Dit is de lange versie van het artikel Munten draaien

Munten draaien

Matthijs van der Poel

Afgelopen zomer vond de 60^e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats in Bath, Engeland. Ruim 600 middelbare scholieren uit meer dan 100 landen zijn daar met elkaar de strijd aan gegaan. Nederlands teamlid Matthijs van der Poel bespreekt in dit artikel opgave 5.

De weg naar de IMO

De IMO is geen wedstrijd waar je zomaar aan mee kunt doen. De eerste selectieronde, de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, vindt al meer dan een jaar voor de bijbehorende IMO plaats. Van de ongeveer 10.000 leerlingen die meedoen aan de eerste ronde kunnen er uiteindelijk maar zes deel uitmaken van het Nederlandse team. Nadat ik in de eerste klas voor het eerst meegedaan had aan de eerste ronde was ik verrast toen ik hoorde dat ik uitgenodigd was voor de tweede ronde en de finale, en dat ik uiteindelijk vijfde werd van mijn categorie. Door deze prestatie kon ik met zo'n dertig andere leerlingen deelnemen aan de training voor de IMO. Dat houdt in: maandelijks een bijeenkomst van een dag, een weekend, of zelfs een week waarvan elke dag gevuld is met tien tot elf uur wiskunde. Buiten deze bijeenkomsten hoef je je ook niet te vervelen: elke week kun je opgaven maken en opsturen. In 2016 lukte het mij om via in totaal zeven toetsen geselecteerd te worden om mee te gaan naar de IMO, en dit jaar was ik niet minder blij dat ik weer voor het Nederlandse team geselecteerd was. Ik vond opgave 5, de tweede opgave van de tweede wedstrijddag, het aangenaamst om aan te werken. Aan deze opgave wil ik dan ook dit artikel besteden.

Opgave 5

Harry heeft n munten van links naar rechts op een rij gelegd. Elke munt ligt met kop (K) of met munt (M) boven. Hij voert herhaaldelijk de volgende handeling uit: als er precies $k \geq 1$ munten zijn die met de K naar boven liggen, dan draait hij de k-de munt van links gezien om; als alle munten met de M naar boven liggen, dan stopt hij.
Een voorbeeld: als $n = 3$ en Harry start met de beginrij MKM, dan krijgt hij achtereenvolgens MKM $\to$ KKM $\to$ KMM $\to$ MMM en stopt hij na drie handelingen.
(a) Bewijs dat Harry voor elke beginrij na een eindig aantal handelingen stopt.
(b) Voor elke beginrij C definiëren we $L(C)$ als het aantal handelingen totdat Harry stopt. Bijvoorbeeld: $L(\text{MKM}) = 3$ en $L(\text{MMM}) = 0$. Bepaal de gemiddelde waarde van $L(C)$ over alle 2^n mogelijke beginrijen C.

Kleine gevalletjes

We gaan beginnen met vraag a proberen op te lossen. We gaan waarschijnlijk niet een oplossing uit het niets bedenken; we hebben namelijk nog helemaal geen gevoel voor de opgave. Om dat gevoel wel te krijgen is het handig om wat beginrijtjes te proberen en te zien wat er dan gebeurt. Laten we beginnen bij het begin, dus met zo kort mogelijke beginrijtjes. Dat zijn de twee rijen K en M. Als Harry start met de beginrij K, dan krijgt hij achtereenvolgens K $\to$ M en vervolgens stopt hij. Bij de beginrij M stopt Harry direct. Aan deze twee gevalletjes kunnen we nog niet zo veel zien, dus we gaan door met het proberen van beginrijtjes met lengte 2. Dat zijn de vier rijen KK, MK, KM, en MM. Bij KK krijgt Harry achtereenvolgens KK $\to$ KM $\to$ MM. Bij MK krijgt Harry MK $\to$ KK $\to$ KM $\to$ MM. Bij KM krijgt Harry KM $\to$ MM. En bij MM stopt Harry meteen. We kunnen nu nog steeds niet veel opmerken, behalve dat het inderdaad elke keer na een eindig aantal handelingen stopt, dus we gaan op dezelfde manier verder met $n = 3$. We gaan alle acht mogelijke rijtjes één voor één uitproberen. Voor het gemak zetten we een streep onder de munt die we gaan omdraaien:

$\mathrm{KK\underline{K}} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$
$\mathrm{M\underline{K}K} \to \mathrm{\underline{M}MK} \to \mathrm{K\underline{M}K} \to \mathrm{KK\underline{K}} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$
$\mathrm{K\underline{M}K} \to \mathrm{KK\underline{K}} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$
$\mathrm{\underline{M}MK} \to \mathrm{K\underline{M}K} \to \mathrm{KK\underline{K}} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$
$\mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$
$\mathrm{\underline{M}KM} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$
$\mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$
MMM

Er valt nog niet iets direct op, maar we hebben nu wel meer gevoel voor hoe de rijtjes zich gedragen.

Uit het ongerijmde

Laten we opnieuw kijken naar wat we moeten bewijzen. We moeten voor elke beginrij laten zien dat Harry na een eindig aantal handelingen stopt. We kunnen proberen om dit te bewijzen uit het ongerijmde. Dat wil zeggen: we nemen eerst aan dat het gevraagde onwaar is, en vervolgens proberen we daar een tegenspraak uit af te leiden (waaruit we kunnen concluderen dat het gevraagde tóch waar was). In ons geval nemen we dus eerst aan dat er wél een beginrij A is waarop Harry oneindig vaak een handeling doet, en proberen we vervolgens te bewijzen dat zo'n rij niet kan bestaan. Wat zou er namelijk gebeuren als die beginrij A bestaat? Als eerste kunnen we opmerken dat er dan minstens één munt a is die oneindig vaak wordt omgedraaid door Harry. In het bijzonder wordt die munt a ook oneindig vaak omgedraaid zodat die na de omdraaiing met de K boven komt te liggen. We hebben net tijdens het bekijken van de kleine gevalletjes dit gezien: Als Harry tijdens handeling nummer b een munt c omdraait zodat die met K boven komt te liggen, draait Harry tijdens handeling nummer $b + 1$ de munt direct rechts van munt c om. Dat is logisch, want tijdens het doen van handeling $b + 1$ telt Harry precies één K meer dan tijdens het doen van handeling b. Daaruit kunnen we concluderen dat de munt direct rechts van munt a ook oneindig vaak wordt omgedraaid. Kunnen we dan ook laten zien dat de munt direct links van munt a oneindig vaak wordt omgedraaid? Ja! Want die munt wordt juist elke keer omgedraaid nadat munt a wordt omgedraaid zodat die met de M boven komt te liggen. In het algemeen kunnen we dus het volgende concluderen: als een munt oneindig vaak wordt omgedraaid, worden de twee munten naast die munt ook oneindig vaak omgedraaid. We hadden al opgemerkt dat er minstens één munt is die oneindig vaak wordt omgedraaid, dus alle munten worden oneindig vaak omgedraaid. Kunnen we met deze informatie snel op een tegenspraak uitkomen? Ja: want dit betekent dat de meest linker munt ook oneindig vaak wordt omgedraaid. In het bijzonder draait Harry die munt een keer om zodat die met de M boven komt te liggen. Maar nadat Harry dat heeft gedaan, telt Harry nul K's (want vlak voor die handeling moet hij er precies één geteld hebben). En dan eindigt het spel. Maar we hadden juist aangenomen dat Harry oneindig vaak een handeling doet, dus we hebben inderdaad een tegenspraak gevonden. We concluderen dat het gevraagde bij (a) waar is.

Een vermoeden

Ook bij onderdeel (b) is het handig om naar kleine gevalletjes te kijken, zodat we een vermoeden kunnen krijgen over hoe we de opgave uiteindelijk op willen lossen. Misschien kunnen we zelfs een patroon herkennen in de gemiddelde waarde van $L(C)$ bij verschillende waarden voor n. Laten we kijken naar de gemiddelde waarde voor $L(C)$ bij $n = 1$, bij $n = 2$ en bij $n = 3$. Voor het gemak noteren we G_n voor de gemiddelde waarde van $L(C)$ over alle beginrijtjes C met lengte n. Hiervoor kunnen we terugkijken op wat we bij onderdeel (a) gezien hebben. We beginnen met het geval $n = 1$. We zien dat $L(\mathrm{K}) = 1$ en $L(\mathrm{M}) = 0$, dus $G_1 = (1 + 0)/2 = 0{,}5$. We gaan verder met het geval $n = 2$. We zien dat $L(\mathrm{KK}) = 2$, $L(\mathrm{MK}) = 3$, $L(\mathrm{KM}) = 1$ en $L(\mathrm{MM}) = 0$, dus $G_2 = (2 + 3 + 1 + 0)/4 = 1{,}5$. Ten slotte bekijken we het geval $n = 3$. We zien dat $L(\mathrm{KKK}) = 3$, $L(\mathrm{MKK}) = 6$, $L(\mathrm{KMK}) = 4$, $L(\mathrm{MMK}) = 5$, $L(\mathrm{KKM}) = 2$, $L(\mathrm{MKM}) = 3$, $L(\mathrm{KMM}) = 1$ en $L(\mathrm{MMM}) = 0$. Daaruit volgt dat $G_3 = (3 + 6 + 4 + 5 + 2 + 3 + 1 + 0)/8 = 24/8 = 3$. De oplettende rijtjeskenner valt het nu op dat G_1 de helft van het eerste driehoeksgetal is, G_2 de helft van de tweede en G_3 de helft van de derde. Dat kan toeval zijn, maar wie gaat kijken of het ook zo werkt bij grotere n ziet dat dit patroon zich inderdaad voortzet. Misschien kan dit vermoeden ons helpen bij het vinden van de oplossing, en anders kunnen we dit vermoeden inzetten als we een bepaalde berekening willen controleren.

Een verband

Als we nog even goed naar onze kleine gevalletjes kijken, valt ons iets op: de laatste vier waarden van $L(C)$ bij $n = 3$ zijn precies de waarden bij $n = 2$ (namelijk in deze volgorde 2, 3, 1 en 0). Zou dat in het algemeen ook waar zijn? We zien inderdaad dat de laatste twee waarden in het geval $n = 2$ hetzelfde zijn als de waarden bij $n = 1$, namelijk in deze volgorde 1 en 0. Voor de zekerheid controleren we ook of de laatste acht waarden bij het geval $n = 4$ dezelfde waarden zijn als de acht waarden van het geval $n = 3$, en het blijkt inderdaad te kloppen! Zou er dan een verband zijn tussen de beginrijtjes KK, MK, KM, en MM, en de beginrijtjes KKM, MKM, KMM, en MMM? Ja, het verschil is dat er een munt met de M boven aan de rechterkant van de rij is toegevoegd of weggehaald. Nu weten we ook waarom de waarden hetzelfde zijn, want een munt met de M boven aan de rechterkant meer of minder verandert niets aan de handelingen die Harry doet.

De andere helft

Zou er dan ook een verband zijn tussen de andere vier waarden $L(C)$ bij $n = 3$ en de vier waarden van $L(C)$ bij $n = 2$? Die blijkt er te zijn: de waarden 3, 6, 4 en 5 zijn precies 3 hoger dan de waarden 2, 3, 1 en 0 (maar dit keer niet in deze volgorde). Een stap lager zien we eveneens dat 2 en 3 precies 2 hoger zijn dan 1 en 0. En als we het geval $n = 4$ bekijken, zien we dat dit vermoeden nog steeds opgaat. Maar wat is dan precies het verband tussen de beginrijen KKK en MM, tussen MKK en MK, tussen KMK en KM, en tussen MMK en KK? Dit blijkt geen eenvoudig verband te zijn; zelf had ik dit verband tijdens de wedstrijd ook niet gezien. Maar door hard door te werken (bijvoorbeeld door te kijken naar grotere n), en door gebruik te maken van hun wiskundige intuïtie die zij in de afgelopen jaren hebben opgebouwd, hadden vier van mijn teamgenoten dit wel gezien. Het idee is om eerst de meest rechter munt te verwijderen, daarna alle munten om te draaien (dus K wordt M en M wordt K) en ten slotte de rij te spiegelen. Op deze manier verandert bijvoorbeeld de beginrij KMKKK in de beginrij MMKM. Dat inderdaad de vergelijking $L(\text{KMKKK}) = L(\text{MMKM}) + 5$ waar is, illustreren we door al Harry's handelingen uit te schrijven:

K	M	K	$\underline{\text{K}}$	K			$\underline{\text{M}}$	M	K	M
K	M	$\underline{\text{K}}$	M	K			K	$\underline{\text{M}}$	K	M
K	$\underline{\text{M}}$	M	M	K			K	K	$\underline{\text{K}}$	M
K	K	$\underline{\text{M}}$	M	K			K	$\underline{\text{K}}$	M	M
K	K	K	$\underline{\text{M}}$	K			$\underline{\text{K}}$	M	M	M
K	K	K	K	$\underline{\text{K}}$			M	M	M	M
K	K	K	$\underline{\text{K}}$	M						
K	K	$\underline{\text{K}}$	M	M						
K	$\underline{\text{K}}$	M	M	M						
$\underline{\text{K}}$	M	M	M	M						
M	M	M	M	M						

We zien dat de twee dik omkaderde blokken spiegelbeelden van elkaar zijn, zowel in de zin dat de K's in M's veranderd zijn en de M's in K's, als in de zin dat de rijen gespiegeld zijn.

Conclusie

We hebben nu twee keer een verband gevonden tussen G_n en G_{n-1}. Kunnen we nu een formule geven die G_n uitdrukt in termen van G_{n-1}? Laten we eerst kijken of we G_3 uit kunnen drukken in termen van G_2, want als dat ons niet lukt, dan gaat het algemene geval ook niet lukken. We zagen dat voor de helft van de waarden $L(C)$ in het geval $n = 3$ geldt dat die één op één te verbinden zijn aan de waarden $L(C)$ in het geval $n = 2$. Voor de andere helft van de waarden $L(C)$ in het geval $n = 3$ zagen we dat die gemiddeld 3 méér waren dan de waarden $L(C)$ in het geval $n = 2$. Dus G_3 is het gemiddelde van G_2 en $G_2 + 3$. Dus $G_3 = 1½ + G_2$. Dat komt gelukkig overeen met de waarden voor G_2 en G_3 die we uitgerekend hadden. In het algemeen krijgen we op deze manier de recursieve uitdrukking $G_n = n/2 + G_{n-1}$. Kunnen we dan ook een directe formule krijgen voor G_n? We weten ook dat $G_{n-1} = n/2 + G_{n-2}$ en dat $G_{n-2} = n/2 + G_{n-3}$, tot en met $G_2 = G_1 + 1 = 1 + ½$. Daaruit concluderen we dat $G_n = n/2 + G_{n-1} = n/2 + (n - 1)/2 + G_{n-2} = n/2 + (n - 1)/2 + (n - 2)/2 + G_{n-3} = ... = n/2 + (n - 1)/2 + (n - 2)/2 + ... + 2/2 + 1/2$. Maar dat is de helft van de som van de getallen van 1 tot en met n. Dus $G_n = ½ \cdot ½n(n + 1) = ¼n(n + 1)$. Dit is precies wat we wilden laten zien, dus hiermee is deel (b) bewezen. Sterker nog: dit is ook gelijk een bewijs voor onderdeel (a), want als alle G_n eindig zijn, dan is $L(C)$ voor elke rij C ook eindig.

Een ander inzicht

Ikzelf had het verband onder het kopje 'nog een verband' niet gezien, maar ik had wel een ander resultaat gevonden dat ik kon gebruiken. Ik ging bij een beginrij, bijvoorbeeld KMKKK, na elke handeling die Harry deed, steeds kijken naar de munt die op dat moment onderstreept is. Die onderstreping leek namelijk steeds te zigzaggen; het schoof na elke handeling precies één munt naar links of naar rechts op. Het is ook te zien wanneer de onderstreping naar links of naar rechts gaat: als er een K onderstreept wordt dan gaat de onderstreping naar links, en als er een M onderstreept wordt naar rechts. Wat mij vervolgens opviel was dat die zigzag ook steeds groter leek te worden. Dat heb ik preciezer gemaakt door te zeggen dat die streep steeds grotere blokken K's en M's tegenkomt. In het voorbeeld met de beginrij KMKKK staat de streep bijvoorbeeld eerst twee keer onder een K, dan drie keer onder een M en ten slotte vijf keer onder een K. In het voorbeeld is ook te zien waarom de zigzag steeds groter wordt: als voorbeeld bekijken we de zigzag waarin de onderstreping eerst drie keer naar rechts gaat, en daarna vier keer naar links. We zien dat de streep tijdens het drie keer naar rechts gaan ervoor zorgt dat de munten op die plekken met de K naar boven gaan staan. Als de streep de derde keer dat het naar rechts gaat een K tegenkomt in plaats van een M, begint de streep met naar links te gaan. Dat doet de streep nog minstens drie keer, want dan komt de streep de vers omgedraaide K's tegen. Dus dan komt de streep inderdaad meer K's tegen dan dat het daarvoor M's tegenkwam.

Unieke zigzagpatronen
Nu blijkt dat voor elk van de 2^n beginrijen geldt dat het bijbehorende 'zigzagpatroon' uniek is. We kunnen een zigzagpatroon noteren door achtereenvolgend op te schrijven hoe groot de blokken van K's en M's zijn die de streep tegenkomt. Bij het voorbeeld KMKKK is het zigzagpatroon dus 2, 3, 5. Voor de beginrij MMKM is het zigzagpatroon 2, 3. En voor de beginrij MKK is het zigzagpatroon 1, 2, 3. Om te laten zien dat er niet twee beginrijen zijn (van dezelfde lengte) met hetzelfde zigzagpatroon, kunnen we gebruik maken van het feit dat we deel (a) al bewezen hebben. Bekijk hiervoor een zeker zigzagpatroon Z. We weten, omdat we dat bij deel (a) hebben bewezen, dat Harry na een eindig aantal handelingen stopt. Op dat moment liggen er n munten met de M aan de bovenkant voor hem. Aangezien we het zigzagpatroon Z weten, kunnen we steeds een handeling terug redeneren, en zo komen we uit bij één beginrij. Aangezien we op deze manier op maar één beginrij uitkomen, hoort bij Z alleen maar deze beginrij, en geen andere beginrij. Dus het zigzagpatroon van elke beginrij is inderdaad uniek.

Tellen
Toevallig kunnen we aan het zigzagpatroon van een beginrij gemakkelijk zien hoeveel handelingen Harry gaat verrichten als hij met die rij begint: we hoeven alleen maar de getallen in het zigzagpatroon op te tellen. Voor de beginrij KMKKK heeft Harry bijvoorbeeld $2 + 3 + 5 = 10$ handelingen nodig voordat hij stopt. Dus om te weten hoeveel handelingen Harry in totaal verricht over alle 2^n beginrijen samen, moeten we alle getallen in alle zigzagpatronen bij elkaar optellen. We hebben dus nog informatie nodig over de zigzagpatronen. Laten we kijken hoe dat in het geval $n = 3$ zit. In dezelfde volgorde als onder het kopje 'kleine gevalletjes' zijn de acht zigzagpatronen deze:

KKK: 3
MKK: 1, 2, 3
KMK: 1, 3
MMK: 2, 3
KKM: 2
MKM: 1, 2
KMM: 1
MMM: –

Er vallen nu een paar dingen op. We wisten al dat in elk zigzagpatroon de getallen alleen maar groter kunnen worden, dus ze staan gesorteerd van klein naar groot. Nu blijken deze acht zigzagpatronen ook precies alle manieren te zijn om een deel van de getallen 1 t/m 3 te kiezen en die vervolgens te sorteren van klein naar groot. Ook zien we dat precies in de helft van de zigzagpatronen het getal 1 voorkomt, precies in de helft het getal 2 en precies in de helft het getal 3. Dat geeft voldoende informatie om te kunnen tellen hoeveel handelingen Harry gemiddeld moet verrichten. Dus laten we G_3 uitrekenen:
$G_3 = (L(\text{KKK}) + L(\text{MKK}) + \dots + L(\text{MMM}))/8 = ((3) + (1 + 2 + 3) + \dots + 0)/8 = (4\cdot1 + 4\cdot2 + 4\cdot3)/8 = (1 + 2 + 3)/2 = 3.$
Dat is precies de uitkomst waarop we gehoopt hadden. Om de volle punten te halen voor deze opgave moet je natuurlijk G_n uitrekenen voor alle n, niet alleen voor $n = 3$. Ik laat het als uitdaging aan de lezer over om te bedenken waarom bovenstaande observaties voor het geval $n = 3$ ook kloppen voor algemene n.

Toegankelijk
Dit is een fijne opgave om aan te werken. Zelfs als je geen idee hebt over hoe je de opgave moet oplossen, kun je altijd nog een nieuw beginrijtje nemen en kijken wat Harry dan gaat doen. Iedereen met voldoende doorzettingsvermogen zou tot een oplossing kunnen komen, want de opgave vereist geen kennis van ingewikkelde stellingen of technieken. Dit betekent niet dat de oplossing makkelijk is om te vinden. Er zijn genoeg manieren om de opgave aan te pakken zonder dat dat leidt tot een oplossing. De opgave is dus toegankelijk, maar toch moeilijk. Precies het type opgaven wat je zou willen op de IMO. Door de jarenlange en intensieve training wisten wij, als Nederlands team, gezamenlijk 37

van de 42 punten op deze opgave binnen te halen. Slechts 18 teams lukte het om een hogere totaalscore te halen voor opgave 5. Uiteindelijk konden we naar huis gaan met een eervolle vermelding (deze behaal je door een opgave foutloos op te lossen), vier bronzen medailles, en een zilveren medaille, maar vooral met leuke herinneringen aan twee weken wiskunde en het ontmoeten van deelnemers uit andere culturen.

Het Nederlandse IMO team, v.l.n.r. Jovan, Jippe, Szabi, Jesse, Richard en Matthijs

Over de auteur

Matthijs van der Poel zat op het Oosterlicht College Nieuwegein en het Christelijk Gymnasium Utrecht tijdens de vijf jaar waarin hij deelnam aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. Dit was zijn derde IMO, en ook zijn derde zilveren medaille. Nu studeert hij wiskunde aan de Universiteit van Cambridge.