in tijd of geld) voor het hierboven geschetste probleem.

>

Het eenvoudigst lijkt het om de bij [3] gevonden waarde voor x in te vullen in [1d].

Dat geeft:

$$K_{\min} = c - \sqrt{\frac{1}{k^2-1}} + k\sqrt{\frac{1}{k^2-1}+1}.$$

Dit gaan we wat herschrijven (bedenk dat $k > 1$):

$$K_{\min} = c - \sqrt{\frac{1}{k^2-1}} + k\sqrt{\frac{1}{k^2-1}+\frac{k^2-1}{k^2-1}} = c - \sqrt{\frac{1}{k^2-1}} + k\sqrt{\frac{k^2}{k^2-1}} =$$

$$= c - \sqrt{\frac{1}{k^2-1}} + k^2\sqrt{\frac{k}{k^2-1}} = c + (k^2-1)\sqrt{\frac{1}{k^2-1}} =$$

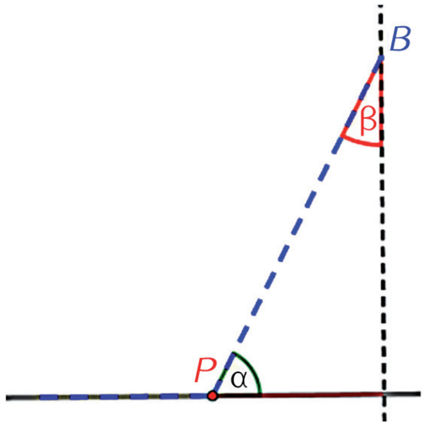
$$c + \sqrt{k^2-1} \qquad [8]$$

Als de eenheidskosten voor het tweede, duurdere gedeelte twee maal zo hoog zijn als voor het eerste deel worden de minimale kosten: $c + \sqrt{(2^2 - 1)} = c + \sqrt{3}$.
Dat is leuk zo'n eenvoudige formule, maar wat betekent dat in de praktijk?
Laten we een menselijke variant op het examenvraagstuk bekijken, zie ook noot 2.
Je loopt in zuidelijke richting op het (harde deel van) het strand. 250 meter zuidelijker, en 80 meter naar het oosten ligt een strandpaviljoen. Afwijken van de zuidelijke koers betekent dat het tempo van 5 km/h terugzakt naar 2 km/h. Wat is het beste punt om van koers te veranderen als je zo snel mogelijk bij het paviljoen wil zijn?
In dit geval geldt: $k = 5/2 = 2{,}5$ en $c = 250/80 = 3{,}125$.
Invullen in [8] geeft $K_{\min} = 3{,}125 + \sqrt{5{,}25} \approx 5{,}42$.
Maar wat betekent dit nu? Hoe lang duurt het voordat je het paviljoen bereikt hebt?
Dat vraagt nog wel wat rekenwerk.
Bij de gebruikte formule (1d) is de lengte-eenheid 80 m, en de kosteneenheid het aantal minuten (of desgewenst seconden) dat nodig is om deze afstand af te leggen op het harde zand: 5 km/h komt overeen met 25/18 m/s. Dat betekent dat elke meter 18/25 = 0,72 s kost. Een afstand van 80 m zou bij deze snelheid dus 80 × 0,72 = 57,6 s vergen.
Met andere woorden: onze kosteneenheid is 57,6 s. Dat betekent dat de tijd die minstens nodig is als volgt te berekenen is: 5,42 x 57,6 s ≈ 312 s. Het duurt dus ruim 5 minuten om het paviljoen te bereiken.

We kunnen natuurlijk ook een formule opstellen die meteen de minimale kosten geeft in een voor de hand liggende eenheid. Wanneer we de snelheden uitdrukken in m/s krijgen we voor de minimale tijd in seconden:

$$K_{\min} = \frac{c}{v_1} + \frac{b}{v_1}\cdot\sqrt{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1} \qquad [9]$$

We gaan deze formule toepassen op de situatie rond Elvis uit het vwo wiskunde A-examen 2016.
Daar gold: $v_1 = 7$ m/s, $v_2 = 1$ m/s, $b = 20$ m en $c = 15$ m.
Invullen geeft: $K_{\min} = 15/7 + 20/7\cdot\sqrt{48} \approx 22$ s. Elvis heeft dus minstens 22 seconden nodig om een stok uit het water te halen die 20 meter verder, 15 meter uit de kant ligt



figuur 4

Ten slotte nog even terugkomend op de menselijke variant, en de vraag op welk moment je het beste het harde zand kunt verlaten op weg naar een strandpaviljoen of opgang. De afstanden c en b (langs en dwars op het water) zijn niet altijd bekend, en soms lastig te schatten. Dat is ook niet nodig als we maar de verhouding kennen tussen de snelheden op het harde en het zachte gedeelte. Als we op het harde deel 2,5 maal zo hard lopen als door het mulle zand, geldt volgens [5b] dat we er voor moeten zorgen dat sin(β) = 2/5. Hieruit valt af te leiden dat β ≈ 24° (en dus α ≈ 66°). Het goed kunnen schatten van hoeken is voldoende, zoals ook de wet van Snellius laat zien.

Noten

[1] Het gaat om vraag 13 t/m 17 (pp 10-12). Het examen is uiteraard te raadplegen via *examenblad.nl*.

[2] Zoals tijdens de halve marathon van Egmond, waar de lopers moeten kiezen waar ze het relatief harde zand verlaten om via het mulle zand naar de strandopgang te zwoegen.

Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundE-brief. E-mailadres: *gerardk@xs4all.nl*

Simon Biesheuvel

Kleintje rekenen

Kan ik al differentiëren?

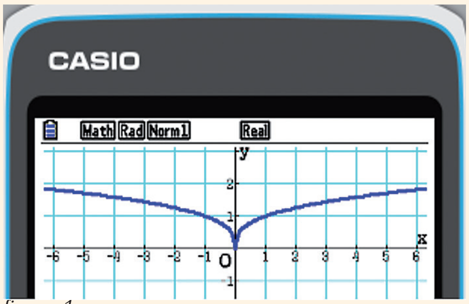
Zomaar uit het niets vroeg ik me laatst af wat de afgeleide is van de functie $f(x)=\sqrt[6]{x^2}$.

Het leek me gewoon $f(x)=x^{\frac{2}{6}}=x^{\frac{1}{3}}$ en dus is

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

En wat zou dan $f'(-1)$ zijn? Invullen van -1 voor x geeft $\frac{1}{3}$ en dit kan niet kloppen.

De grafiek van functie $f(x)=\sqrt[6]{x^2}$ staat in figuur 1.



figuur 1

De grafiek is dalend voor x-waarden kleiner dan nul.
Er zal dus eerder $-\frac{1}{3}$ uit moeten komen.

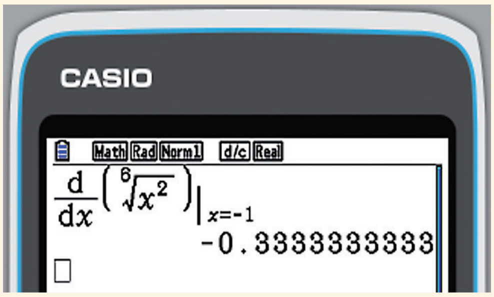
Wat gaat er mis? Natuurlijk, dat is ook zo: de regel $\sqrt[6]{x^2}=x^{\frac{2}{6}}$ geldt alleen voor $x>0$.

De toevoeging $x>0$ zie ik wel terug bij *Moderne Wiskunde*, maar niet bij *Getal & Ruimte*.
Maar er wordt in beide methodes niet uitgelegd hoe je moet differentiëren als $x<0$.

Dit gaat als volgt: $f(x)=\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{(-x)^2}=(-x)^{\frac{1}{3}}$ en omdat $-x>0$, mag nu de wortel wel vervangen worden door een macht. Volgens de kettingregel komt er nu uit:

$f'(x)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}$ en vind ik $f'(-1)=-\frac{1}{3}$.

Mijn GR die een afgeleide 'slechts' numeriek kan benaderen krijgt wel $-\frac{1}{3}$ als antwoord, zie figuur 2.



figuur 2

Ik heb mijn leerlingen dus een schema over x^2 gegeven.

1 $\quad \sqrt{x^2}=|x|$ dus voor $x<0$ geldt $\sqrt{x^2}=-x$ en voor $x>0$ geldt $\sqrt{x^2}=x$

2 $\quad \ln(x^2)=2\ln(|x|)$ dus voor $x<0$ geldt $\ln(x^2)=2\ln(-x)$ en voor $x>0$ geldt $\ln(x^2)=2\ln(x)$

3 $\quad \sqrt[6]{x^2}=|x|^{\frac{1}{3}}$ dus voor $x<0$ geldt $\sqrt[6]{x^2}=(-x)^{\frac{1}{3}}$ en voor $x>0$ geldt $\sqrt[6]{x^2}=x^{\frac{1}{3}}$

Mijn leerlingen leren al punt 1 en 2.
Met deze twee regels ervoor is regel 3 eigenlijk helemaal niet zo bijzonder. Maar wel even het vermelden waard!

Antwoord op de vraag van pag. 23

$1=-{}^2\log({}^2\log(\sqrt{2}))$
$2=-{}^2\log({}^2\log(\sqrt{\sqrt{2}}))$
$3=-{}^2\log({}^2\log(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}))$
…
$10=-{}^2\log({}^2\log(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}))$

Marloes van Hoeve, Greg Alpár

Mindset en lesmateriaal

De mindset van een leerling speelt een grote rol bij het leren van wiskunde. Staat een leerling open voor nieuwe dingen en durft hij fouten te maken? Het gedrag van de docent heeft invloed op de mindset van leerlingen, maar ook het lesmateriaal. Hoe kun je lesmateriaal optimaliseren voor het creëren van een growth mindset?

Inleiding

Waarom is mindset zo belangrijk? Met name bij het omgaan met fouten en als iets moeilijk is, hebben leerlingen die werken vanuit een growth mindset een groot voordeel. Op school, en bij de wiskundelessen, zijn veel momenten waarop je hiermee goed kunt oefenen. Voor het werken met een growth mindset is het nodig dat docenten minder focussen op reproductie en proberen aan te sluiten bij de intrinsieke motivatie en nieuwsgierigheid van leerlingen. Ook is het belangrijk dat er aandacht komt voor het maken van verbindingen, tussen wat leerlingen kunnen en wat ze gaan leren, tussen wat ze weten en voelen, en tussen wat ze zelf kunnen en wat ze van anderen kunnen leren. Ook speelt de mindset van de docent een rol. Vanuit welke mindset geef je les? Onderken je dat je soms vanuit een fixed mindset reageert, en hoe ga je daar dan mee om? Dat zijn allemaal voorbeelden waarvan leerlingen weer kunnen leren.

Lesmateriaal

Lesmateriaal is een belangrijk gereedschap voor het beïnvloeden van de mindset. In een recent artikel schrijven Daly et al.[1] dat het gebruik van lesmateriaal volgens de mathematical mindset theorie van Dweck[2] en Boaler[3] de motivatie verhoogt.
In dit materiaal is het belangrijk:

- opdrachten open te maken zodat er verschillende methodes, manieren en representaties zijn voor de oplossingen;
- onderzoeksopdrachten te gebruiken;
- het probleem te schetsen voordat de uitleg wordt gegeven;
- een visuele component toe te voegen;
- er een *low floor high ceiling* opdracht van te maken;
- leerlingen te vragen om te redeneren, overtuigen en sceptisch te zijn.

De middelbare school wiskunde moet onder andere een springplank zijn voor het hoger onderwijs. Lesmateriaal kan daarbij helpen, met name als het de volgende elementen bevat:

1) Visualisaties. Deze ondersteunen het (na)denken en er is minder achtergrond nodig wat meer gelijkheid geeft.
2) Verbindingen:
    - tussen nieuwe en aanwezige kennis;
    - tussen activiteiten: zo kun je uitleg en het maken van opgaven afwisselen met bijvoorbeeld het gebruik van number talk[4] (gesprekken over getallen waarmee je werkt aan wiskundig bewustzijn) en dot-cards (herkennen van patronen);
    - tussen benaderingen: geef bijvoorbeeld verbanden tussen algebra, getallen en grafieken.
3) Systematische denkwijze:
    - verkennen: het opbouwen van kennis en gevoel voor een nieuw onderwerp;
    - vermoeden: het herkennen van veronderstelde regelmatigheden, patronen;
    - beredeneren: het geven van overtuigend wiskundige redenen waarom een vermoeden zou kunnen gelden.

Bestaand lesmateriaal kan worden aangepast op basis van deze kenmerken. De afgelopen drie jaar is onderzoek gedaan naar het effect van deze aanpassingen. Het onderzoek vond plaats op twee manieren: als Comeniusproject waarbij een Open Maths cursus op twee universiteiten is ontwikkeld en als post-doc vo-project met interventies op tien middelbare scholen[5]. Drie soorten aanpassingen worden in dit artikel verder toegelicht. Het zijn korte opdrachten en snelle eenvoudige veranderingen van het lesmateriaal die het lesgeven meetbaar veranderen.

1 Mijn wiskundeverhaal

Om de leerlingen goed te leren kennen en om te kijken hoe ze zich verhouden tot wiskunde, is het goed om een nieuw schooljaar of een nieuwe opleiding te beginnen met deze opdracht. Er komen punten uit naar voren waarmee teruggekeken kan worden op alle wiskunde-ervaringen van de leerling. Het is belangrijk dat docenten de wiskundeachtergrond van hun leerlingen kennen, zodat ze weten hoe de leerlingen zich verhouden tot wiskunde, en dus met welke mindset ze in de klas zitten. Door deze opdracht kunnen leerlingen ook op hun eigen ervaringen reflecteren en voelen ze zich gehoord.

Opdracht

Beschrijf in het kort (1-4 pagina's) je eigen ervaringen met wiskunde. Hoe hebben belangrijke ervaringen invloed op hoe je je voelt over wiskunde, en welk effect had dit op je toen je rekenen en wiskunde aan het leren was? Je mag gebruik maken van ervaringen op school, thuis, zelfstudie, enzovoorts. Misschien hebben gesprekken met familieleden impact op je gehad? Had je het geluk een geweldige leraar te treffen, of heb je juist een traumatische ervaring gehad terwijl je wiskunde probeerde te leren? Houd het simpel. Het doel is je de gelegenheid te geven je wiskundeachtergrond met ons te delen, zodat wij weten hoe je je verhoudt tot wiskunde.

Deze opdracht is getest onder eerstejaars studenten op de universiteit. Daarbij kwamen twee belangrijke aspecten naar voren die wij als docenten in het vo kunnen gebruiken om op onze eigen lessen te reflecteren.

Beeld van wiskunde

Studenten vonden wiskunde 'een verzameling van feiten en trucjes die ze moesten onthouden en toepassen'. Ze zeiden 'Op de basisschool was onthouden en reproduceren de belangrijkste manier om wiskunde te leren' of 'Ik kreeg het idee dat wiskunde om snelheid gaat en dat je oplossingen dient te geven zonder hulpmiddelen'. Ze vertelden ook dat wiskunde op zo'n manier gegeven werd dat het niet gerelateerd werd aan andere zaken zoals 'normaal' menselijk denken, andere schoolvakken, alledaagse vraagstukken enzovoort. Ook werd regelmatig opgemerkt dat ze geen antwoord kregen op de vraag 'waarom', bijvoorbeeld 'waarom is 2×3 gelijk aan 6' of 'waarom is de sinus van een $\frac{1}{2}\pi$ gelijk aan 1'. Uit de verhalen kwam naar voren dat het beeld van wiskunde bij veel studenten is dat wiskunde een simpel, informatie gevuld vak is waar je veel dingen even moet onthouden en dan weer snel kunt vergeten.

> "Dingen niet meteen snappen wordt binnen de wiskunde vaak als zwak gezien, waardoor leerlingen een worsteling als een mislukking ervaren."

Wiskundig vermogen

Studenten beschreven zichzelf verder als hulpeloze objecten in het onderwijs waar veel afhing van de omstandigheden. Ze ontwikkelen fixed-mindset ideeën over zichzelf en waren vaak bang voor het vak. Ze gaven bijvoorbeeld aan: 'In mijn beleving was ik altijd heel slecht in wiskunde'; 'Wiskunde, een woord waar ik tot voor kort een panische angst voor had en waar ik jaren met een grote omweg omheen zou lopen'. 'Slechte cijfers volgden en ik raakte ervan overtuigd dat je mensen had mét een wiskundeknobbel, en mensen zonder'. Een duidelijk voorbeeld hierbij is de keuze voor wiskunde A of wiskunde B. Vaak hadden ze te horen gekregen 'dat ze niet goed genoeg waren voor wiskunde B'. Bijna alle studenten schreven op dat ze toen niet dachten dat ze iets hadden kunnen veranderen aan hun vaardigheden. Ze realiseerden zich soms pas later dat ze meer hadden kunnen doen, of dat ze zichzelf hadden kunnen uitdagen met moeilijkere opgaven. Ook benoemden veel studenten het feit dat het leren van nieuwe concepten vaak niet makkelijk is, en dat er vaak een zekere vorm van frustratie bij komt kijken. Omdat langzaam werken en dingen niet meteen snappen binnen de wiskunde vaak als zwak worden gezien voelden veel leerlingen die worsteling als een mislukking.

Er valt enorm veel informatie uit een dergelijke opdracht te halen; om leerlingen te leren kennen en om te kijken hoe ze zich voelen ten opzichte van wiskunde. Deze informatie is ook weer belangrijk bij hoe ze omgaan met aangepast lesmateriaal (als het minder gestructureerd is) en met het maken van fouten (hoe denken ze dan over zichzelf). De docent kan bij het geven van feedback ook beter aansluiten bij de achtergrond van de leerling.

2 Opdrachten aanpassen

Het aanpassen van het lesmateriaal voor het werken met een growth mindset lijkt wel wat op de punten die beschreven worden in 'Wiskundige Denkactiviteiten' (zie het artikel van Paul Drijvers en Marieke Bor, *Euclides* 91-3). Het gaat niet alleen over het oplossen van problemen maar ook, of meer nog, over het hoe en waarom; welke verschillende manieren zijn er allemaal om het probleem op te lossen?, hoe kijk je terug en reflecteer je?, hoe kun >

je verder denken en jezelf vervolgvragen stellen? Wat dat betreft is zo'n relatief nieuwe theorie deels ook weer het herontdekken van oude ideeën. Door er nu, met een mindset-bril op, naar te kijken ga je nog meer in op hoe leerlingen leren. Je weet wat ze nodig hebben om ook met vertrouwen aan het werk te gaan, en hoe je als docent daarbij kunt helpen.

Hieronder staat een voorbeeld van een 'uitgeklede' opgave uit de eerste klas bij de theorie over het kgv en de ggd. In het lesboek staat eerst de theorie uitgelegd en dan volgt een vraag die bestaat uit a, b, c en d. De docent kan in plaats hiervan alleen onderstaande opgave op het bord zetten.

> Een rechthoekig terras is 192 bij 120 cm. Meneer Boom wil het terras met even grote vierkante tegels bedekken. Hij wil geen tegels breken. Wat zijn de afmetingen van de grootst mogelijke tegel?

Als leerlingen het lastig vinden om aan de slag te gaan, of als ze al heel snel op een antwoord komen, kun je de volgende vragen stellen:
Welke vierkante tegels kan hij allemaal gebruiken? Wat zijn de kleinste en wat zijn de grootste?
Kun je dit visualiseren? Kun je een tekening van de situatie maken?
Hoe kun je 'met proberen' tegels vinden? Welke regelmaat zit er in? Hoe heeft het te maken met deelbaarheid?
Kun je vloeren bedenken met andere afmetingen waarop alleen tegels van 1cm × 1cm passen? Of kun je patronen maken met tegels van verschillende vierkanten die uiteindelijk ook bij elkaar een terras mooi vullen (eenvoudig: 15 × 15 en 30 × 30; maar ook 12 × 12 en 30 × 30; ...). Dit als aanloop naar kgv.
Leerlingen die denken dat het niet groter dan 24 × 24 kan, kun je uitdagen om aan te tonen hoe je dat zeker kunt weten (proberen naar gemeenschappelijke delers te sturen). Hier kunnen leerlingen ook hele andere dingen bedenken. Bijvoorbeeld dat het verschil 192 – 120 = 72 ook deelbaar is door 24 (en alle andere gemeenschappelijke delers) of dat je kunt werken met tegels met niet-natuurlijke afmetingen (bijvoorbeeld 0,5 × 0,5 cm).

Vervolgens kun je aan de hand van de resultaten van de leerlingen toewerken naar de uitleg over ggd en kgv.

> Uitwerking:
> $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
> $192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
> $\text{ggd}(120, 192) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$
> De afmetingen van de grootst mogelijke tegel zijn 24 bij 24 cm.

Door leerlingen uit te nodigen om dingen te proberen, tekeningen te maken, regelmaat te zien, fouten te maken, te overleggen en te reflecteren laat je ze merken vanuit welke mindset ze aan het werk zijn en kun je ze leren om vanuit een growth mindset aan de slag te gaan. Dus met vertrouwen dat je kunt leren.

> "Door het maken van fouten bewust te maken in de lessen kun je werken aan een growth mindset."

3 Een andere focus op fouten

Boaler legt uit dat het belangrijk is om te leren om het niet erg te vinden om fouten te maken. Als je een fout maakt vanuit een fixed mindset, dus met het idee dat je intelligentie vastligt, raak je gestrest en leer je veel minder. Als je vanuit een growth mindset een fout maakt, dus als je weet dat je door oefening kan leren, dan blijkt uit hersenscans dat je hersenen ook echt nieuwe verbindingen maken en veel meer aan het werk zijn. Je ziet in dat door het maken van fouten, en vervolgens inzicht krijgen in wat er fout is gegaan, kunt leren. Door het maken van fouten bewust te maken in de lessen kun je hieraan werken.

> ### Opdracht
> Het doel van de volgende lesvorm is gemaakte fouten eerst in groepjes en daarna klassikaal te analyseren. Aan het begin van de les gaan de leerlingen in groepjes van vier zitten. Ieder groepje krijgt vier verschillende kleuren papiertjes waarop vier verschillende opdrachten staan (bijvoorbeeld opdrachten uit het boek waar je op dat moment mee bezig bent). Leerlingen gaan in stilte aan het werk en maken de opdracht. Als ze klaar zijn of als de docent het aangeeft, moeten ze hun werk inleveren. Daarna deelt de docent de ingevulde papiertjes weer uit maar zodanig dat per groepje dezelfde kleur (dus dezelfde

opdracht) komt. De leerlingen gaan dan in de groepjes met elkaar en, onder andere aan de hand van een uitwerking, overleggen hoe het gemaakt is, en wat de fouten zijn. Ze worden zo per groepje een opgave-expert.
Vervolgens worden klassikaal op het bord de fouten geïnventariseerd en in overleg met de leerlingen gecategoriseerd (bijvoorbeeld rekenfout, begripsfout et cetera). Als docent kun je van tevoren vast nadenken over de fouten die jij denkt dat er gaan komen en een eventuele indeling maken. Laat deze indeling niet van tevoren zien anders voelen de leerlingen niet dat het hun fouten zijn.

Belangrijk is dat je leerlingen goed observeert en dat je ze uitnodigt om dingen te proberen. Laat ze veel vragen stellen en fouten maken! Let vanaf nu ook op hoe je zelf met je eigen fouten omgaat. Als je een fout maakt terwijl je uitleg geeft: hoe ga je hiermee om en wat geef je je leerlingen als voorbeeld?

Conclusie

Uit de opdracht 'Mijn wiskundeverhaal' kunnen we zien hoe onze leerlingen denken over wiskunde en hoe ze omgaan met uitdagingen. Dit helpt om leerlingen te begeleiden om te werken aan een growth mindset. De aanpassingen in het lesmateriaal zijn daarbij een houvast. Daarnaast zijn docenten het belangrijkste voorbeeld voor de leerling. Durven we zelf het 'even niet te weten', fouten te maken, en daarvan te leren? Stellen we onszelf genoeg de vraag 'waarom' en beantwoorden wij de waarom-vragen van leerlingen wel vaak genoeg? De uitdaging is om open te staan voor vragen van leerlingen, en vragen te durven stellen waarover we zelf geen verwachtingen hebben wat het resultaat zal zijn: dan open je de weg voor verrassende discussies... en ja dat is soms best spannend!

Voor variaties op lesvormen waarin het maken van fouten speels wordt verwerkt:

vakbladeuclides.nl/955hoeve

Noten

[1] Daly, I., Bourgaize, J., & Vernitski, A. (2019). Mathematical mindsets increase student motivation: Evidence from the EEG. *Trends in neuroscience and education*,*15*, 18-28.

[2] Dweck, C.S. (2012). *Mindset, The new psychology of success.* New York: Random House USA Inc.

[3] Boaler, J. (2016). *Mathematical mindset.* Hoboken: Jossey Bass.

[4] Humphreys, C. & Parker, R. (2015). *Making number talks matter*. Main: Stenhouse Publishers.

[5] Alpár, G. & van Hoeve, M. (2019). Towards Growth-Mindset Mathematics Teaching in the Netherlands. Te downloaden van: *https://easychair.org/publications/volume/LINQ_2019*

Over de auteurs

Marloes van Hoeve geeft wiskunde op het Goois Lyceum te Bussum. Zij is in 2000 gepromoveerd op geologisch onderzoek naar cyclische veranderingen in de laat neogene vegetatie uit lacustriene afzettingen in Griekenland. In de periode van 2015 tot en met 2019 onderzocht zij als post-doc vo twee dagen per week, aan de Universiteit Utrecht, de rol van mindset in de wiskundelessen.
E-mailadres: *mvhoeve@gsf.nl*

Greg Alpár is wiskundedocent en toegepast wiskundige. Hij is universitair docent op de Open Universiteit. Greg doet onderzoek op het gebied van cryptografie en computernetwerken. In de periode 2017-2019 heeft hij met een Comeniusbeurs de Open Maths cursus ontwikkeld en onderwezen op twee universiteiten. Het doel van Open Maths is om wiskunde meer aan te laten sluiten bij de belangstelling van leerlingen en bij de realiteit van iedere dag, en bij het werken met een growth mindset.
E-mailadres: *Greg.Alpar@ou.nl*

Laurens Quinten

PWN vakantiecursus 2019

Deep Learning: van meetdata via datarepresentatie naar voorspellen. Dat was het thema van de vorige editie van de Vakantiecursus 2019. Laurens Quinten gaat dieper in op één van de vele aspecten die aan bod kwamen: een zelflerend algoritme.

Inleiding

Sinds 1946 organiseert het Mathematisch Centrum, tegenwoordig deel uitmakend van Platform Wiskunde Nederland, de vakantiecursus. Deze bijna gratis cursus (€99, inclusief diner en lunch) heeft elk jaar een actueel thema dat in acht voordrachten en practica wordt aangeboden. Tot twee jaar geleden waren er veel sprekers, recent is dat format veranderd zodat één hoofdinleider het merendeel van de sessies leidt en daarbij wordt geflankeerd door twee 'gastsprekers'. Een nieuw fenomeen – dat door sommige deelnemers wordt betreurd – is dat de syllabus nu uitsluitend digitaal beschikbaar is via de site van PWN. Voordeel is wel dat veel meer informatie op de website gezet kan worden dan voorheen in de syllabus kon. Het thema van dit jaar was *Deep learning: van meetdata via datarepresentatie naar voorspellen*.

> "Hoe maakt de computer onderscheid tussen foto's van een hond, een huis en een plant'?"

Foto's herkennen

Sjoerd Verduijn Lunel van de Universiteit Utrecht liet ons kennismaken met de manier waarop computers foto's herkennen en toonde vooral de wiskunde die erachter schuilgaat. Daarbij wordt een beroep gedaan op kennis die in de opleiding tot eerstegraads leraar aan de orde komt: matrixvermenigvuldiging, (partieel) differentiëren, inclusief het gebruik van de kettingregel en het gebruik van een gradiënt op een gebogen oppervlak. Voor mij was het verrassend dat computers kennelijk moeiteloos snel kunnen rekenen met matrices van een miljoen bij een miljoen (dus met 10^{12} elementen) en dan ook nog allerlei wiskundige operaties kunnen uitvoeren. Het lijkt erop dat aan de computers nog wat hogere eisen gesteld moeten worden als we ze willen gebruiken voor gezichtsherkenning, waarbij in principe enkele miljarden foto's – liefst op een tamelijk eenduidige manier, iets nauwkeuriger dan 'deze persoon is waarschijnlijk van Europese afkomst' – van elkaar moeten worden onderscheiden! Wat de vakantiecursus zo interessant maakte was de mix van big-data-analyse gecombineerd met zeer kleine voorbeelden: 'hoe beslist de computer van een serie foto's welke die van een hond, een huis en een plant zijn' of 'hoe kan een computer voorspellen of ik een bepaalde cd leuk zal vinden aan de hand van mijn beoordeling en van een aantal andere cd's gecombineerd met de mening van een paar andere personen over diezelfde cd's en het nieuwe exemplaar'? Uiteraard is het onmogelijk om de inhoud van twee dagen cursus in dit artikel te vangen maar wie meer wil weten kan alle materialen vinden op de site van het PWN[1]. Ten slotte gaf Sjoerd Verduijn Lunel aan dat het onderwerp van deze cursus geschikt is voor een profielwerkstuk wiskunde waarbij ook de mogelijkheid bestaat dat de leerlingen ondersteund worden door medewerkers van de universiteit.

Classificeren

De start van de cursus was 'hoe maakt de computer onderscheid tussen foto's van een hond, een huis en een plant'? Zo'n kleurenfoto bestaat uit 248 bij 400 pixels met drie kleuren (rood, geel en blauw) per pixel, elk met een intensiteit variërend van 0 tot 255. Als je van de drie matrices alle kolommen *onder elkaar* zet, ontstaat er een kolomvector met $248 \times 400 \times 3 = 297\,600$ rijen; in het jargon heet dat het *flattened image* van de foto. Met behulp van een matrix moeten daaruit drie scores worden gegenereerd, één voor elk van de drie objecten.

Dat betekent dat die matrix moet bestaan uit drie rijen en 297 600 kolommen. De bovenste rij moet dan elementen bevatten die voor elke pixel de relevantie ervan voor het huis weergeeft; deze rij heet wel een *classifier* voor het object huis. Daarna levert het eerste stukje van de matrixvermenigvuldiging (dat is het inproduct tussen de eerste rijvector van de scorematrix en de flattened image) de score voor het huis met betrekking tot de foto. Met de andere twee delen van de matrixvermenigvuldiging ontstaat dan de scorevector. Na normering tot lengte 1 resteren er drie getallen die de waarschijnlijkheid van resp. huis, hond en plant van de foto voorstellen. Ideaal is natuurlijk $(1, 0, 0)^T$ of $(0, 1, 0)^T$ of $(0, 0, 1)^T$ omdat de foto dan met zekerheid herkend is.

Leren

De kunst van het maken van een lerende computer is nu om – zonder tussenkomst van de mens - met behulp van een iteratief proces de coëfficiënten van de classificatiematrix en de elementen van hulpvector b te verbeteren. Om tot die verbetering te komen maakt de computer gebruik van een functie die een soort verlies genereert van de uitkomst van de matrixvermenigvuldiging plus de hulpvector ten opzichte van de ideale scorevector, die bestaat uit nullen en één 1 (dan is het object met zekerheid beoordeeld als één van de mogelijke voorwerpen). Als illustratie gebruik ik het voorbeeld van een model dat tot doel heeft te beoordelen wat de waardering van een nieuwe cd door een bepaalde proefpersoon zal zijn. Als informatie is bekend hoe een aantal (twee) bekende personen een aantal andere cd's (elf) hebben beoordeeld en wat de proefpersoon van die cd's vond.

Die informatie staat in tabel 1.

cd	Oordeel persoon 1	Oordeel persoon 2	Oordeel proefpersoon
1	1	4	Nee
2	1	5	Nee
3	1,5	4	Nee
4	2,5	1	Nee
5	2,5	1,5	Nee
6	2,5	3	Nee
7	2,5	5	Ja
8	3,5	4	Ja
9	3,5	5	Ja
10	4,5	4	Ja
11	4,5	5	Ja
12	3	3	?

tabel 1

Doel is nu om na te gaan of de proefpersoon cd 12, die door persoon 1 en 2 met een 3 is gewaardeerd, wel of niet zou willen kopen.

Er wordt nu een model ontwikkeld in de vorm van een classificatiefunctie die bij elk van de 11 cd's een score genereert; de scorematrix bestaat uit één rij en twee kolommen, immers er is maar één item dat wordt beoordeeld en er zijn maar twee beoordelingen per cd bekend. De lerende matrix F zal dus bestaan uit één rij, (w_{11}, w_{12}) en een 'hulpvector' b. Voor elke cd bestaat de vector x uit twee elementen, bijvoorbeeld $x_7 = (2{,}5; 5)^T$ en de score is Ja (1); de waarde van de hulpvector is vooralsnog niet duidelijk.

Nu is mijn F dus $w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + b$.

Een voorbeeld van de kostenfunctie is nu

$$C((w_{11}, w_{12}),\ b) = \sum_{i=0}^{i=11}(F(x_i)-y_i)^2$$

en van deze functie willen we nu met partieel differentiëren naar w_i en b de gradiënt bepalen. Voor $i = 7$ staat er dus in de sommatie voor $F(x_i) = 2{,}5w_{11} + 5w_{12} + b$ en voor $y_i = 1$. Doel is nu om vanuit een willekeurig punt (w_{11}, w_{12}, b) een minimum van C te vinden door vanuit dat punt een klein stapje in tegengestelde richting van de gradiënt te maken en vanuit dat punt het proces te herhalen. Dat leidt tot de vondst van een lokaal minimum, dat dus een betere classificatiematrix $(w_{11}\ \ w_{12})$ en een betere b oplevert dan de oorspronkelijke. Het is daarbij uiteraard de vraag of er betere minima bestaan.

Uitsmijter

Als laatste voordracht was er een voordracht van Joost Kok, die op allerlei manieren liet zien hoe data met betrekking tot sporters of sportwedstrijden kunnen worden geëvalueerd en hoe daarmee verbeteringen in het spel kunnen worden bedacht. Als voorbeeld gebruikte hij waarnemingen met behulp van twaalf camera's van alle wedstrijden van het Nederlands voetbalelftal (vrouwen) tijdens het EK 2017. Daarin liet hij zien hoe, gegeven alle posities én bewegingsrichtingen op het veld, te voorspellen is hoe de situatie over bijvoorbeeld 10 seconden is. Deze voorspelling maakt het dus mogelijk om als spelersgroep beter te anticiperen op komende gebeurtenissen (waarbij de speelsters beter niet eerst een halve minuut op hun tablet die voorspelling proberen te achterhalen).

>

Noot

[1] *https://www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus/vakantiecursus-2019/*

Over de auteur

Laurens Quinten is gepensioneerd leraar wiskunde en is bijna veertig jaar verbonden geweest aan Gymnasium Juvenaat in Bergen op Zoom en het Newmancollege te Breda. Na zijn pensionering heeft hij als invaller op zes scholen in Zuidwest-Nederland lessen in de bovenbouw havo/vwo verzorgd.
E-mailadres: *ljiquinten@gmail.com*

Vakantiecursus 2020

Speltheorie: van strategisch beslissen tot 'eerlijke' oplossingen

De wiskundige John von Neumann en de econoom Oscar Morgenstern publiceerden in 1944 samen het boek *The Theory of Games and Economic Behaviour.* Ze legden daarmee de fundamenten voor het vakgebied speltheorie, waarin modellen van conflict en samenwerking centraal staan. In deze cursus maak je kennis met het gedachtegoed van enkele speltheoretici en leer je meer over wiskundige principes daarin.

Hoofddocent: Prof. dr. Frank Thuijsman
Amsterdam: vrijdag 21 en zaterdag 22 augustus 2020
Eindhoven: vrijdag 28 en zaterdag 29 augustus 2020

Fabian Thérou, Wim Steenbakker, Frank van Dijck en Lambrecht Spijkerboer

Quality Class

Al 25 jaar organiseert Lambrecht Spijkerboer de *Quality Class*: een internationaal uitwisselingsprogramma voor leraren in opleiding. Wat waren de ervaringen van enkele Nederlandse deelnemers?

Wat is de Quality Class?[1]

Quality Class is een tiendaags durend uitwisselingsprogramma voor studenten in opleiding tot wiskundedocent, gekoppeld aan een internationale conferentie (meestal CIEAEM) over wiskundedidactiek, georganiseerd door Lambrecht Spijkerboer in samenwerking met Monica Mattei (Italië) en Edyta Juskowiak (Polen). De doelen zijn onder andere: werken in een multiculturele omgeving, samenwerken en presenteren in een vreemde taal en vergroten van kennis van wiskundedidactiek.

Verslag Fabian Thérou

In 2018 heb ik de Quality Class bijgewoond in Warschau, Polen. In eerste instantie zou er nog een andere student meegaan maar die haakte helaas af. Ik vond het interessant dat de Quality Class in Polen was; ik was hier nog nooit geweest en nam daarom ook de tijd om Polen te ontdekken.

figuur 1 Quality Class 2018 (Fabian: derde van rechts)

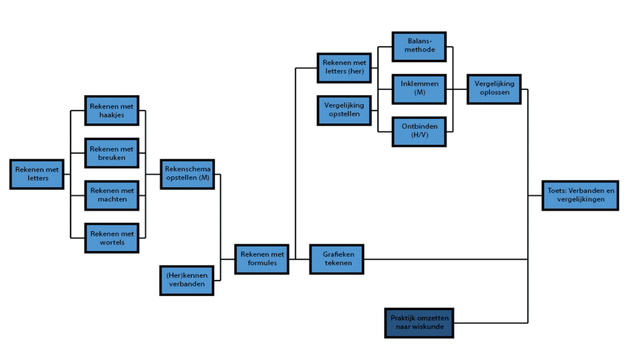
Meetkunde in een kerk

De Quality Class begon met presentaties van alle deelnemende studenten over het onderwijssysteem in hun land: heel leerzaam omdat je dan heel duidelijk kunt zien dat onderwijs op verschillende manieren ingericht kan zijn. Ik kende eigenlijk alleen het onderwijs in Nederland en wist dus niet beter.
In de dagen daarna volgden presentaties over uiteenlopende onderwerpen die de deelnemers uit ieder land hadden voorbereid. Een voorbeeld van een workshop was het bestuderen van meetkunde in kerken. We kregen eerst een theoretisch verhaal over de verschillende typen bogen en hoe deze geconstrueerd zijn. Daarna gingen we naar een kerk toe om deze bogen na te tekenen en vervolgens meetkundig te construeren. Dit was een heel leuke en interessante workshop, waarbij ik meteen dacht aan hoe ik iets soortgelijks kan doen in mijn eigen lessen.

Eigenaarschap leerlingen

De workshop die ik zelf gaf ging over de manier waarop we op mijn school, De Nieuwste School in Tilburg, het wiskundeonderwijs hebben ingericht. We hanteren daar een methode, die ik mede heb ontwikkeld, waarbij we een groot beroep doen op het eigenaarschap van de leerlingen. De wiskundeonderwerpen zijn beschreven in vaardigheden en in kleine eenheden verdeeld door middel van kennen-en-kunnen-lijstjes. Daarnaast hebben we per vaardigheid opdrachten gemaakt waarbij de leerlingen zichzelf formatief kunnen toetsen om erachter te komen of ze de stof al beheersen. De leerlingen doorlopen hun eigen route door de zogenaamde *vaardighedenboom*.

Het zou dus kunnen dat de ene leerling sneller gaat dan de andere en die kan dan meer verdieping of >



figuur 2 De route naar verbanden en vergelijkingen[2]

verbreding krijgen. Daarnaast zitten mavo-, havo- en vwo-leerlingen door elkaar en kunnen ze ook elkaars lesmateriaal gebruiken. Als ze dus willen laten zien dat ze een hoger niveau aankunnen, dan kan dat. Het tegenovergestelde gebeurt ook: als een vwo'er vastloopt, kan hij als tussenstap de havo-stof maken. Ik heb dit overgebracht op de andere Quality Class-studenten door ze zelf een boom te laten 'ervaren' en er een te laten maken.

Wetenschappelijke conferentie

De workshops van medestudenten vond ik heel interessant en goed te volgen. Ik vond het tweede deel van de Quality Class, de wetenschappelijke conferentie, interessant maar wel moeilijker om te volgen. Het Engels van de onderzoekers was niet altijd zo goed en ook de presentaties waren ook niet altijd van hoog niveau. Ik had hier hogere verwachtingen van. Verder hebben we nog een uitstapje naar een paleis gemaakt, wat een welkome afwisseling was tussen alle presentaties door. Ik heb heel erg genoten van de tien dagen en ik zou het zeker anderen aanraden om dit een keer te doen. Het heeft mijn ogen geopend naar meer mogelijkheden binnen het wiskundeonderwijs.

Verslag Frank van Dijck en Wim Steenbakker

Wij hebben Nederland vertegenwoordigd op de Quality Class van 2019 in Portugal. In de workshop die wij gaven, stonden de voor Nederland bekende wiskundetypen; wiskunde A, B, C en D, centraal. Daarnaast kon het voor ons land kenmerkende 'realistische wiskundeonderwijs' (RME) uiteraard niet ontbreken tijdens deze workshop.
Na de leerzame workshops bezochten we gezamenlijk een internationale conferentie over wiskundeonderwijs, de CIEAEM 71. Na plenaire lezingen werden er presentaties in werkgroepen gegeven. Een unieke kans voor de Quality Class-studenten vormde de aparte sessie met één van de prominente conferentiesprekers. De tien dagen die we in Portugal hebben doorgebracht, waren voor ons beiden intensief, maar ook erg leerzaam en inspirerend.

figuur 3 Quality Class 2019
(Frank: uiterst links, Wim: op voorgrond

> "Wiskunde is een universele taal, maar wel met veel dialecten…"

Frank: Op de eerste dag startten we met een aantal interactieve introductiespellen onder leiding van Lambrecht. De spellen waren wiskundig en gericht op het leggen van contact met medestudenten. Prachtig om te zien hoe Lambrecht met een paar werkvormen de groep hechter maakte en tegelijkertijd tools gaf om in onze lessen te gebruiken.
Na de eerste kennismakingsavond zijn we gestart met het beschrijven van ieders onderwijssysteem, waarna we de overeenkomsten en verschillen tussen die systemen bekeken. Opvallend waren ook de verschillen in vakdidactiek. Ik weet nu dat we het in Nederland zeker niet zo slecht hebben met onze schoolstructuur, vakdidactiek, randvoorwaarden, lonen, ict-gebruik en vrijheid/zekerheid. In andere landen is het onderwijs vaak slechter af. Het samenwerken met collega's uit andere culturen heeft me inzicht gegeven in hun gebruiken en aanpakken. Ik kan nu ook met zekerheid zeggen dat wiskunde een universele taal is, maar wel met veel dialecten…
Tot slot heb ik aan de reis met deze hechte, gezellige, internationale groep wiskundestudenten een aantal blijvende contacten overgehouden. Het was een ervaring die me mijn hele leven bij zal blijven.

> “In veel landen bestaat er zelfs geen specifieke lerarenopleiding”

Wim: Wat ik opmerkelijk vond was dat de onderlinge verschillen tussen landen groot waren. De routes om leraar te worden verschillen bijvoorbeeld enorm per land. In veel landen bestaat er zelfs geen specifieke lerarenopleiding. Daar volg je eerst de universitaire opleiding in een vak en daarna een relatief korte docentenopleiding.
Na de introductie mochten Frank en ik het spits afbijten en presenteerden als eerst onze workshop. Het was intrigerend om te zien hoe verschillend de deelnemers aan de slag gingen met de opdrachten. Vanuit vakdidactisch oogpunt waren we geïnteresseerd in de kennis die docenten moeten hebben om wiskunde te kunnen onderwijzen. De deelnemers uit Polen gingen zeer wiskundig te werk en probeerden daartoe eerst alle opgaven zelf te maken, terwijl studenten uit andere landen eerst met elkaar in discussie gingen over het type opgave.
Na deze eerste dagen bezochten we de CIEAEM 71 conferentie op de universiteit van Minho (Braga, Portugal). Het voornaamste deel van de lezingen bestond uit promotieonderzoeken. De diepgang van een aantal onderzoeken vond ik wat tegenvallen. Daarnaast viel me op dat de connectie met de onderwijspraktijk in veel onderzoeken niet duidelijk aanwezig was. Bijzonder vond ik wel dat alle onderzoekers en deelnemers aan de conferentie open stonden voor gesprek. Ik heb daardoor veel gediscussieerd over visies op het wiskundeonderwijs. Dit gaf mij een duidelijker beeld van mijn ideale wiskundeonderwijs. Door de verschillende promotieonderzoeken heb ik actuele kennis op het gebied van wiskundeonderzoek verkregen en ben ik mij meer bewust geworden waarom ik bepaalde (vakdidactische)keuzes maak. Ik ben ook benieuwd geworden hoe onderzoek en onderwijs meer tot elkaar kunnen komen. Wellicht wil ik zelf (promotie) onderzoek gaan doen naar het wiskundeonderwijs, waarbij ik juist de koppeling naar het onderwijs en de toepasbaarheid voor leerlingen en docenten als uitgangspunt neem.

Tot slot

Lambrecht: Al sinds 1996 bezoeken we met groepjes internationale studenten een conferentie over wiskundedidactiek. De onderlinge uitwisselingen laten zien dat zij dan heel snel, veel kunnen leren. Reflectie op hun eigen opleiding, opvattingen en gewoontes leidt tot een verbreding van hun blik en het is een voorrecht om daar met je neus bovenop te zitten. Veel studenten die ik later in hun carrière tegenkom herinneren nog details uit de periode van Quality Class, die je niet voor mogelijk had gehouden. Het is intensief leren en ook heel erg leuk.
Wil je ook studenten van jouw lerarenopleiding of stagiaires bij jou op school van wie je denkt dat die dit wel eens interessant zouden kunnen vinden, laten meedoen aan dit uitwisselingsprogramma in de zomer? Quality Class 2020 vindt plaats in Gdańsk van 25 juni t/m 2 juli. We bezoeken de CME conferentie aldaar. Laat ze dit artikel lezen en vooral contact opnemen met Fabian, Frank, Wim of Lambrecht.’

Noten

[1] zie *http://lambrechtspijkerboer.nl/quality-class/*
[2] zie de *Euclides*-site voor een (leesbare) afbeelding op ware grootte.

Over de auteurs

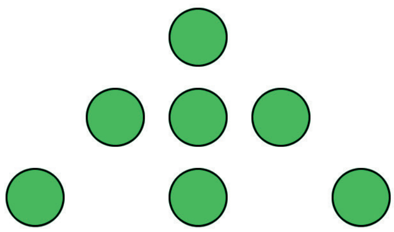
Fabian Thérou is wiskundedocent op De Nieuwste School te Tilburg, Frank van Dijck is wiskundedocent op het Valuascollege te Venlo, Wim Steenbakker is wiskundedocent op het Ostrea Lyceum te Goes. Allen zijn Master-student van Fontys Lerarenopleiding Tilburg. Lambrecht Spijkerboer is onderwijsconsultant en lerarenopleider bij NCOI
E-mailadressen: *f.therou@student.fontys.nl*, *info@wimsteenbakker.nl*, *frank_van_dijck@hotmail.com*, *STA@Lambrechtspijkerboer.nl*

Vastgeroest

Ab van der Roest

Hoe een vmbo-opgave een vwo-opgave werd

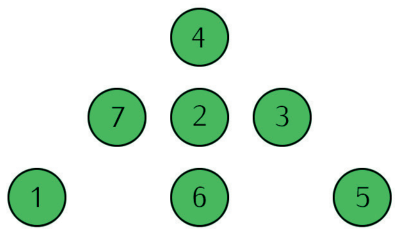
'Opa, kun je me helpen met wiskunde', was de vraag aan mijn collega Cock, gesteld door zijn kleindochter. Ze zit in de eerste klas vmbo en 'snapte er niets van'.
Cock, een zeer ervaren docent bovenbouw havo en vwo, dacht dat helpen wel even te doen. Het probleem was het volgende:



figuur 1

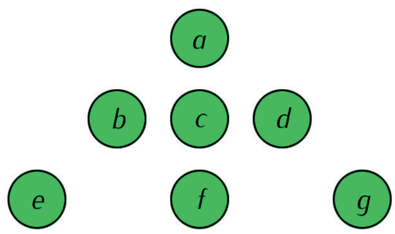
Zet de getallen 1 t/m 7 in het rooster van figuur 1 zodat de som van drie getallen op de tweede en derde rij en de som in de drie 'spaken' gelijk is. Cock overschatte zichzelf enigszins en schreef het antwoord niet direct op. Na een kop koffie vond hij meerdere oplossingen.

Toen hij de volgende dag op school deze anekdote vertelde, vroegen we ons eerst af hoe de docent deze som zou uitleggen. Als bovenbouwdocenten konden we niets anders bedenken dan door proberen en kijken hoe het uitkomt. Natuurlijk niet de 6 en de 7 naast elkaar enzovoort.
Ik behandelde deze week in vwo-4 het combinatoriek hoofdstuk en zag een mooie opgave voor deze klas. De opgave wordt nu: beredeneer hoeveel oplossingen er zijn. In groepjes van drie of vier werd er een lesuur hard gewerkt. Na 40 minuten heb ik de resultaten geïnventariseerd en tot mijn verbazing waren er groepjes die nog geen enkele oplossing hadden. Ik heb hen maar niet verteld dat het een opgave voor vmbo-1 was... Twee groepjes wisten me te vertellen dat er twaalf verschillende oplossingen waren.



figuur 2

De uitleg hierbij: 7, 2 en 3 van de tweede regel kunnen op 3! manieren verwisseld worden. Om de optelling constant te houden wisselen de cijfers van regel drie mee. Je kunt ook de regels twee en drie verwisselen. Er zijn dus $2 \times 3! = 12$ mogelijkheden, zie figuur 2.
Prima, maar waarom moet de 4 bovenaan staan? Dat bleef een vraagteken.



figuur 3

De volgende les kwam ik er kort op terug. Ik had ter voorbereiding de cirkeltjes letters gegeven, zie figuur 3, en bedacht dat $a + b + c + d + e + f + g = 28$. En dat $(a + b + e) + (a + c + f) + (a + d + g) + (b + c + d) + (e + f + g) = a + 2(a + b + c + d + e + f + g) = a + 56$ deelbaar door 5 moet zijn.
Dan moet gelden $a = 4$.

Voor ik dit aan de klas presenteerde, bleek dat Joanne er thuis ook over na had gedacht. Haar redenering kreeg uiteraard voorrang. Ze isoleerde één getal. De andere zes moeten dan twee aan twee opgeteld steeds dezelfde uitkomst hebben. Dat is het geval bij de paren (1, 7) (2, 6) en (3, 5). Een andere mogelijkheid is er niet. Een mooie redenatie. Later bedacht ik dat ze ook 1 of 7 had kunnen isoleren, maar dan waren de rijsommen niet gelijk, maar dat heb ik laten zitten.
Ik was tevreden met mijn resultaat. De leerlingen hadden zich op een andere manier beziggehouden met de wiskunde. Weliswaar geen maatschappelijk relevant probleem bij de kop gehad, maar toch een opdracht waar je buiten het boek tegen aan kunt lopen.
Ik leerde: Houd de vragen als 'opa (of oma, mama, papa), kun je me helpen?' goed in de gaten.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Verenigingsnieuws
Nieuwe bestuursleden stellen zich voor

Sharon Calor

Mijn naam is Sharon Calor. Ik ben op de jaarvergadering van 2 november 2019 met steun van de aanwezige leden verkozen tot lid van het algemeen bestuur van de NVvW. Ik dank het dagelijks en algemeen bestuur van de NVvW en de aanwezige leden voor het in mij gestelde vertrouwen. Graag stel ik mezelf aan u voor.
Ik ben op verscheidene manieren werkzaam in het wiskundeonderwijs. Allereerst ben ik tien jaar eerstegraads docent wiskunde aan de Open Schoolgemeenschap Bijlmer in Amsterdam. Daarnaast ben ik ruim negen jaar docent onderzoeker aan de Master Leraar Wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam. Tevens doe ik met een promotiebeurs voor leraren promotieonderzoek aan de Universiteit van Amsterdam, wat ik dit jaar zal afronden. Mijn onderzoek richt zich op het bieden van hulp op maat aan kleine heterogene groepen, die over wiskunde discussiëren. Daarnaast coördineer en organiseer ik bijna negen jaar de bijeenkomsten van het Vaknetwerk Wiskunde in Amsterdam en omgeving. Het Vaknetwerk Wiskunde is ontstaan vanuit de behoefte om met collega's en vakdidactici te praten over wiskundeonderwijs. Niet alleen ik, maar ook de deelnemers vinden deze bijeenkomsten zeer inspirerend. Mede daarom spreekt een van de doelen van de vereniging, namelijk het organiseren van gelegenheden om met elkaar te praten over het wiskundeonderwijs, mij zo aan.
Ik denk dat ik door mijn ervaring als docent, lerarenopleider en onderzoeker het belang van wiskundeonderwijs op verschillende gebieden kan behartigen. En omdat ik zowel praktisch als theoretisch werkzaam ben in het wiskundeonderwijs, hoop ik ook een brug te kunnen slaan tussen wiskundeonderwijs en onderzoek naar de didactiek van de wiskunde. Ik kijk zeer uit naar mijn bestuurswerk de komende drie jaar en zal mij inzetten voor de doelen van de NVvW en het behartigen van de belangen van ons prachtige wiskundeonderwijs!

Joanne de Jager

Na twintig jaar met zeer veel plezier als architect te hebben gewerkt, ben ik in 2011 gestart met mijn tweedegraads wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Het was crisis in de bouw en al een tijd vrijwel onmogelijk nieuwe opdrachten te krijgen. Een mooi moment om iets met mijn andere interesse, wiskunde, te doen. In zekere zin is architectuur ook wiskunde.
In juli 2019 heb ik mijn eerstegraads afgerond. Tijdens mijn opleiding heb ik prachtige wiskundevakken mogen volgen en veel vakdidactiek. Ik houd van wiskunde en ben geïnteresseerd in hoe leerlingen leren. Hier heb ik mij tijdens mijn studie veel mee beziggehouden en nu ik weer tijd heb, hoop ik hier ook veel mee te doen in mijn functie als bestuurslid. Wat ik als bestuurslid graag zou doen, is met andere mensen van gedachten wisselen over hoe het wiskundeonderwijs georganiseerd kan worden en hoe wiskunde het mooist overgebracht kan worden.
Momenteel werk ik op het Metis Montessori Lyceum in Amsterdam en geef ik les in de onderbouw vwo en in de bovenbouw havo en vwo. Een mooie school in een prachtig gebouw. De school heeft drie profielen: Coder, Technasium en Metis. In de coderclass speelt informatica een belangrijke rol en in het Metisprofiel is extra aandacht voor kunst. De school is onderdeel van Montessori Scholengemeenschap Amsterdam.

Corwin van Schendel

Dit is mijn derde jaar als wiskundedocent op O.S.R. Lek en Linge in Culemborg. Daar geef ik vooral les in de bovenbouw van het vwo en de tweetalige onderbouw vwo. Mijn educatieve minor en eerstegraads master *science education and communication* deed ik in Utrecht, waarbij ik me richtte op wiskundig denken en algebraïsch inzicht. De afgelopen jaren heb ik me ingezet voor de Nationale Wiskunde Dagen, waarbij het contact met andere docenten me erg aansprak. Dat contact, plus mijn bestuurlijke interesse, motiveerde me om me aan te melden voor het NVvW-bestuur. Veel onderwerpen interesseren me, van curriculumvernieuwingen, tot rekenmachines, tot werkdrukreductie. Ik heb erg veel zin om mee te mogen denken over al deze thema's die ons als wiskundedocenten aangaan.

Jörgen van Remoortere

Sinds mijn overstap vanuit het bedrijfsleven naar het onderwijs in 2008 heb ik me heel lang beschouwd als een docent die het vak wiskunde geeft. Sinds ik vier jaar geleden begonnen ben met de eerste stappen in het formatieve lesgeven (toen ik nog niet die term kende) ben ik steeds meer wiskundedocent geworden. Immers, zonder gedegen vakkennis en kennis over hoe leerlingen wiskunde leren doe je geen recht aan ons vak en aan de leerlingen die je voor je hebt. Ik probeer in mijn dagelijkse lessen een balans te vinden tussen Jörgen de pedagoog en Jörgen de vakdidacticus. Dat is meteen ook waar ik in mijn bestuurswerk bij de NVvW de nadruk op wil leggen: hoe vertalen we de wiskunde en het leren daarvan naar onze leerlingen in de onderbouw? Via mijn blogs deel ik al enige tijd mijn ervaringen omdat ik ervan overtuigd ben dat delen vermenigvuldigen is. We kunnen ontzettend veel van elkaar leren en daar wil ik me graag voor inzetten.

Verenigingsnieuws

Ebrina Smallegange

Jaarrede 2019

De NVvW is een vereniging van wiskundeleraren. Samen staan we voor goed wiskundeonderwijs. Daarvoor is het nodig dat wij, wiskundeleraren, met elkaar overleggen en dat er vanuit de vereniging overleg wordt gevoerd met instanties en organisaties buiten de vereniging.

Onderling overleg

De vereniging brengt wiskundeleraren bij elkaar, via diverse media maar ook direct, *eye to eye*. Een van de media voor contact met je collega's is ons prachtige verenigingsblad *Euclides*. Leden verzorgen bijdragen voor *Euclides*, de redactie en de vormgevers maken er een mooi blad van. En, de oplettende redactie heeft goed geteld, het 750ste nummer is vorige week verschenen!
Alle documentatie van *Euclides* is dit jaar op orde gebracht en opgeslagen bij het Noord-Hollands archief, door Harm Jan Smid. Hij is hier nu niet, maar ik wil hem toch hartelijk bedanken voor deze enorme klus. Als wij straks honderd jaar bestaan, zou het mooi zijn als ook het archief van de vereniging zo zal zijn geordend en opgeslagen. We zoeken nog iemand die dat wil doen!
Ons vakblad *Euclides* is niet alleen te lezen op papier, maar ook via de app. Via linkjes in de app kun je dieper op de beschreven onderwerpen ingaan. Het is echt een aanrader! Het is vanaf nu ook mogelijk om alléén de app te gebruiken. Daarmee kun je papier besparen en, als de vergadering er straks mee instemt, vanaf volgend jaar ook geld besparen.
Behalve ons vakblad *Euclides* hebben we een discussieforum en het examenforum, we hebben *WisBase* (voor het uitwisselen van toetsen) en een Facebookgroep. Allemaal media die contact tussen leden mogelijk maken. Die Facebookgroep heeft intussen al bijna 5000 leden! Leden die allemaal, dat is gecheckt, wiskundeleraar zijn. Maar: het is op Facebook vaak moeilijk om dingen terug te zoeken. Verder heeft Facebook wat privacy-issues.

Digitale community

Daarom hebben we afgelopen verenigingsjaar plannen gemaakt om een eigen digitale community op te zetten. Een soort platform waar wiskundeleraren kunnen aangeven welke onderwerpen hun belangstelling hebben, waar ze zich samen met collega's verder in willen verdiepen of in hebben verdiept en hoe hen dat bevallen was. Daarbij richtten we ons op het uitwisselen van vakinformatie, en niet op het verzamelen van puntjes voor een lerarenregister. We wilden dit opzetten voor wiskundeleraren, en we zagen een mogelijkheid tot uitbreiding voor andere vakken. Op deze manier wilden wij meewerken aan een verdere versterking van onze beroepsgroep. We hebben het ministerie gevraagd dit plan financieel te steunen. Het ministerie weigerde dat. Het ministerie is een lerarenportfolio aan het ontwikkelen, in plaats van het lerarenregister. Dat lerarenportfolio wordt, volgens het ministerie, ingezet om de beroepsgroep te versterken.
Ik vind dat vreemd. Als een sterke beroepsgroep financiële steun vraagt om een digitaal platform op te zetten, wordt dat geweigerd met het argument dat er een lerarenportfolio komt om de beroepsgroep sterker te maken. Hier hebben we een dilemma. Werken we mee aan dit lerarenportfolio of gaan we verder met ons eigen platform? We gaan nu in ieder geval verder met onze Facebookgroep. We houden het lerarenportfolio in de gaten. Wij vinden dat leraren op een veilige en gemakkelijk toegankelijke manier met elkaar moeten kunnen overleggen. Als dat via het lerarenportfolio kan, dan steunen we dat. Zo niet, dan zullen we onderzoeken of we op één of andere manier door kunnen gaan met onze eigen plannen.

Werkgroepen

Binnen de vereniging is er afgelopen jaar niet alleen digitaal en op papier maar ook veel direct contact tussen wiskundeleraren geweest, onder andere via onze werkgroepen. De leden van de werkgroepen delen kennis en ervaringen met elkaar, ze voorzien het bestuur gevraagd en ongevraagd van advies en verzorgen verder symposia, conferenties en bijeenkomsten voor andere leden. Er is dit verenigingsjaar al een mooi symposium van de werkgroep Geschiedenis geweest, hun 25e symposium. Ook het bestuur heeft conferenties georganiseerd. Vorig jaar de conferentie Onderzoek meets Onderwijs (samen met SLO) en de Examenconferentie. De vereniging wil deze mogelijkheden blijven bieden om ervaringen uit te wisselen en van elkaar te leren: Ik kan alvast vertellen dat de werkgroep vmbo komend jaar een vmboconferentie organiseert. En ook Onderzoek meets Onderwijs zal weer plaatsvinden.

Hulp bieden

De NVvW kijkt niet alleen naar Nederlandse wiskundeleraren, maar ook naar wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. Het WereldWiskundeFonds is een van onze werkgroepen. Ze staan met een stand op de informatiemarkt en verkopen o.a. oude

wiskundeboeken. Vorig jaar kocht ik er de complete jaargang van *Pythagoras* van 1976 waar ik als vwo'er zo van heb genoten. Met de opbrengsten worden projecten ondersteund ten bate van het wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden.
Helaas zijn er mensen die vanuit hun land moeten vluchten, omdat ze daar hun leven niet zeker zijn. Onder hen zijn ook wiskundeleraren. Een aantal van hen oriënteert zich op het Nederlandse onderwijs. Zij volgen trajecten bij lerarenopleidingen om hun bevoegdheid voor het Nederlandse onderwijs te verkrijgen. Wij gaan onderzoeken wat we voor hen kunnen betekenen, waar zij behoefte aan hebben. We hopen hiermee niet alleen deze mensen te helpen, het helpt misschien ook een beetje bij het oplossen van het enorme lerarentekort waar we mee kampen. Ken je iemand die nieuw is in Nederland en de Nederlandse bevoegdheid gaat halen, of onlangs gehaald heeft? Laat het ons weten, wij willen graag hun ervaringen en hun behoeftes horen.

Bevoegdhedenstelsel

Via diverse organisaties denken we mee over het bevoegdhedenstelsel. Als door de veranderingen van het bevoegdhedenstelsel het beroep leraar nog aantrekkelijker wordt dan het nu al is, is dat natuurlijk goed nieuws. Maar… we staan op het standpunt dat leerlingen recht hebben op wiskundelessen van goed opgeleide wiskundedocenten. We zullen iedere voorgestelde verandering in de toekomst daarop checken.

> "Leerlingen hebben recht op wiskundelessen van goed opgeleide wiskundedocenten."

Samen sterk

De NVvW is lid van de Federatie van Onderwijsvakorganisaties, de FvOv. Daardoor kun je als lid rechtshulp krijgen. De FvOv is ook betrokken bij het opstellen van sociale plannen. Als jouw school bijvoorbeeld zou gaan fuseren met een andere school, behartigt de FvOv jouw belangen. Het is dus belangrijk dat de FvOv van je weet bij welke school je werkzaam bent. Daarom zal onze ledenadministratie je dit jaar een mail sturen met de vraag om de gegevens die bij ons bekend zijn te controleren en eventueel te verbeteren.
Samen met de FvOv en ook met het Platform Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs, de PVVVO, reageren we naar instanties die van invloed zijn op het onderwijs. Samen ben je sterker dan alleen. Maar dat vraagt dan ook, in die reacties, om afstemming met de andere vakinhoudelijke verenigingen. In het proces van curriculum.nu, bijvoorbeeld, hebben we vaak samen met het Platform, maar ook alleen, als NVvW, gereageerd.

Curriculum.nu

Het ontwikkelteam Rekenen en Wiskunde van curriculum.nu heeft in oktober na bijna twee jaar een eindproduct opgeleverd. Twee jaren met tussenproducten en feedbackrondes. Dit is nog niet het einde van het proces: de geleverde bouwstenen zijn nog lang geen curriculum, en de bovenbouw is nog niet goed aan de orde geweest. Onze feedback op de tussenproducten en onze eerste reactie op het eindproduct zijn terug te vinden op onze website. We pleiten ervoor dat, als curriculum.nu verder zou gaan voor de bovenbouw, het ontwikkelteam breder wordt samengesteld dan nu, en dat eerst wordt onderzocht welke problemen er eigenlijk spelen en dat die worden opgelost. Het bestuur heeft in de verwikkelingen rondom curriculum.nu veel steun en advies gehad van individuele leden, de werkgroepen vmbo, havo/vwo, Wiskunde voor Morgen en de commissie onderwijs van PWN. Daardoor konden we goede feedback geven, niet alleen aan het ontwikkelteam over de tussenproducten, maar ook aan de coördinatiegroep over het proces. Alle meedenkers: bedankt!

Vakvernieuwing vmbo

Iets waar we heel blij mee zijn, is de vakvernieuwing vmbo. In januari wordt een commissie benoemd die nieuwe examenprogramma's wiskunde in het vmbo gaat ontwikkelen. SLO heeft de aansluiting tussen vmbo-tl en havo en de verdeling van de wiskunde over de verschillende leerwegen van het vmbo onderzocht.
De resultaten van dit onderzoek, de uitkomsten van curriculum.nu én het rapport 'Nieuw perspectief op rekenonderwijs' van de rekentafel van de vereniging en het ministerie worden input voor deze vakvernieuwing. Een vakvernieuwing die goede doorstroming en opstroming mogelijk maakt en toekomstbestendig is.
Op den duur zullen pilotscholen gevraagd worden om e.e.a. uit te proberen en pilotexamens af te nemen. >

Dat wordt een project van jaren! En daar is jouw hulp bij nodig. Je zult de oproep te zijner tijd nog wel ontvangen, maar denk alvast na of jouw school pilotschool zou willen worden!

Rekentoets

Afgelopen verenigingsjaar was rekenen en de rekentoets een belangrijk onderwerp. Sinds rekenen weer zo in de belangstelling kwam, met referentieniveaus en een landelijke rekentoets, werd de NVvW als gesprekspartner gezien. Wij namen onze verantwoordelijkheid en dachten mee. Namens ons hebben mensen hard gewerkt in de vaststellingscommissies van de rekentoetsen. De vaststellingscommissies zijn nu gestopt, ik wil de mensen die daaraan zo hard gewerkt hebben, hartelijk bedanken voor het vele werk. Vanaf dit schooljaar wordt er geen landelijke rekentoets meer afgenomen in het voortgezet onderwijs. Het ziet ernaar uit dat scholen volgend schooljaar een pta-rekenen zullen moeten maken voor leerlingen zonder wiskunde. Leerlingen die eindexamen wiskunde doen, tonen daarmee hun rekenvaardigheid aan, voor hen komen er dus geen aparte rekentoetsen.

Toetsen en examens

Niet alleen de inhoud van het wiskundevak is een belangrijk onderwerp voor de NVvW, ook de manier van toetsen. Leerlingen van vmbo-basis en -kader maken digitale examens. Welke toolbox is goed voor hen? Welke rekenmachines zijn toegestaan, bij de digitale en bij de schriftelijke examens? Hoe ziet een echt goed correctievoorschrift er volgens ons uit? We overleggen jaarlijks, in het najaar, met het CvTE over de examens. In de examentijd zul je weinig van het bestuur horen. Wij reageren dan niet via social media over examenperikelen. Wat wij horen en lezen op het examenforum en in jullie mails nemen we mee naar het overleg met het CvTE. Dan komen alle opmerkingen aan de orde. We hopen dat onze leerlingen bij hun examen kunnen laten zien wat ze echt kunnen, en dat wij, wiskundedocenten, de handvatten krijgen om dit op een juiste manier te beoordelen.

Communicatie

Veel van het overleg dat we voeren met instanties leidt uiteindelijk tot verandering en verbetering. Wij staan in al onze overleggen voor goed onderwijs door professionals. Wij willen graag de leden goed informeren waar het bestuur mee bezig is. We moeten er hierbij voor waken dat het overleg verstoord wordt door bv. al te heftige twitteruitingen, waarbij de hardste schreeuwers hun gelijk willen krijgen. We willen wél graag ieders mening meenemen naar deze overleggen, maar we willen ook in rust kunnen overleggen. In het komende verenigingsjaar zullen we overdenken hoe we dat nog beter kunnen doen. Ik kom hier volgend jaar op terug.

Nieuwe initiatieven

Voordat ik ga afsluiten, mag ik je op de hoogte stellen van nog twee mooie initiatieven voor volgend jaar.
Het eerste initiatief: De vereniging wil leden gaan ondersteunen om projecten of activiteiten te ontwikkelen ten bate van het wiskundeonderwijs. Er komt dus een soort projectjesfonds. Hiervoor willen we nu alvast geld vrijmaken. Dit verenigingsjaar zullen we onderzoeken hoe we het fonds vorm kunnen geven.
Het tweede initiatief: Je kent vast wel onze Zebraboekjes, boekjes die gericht zijn op leerlingen van de bovenbouw havo en vwo en die hun uitdagen om wiskunde te doen die ze niet in lessen tegenkomen. Vanaf nu zijn er ook Giraffen. Giraffen zijn gericht op leerlingen vmbo en havo-vwo-onderbouw en doen precies hetzelfde. Het zullen niet altijd boekjes zijn; bij de stand kun je het eerste voorbeeld zien en kopen. Er is ook een workshop over giraffen: hoe gebruik je deze giraf in je les en hoe kunnen volgende giraffen eruit zien?

Tot besluit

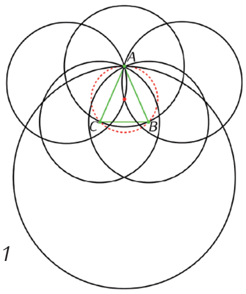
Ik heb veel genoemd. Zaken die afgewikkeld zijn, en zaken waar we nog mee bezig zijn. Bij alles waar we mee bezig zijn, hebben we je hulp nodig. In het overleg met diverse instanties kan het bestuur niet zonder jullie input. Ik nodig je hartelijk uit om mee te denken. Vandaag kun je ons aanspreken bijvoorbeeld bij onze stand op de informatiemarkt, bij de koffieautomaat, of waar dan ook. Ik hoop dat je de rest van het jaar blijft meedenken via de mail, via het forum, via facebook, en in de werkgroepen. Zodat de NVvW een vereniging van wiskundeleraren blijft en kan blijven staan voor goed wiskundeonderwijs.

Puzzel 95-5

Een straal met zeven cirkels

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

In deze puzzel gaan we de straal van de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek construeren, en dat met alleen een passer. Er is veel bekend over constructies met alleen een passer, maar de hier bedoelde constructie is minder bekend en zeker de moeite waard nader te bekijken. In tegenstelling tot andere beschreven methoden heb je hier namelijk (in verreweg de meeste gevallen) slechts zeven cirkels voor nodig. We beginnen met een bijzonder geval: een gelijkbenige driehoek.

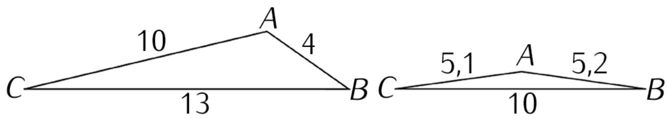


figuur 1

In figuur 1 zie je het resultaat van de constructie. Er zijn dan slechts zes cirkels nodig en we hebben niet alleen de straal, maar ook het middelpunt.
In het algemene geval, dus een niet-gelijkbenige driehoek, gaat de constructie analoog, en vinden we met zeven cirkels de straal. Om dan het middelpunt te vinden hebben we nog twee cirkels nodig, maar dat is niet de vraag.

Opgave 1a: Beschrijf hoe de constructie van de omgeschreven cirkel van een gelijkbenige driehoek tot stand is gekomen. We hebben bewust alleen de gegeven driehoek *ABC* getekend en de benodigde cirkels. Met een rood stippellijntje is de bedoelde omgeschreven cirkel getekend met z'n middelpunt. Die mag je natuurlijk niet gebruiken bij de constructie, want die is nog onbekend. Kies zelf namen voor snijpunten en cirkels. Dat dit klopt willen we natuurlijk wel bewijzen. En dat lukt met gewone 'schoolmeetkunde', met behulp van gelijke hoeken, afstanden, gelijkvormigheid, et cetera.
Opgave 1b: Geef dit bewijs.
Opgave 2a: Beschrijf hoe op een analoge wijze de lengte van de straal van een niet-gelijkbenige driehoek kan worden geconstrueerd, nu met zeven cirkels.
Opgave 2b: Geef ook hiervan het bewijs.

Er schuilt nog wel een klein addertje onder het gras, want het lukt niet altijd met willekeurig elke driehoek. Soms moet je punt *A* met zorg kiezen, maar soms lukt ook dat niet. Dan hebben we een extra punt op de omgeschreven cirkel nodig. We hebben dan wel één of meer extra cirkels nodig om de lengte van de straal te construeren, maaruiteindelijk lukt het.



figuur 2

Opgave 3: Laat zien hoe dat kan met een driehoek met zijden 13, 10, 4 en ook een met zijden 10, 5,1 5,2.
Opgave 4: Aan welke voorwaarde moet de driehoek voldoen om vanuit een bepaald hoekpunt *A* de constructie uit te kunnen voeren zonder dat extra punt?

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.
Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij je idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden.
Inzendingen moeten uiterlijk 5 mei 2020 binnen zijn.

Top 10 ladderstand

Tot en met puzzel 95-3		
1	M. Rijnierse	141
2	R. Stolwijk	122
3	F. Göbel	114
4	B. Groot	113
5	J. Remijn	99
6	H. Linders	98
7	H. Huisman	81
8	M. Woldinga	71
9	J. Meerhof	64
10	L. Cizkova	61

We feliciteren Margot Rijnierse van harte met de ladderprijs.

Voor de uitwerking van puzzel 95-3:

vakbladeuclides.nl/955puzzel

Voor de volledige ladderstand en de uitwerking van de eerdere puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018

- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2020

Woe 01/04
UTRECHT
Conferentie vmbo en onderbouw havo-vwo
Organisatie: NVvW

Di 14/04 Di 15/4
UTRECHT
Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie: KWG en PWN

Woe 15/04 Di 21/4
EGMOND AAN ZEE
European Girl's Mathematical Olympiad
Organisatie: Nederlandse Wiskunde Olympiade

15/22 Aug 28/29 Aug
AMSTERDAM EN EINDHOVEN
Vakantiecursus 'Speltheorie: van strategisch beslissen tot 'eerlijke' oplossingen'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 95

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	05 mei 2020	02 maart 2020
7	23 juni 2020	27 april 2020