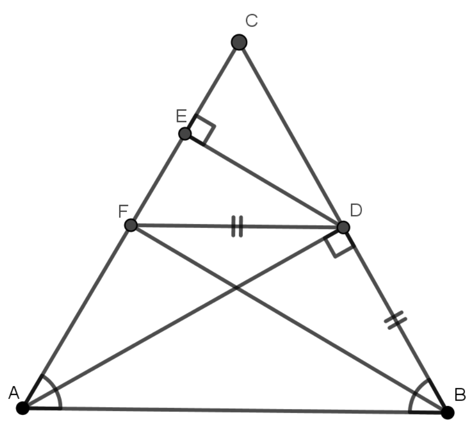
Olympiadepuzzel

Euclides 95 nummer 2

Bijzondere driehoek

Opgave

Driehoek ABC is gelijkbenig met top C. Punt D ligt op zijde BC zodat AD loodrecht op BC staat. Punt E ligt op zijde AC zodat DE loodrecht op AC staat. Punt F ligt op AC zodat DF de bissectrice van $\angle ADE$ is. Nu blijkt driehoek BDF gelijkbenig met top D te zijn. Bereken hoe groot hoek C is. (Geef alle mogelijke waarden.)



Uitwerking

We schrijven γ voor $\angle C$ en drukken nu de andere hoeken uit in γ. Omdat $\triangle CED$ rechthoekig is met rechte hoek E, volgt met hoekensom driehoek dat $\angle EDC = 90^\circ - \gamma$. Hieruit volgt wegens rechte hoek ADC dat $\angle ADE = \angle ADC - \angle EDC = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$. Lijn DF is de bissectrice van $\angle ADE$, dus

$$\angle ADF = \tfrac{1}{2}\angle ADE = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Hieruit volgt dat

$$\angle FDC = \angle ADC - \angle ADF = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Anderzijds volgt uit de gelijkbenigheid van $\triangle ABC$ (met top C) dat

$$\angle ABC = \angle CAB = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma.$$

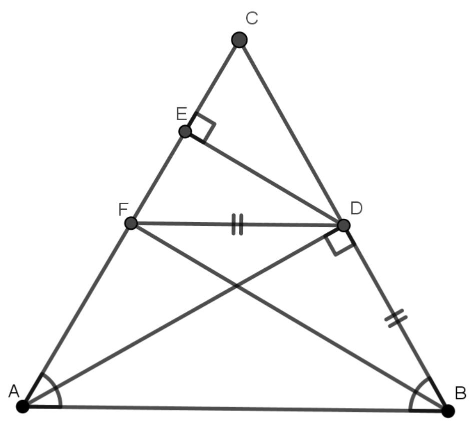
Dus $\angle FDC = \angle ABC$, waaruit met F-hoeken volgt dat FD en AB evenwijdig zijn. Bijgevolg is vierhoek $ABDF$ een gelijkbenig trapezium en geldt er dus dat

$$\angle BFD = \angle ADF.$$

Bovendien is gegeven dat $\triangle BDF$ gelijkbenig is met top D. Er geldt $\angle BDF = \angle BDA + \angle ADF = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\gamma$, dus

$$\angle BFD = \angle DBF = \frac{180^\circ - \angle BDF}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ + \tfrac{1}{2}\gamma)}{2} = \frac{90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma}{2} = 45^\circ - \tfrac{1}{4}\gamma.$$

Uit de eerder gevonden hoekengelijkheid $\angle BFD = \angle ADF$ volgt nu dat $45° - \frac{1}{4}\gamma = \frac{1}{2}\gamma$, dus $45° = \frac{3}{4}\gamma$, dus $\gamma = \frac{4}{3} \cdot 45° = 60°$.



Als we omgekeerd juist met een gelijkzijdige driehoek ABC beginnen, kunnen we F en D definiëren als de middens van de zijden AC en BC en laten zien dat nu aan alle eisen in de opgave voldaan wordt. De lijn AD staat dan als zwaartelijn van een gelijkzijdige driehoek inderdaad loodrecht op BC. En lijn FD is dan een middenparallel, dus evenwijdig met AB. Daaruit volgt met Z-hoeken dat $\angle FDA = \angle DAB = 30°$. Verder is lijn DE als loodlijn van gelijkzijdige driehoek FDC ook bissectrice van $\angle FDC$. Daaruit volgt dat $\angle FDE = \frac{1}{2}\angle FDC = 30°$. Dus lijn DF is inderdaad de bissectrice van $\angle ADE$. Ten slotte geldt dat $|FD| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|BC| = |BD|$, dus $\triangle BDF$ is inderdaad gelijkbenig met top D.

Inzenders met een juiste uitwerking

Harm Bakker, Nigel Beckwith, Greet van Ham, Hans Linders, Jos Remijn, Bert Smid, Monica Woldinga en Sjoerd Zondervan.

Winnaar van de cadeaubon

Jos Remijn.