EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Spel over meetniveaus in nieuwe Giraf-reeks

Kansrekening met Huygens

Mosers wormprobleem op wiskunde B-dag

Taal in wiskunde op het vmbo en het mbo

JAARGANG 95 - JANUARI 2020

NR.4

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

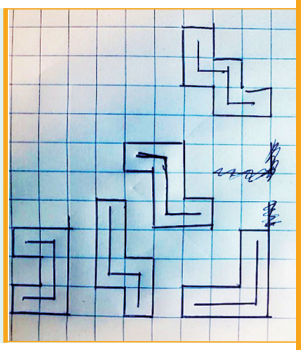
INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 95 NR4

IN DIT NUMMER

SAMEN MET HUYGENS DE KANSBEREKENING ONTDEKKEN 4
Andrea Lubberdink

WARME WORM OP DE WISKUNDE B-DAG 8
Rogier Bos



WAT IS RECHTSSCHEEF? 12
EN IS HET GEMIDDELDE DAN GROTER DAN DE MEDIAAN?
Simon Biesheuvel

MUNTEN DRAAIEN 16
Matthijs van der Poel

BOEKBESPREKING 20
CARDANO OF HET HANDBOEK VAN DE KWANTUMASTROLOOG
Ger Limpens

MEVROUW, KUN JE MET HOBBY'S REKENEN?' 22
Marijke Hassefras-Zuidbroek

KLEINTJE DIDACTIEK 25
Lonneke Boels

MACHTIGE MEETKUNDE II 26
Martin Kindt

HET FIZIER GERICHT OP ... 32
DE ROL VAN TAAL IN WISKUNDE IN HET VMBO EN MBO
Dédé de Haan, Mieke Abels, Monica Wijers en Vincent Jonker

VIJF VRAGEN AAN ... 36
Marjan Botke

WERELDWISKUNDE BOEKEN 38
Jos Remijn

WIS EN WAARACHTIG 40

VASTGEROEST 42
Ab van der Roest

Trap in cultureel centrum Forum Groningen (opening 29 november 2019).

Foto: Liesbeth Coffeng

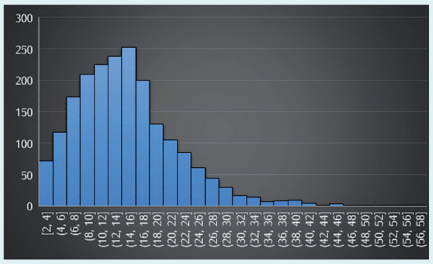
ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

PUZZEL 45
Birgit van Dalen
Quintijn Puite

SERVICEPAGINA 46

Kort vooraf

Laat ik het nieuwe jaar beginnen (voor wensen is het immers te laat...) met een opmerkelijk statistisch feit dat ik tegenkwam in de prachtige dataset van de Top2000. Wat dacht je van dit tsunamivormig diagram?



Het is de frequentieverdeling van de lengte van alle 2000 titels. Dus 251 titels hebben vijftien of zestien karakters, spaties meegerekend. Zo'n vorm roept natuurlijk meteen vragen op. Wat als je nu eens naar een nog grotere lijst kijkt? Bijvoorbeeld de complete Top188115 die er dit jaar bij elkaar gestemd is. Helaas, dan verdwijnt die tsunamivorm en lijkt het diagram als twee druppels water op de rechtsscheve verdeling in het artikel van Simon Biesheuvel (p. 13). Maar dat is puur toeval...

Denk ik, maar misschien is dat een denkfout. En: *Veelgemaakte denkfouten van leerlingen zijn precies de fouten die in de geschiedenis gemaakt zijn* volgens het citaat dat als tegeltjeswijsheid in het artikel van Andrea Lubberdink staat (p. 5). Denkfouten over statistische meetniveaus hoeven de leerlingen niet meer te maken als ze regelmatig het spel 'Weet wat je meet' spelen. Dat is de eerste telg uit een nieuwe serie: de Giraf-reeks, ofwel de vmbo en onderbouw havo/vwo variant van de Zebra-reeks. Marijke Hassefras-Zuidbroek, die het spel ontwierp, vertelt erover in haar bijdrage (p. 22). En de mooiste som die op 2020 uitkomt die ik voorbij zag komen? Deze: $17^2 + 19^2 + 23^2 + 29^2$.

De redactie wenst je een warme wiskundewinter!

Tom Goris

Andrea Lubberdink

Samen met Huygens de kansberekening ontdekken

Gokspelletjes zijn zo oud als de mensheid, maar dat je de kansen op winst of verlies kan berekenen, werd pas ontdekt in de zeventiende eeuw. De avontuurlijke en begrijpelijke geschiedenis van de kansberekening biedt inspirerend materiaal voor in de klas. In *Euclides* 92-3 liet Desiree van den Bogaart dit al zien.
In dit artikel beschrijft Andrea Lubberdink de opzet van een les die zij geeft over Huygens en kansrekening.

Inleiding

De twee vraagstukken uit de geschiedenis die de aanzet hebben gegeven tot het ontstaan van kansberekening zijn niet alleen inhoudelijk geschikt voor in de klas, ook de context is leerzaam en aansprekend. Omdat ik er goede ervaring mee heb, deel ik hier een les die ik geef op het moment dat er (voor de tweede keer) een hoofdstuk over kansberekening begint in de bovenbouw (vwo wiskunde A, C of D)[1].

figuur 1 Vader en zoon Huygens in Voorburg. Foto: Guus Goris

Vader en zoon Huygens

Ik begin de les met een stukje geschiedenis. Ik vertel over Constantijn Huygens (sr.) (1596 – 1687), informatie met plaatjes (makkelijk te vinden op internet) die een indruk geven van hemzelf, de tijd waarin hij leefde, zijn adellijke stand, zijn mede door hemzelf ontworpen huizen in Den Haag en Voorburg en ik laat een kort gedicht van hem zien, bijvoorbeeld *Dromen*, dat als muurgedicht te vinden is in Den Haag. Constantijn Huygens had een zoon, Christiaan Huygens (1629 – 1695), die net als zijn vader zeer getalenteerd was. Hij studeerde (rechten en) wiskunde in Leiden en Breda en hij is vooral beroemd om zijn bijdragen aan de natuurkunde. Hij heeft het slingeruurwerk uitgevonden waardoor men ineens veel nauwkeuriger de tijd kon meten. Hij bouwde zelf steeds betere telescopen waarmee hij nieuwe ontdekkingen deed over planeten en hij ontwikkelde een theorie over licht. Ik laat (nogmaals) een foto van Hofwijck zien, de buitenplaats van vader Huygens, waar Christiaan ook heeft verbleven en dat nu een museum is. Je kunt er dus gaan kijken. Christiaan Huygens is dichtbij.

Figuur 2 Hofwijck te Voorburg. Foto: Guus Goris

Twee vraagstukken uit de gokwereld

In de zeventiende eeuw werd er in hogere kringen veel gegokt met dobbelstenen of kaarten. Er waren twee vraagstukken uit de gokwereld die maar niet opgelost konden worden. Ook grote wiskundigen uit de vijftiende en zestiende eeuw waren er niet uitgekomen. Huygens hoorde erover van twee Franse wiskundigen (Fermat en Pascal), die er met elkaar brieven over hadden geschreven en de vraagstukken hadden opgelost. Huygens kende hun antwoorden, maar niet de berekeningen. Die hadden ze niet naar buiten gebracht.
Huygens raakte geïnteresseerd en ging aan de slag om de vraagstukken zelf te onderzoeken en te doorgronden. Hij kwam op dezelfde antwoorden als de Fransen, maar publiceerde wel zijn inzichten (in 1657 in het Latijn en in 1659/1660 in het Nederlands). Hij schreef daarmee het

allereerste boek over kansberekening. Daarna kwamen er meer boeken en ontwikkelde de kansberekening zich verder. Huygens stond dus aan de basis. Ik laat figuur 3 zien, het begin van het boek[2], en lees de eerste zin voor.[3]

VAN
REKENINGH
IN
SPELEN VAN GELUCK.

Figuur 3 Van Rekeningh in Spelen van Geluk

Ik leg uit wat er staat: *Hoewel het in gokspelen alleen om toeval gaat en de uitkomsten (van een worp met dobbelsteen bijvoorbeeld) onzeker zijn, is er toch iets wat wel met zekerheid bepaald kan worden, namelijk de kans die iemand heeft om te winnen of te verliezen.* Iets is dus niet voorspelbaar maar je kunt er toch aan rekenen. Dat is een bijzonder inzicht. Daar staan we tegenwoordig niet altijd meer bij stil.
In een inleidend gedeelte[4] schrijft Huygens dat zijn verhandeling weliswaar over gokspelen gaat, maar dat dit geen spel is. Men zal gaan inzien dat hier de grondbeginselen gelegd worden voor een belangrijke nieuwe theorie. Huygens begreep dus zelf dat hij iets groots en belangrijks had geschreven dat niet alleen toepasbaar was bij gokspelletjes. De theorie van Huygens is inderdaad al snel toegepast in het verzekeringswezen. We zijn inmiddels benieuwd naar wat die vraagstukken waren. Hier zijn ze:

Partijenvraagstuk

Twee partijen spelen een balspel om punten. Ze hebben beide een even grote kans om een punt te scoren. Er is geen tijdsduur voor het spel vastgelegd en de partij die als eerste 6 punten gescoord heeft, wint de pot van 60 dukaten. Het spel moet (vanwege het weer) bij de stand 5 - 3 worden gestaakt. Er wordt besloten de pot te verdelen. De vraag is nu: hoe moet dat gebeuren?

Dobbelspel

De Méré (een Franse edelman) speelde in de Franse 'salons' vaak een dobbelspel waarbij de 'bank' won als een speler bij het werpen met één zuivere dobbelsteen bij vier worpen ten minste één zes gooit. Hij bedacht daarop een variant waarbij de 'bank' wint wanneer bij 24 worpen met twee zuivere dobbelstenen ten minste één keer dubbel-zes voorkomt. De Méré dacht dat er bij beide situaties voor de 'bank' dezelfde kans op winst bestond: in het eerste geval 4/6 en in het tweede geval 24/36 (want bij twee dobbelstenen zijn er 36 mogelijkheden) en dat is beide hetzelfde. In de praktijk bleek dit echter niet op te gaan, de tweede situatie was voor de 'bank' ongunstig. De vraag was hoe dat kwam.[5]

> "Veelgemaakte denkfouten van leerlingen zijn precies de fouten die in de geschiedenis gemaakt zijn."

Dezelfde fouten als grote wiskundigen

De leerlingen krijgen de opdracht om de rest van het lesuur te gebruiken om in tweetallen de beide vraagstukken op te lossen en de uitwerking stap voor stap duidelijk op te schrijven. De vraagstukken zijn hiervoor precies geschikt qua niveau.
Een interessante factor is dat de veelgemaakte denkfouten van leerlingen (namelijk dat de pot verdeeld moet worden in de verhouding 5 : 3 en dat de kansen bij het dobbelspel 4/6 respectievelijk 24/36 zijn) precies de fouten zijn die in de geschiedenis gemaakt zijn. De denklijn van de leerlingen komt dus overeen met de denklijn van grote wiskundigen in de geschiedenis. Leerlingen kunnen zich daardoor begrepen voelen in hun manier van denken en gemotiveerder proberen om in te zien waarom het fout is en hoe het wel moet.
Bij het partijenvraagstuk helpt het om de leerlingen te vragen of het uit zou maken als de situatie zou zijn geweest dat het spel tot 9 gaat en bij 8 - 6 was afgebroken. Bij het juist oplossen van het partijenvraagstuk komt naar voren hoe handig een kansboom is en bij het dobbelspel komt het nut van de complementregel naar voren. (Huygens zelf kende de kansboom en de complementregel nog niet en had daardoor veel meer woorden en berekeningen nodig dan wij nu.)

>

BELEEF DE WERELD VAN

ESCHER

Maurits Cornelis Escher was bepaald geen ster in wiskunde. Toch is zijn band met de wiskundige gemeenschap al heel oud en ook heel bestendig. Escher is een kunstenaar die werelden weet te verbinden die elkaar van oudsher moeilijk kunnen vinden: de kunst en de wetenschap. U kunt die band zelf ontdekken. Kom samen met uw leerlingen naar Escher in Het Paleis en laat ze een duik nemen in zijn wonderlijke wereld. Een wereld waar u samen nog lang over na kunt praten!

Volgens Escherkenner professor Doris Schattschneider was Escher een 'intuïtieve wiskundige'. Door het steeds weer proberen en uitwerken van ideeën kwam hij tot verrassende oplossingen. Geïnspireerd en gesteund door wiskundigen als Lionel en Roger Penrose en Donald Coxeter, leidde dit tot prenten als *Klimmen en dalen, Waterval* en de vier *Cirkellimieten*. En natuurlijk zijn vele regelmatige vlakverdelingen vol vogels, vissen, insecten en andere beestjes. Ontdek zijn passie voor regelmatige patronen, ingewikkelde structuren en onmogelijke ruimten. Ontdek Eschers oneindige universum!

Bij reservering ontvangt u: een gratis informatie- of wiskundepakket en een kijkwijzer waarmee de leerlingen de tentoonstelling kunnen beleven.

Tegen betaling en op aanvraag bij te boeken: rondleidingen en museumlessen. De museumles bestaat uit een rondleiding met een workshop vlakvullingen tekenen.

Voor meer informatie en reserveringen: www.escherinhetpaleis.nl en info@escherinhetpaleis.nl

Escher IN HET PALEIS

ENTREE
€ 5,50 per leerling
per 10 leerlingen is een begeleider gratis.

Lange Voorhout 74, 2514 EH Den Haag
070-4277730 | info@escherinhetpaleis.nl

Interessante uitkomsten in het dobbelspel

In het algemeen zijn de uitkomsten van kansberekeningsopgaven uit het leerboek niet erg interessant, maar de uitkomsten van het dobbelspel zijn dat wel. Die verdienen dus even aandacht. Beide kansen zijn ongeveer gelijk aan 0,5. Waarom moet dat ook wel zo zijn? Hoe zijn ze er vroeger (toen ze nog geen kansen konden berekenen) achter gekomen dat de kansen voor beide partijen ongeveer gelijk waren bij dit spel? Bij het spel met vier worpen is de kans net iets groter dan 0,5 en bij het spel met 24 worpen net iets kleiner. Wat betekent dat voor winst of verlies van de bank op de lange duur? Hoe kan het dat het een tijdje duurde voordat ze erachter kwamen dat het spel met 24 dobbelstenen ongunstig was voor de bank? De leerlingen hebben in deze eerste les kennisgemaakt met veel aspecten van de kansberekening, ook dus met (het verschil tussen) empirische en theoretische kansen.

Uitdagend vraagstuk van Huygens

Voor leerlingen die extra uitdaging aankunnen (en voor onszelf) is het leuk om na te denken over het volgende spel dat Huygens verderop in zijn boek behandelt.
Ik en mijn tegenstander gooien om de beurt met twee dobbelstenen. Mijn tegenstander mag als eerste gooien. Als hij 6 ogen gooit dan wint hij. Als ik 7 ogen gooi, dan win ik. Hoe groot is de kans dat ik win? De oplossing kan volgens de lijn van Huygens als volgt gevonden worden. Stel x is de kans dat ik win en y is de kans dat ik win nadat mijn tegenstander in de eerste beurt geen 6 heeft gegooid. Telkens wanneer ik weer aan de beurt ben om te gooien is mijn kans x en telkens wanneer mijn tegenstander weer aan de beurt is om te gooien is mijn kans y. Kijkend naar een deel van de kansboom vinden we

$$y=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}x \text{ en } x=\frac{31}{36}y \Rightarrow x=\frac{31}{61}.$$

De oplossing kan ook gevonden worden met een oneindige kansboom en dus de som van een oneindig aantal termen van een meetkundige rij:

$$\sum_{k=o}^{\infty}\frac{31}{36}.\frac{1}{6}.\left(\frac{31}{36}.\frac{5}{6}\right)^k=\frac{\frac{31}{216}-0}{1-\frac{155}{216}}=\frac{31}{61}$$

Ook nu is, niet voor niks, de kans weer ongeveer 0,5.

Vakoverstijgend project

Deze wiskundeles, met aansluitend een hoofdstuk over kansberekening, zou goed als onderdeel van een vakoverstijgend project *Huygens* ingezet kunnen worden, waarin natuurkunde, wiskunde, Nederlands en geschiedenis op een natuurlijke manier samenkomen[6]. Door de originele tekst van Huygens te gebruiken en de concrete vraagstukken wordt de wiskunde bovendien minder abstract en gaan leerlingen wiskunde zien als 'een onderdeel van de wereld'. Dat is voor veel leerlingen prettig en stimulerend.

Noten

[1] De les is voortgekomen uit een opdracht bij het college Historical Aspects of Classroom Mathematics van Steven Wepster (2013).

[2] Uit Francisci van Schooten. Mathematische oeffeningen, begrepen in vijf boecken : ... Waer by gevougt is een Tractaet, handelende van Reeckening in Speelen van Geluck Door d'Heer Christianus Hugenius, blz.489, Amsterdam, 1659. Zie *http://www.fransvanschooten.nl/fvs_boek.htm*

[3] Voor de tekst in een leesbaar lettertype zie *https://www.leidenuniv.nl/fsw/verduin/stathist/huygens/1660.pdf* gemaakt door C.J. Verduin, Universiteit Leiden.

[4] Brief aan Van Schooten. Gepubliceerd in het genoemde boek[2], [3], blz. 487

[5] Overgenomen van *http://info.math4all.nl/Wiskundegeschiedenis/Onderdelen/Statistiek.html*

[6] Een inspiratiebron hiervoor (vooral voor natuurkunde en wiskunde) kan zijn uit de Zebra reeks: Vermij, R., van Dijk, H. en Reus, C., *Christiaan Huygens*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2004

Over de auteur

Andrea Lubberdink is docent wiskunde op het Utrechts Stedelijk Gymnasium en heeft een achtergrond in de geschiedenis en filosofie van de natuurwetenschappen. Als zelfstandig docent geeft zij bijlessen en trainingen en is ze gastdocent met *Getallendag*, een workshop voor 5 vwo. E-mailadres: *andrea@lublub.nl*

Rogier Bos

Warme worm op de wiskunde B-dag

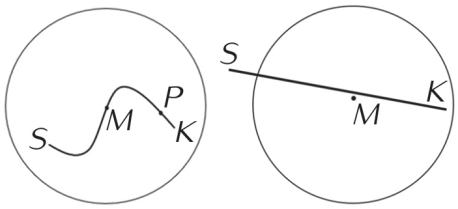
De Wiskunde B-dag is een jaarlijks terugkerende dag vol wiskunde georganiseerd door het Freudenthal Instituut. Leerlingen werken in groepen aan een opdracht die uitnodigt tot wiskundige exploratie en onderzoek. In dit artikel doet Rogier Bos verslag van de opdracht van 2018 en de prestaties van de leerlingen.

Inleiding

In de editie van 2018 stond een bekend open probleem in de wiskunde centraal: Mosers wormprobleem. Moser daagde wiskundigen uit een zo klein mogelijk warm dekentje voor zijn koude worm te maken, en wel zo dat die worm er nog in iedere houding onder zou passen. Nee, een slaapzakje is niet toegestaan. In wiskundige taal luidt het probleem als volgt: vind een (convex, compact) gebied in het vlak met een zo klein mogelijk oppervlak zo dat iedere kromme van lengte 1, na geschikte verschuiving en draaiing, erin past.
In eerste instantie lijkt het een onmogelijke taak om vooruitgang te boeken. Er zijn oneindig veel houdingen mogelijk en eindeloos veel mogelijkheden om die te schuiven en draaien. Hoe moet dat ooit tot een concreet dekentje leiden? Om leerlingen op gang te helpen, begonnen ze de dag met een aantal inleidende opgaven.

Cirkelvormige dekens

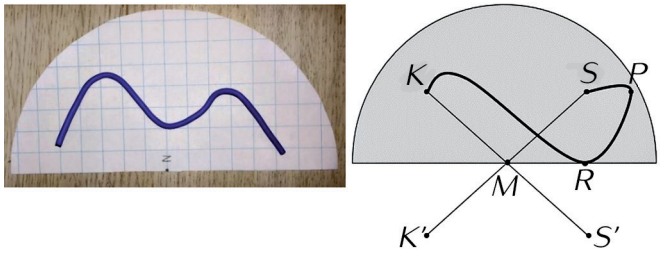
Wat is de kleinste *cirkelvormige* deken voor een slang met lengte 1? Natuurlijk is het antwoord dat de diameter 1 moet zijn. Nu vroegen we in opgave 1 om zo precies mogelijk uit te leggen waarom. Het ontlokte de leerlingen geen strak bewijs, misschien omdat euclidische meetkunde niet meer in het examenprogramma zit, misschien omdat het lastig is te herkennen dat er überhaupt nog iets te bewijzen is.
Maar dat is er wel, dus daar gaan we. Schuif de wormvorm zo dat het midden ervan op het midden van de cirkel valt, zie figuur 1.



figuur 1

Stel P is een punt op de worm. We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat P op de helft met de kop K ligt (het valt overigens niet mee om kop en staart van een echte worm te onderscheiden!). De lengte van lijnstuk MP is niet groter dan de lengte van het deel MP van de kromme worm; en dat is niet groter dan de lengte van de kromme worm MK, dus $|MP| \leq \frac{1}{2}$. Daarmee ligt P binnen de cirkel.
De gestrekte worm krijgt tenminste één koud uiteinde onder een cirkel met diameter kleiner dan 1, zie figuur 1 rechts. Namelijk, met de driehoeksongelijkheid geldt $|KM| + |MS| \geq |KS| = 1$. Hieruit volgt dat $|KM| \geq \frac{1}{2}$ of $|MS| \geq \frac{1}{2}$. Dus K of S (of allebei) ligt minstens $\frac{1}{2}$ van M af en ligt daarom buiten de cirkel (met straal $\frac{1}{2}$).

Halve cirkels



figuur 2 Ontdekking (links) en bewijs (rechts) dat een halve schijf een goede deken is

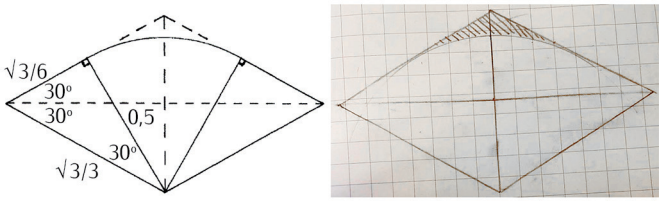
Gewapend met een ijzerdraadje en papier ontdekten veel leerlingen verderop in opgave 1 dat ook een halve cirkel nog als deken volstaat, zie figuur 2 links. Wiskundige Aram Meir gaf hiervoor een bewijs[1]. Dat gaat als volgt (hier alleen voor on-ronde wormvormen ($K \neq S$). Verplaats de worm zo dat KS evenwijdig aan de diameterrand van de halve schijf is en deze rand raakt, maar niet overschrijdt, zie figuur 2 rechts. Spiegel S en K in de rand en schuif de slang zo dat het snijpunt van SK' en

KS' op het middelpunt M van de cirkel valt. Laat R een raakpunt van de slang aan de rand zijn. Zonder verlies van algemeenheid beschouwen we een punt P op het slangdeel tussen R en S. Met behulp van de eigenschap van een driehoek dat een zwaartelijn niet langer is dan het gemiddelde van de aanliggende zijden, vinden we:

$|MP| \leq \frac{1}{2}(|SP| + |PK'|) \leq \frac{1}{2}(|SP| + |PR| + |RK'|) = \frac{1}{2}(|SP| + |PR| + |RK|) \leq \frac{1}{2}$, en klaar.

Dekentjes door de jaren heen

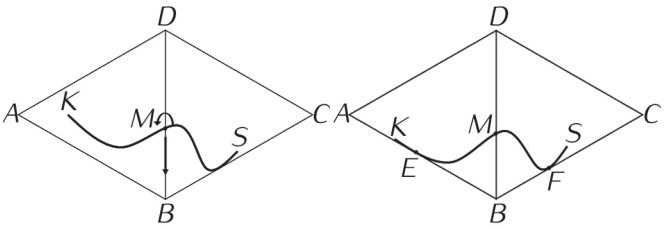
Wetzel[1] ontdekte dat je geen halve cirkel nodig hebt, maar dat een kleinere cirkelsector volstaat. Bovendien bleek je daar nog een hoekje uit weg te kunnen laten om op een oppervlak van afgerond 0,34423 uit te komen. Niet veel later, in 1974, kwamen Gerriets en Poole[2] met een ruitvormige deken minus een stukje met oppervlakte afgerond 0,28610, waarover straks meer. Achttien jaar later besefte dezelfde Poole, samen met Norwood en Laidacker[3], dat er ook nog een ander stukje van de ruit af kon met een ietwat kleiner resultaat: 0,27524, zie figuur 3 links. Tot slot, in 2006, vestigde Wei Wang[4] het huidige record met een dekentje met oppervlak 0,27091.



figuur 3 Links: de deken uit 1992[3], overtroffen door Wang[4] in 2006. Rechts: ook sommige leerlingen bedachten dat je een dergelijk stukje uit de ruit kon weglaten.

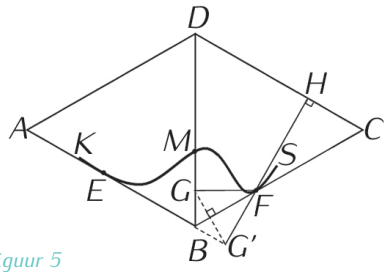
De hierboven besproken ruit bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken met hoogte ½ tegen elkaar. Om te bewijzen dat slangen in elke houding eronder passen moet je eerst uitleggen hoe: een positioneringsstrategie. Voor de ruit luidt die als volgt. Leg het midden M van de slang op de diagonaal BD zodat het staartdeel MS van de slang lijnstuk BC raakt, zie figuur 4 links. Dan schuif je M naar beneden en roteer je om M (zo dat staartdeel MS lijnstuk BC blijft raken) totdat het kopdeel KM lijnstuk AB raakt, zie figuur 4 rechts. In het uiterste geval gebeurt dat pas als M op B valt (let op: B is nog net onderdeel van lijnstuk AB).

Het was één van de grote uitdagingen van de voorbereidende opgaven om te bewijzen dat de slang op deze wijze lekker warm blijft. Het winnende team (van het Lorentz Casimir College te Eindhoven) was het enige team dat hier volledig in slaagde. Het gaat als volgt.



figuur 4 Een positioneringsstrategie voor slangen in de ruit

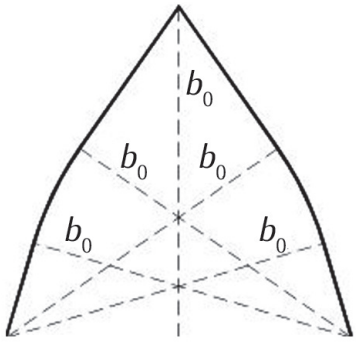
Kies een punt F waar de slang en BC 'raken', zie figuur 5. Laat loodlijnen vanuit F neer op de driehoekszijden BD (voetpunt G) en CD (voetpunt H). Spiegel G in BC.



figuur 5

Punt G' ligt op lijn HF, en BG' is evenwijdig aan DC, aangezien alle rechthoekige driehoeken in feite 30°-60°-90 °-driehoeken zijn. Je ziet vervolgens mooi dat $|HG'|$ gelijk is aan de hoogte ½. Het staartdeel MS moet meer dan GF en FH overbruggen.
Maar $|GF| + |FH| = |HG'| = \frac{1}{2}$, dus DC wordt hooguit getoucheerd.

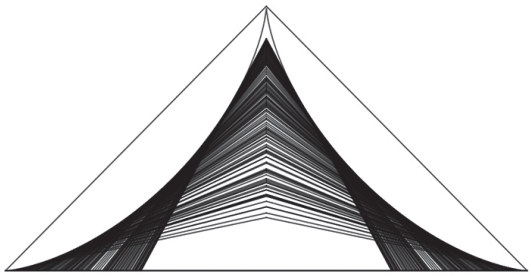
Maar is er wel een kleinste deken? Jazeker, uit Blaschkes Selectie Stelling volgt dat een kleinste convex dekentje moet bestaan (alhoewel mogelijk niet uniek). Een eerste ondergrens voor de oppervlakte werd gegeven door Wetzel[1] op basis van de Schaers Breedworm: de wormvorm (van lengte 1) waarvan de minimale breedte zo groot mogelijk is gemaakt, zie figuur 6. Wanneer je in combinatie met de gestrekte wormvorm hier een zo klein mogelijke convexe deken van maakt, dan heeft die een oppervlakte 0,21946. Door ook een V-vormige en U-vormige worm in de berekeningen mee te nemen, scherpten Khandhawit en zijn collega's[5] de ondergrens aan tot 0,23224.



figuur 6 Schaers breedworm[1] is in geen enkele richting smaller dan $b_0 = 0{,}43893$

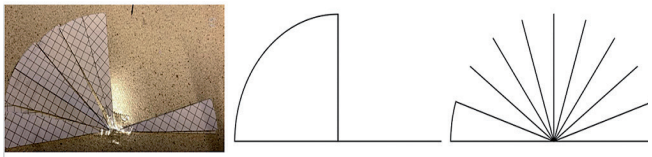
Niet-convexe dekens voor knikslangen

Waarom zou een kleinste deken niet bestaan? Een voorbeeld van een type slang waarvoor geen kleinste deken bestaat, zat in de wiskunde B-dagopdracht. Bij een moeilijk probleem is het vaak een goed idee eerst eens een eenvoudigere versie ervan op te lossen. Daarom gingen opgave 2 en 3 over de knikslang: een rechte, stijve slang met slechts een scharnier in het midden. Een half vierkant met diagonaal 1 is een prima deken. Als je echter het idee loslaat dat het dekentje convex moet zijn, dan is een halve astroïde nog een tikkie zuiniger, zie figuur 7.



figuur 7 Knikslangen onder een half vierkant dekentje, en nog beter onder een niet-convex astroïdevormig dekentje

Maar zonder convexiteit blijkt het hek van de dam. Een kwartcirkel met een dun lijntje is een prima dekentje voor een knikslang (hetgeen sommige leerlingen met knip- en plakwerk ontdekten, zie figuur 8). Is de knikhoek recht of kleiner, dan past hij onder de kwartcirkel. Is de knikhoek groter dan leg je één helft onder het lijntje. Maar dat principe kun je verfijnen. De hoek van de cirkelsector maak je zo klein als je wilt, als je maar voldoende extra dunne lijntjes toevoegt onder een veelvoud van de hoek van de sector.

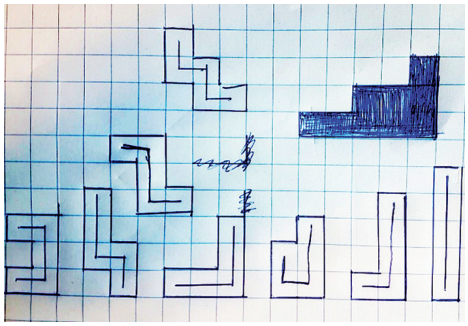


figuur 8 Niet-convexe dekens voor de knikslang

Aangezien je de lijntjes zo dun - en de hoek zo klein - mag maken als je wilt, kun je dus ook de oppervlakte van de deken zo klein maken als je wilt. Er is dus geen kleinste niet-convexe deken voor knikslangen!

Vierkantslangen

Aangezien niet iedere leerling zich even goed thuis voelt in de vlakke meetkunde, bood de opdracht ook een combinatorische invalshoek. Vierkantslangen bestaan uit vierkantjes in een rooster. We hebben aangenomen dat de slang niet op zichzelf ligt; dus dat de blokjes niet op elkaar vallen. In figuur 9 zie je de acht houdingen van een vierkantslang van lengte vijf met een passende deken met oppervlakte negen, zoals gevonden door een groep leerlingen. Doe zelf voor lengte 6!

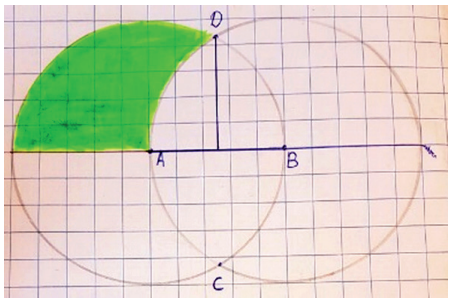


figuur 9 Vierkantslangen van lengte 5 met een geschikte deken

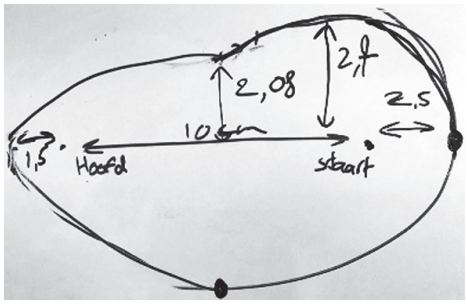
Met acht mogelijke houdingen is het zoeken naar een geschikte deken ineens veel overzichtelijker. Bewijzen dat het dekentje echt niet kleiner kan, is een grotere uitdaging (bij deze ook voor de lezer).

Ontwerpopdracht

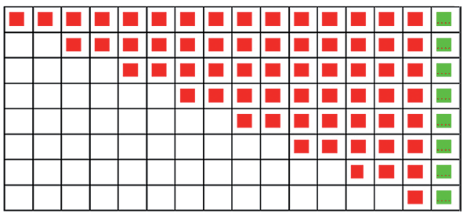
De middag besteedden leerlingen aan het ontwerp van een deken. Ze kregen daarbij de vrijheid om zelf (eerdere) beperkingen of vereenvoudigingen toe te passen. Dat leverde een keur aan dekens op voor vele type slangen. In figuur 10, 11 en 12 enkele voorbeelden.



figuur 10 Voor tweeknikslangen: een stijve slang met knikken op 1/3 en op 2/3



figuur 11 Als de kop en staart vastliggen, is de deken een ellips met een stuk eruit



figuur 12 Vierkantslangen van lengte 16. Lezersvraag: passen ze er allemaal onder?

Ieder jaar biedt de wiskunde B-dag een unieke kans voor leerlingen (en docenten) om te ervaren dat de wiskunde niet af is en dat je bovendien zelf kunt nadenken en vooruitgang kunt boeken aan de rafelrand van de wiskunde. Gun je leerlingen zo'n ervaring en schrijf je in voor de wiskunde B-dag 2020!

Noten

[1] Wetzel, J. E. (1973). Sectorial Covers for Curves of Constant Length. *Canadian Mathematical Bulletin, 16*(03).*https://doi.org/10.4153/cmb-1973-058-8*

[2] Gerriets, J., & Poole, G. (1974). Convex Regions Which Cover Arcs of Constant Length. *The American Mathematical Monthly, 81*(1), 6. *https://doi.org/10.2307/2318909*

[3] Norwood, R., Poole, G., & Laidacker, M. (1992). The Worm Problem of Leo Moser. *Discrete & Computational Geometry, 7(1),* 153–162. *https://doi.org/10.1007/BF02187832*

[4] Wang, W. (2006). An improved upper bound for the worm problem. *Acta Mathematica Sinica, 49*(4), 835–846.

[5] Khandhawit, T., Pagonakis, D., & Sriswasdi, S. (2013). Lower Bound for Convex Hull Area and Universal Cover Problems. *International Journal of Computational Geometry & Applications, 23*(3), 6. *https://doi.org/10.1142/S0218195913500076*

Over de auteur

Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en redactielid van *Euclides*. Hij is lid en coördinator van het Wiskunde B-dag ontwerpteam. E-mailadres: *r.d.bos@uu.nl*

Wiskunde in de poëzie

Henk Rozenhart

Bij wiskunde gaat het om structuur. Ook in andere disciplines is structuur vaak belangrijk, zoals rijmschema's in de poëzie. Er zijn veel gedichten die over wiskunde gaan en die mooie rijmschema's hebben. Het mooiste voorbeeld is toch wel onderstaand derde couplet uit een gedicht van Lewis Carroll, schrijver van *Alice in Wonderland*.

Yet what are all such gaieties to me
Whose thoughts are full of indices and surds?
$x^2 + 7x + 53$
$= \frac{11}{3}$

Lees het gedicht hardop en verbaas je. Is de vergelijking oplosbaar?

Het volledige gedicht is een van de vier raadsels die Lewis Carroll publiceerde in het boek *Phantasmagoria, and Other Poems* (1869) en later in *Rhyme? and Reason?* (1883). De volledige tekst is te vinden op: *https://userpages.monmouth.com/~colonel/fourriddles.html*

Lewis Caroll (1832-1898), pseudoniem van wiskundige en logicus Charles Lutwidge Dodgson

Simon Biesheuvel

Wat is rechtsscheef?

En is het gemiddelde dan groter dan de mediaan?

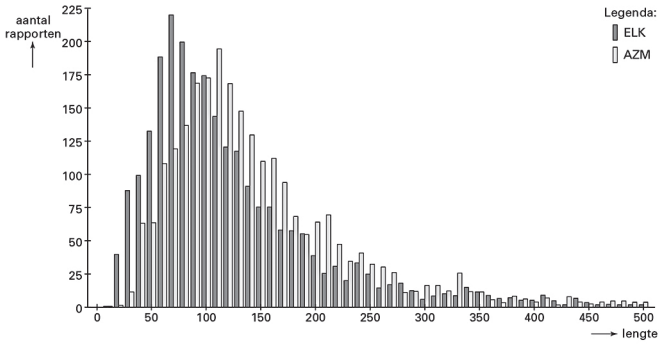
Verslag van een zoektocht naar de ligging van de mediaan en het gemiddelde in een scheve verdeling.

Inleiding

Het begon allemaal met een opgave die in *Getal en Ruimte* deel 3 havo A staat. Het is een bewerking van een oude examenopgave (vwo A1 2004 II) die komt uit de bijlage van de syllabus havo 2017, zie figuur 1.

m **Teksten vergelijken** (ontleend aan CE vwo A1 2004 II)

In ziekenhuizen worden vaak medische rapporten geschreven. Bij een onderzoek naar de inhoud van dergelijke rapporten zijn 2500 rapporten van het Elkerliek Ziekenhuis (ELK) te Deurne vergeleken met 2500 rapporten van het Academisch Ziekenhuis Maastricht (AZM).
Van elk rapport is de lengte bepaald; de lengte van een rapport is het aantal woorden dat het bevat. In figuur 1 zijn de gegevens weergegeven in een gecombineerd staafdiagram met klassenbreedte 10. Zie figuur 1.



Uit het onderzoek bleek dat de mediaan en het gemiddelde die horen bij de rapporten van het AZM niet even groot zijn.

4 Geef met een redenering, dus zonder een berekening, aan of de mediaan groter of kleiner is dan het gemiddelde.

figuur 1

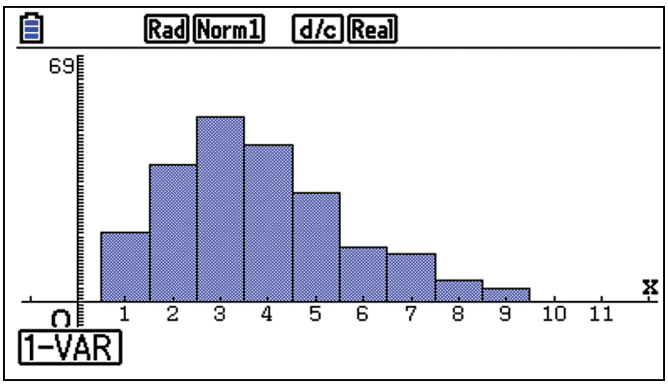
Het antwoord achterin het boek was als volgt: *in de figuur is te zien dat de verdeling van AZM rechtsscheef is. De mediaan ligt dus links van het gemiddelde en is dus kleiner dan het gemiddelde.*

Mijn collega Ewout Limburg mailde: 'Ik ben mijn lessen voor volgende week aan het voorbereiden, maar weet niet hoe ik het antwoord aan mijn leerlingen moet uitleggen. Trouwens: is het wel waar?'

De zoektocht

Die laatste vraag vond ik wel leuk: dus probeerde ik op mijn GR een aantal histogrammen en vond toen met onderstaande tabel de rechtsscheve verdeling van figuur 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	40	54	46	32	16	14	6	4



figuur 2

De mediaan is 4 en het gemiddelde is 3,81. Het is dus inderdaad niet waar dat een rechtsscheve verdeling altijd een gemiddelde heeft dat groter is dan de mediaan. Maar heb ik misschien een verkeerd idee van rechtsscheef?
In de schoolboeken *(Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde)* wordt het helemaal niet uitgelegd. Alleen een plaatje met rechtsscheef eronder.

Ik mailde Erik van Barneveld, een collega van een andere school. Hij antwoorde: 'In Wikipedia vond ik: *Een verdeling heet rechtsscheef, als deze aan de rechterkant een langere en zwaardere staart heeft dan aan de linkerkant. Deze benaming is enigszins verwarrend omdat dit automatisch*

inhoudt dat de meeste massa zich juist links van het gemiddelde bevindt. Blijkbaar is de staart in jouw grafiek wel langer, maar net niet zwaarder'.

Ondertussen vond ik het antwoord van deze (voorbeeld) examenopgave in de syllabus zelf, zie figuur 3.

vraag 4
De grootte van de meetwaarden heeft invloed op het gemiddelde, niet op de mediaan.
Het gemiddelde is groter dan de mediaan.

figuur 3

Maar dit maakte het voor mij niet veel duidelijker. Ook zag ik op examenblad.nl het volgende antwoord op de vraag in het oorspronkelijke vwo examen uit 2004, zie figuur 4.

Maximumscore 4
- Rechts van de mediaan liggen de gegevens verder uit elkaar dan links van de mediaan
- De mediaan is kleiner dan het gemiddelde

figuur 4

En een antwoord op een geheel andere vraag, zie figuur 5.

maximumscore 3
- Rechts van de mediaan liggen de gegevens verder uit elkaar dan links van de mediaan
- De mediaan is dus kleiner dan het gemiddelde

of

- Omdat de figuur rechtsscheef is, ligt het gemiddelde rechts van de mediaan
- De mediaan is dus kleiner dan het gemiddelde

figuur 5

Het tweede antwoord is volgens mij waarschijnlijk geen juist antwoord.

Later mailde Erik nog het volgende:
'Ik ben intussen ook wat verdergegaan met graven. Het blijkt ingewikkelde materie te zijn, met verschillende maten voor scheefheid etc...

De Engelstalige Wikipedia lijkt jouw visie te bevestigen (zoek bijv. op: measuring the skewness of a distribution): *The skewness is not directly related to the relationship between the mean and median: a distribution with negative skew can have its mean greater than or less than the median, and likewise for positive skew.*
Dit lijkt te impliceren dat een redenering als: 'de verdeling is scheef naar rechts dus het gemiddelde is groter dan de mediaan' niet correct is.

Dat geeft dus wel te denken over het correctievoorschrift bij de betreffende voorbeeldexamenopgave.'

Het hele verhaal, inclusief de mailteksten heb ik naar het CvTE gestuurd. Het CvTE reageerde later:
Over dit onderwerp is veel gesproken in de vaststellingscommissie. In de syllabus voor 2021 (die voor de zomer vastgesteld wordt) zal een voetnoot worden opgenomen, zie figuur 6.

Subdomein E3 Data en verdelingen
De kandidaat kan data analyseren en kenmerken van een verdeling beschrijven.

Productieve vaardigheden
De kandidaat kan
1. verdelingen kwalitatief beschrijven en/of kwalitatief vergelijken, waarbij gebruik gemaakt wordt van klokvormige, meertoppige, uniforme en scheve[3] verdelingen, centrum en spreiding, staarten en uitschieters;
2. gebruik maken van de drie vuistregels bij een (bij benadering) normale verdeling;
3. bij een gegeven probleemstelling de omvang van de steekproef berekenen met gegeven berekeningswijze.

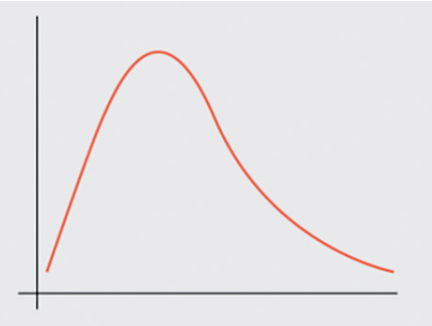
[3] Omdat er geen eenduidige definitie bestaat van het begrip scheefheid, zal, als bij een vraag op het examen dit begrip aan de orde komt, voldoende uitleg gegeven worden om de vraag te kunnen beantwoorden.

figuur 6

Deze voetnoot staat inmiddels op examenblad.nl (Wiskunde A havo, syllabus centraal examen 2021, versie 2, juni 2019).

De zoektocht gaat verder...

Inmiddels ben ik globale grafieken tegengekomen die 'rechtsscheef' zijn, zie figuur 7.



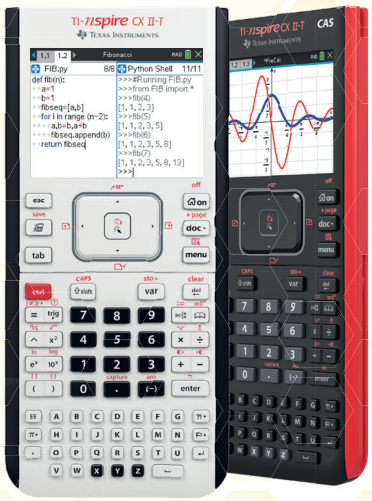
figuur 7

De mediaan is te schatten via gelijke oppervlakten links en rechts, het gemiddelde via een wig waarop de grafiek in balans is. Hiermee schat ik de mediaan nu toch wel kleiner dan het gemiddelde.
Het lukt me bij een histogram met veel verschillende meetwaarden niet om een gemiddelde te krijgen kleiner dan de mediaan. Ik begon op mijn Casio CG50 met negen verschillende meetwaarden aan het begin van dit artikel. Bij 18 lukt het me ook, maar bij 36 moest ik een verdeling maken met een vreemde dip om het gemiddelde onder de mediaan te krijgen. Gebruik ik de klassenbreedte 1, dan is het histogram gelijk aan die met negen verschillende >

NIEUW
voor 2020

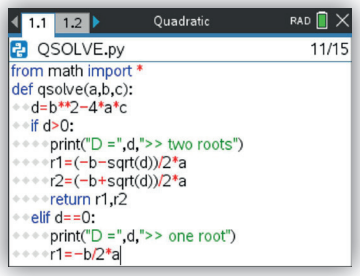
Klaar voor de toekomst met programmeren in Python

Een van de populairste programmeertalen, Python, is nu geïntegreerd in de TI-Nspire™ CX II-T en TI-Nspire™ CX II-T CAS grafische rekenmachines en software. Zo kunnen leerlingen programmeren met hun eigen handheld en op die manier 21e-eeuwse vaardigheden opdoen. Iedereen kan zelf Python-programma's schrijven, opslaan en uitvoeren.



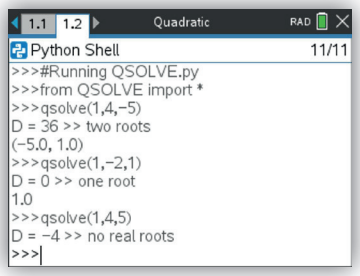
python™

Beschikbaar bij de schoolstart van 2020



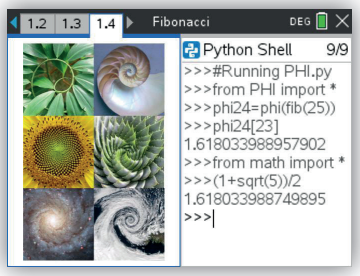
Editor

De editor menu's gebruiken in-line tekstcodes, die de gebruiker helpen met eenvoudige syntax-opties. Dit maakt het selecteren van de beschikbare functies makkelijker.



Shell

Met één druk op de knop zijn de resultaten en acties van het Python-programma te tonen.



Document Model

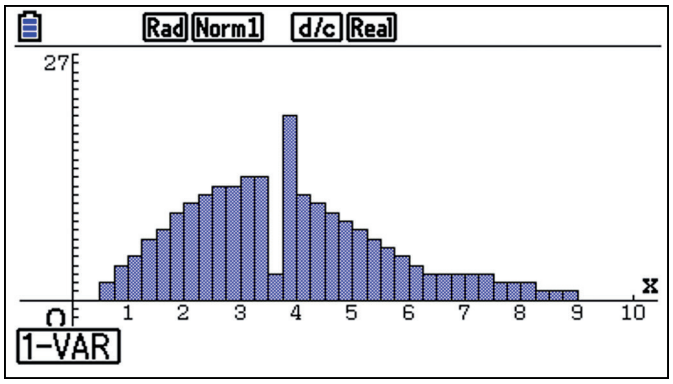
Een functie die speciaal is toegevoegd voor onze TI-Nspire™ handhelds is het opslaan van meerdere Python-scripts in één bestand. Blader door pagina's en voeg afbeeldingen, notities en grafieken toe.

Bekijk alle informatie op:
education.ti.com/nl/python

Texas Instruments

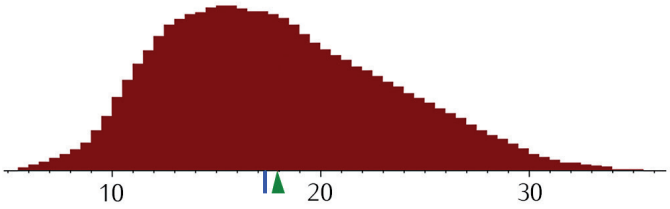
©2020 Texas Instruments

meetwaarden, gebruik ik klassenbreedte 0,25 dan krijg ik het resultaat dat in figuur 8 staat. Niet een mooi exemplaar...



figuur 8

In figuur 9 zie je een grafiek die ik met de muis tekende in VUStat. Het blauwe lijntje geeft de mediaan aan, het groene driehoekje (de wig) het gemiddelde. Bij ongeveer 70 verschillende meetwaarden lukt het me nooit om het gemiddelde links van de mediaan te krijgen.
Het lijkt erop dat er ergens een ondergrens is aan het aantal verschillende gegevens waarbij de mediaan kleiner moet zijn dan het gemiddelde.



figuur 9

Kortom

Zolang er geen duidelijke definitie is van een scheve verdeling kunnen we geen examenopgaven verwachten met in het antwoord de redenering: rechtsscheef, dus mediaan is kleiner dan het gemiddelde. Het lijkt me wel handig om de leerlingen te leren de mediaan te schatten via gelijke oppervlakten links en rechts van een lijn en het gemiddelde te schatten via een wig waarop de grafiek balanceert. Dan is de voorbeeldexamenvraag die aan het begin van dit artikel staat, tenminste ook te beantwoorden.

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum. E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*

Uniek in Nederland

Online bestelsysteem voor uw onderwijsinstelling

Het beste adres voor scholen en leerlingen. Onze service geeft u en uw leerlingen de beste deal!

Op rekenmachines.com kunnen uw leerlingen met een eigen inlog de door u voorgeschreven rekenmachine(s) bestellen.

Preferred partner van: CASIO hp Texas Instruments

Liever thuis bezorgd? Geen probleem!
Wij regelen desgewenst ook voor de school de bezorging op het huisadres van de leerling.

Ook meedoen?
Meldt u zich dan aan op rekenmachines.com

SCHEEPSTRA REKENMACHINES

Een goede prijs en uitstekende service, daar kunt u op rekenen!

Postbus 716 9200 AS Drachten Tel. 0512 53 83 53 www.rekenmachines.com info@rekenmachines.com

Matthijs van der Poel

Munten draaien

Afgelopen zomer vond de 60e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats in Bath, Engeland. Ruim 600 middelbare scholieren uit meer dan 100 landen zijn daar met elkaar de strijd aangegaan. Nederlands teamlid Matthijs van der Poel bespreekt in dit artikel opgave 5.

Het Nederlandse IMO-team, v.l.n.r. Jovan, Jippe, Szabi, Jesse, Richard en Matthijs

De weg naar de IMO

De IMO is geen wedstrijd waar je zomaar aan mee kunt doen. De eerste selectieronde, de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, vindt al meer dan een jaar voor de bijbehorende IMO plaats. Van de ongeveer 10.000 leerlingen die meedoen aan de eerste ronde kunnen er uiteindelijk maar zes deel uitmaken van het Nederlandse team. Nadat ik in de eerste klas voor het eerst had meegedaan aan de eerste ronde was ik verrast toen ik hoorde dat ik uitgenodigd was voor de tweede ronde en de finale, en dat ik uiteindelijk vijfde werd van mijn categorie. Door deze prestatie kon ik met zo'n dertig andere leerlingen deelnemen aan de training voor de IMO. Dat houdt in: maandelijks een bijeenkomst van een dag, een weekend, of zelfs een week waarvan elke dag gevuld is met tien tot elf uur wiskunde. Buiten deze bijeenkomsten hoef je je ook niet te vervelen: elke week kun je opgaven maken en opsturen. In 2017 lukte het mij om via in totaal zeven toetsen geselecteerd te worden om mee te gaan naar de IMO, en dit jaar was ik niet minder blij dat ik weer voor het Nederlandse team was geselecteerd. Ik vond opgave 5, de tweede opgave van de tweede wedstrijddag, het aangenaamst om aan te werken. Aan deze opgave wil ik dan ook dit artikel besteden.

Opgave 5

Harry heeft n munten van links naar rechts op een rij gelegd. Elke munt ligt met kop (K) of met munt (M) boven. Hij voert herhaaldelijk de volgende handeling uit: als er precies $k \geq 1$ munten zijn die met de K naar boven liggen, dan draait hij de k-de munt van links gezien om; als alle munten met de M naar boven liggen, dan stopt hij.
Een voorbeeld: als $n = 3$ en Harry start met de beginrij MKM, dan krijgt hij achtereenvolgens MKM $\rightarrow$ KKM $\rightarrow$ KMM $\rightarrow$ MMM en stopt hij na drie handelingen.

(a) Bewijs dat Harry voor elke beginrij na een eindig aantal handelingen stopt.

(b) Voor elke beginrij C definiëren we $L(C)$ als het aantal handelingen totdat Harry stopt. Bijvoorbeeld: $L(\text{MKM}) = 3$ en $L(\text{MMM}) = 0$. Bepaal de gemiddelde waarde van $L(C)$ over alle 2^n mogelijke beginrijen C.

Kleine gevalletjes

We beginnen met vraag a te proberen op te lossen. We gaan waarschijnlijk niet een oplossing uit het niets bedenken; we hebben namelijk nog helemaal geen gevoel voor de opgave. Om dat gevoel wel te krijgen is het handig om wat beginrijtjes te proberen en te zien wat er dan gebeurt. Laten we beginnen bij het begin, dus met zo kort mogelijke beginrijtjes. Dat zijn de twee rijen K en M. Als Harry start met de beginrij K, dan krijgt hij achtereenvolgens K $\rightarrow$ M en vervolgens stopt hij. Bij de beginrij M stopt Harry direct. Aan deze twee gevalletjes kunnen we nog niet zo veel zien, dus we gaan door met

het proberen van beginrijtjes met lengte 2. Dat zijn de vier rijen KK, MK, KM, en MM. Bij KK krijgt Harry achtereenvolgens KK → KM → MM. Bij MK krijgt Harry MK → KK → KM → MM. Bij KM krijgt Harry KM → MM. En bij MM stopt Harry meteen. We kunnen nu nog steeds niet veel opmerken, behalve dat het inderdaad elke keer na een eindig aantal handelingen stopt, dus we gaan op dezelfde manier verder met $n = 3$. We gaan alle acht mogelijke rijtjes één voor één uitproberen. Voor het gemak zetten we een streep onder de munt die we gaan omdraaien:

KK<u>K</u> → K<u>K</u>M → <u>K</u>MM → MMM
M<u>K</u>K → <u>M</u>MK → K<u>M</u>K → KK<u>K</u> → K<u>K</u>M → <u>K</u>MM → MMM
K<u>M</u>K → KK<u>K</u> → K<u>K</u>M → <u>K</u>MM → MMM
<u>M</u>MK → K<u>M</u>K → KK<u>K</u> → K<u>K</u>M → <u>K</u>MM → MMM
K<u>K</u>M → <u>K</u>MM → MMM
<u>M</u>KM → K<u>K</u>M → <u>K</u>MM → MMM
<u>K</u>MM → MMM
MMM

Er valt nog niet iets direct op, maar we hebben nu wel meer gevoel voor hoe de rijtjes zich gedragen.

Uit het ongerijmde

Laten we opnieuw kijken naar wat we moeten bewijzen. We moeten voor elke beginrij laten zien dat Harry na een eindig aantal handelingen stopt. We kunnen proberen om dit te bewijzen uit het ongerijmde. Dat wil zeggen: we nemen eerst aan dat het gevraagde onwaar is, en vervolgens proberen we daar een tegenspraak uit af te leiden (waaruit we kunnen concluderen dat het gevraagde tóch waar was). In ons geval nemen we dus eerst aan dat er wél een beginrij A is waarop Harry oneindig vaak een handeling doet, en proberen we vervolgens te bewijzen dat zo'n rij niet kan bestaan. Wat zou er namelijk gebeuren als die beginrij A bestaat? Als eerste kunnen we opmerken dat er dan minstens één munt a is die oneindig vaak wordt omgedraaid door Harry. In het bijzonder wordt die munt a ook oneindig vaak omgedraaid zodat die na de omdraaiing met de K boven komt te liggen. We hebben net tijdens het bekijken van de kleine gevalletjes dit gezien: Als Harry tijdens handeling nummer b een munt c omdraait zodat die met K boven komt te liggen, draait Harry tijdens handeling nummer $b + 1$ de munt direct rechts van munt c om. Dat is logisch, want tijdens het doen van handeling $b + 1$ telt Harry precies één K meer dan tijdens het doen van handeling b. Daaruit kunnen we concluderen dat de munt direct rechts van munt a ook oneindig vaak wordt omgedraaid. Kunnen we dan ook laten zien dat de munt direct links van munt a oneindig vaak wordt omgedraaid? Ja! Want die munt wordt juist elke keer omgedraaid nadat munt a wordt omgedraaid zodat die met de M boven komt te liggen. In het algemeen kunnen we dus het volgende concluderen: als een munt oneindig vaak wordt omgedraaid, worden de twee munten naast die munt ook oneindig vaak omgedraaid. We hadden al opgemerkt dat er minstens één munt is die oneindig vaak wordt omgedraaid, dus alle munten worden oneindig vaak omgedraaid. Kunnen we met deze informatie snel op een tegenspraak uitkomen? Ja: want dit betekent dat de meest linker munt ook oneindig vaak wordt omgedraaid. In het bijzonder draait Harry die munt een keer om zodat die met de M boven komt te liggen. Maar nadat Harry dat heeft gedaan, telt Harry nul K's (want vlak voor die handeling moet hij er precies één geteld hebben). En dan eindigt het spel. Maar we hadden juist aangenomen dat Harry oneindig vaak een handeling doet, dus we hebben inderdaad een tegenspraak gevonden. We concluderen dat het gevraagde bij (a) waar is.

Een vermoeden

Ook bij onderdeel (b) is het handig om naar kleine gevalletjes te kijken, zodat we een vermoeden kunnen krijgen over hoe we de opgave uiteindelijk op willen lossen. Misschien kunnen we zelfs een patroon herkennen in de gemiddelde waarde van $L(C)$ bij verschillende waarden voor n. Laten we kijken naar de gemiddelde waarde voor $L(C)$ bij $n = 1$, bij $n = 2$ en bij $n = 3$. Voor het gemak noteren we G_n voor de gemiddelde waarde van $L(C)$ over alle beginrijtjes C met lengte n. Hiervoor kunnen we terugkijken op wat we bij onderdeel (a) hebben gezien. We beginnen met het geval $n = 1$. We zien dat $L(\text{K}) = 1$ en $L(\text{M}) = 0$, dus $G_1 = (1 + 0)/2 = 0{,}5$. We gaan verder met het geval $n = 2$. We zien dat $L(\text{KK}) = 2$, $L(\text{MK}) = 3$, $L(\text{KM}) = 1$ en $L(\text{MM}) = 0$, dus $G_2 = (2 + 3 + 1 + 0)/4 = 1{,}5$. Ten slotte bekijken we het geval $n = 3$. We zien dat $L(\text{KKK}) = 3$, $L(\text{MKK}) = 6$, $L(\text{KMK}) = 4$, $L(\text{MMK}) = 5$, $L(\text{KKM}) = 2$, $L(\text{MKM}) = 3$, $L(\text{KMM}) = 1$ en $L(\text{MMM}) = 0$. Daaruit volgt dat $G_3 = (3 + 6 + 4 + 5 + 2 + 3 + 1 + 0)/8 = 24/8 = 3$. De oplettende rijtjeskenner valt het nu op dat G_1 de helft van het eerste driehoeksgetal is, G_2 de helft van de tweede en G_3 de helft van de derde. Dat kan toeval zijn, maar wie gaat kijken of het ook zo werkt bij grotere n ziet dat dit patroon zich inderdaad voortzet. Misschien kan dit vermoeden ons helpen bij het vinden van de oplossing, en anders kunnen we dit vermoeden inzetten als we een bepaalde berekening willen controleren.

Een verband

Als we nog even goed naar onze kleine gevalletjes kijken, valt ons iets op: de laatste vier waarden van $L(C)$ bij $n = 3$ zijn precies de waarden bij $n = 2$ (namelijk in deze volgorde 2, 3, 1 en 0). Zou dat in het algemeen ook waar zijn? We zien inderdaad dat de laatste twee waarden in het geval $n = 2$ hetzelfde zijn als de waarden bij $n = 1$, namelijk in deze volgorde 1 en 0. Voor de zekerheid controleren we ook of de laatste acht waarden bij het geval $n = 4$ dezelfde waarden zijn als de acht waarden van het geval $n = 3$, en het blijkt inderdaad te kloppen! Zou er dan een verband zijn tussen de beginrijtjes KK, MK, KM, en MM, en de beginrijtjes KKM, MKM, KMM, en MMM? Ja, het verschil is dat er een munt met >

de M boven aan de rechterkant van de rij is toegevoegd of weggehaald. Nu weten we ook waarom de waarden hetzelfde zijn, want een munt met de M boven aan de rechterkant meer of minder verandert niets aan de handelingen die Harry doet.

De andere helft

Zou er dan ook een verband zijn tussen de andere vier waarden $L(C)$ bij $n = 3$ en de vier waarden van $L(C)$ bij $n = 2$? Die blijkt er te zijn: de waarden 3, 6, 4 en 5 zijn precies 3 hoger dan de waarden 2, 3, 1 en 0 (maar dit keer niet in deze volgorde). Een stap lager zien we eveneens dat 2 en 3 precies 2 hoger zijn dan 1 en 0. En als we het geval $n = 4$ bekijken, zien we dat dit vermoeden nog steeds op gaat. Maar wat is dan precies het verband tussen de beginrijen KKK en MM, tussen MKK en MK, tussen KMK en KM, en tussen MMK en KK? Dit blijkt geen eenvoudig verband te zijn; zelf had ik dit verband tijdens de wedstrijd ook niet gezien. Maar door hard door te werken (bijvoorbeeld door te kijken naar grotere n), en door gebruik te maken van hun wiskundige intuïtie die zij in de afgelopen jaren hebben opgebouwd, hadden vier van mijn teamgenoten dit wel gezien. Het idee is om eerst de meest rechter munt te verwijderen, daarna alle munten om te draaien (dus K wordt M en M wordt K) en ten slotte de rij te spiegelen. Op deze manier verandert bijvoorbeeld de beginrij KMKKK in de beginrij MMKM. Dat inderdaad de vergelijking L(KMKKK) = L(MMKM) + 5 waar is, illustreren we door al Harry's handelingen uit te schrijven:

K	M	K	K	K			M	M	K	M
K	M	K	M	K			K	M	K	M
K	M	M	M	K			K	K	K	M
K	K	M	M	K			K	K	M	M
K	K	K	M	K			K	M	M	M
K	K	K	K	K			M	M	M	M
K	K	K	K	M						
K	K	K	M	M						
K	K	M	M	M						
K	M	M	M	M						
M	M	M	M	M						

We zien dat de twee dik omkaderde blokken spiegelbeelden van elkaar zijn, zowel in de zin dat de K's in M's veranderd zijn en de M's in K's, als in de zin dat de rijen gespiegeld zijn.

Conclusie

We hebben nu twee keer een verband gevonden tussen G_n en G_{n-1}. Kunnen we nu een formule geven die G_n uitdrukt in termen van G_{n-1}? Laten we eerst kijken of we G_3 uit kunnen drukken in termen van G_2, want als dat ons niet lukt, dan gaat het algemene geval ook niet lukken. We zagen dat voor de helft van de waarden $L(C)$ in het geval $n = 3$ geldt dat die één op één te verbinden zijn aan de waarden $L(C)$ in het geval $n = 2$.
Voor de andere helft van de waarden $L(C)$ in het geval $n = 3$ zagen we dat die gemiddeld 3 méér waren dan de waarden $L(C)$ in het geval $n = 2$. Dus G_3 is het gemiddelde van G_2 en $G_2 + 3$. Dus $G_3 = 1½ + G_2$. Dat komt gelukkig overeen met de waarden voor G_2 en G_3 die we uitgerekend hadden. In het algemeen krijgen we op deze manier de recursieve uitdrukking $G_n = n/2 + G_{n-1}$. Kunnen we dan ook een directe formule krijgen voor G_n? We weten ook dat $G_{n-1} = (n-1)/2 + G_{n-2}$ en dat $G_{n-2} = (n-2)/2 + G_{n-3}$, tot en met $G_2 = G_1 + 1 = 1 + ½$. Daaruit concluderen we dat $G_n = n/2 + G_{n-1} = n/2 + (n - 1)/2 + G_{n-2} = n/2 + (n - 1)/2 + (n - 2)/2 + G_{n-3} = \ldots = n/2 + (n - 1)/2 + (n - 2)/2 + \ldots + 2/2 + 1/2$.
Maar dat is de helft van de som van de getallen van 1 tot en met n. Dus $G_n = ½ \cdot ½n(n + 1) = ¼n(n + 1)$. Dit is precies wat we wilden laten zien, dus hiermee is deel (b) bewezen. Sterker nog: dit is ook meteen een bewijs voor onderdeel (a), want als alle G_n eindig zijn, dan is $L(C)$ voor elke rij C ook eindig.

Toegankelijk, toch moeilijk

Dit is een fijne opgave om aan te werken. Zelfs als je geen idee hebt over hoe je de opgave moet oplossen, kun je altijd nog een nieuw beginrijtje nemen en kijken wat Harry dan gaat doen. Iedereen met voldoende doorzettingsvermogen zou tot een oplossing kunnen komen, want de opgave vereist geen kennis van ingewikkelde stellingen of technieken. Dit betekent niet dat de oplossing makkelijk is om te vinden. Er zijn genoeg manieren om de opgave aan te pakken zonder dat dat leidt tot een oplossing. De opgave is dus toegankelijk, maar toch moeilijk. Precies het type opgaven dat je zou willen op de IMO. Door de jarenlange en intensieve training wisten wij, als Nederlands team, gezamenlijk 37 van de 42 punten op deze opgave binnen te halen. Slechts 18 teams lukte het om een hogere totaalscore te halen voor opgave 5. Uiteindelijk konden we naar huis gaan met een eervolle vermelding (deze behaal je door een opgave foutloos op te lossen), vier bronzen medailles, en een zilveren medaille, maar vooral met leuke herinneringen aan twee

weken wiskunde en het ontmoeten van deelnemers uit andere culturen.

vakbladeuclices.nl/954poel

Het verband onder het kopje ‘De andere helft’ had ik niet gezien, maar ik had wel een ander resultaat gevonden dat ik kon gebruiken. Deze variant is te vinden op de website van *Euclides*.

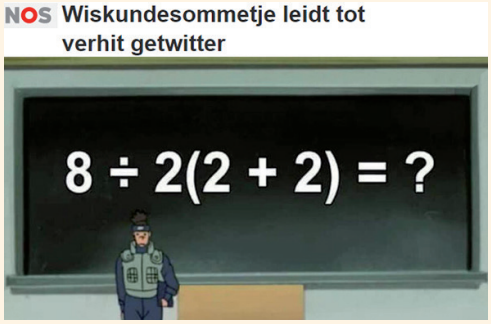
Over de auteur

Matthijs van der Poel zat op het Oosterlicht College Nieuwegein en het Christelijk Gymnasium Utrecht tijdens de vijf jaar waarin hij deelnam aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. Dit was zijn derde IMO, en ook zijn derde zilveren medaille. Nu studeert hij wiskunde aan de Universiteit van Cambridge

Kleintje rekenen

Simon Biesheuvel

In de zomervakantie stuurde een collega een mailtje met de tekst: Hey Simon, wat vind jij dat eruit komt?



Bron: NOS, zie *https://nos.nl/l/2296080*

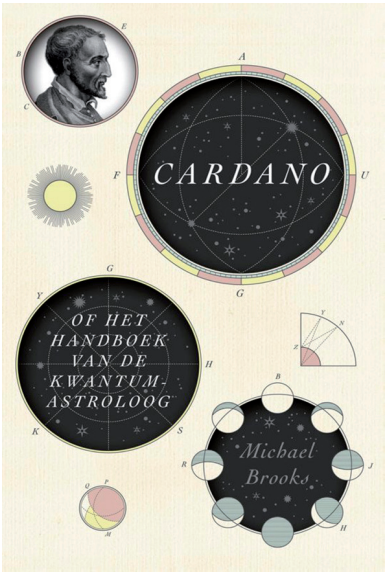
Het bleek te gaan om de vraag: is het antwoord 16 of 1? Het is maar net wat er is afgesproken over $2(2 + 2)$: hoort dit bij elkaar en krijg je $8 : 8 = 1$ of moet je de opgave uitrekenen zoals je $8 : 2 \times (2 + 2)$ uitrekent. In dit laatste geval neem je eerst $8 : 2 = 4$ dan $4 \times (2 + 2) = 16$ want vermenigvuldigen en delen gaat van links naar rechts.

Helaas bestaat *Het wiskundeboek waar de wiskunderegels glashelder en voor iedereen opzoekbaar instaan* nog steeds niet. Dus blijft dit een kwestie van: hoe denk IK dat de afspraak zou zijn. Ik denk dat er 1 uitkomt. Maar ik wil wel argumenten hiervoor aandragen. Tijdens een sectievergadering vroeg ik mijn collega’s of een brugklasser $4\pi : 2\pi$ zou kunnen uitrekenen zonder het getal π ooit te hebben gehad. Na de discussie over deze afleidende vraag vroeg ik: en wat komt er eigenlijk uit? Zes docenten vonden dat het antwoord 2 moet zijn en één dat het $2\pi^2$ is. Kortom: bij gebrek aan dat *wiskundeboek* vind ik genoeg steun om te stellen dat 2π één geheel is en niet geschreven moet worden als $2 \times \pi$. Een tweede argument is: $f(x) = \sin(2(x - \pi))$ werd vroeger in de wiskundemethodes en in het CE geschreven als $f(x) = \sin 2(x - \pi)$ en we moesten onze leerlingen leren dat $2(x - \pi)$ één geheel is. Voor mij is het nu wel duidelijk.

PS Er is geen enkele reden om naar rekenmachines te kijken maar toch: sommige modellen krijgen hier 1 en 2 uit, andere 16 en $2\pi^2$. Wat vind jij????

Boekbespreking
Cardano of het handboek van de kwantumastroloog

Ger Limpens



Titel: Cardano of het handboek van de kwantumastroloog
Auteur: Michael Brooks
Uitgever: Omniboek, 2018
ISBN: 978-94-019-1344-7, 224 pagina's paperback
Prijs: € 22,50

Associatief

Als je van een boek houdt met een duidelijk begin, einde en herkenbare structuur moet je hier niet aan beginnen. Dat lijkt me een aardige waarschuwing vooraf. Michael Brooks, een Engelse kwantumfysicus die zich ook manifesteert als schrijver en als journalist, heeft met *Cardano of het handboek van de kwantumastroloog* een boek geschreven dat alle kanten uitwaaiert. Het leven van Gerolamo Cardano (1501 – 1576), die we (wat mij betreft abusievelijk) kennen als de zestiende-eeuwse wiskundige die een algemene formule voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen heeft ontwikkeld, vormt de leidraad van het boek van Brooks. Maar minstens zo belangrijk in het boek zijn de verschillende verhandelingen die Brooks wijdt aan de ontwikkelingen van de kwantumfysica en de daarmee vaak conflicterende relativiteitstheorie. Een en ander wordt beurtelings opgedist. De overgangen van passages over het leven van Cardano naar aspecten rond de ontwikkelingen in de wondere wereld van de kwantumfysica vinden vaak via onnavolgbare gedachtesprongen en associaties plaats. Mocht ik oorspronkelijk al van zins zijn geweest hier een samenvatting te geven van dit boek, dan zorgt alleen deze vertelvorm er al voor dat me dat niet zal gaan lukken.

Lezers van deze recensie zullen het dus moeten doen met een wellicht al even vrij associërend artikel. Mocht je dat aanspreken, dan is dit boek wellicht een aanrader. Andere, wat meer in helder gestructureerde lectuur geïnteresseerden kunnen hun tijd vermoedelijk beter besteden.

Kwantumfysica

Waarmee overigens niet gezegd is dat dit boek niet de moeite van het lezen waard is. Als je, zoals ik, slechts zijdelings bekend bent met de kwantumfysica, dan is de informatie die Brooks verstrekt, interessant en, in elk geval gedeeltelijk, nieuw. De fotonen, de verstrengelde deeltjes en de daarmee samenhangende superposities vliegen je om de oren. En de namen van de bijbehorende fysici evenzeer. Toch is het niet zo dat ik na het boek gelezen te hebben een duidelijk beeld heb van die wereld. Dat komt omdat er volgens Brooks eigenlijk geen duidelijk beeld te geven is. Deze materie, hoewel dat in dit verband eigenlijk een verkeerd woord is, is nog absoluut niet uitontwikkeld. Brooks trekt in dat kader een parallel met de tijd van Cardano: zoals wij nu kijken naar de kennis van de wereld en het universum in de zestiende eeuw, zo zal er vermoedelijk over pakweg vijf eeuwen ook gekeken worden naar onze kennis hiervan op dit moment. Er is misschien niet zo heel veel veranderd in al die eeuwen, zo suggereert hij.

Discussies in een Italiaanse kerker

Zoals al vermeld, slingert het boek ook door het leven van Cardano. Brooks kiest daarbij voor een originele invalshoek: hij, Brooks, ontmoet Cardano zogenaamd in de gevangenis waar Cardano in 1570 door toedoen van een van zijn zonen is beland. De onmogelijke spagaat waar je als lezer in terecht dreigt te komen, gebaseerd op het onmiskenbare feit dat Brooks een tijdgenoot van ons en niet zozeer van Cardano is, en daarmee toch in onze (en elk geval de mijne) beleving van het tijd-ruimte-continuüm onmogelijk in de bewuste periode in die gevangenis in het Italiaanse Bologna kan zijn geweest, pareert Brooks door losjes de kwantumfysica te hanteren. Als een deeltje zich volgens die kwantumfysica op verschillende plekken in het universum kan manifesteren, dan kan een wat grotere entiteit, zijnde Brooks zelf, wellicht ook wel opduiken op een tijdstip dat niet strookt met onze elementair-lineaire tijdservaring. Dat Cardano in zijn autobiografische geschriften suggereert dat er ten tijde van zijn Bolognese gevangenisperiode een geest of engel rondwaarde in zijn cel, komt Brooks dan handig van pas: kijk maar, zegt Brooks, ik was er misschien toch echt wel.

Maar eerlijk gezegd ervaar ik een en ander nog steeds als een leuk maar niet bepaald geloofwaardig trucje. Wel zorgt het voor bijzondere discussies in die Italiaanse kerker tussen Cardano en Brooks. Hierbij voert Brooks Cardano met informatie over de huidige stand van zaken over de kwantumfysica en associeert hij vervolgens ook hier vrijelijk heen en weer over die fysica en het leven van Cardano.

> "Het is mij nog steeds een raadsel waarom Cardano vaak genoemd wordt als de bedenker van die algemene formule voor derdegraadsvergelijkingen."

Slinkse truc

Cardano wordt ten tonele gevoerd als een wat rare man met inconsistent gedrag dat hem eigenlijk zijn hele leven parten gespeeld heeft. De drang naar roem en erkenning wringt regelmatig met gedrag dat hier en daar aan zelfvernietiging grenst. Dat maakt de man interessant maar ook wel onsympathiek, wat mij betreft. Verder is het mij, ook na lezing van dit boek, eigenlijk nog steeds een raadsel waarom Cardano vaak genoemd wordt als de bedenker van die algemene formule voor derdegraadsvergelijkingen. Ook dit boek maakt toch weer duidelijk dat Cardano in feite niets anders deed dan datgene wat Niccolo Tartaglia en Scipione del Ferro ruimschoots voor hem hadden bedacht en vervolgens lang geheim gehouden hadden. Dat Cardano er in slaagde Tartaglia zijn geheim te ontfutselen en dat vervolgens met een slinkse truc te publiceren, draagt overigens niet bij aan de appreciatie mijnerzijds van de persoon Cardano. Het is dus ook maar de vraag in hoeverre je Cardano kunt zien als degene die voor het eerst nagedacht heeft over de (on?)mogelijkheid om de wortel van een negatief getal te trekken. Brooks voert Cardano daarentegen wel op als de aartsvader van de complexe getallen.

Inkijk in de zestiende eeuw

Een gevolg van de werkwijze van Brooks is zonder meer dat je als lezer een heel aardige inkijk krijgt in de wereld van de zestiende-eeuwse wetenschappers en meer in het algemeen hoe die wetenschappers zich op allerlei gebieden bezighielden met de wereld om hen heen. Cardano was, behalve wiskundige, ook als filosoof en medicus een beroemdheid in zijn tijd en reisde half Europa door om als arts diverse Europese vorsten en andere hoogwaardigheidsbeklederes op niet onverdienstelijke wijze van dienst te zijn. En het is erg amusant om te lezen hoe een uiterst rationeel iemand als Cardano net zo makkelijk verdwaalt in wat in onze ogen als bijgeloof of mysticisme valt aan te merken. Op zo'n moment is de kloof van vijf eeuwen wat mij betreft dan wel weer goed merkbaar.

Tot slot

Wat moet een lezer van *Euclides* met dit alles? Die dient, wat mij betreft, zijn eigen smaak te volgen. Als je, nogmaals, het idee hebt dat een boek als dit met zijn breed uitwaaierende associaties jou iets te bieden heeft, lees het dan vooral. Doe dat in alle andere gevallen dus niet. Je moet in elk geval bereid zijn om het een en ander aan onvolkomenheden te accepteren. Zie daarvoor mijn kritische kanttekeningen. Maar ook dien ik op te merken dat er zich (ook hier) diverse rare fouten en foutjes aandienen. De aanwezige onvolkomenheden wat betreft spelling en grammatica kunnen nog voor rekening van de vertaler gehouden worden, maar dat geldt niet voor de wiskundige onvolmaaktheden. Zo wordt de *abc*-formule vermeld maar dan wel in een foute versie. En Brooks is kennelijk ook niet volledig op de hoogte van de diverse kegelsneden die er zijn, want in de opsomming van deze wiskundige objecten vermeldt hij slechts ellips en parabool.
En toch heb ik het al met al met plezier gelezen, zo kan ik niet laten als slot toe te voegen.

Over de auteur

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *ger.limpens@gmail.com*

Marijke Hassefras-Zuidbroek

‘Mevrouw, kun je met hobby’s rekenen?’

Hoe bespreek je statistische meetniveaus? Het spel *Weet wat je meet* laat leerlingen vragen indelen op meetniveau. Dat gaat in drie stappen, oplopend van beginnersniveau naar expertniveau. *Weet wat je meet* is de eerste uitgave van de Giraf-reeks, speciaal ontworpen voor het vmbo en de onderbouw havo/vwo.

Inleiding

‘Neem een onderzoeksvraag in gedachten en verzin daar zelf mogelijke antwoorden bij. Maak bij deze gegevens zoveel mogelijk grafieken en diagrammen en maak hier een mooie poster van.’ Zo luidde de opdracht die mijn vmbo kader 4 klas kreeg. Om ervoor te zorgen dat leerlingen niet vast zouden lopen, moesten zij de bedachte onderzoeksvraag ter goedkeuring aan mij voorleggen. Eén van de groepjes wilde aan de slag met de onderzoeksvraag ‘Wat zijn de hobby’s van de docenten op onze school?’ Ik keurde deze onderzoeksvraag niet goed, het resultaat zou een poster zijn met alleen een cirkel- en staafdiagram. Omdat leerlingen nog nooit wat over meetschalen hadden geleerd, moest ik mijn ‘nee’ onderbouwen met alleen: ‘Kies maar wat anders, hier kun je niet mee rekenen.’ Dit antwoord had natuurlijk meer uitleg nodig, want waarom kun je niet rekenen met hobby’s?

Ontstaan en inhoud spel

Het voorval deed zich voor tijdens het volgen van mijn bacheloropleiding waarvoor een opdracht moest worden gemaakt in het kader van ‘statistiekdidactiek’. Ik besloot een didactisch hulpmiddel te ontwerpen waarin aandacht werd besteed aan de vier meetschalen, zodat ik daar in het vervolg wél aan kon refereren. Ik maakte 24 kaartjes met daarop een grafische weergave uit de methode *Getal & Ruimte*. Vervolgens bedacht ik bij deze weergave een vraag en mogelijke antwoorden. De bedachte vragen bevonden zich op verschillende meetniveaus. Zo ontstond het spel *Weet wat je meet*, zie figuur 1. Het doel is dat je door middel van het sorteren van kaartjes de meetschalen leert kennen.

figuur 1

Differentiatie op drie niveaus

Het spel kan op drie niveaus worden gespeeld. De drie niveaus worden aangegeven door middel van één, twee of drie ‘girafjes’. Op het beginnersniveau verdelen de leerlingen de 24 kaartjes in twee groepen. De meetschalen worden verbeeld door middel van smileykaarten met verschillende kleuren. Bij dit niveau horen een kaart met een rode smiley met de tekst ‘Hiermee kun je niet rekenen’ en een kaart met daarop een groene smiley met de tekst ‘Hiermee kun je rekenen’, zie figuur 2. Leerlingen pakken één van de 24 kaartjes, lezen de vraag en de antwoordmogelijkheden die op het kaartje staan en bepalen of er met het antwoord kan worden gerekend of niet. Zo komt het kaartje met de vraag ‘Hoeveel mm water viel er in een maand? (Antwoordmogelijkheden: 44 mm, 35 mm, ...)’ onder de groene smiley. En de kaartjes met daarop ‘Hoe drinkt u uw koffie? (Antwoordmogelijkheden: zwart, met witmaker, met zoetmiddel, ...)’ en ‘Hoeveel pollen van de berk zijn er in de lucht? (Antwoordmogelijkheden: geen pollen, weinig pollen, redelijk veel pollen, veel pollen)’ onder de rode smiley. Nadat de leerlingen voor alle kaarten de juiste keuze voor een kleur smiley hebben gemaakt, kan het niveau worden verhoogd.

figuur 2

Bij het spelen van het spel op het gevorderde niveau wordt de kaart met ‘Hiermee kun je niet rekenen’ vervangen door twee andere smileykaarten. De eerste kaart is weer een rode smiley maar nu met bovenaan de kaart de term ‘nominale schaal’. De tweede kaart is een oranje smiley met daarboven: ‘ordinale schaal’ (zie figuur 3). De rij met kaartjes waar vragen op staan waar niet mee te rekenen valt, moet nu in deze twee meetschalen worden gesorteerd. Dit gebeurt aan de hand van de vraag of er ordening in de antwoorden kan worden aangebracht of niet. Dat betekent dat leerlingen de kaartjes ‘Koffie’ en ‘Pollen’ nu moeten verdelen over respectievelijk de rode smiley en de oranje smiley. De rest van de kaartjes blijft liggen bij ‘Hier kun je mee rekenen.’
Bij het spelen op het expertniveau wordt ook de rij met vragen waarmee je kunt rekenen onderverdeeld in twee groepen, zie figuur 4. De groene kaart wordt nu gesplitst in een gele smiley met de term ‘intervalschaal’ en een groene smiley met de term ‘ratioschaal’. Na het spelen van het spel op expertniveau hebben de leerlingen de 24 kaarten verdeeld over de vier meetschalen.

figuur 3

figuur 4

Ervaringen uit de praktijk

Na het ontwerp van dit spel, brak het moment aan om het uit te proberen in de praktijk. Op dat moment was mijn vmbo kader 4 klas volop bezig met het afleggen van examens en moest ik dit noodgedwongen in één van mijn andere klassen inzetten. Ik besloot het uit te proberen in vmbo basis klas 2 en hoopte dat het uitvoeren van het beginnersniveau in deze klas haalbaar zou zijn. Gevorderde niveau zou naar mijn verwachting te hoog gegrepen zijn. Ik begon de les met een terugblik op het schoolkamp van de week ervoor. Ik stelde de leerlingen vragen als: ‘Welke excursie vond je het leukst?’, ‘Hoe vond je het kamp? Erg leuk, leuk, neutraal, niet leuk of helemaal niet leuk?’ en ‘Hoeveel uur heb je geslapen gedurende het kamp?’. Leerlingen spraken enthousiast over hun ervaringen en vervolgens vertelde ik dat je met sommige antwoorden wel kon rekenen en met andere niet. Tijd om aan de slag te gaan met het spel. De leerlingen kregen de 24 spelkaarten en een rode- en groene smileykaart. De veertien leerlingen deelden de kaartjes zonder veel moeite op de juiste manier in. Ik daagde de leerlingen uit om het spel ook op gevorderde niveau te spelen. Tot mijn verbazing ging dit niveau eigenlijk ook zonder veel moeite. Het expertniveau lukte met heel veel sturing bij een paar leerlingen. Ik keek tevreden terug; een tweede klas vmbo basis die dit al kan!

Van nominatie tot spel

Via de Hogeschool en de NVvW werd deze opdracht genomineerd voor de vakdidactische ontwerpprijs 2018 en naar aanleiding van de presentatie tijdens de studiedag van de NVvW kwam de vraag om het spel te laten uitgeven. Dit resulteerde in *Weet wat je meet.* De eerste uitgave in een nieuwe reeks publicaties van de NVvW: *De Giraf*-reeks. Het spel kan ingezet worden zoals hierboven is beschreven, maar ook op andere manieren.

Spelvormen

De kwartetkorting maakt het aantrekkelijk om vier spellen aan te schaffen zodat de klas het spel in kleine groepen kan spelen. Na het spelen van het spel kunnen de kaartjes blijven liggen en de leerlingen kunnen per groepje doorschuiven. Zo kunnen leerlingen het werk van een ander groepje controleren en in discussie gaan over de juiste antwoorden. Of laat de hersenen van het andere groepje kraken door zelfgemaakte vragen en bijbehorende antwoorden aan de tegenstander voor te leggen.
Er kan ook voor worden gekozen om het spel klassikaal te spelen en zo het klassengesprek over de meetschalen op gang te brengen, of juist leerlingen het helemaal alleen te laten doen als extra opdracht. >

Doelgroep

Door de verschillende niveaus waarop het spel kan worden gespeeld, is het spel inzetbaar binnen het hele vmbo. Er kan bij de lagere leerjaren voor worden gekozen niet alle niveaus te doorlopen maar alleen de eerste twee niveaus te doen. Ondanks dat de meetschalen geen leerstof zijn voor het vmbo, is dit geen reden om het spel niet te gebruiken. Elke leerling zal in de toekomst met statistiek te maken krijgen: een leerling die in het ziekenhuis zal gaan werken krijgt te maken met grafieken van bijvoorbeeld de vochtinname van een patiënt en een leerling die in de bouw gaat werken, zal statistische voorspellingen tegenkomen over de groei van de bouw in Nederland. Vergeet ook niet de leerlingen die het profiel *Economie en Ondernemen* kiezen. Zij zullen met veel grafieken en tabellen te maken krijgen. Kortom, we komen allemaal in aanraking met statistiek! Op basis van steekproefgegevens worden allerlei voorspellingen gedaan en besluiten genomen met soms vergaande gevolgen. Gevolgen voor ons en onze leerlingen. Daarom is het belangrijk dat ook leerlingen binnen het vmbo in aanraking komen met statistiek en hier kritisch naar leren kijken. Het spel is tevens bedoeld voor havo/vwo onderbouw. Door het weglaten van de smileykaarten en het alleen noemen van de namen van de schalen kunnen leerlingen uitgedaagd worden om zonder de toelichting bij de schalen een onderverdeling te maken. Er zijn dus mogelijkheden te over. De vragen en de bijbehorende variabelen kunnen zelfs ook nog worden ingedeeld naar continue en discrete variabelen. Dat is een mogelijkheid waar niet eens een uitbreidingsset voor nodig is!

Bredere inzetbaarheid

De publicaties binnen de Giraf-reeks zijn bedoeld voor leerlingen en docenten in het vmbo en de onderbouw van havo/vwo voor het vak wiskunde. Ik ben ervan overtuigd dat dit deel van de reeks nog veel breder inzetbaar is. Bij veel vakken krijgen leerlingen te maken met onderzoek of het houden van een enquête. Leerlingen van havo of vwo zullen ook een profielwerkstuk moeten maken. Dit spel is dan een prachtig middel om de meetschalen onder de aandacht te brengen en een leerling inzicht te geven in de manier waarop meetgegevens wel of niet kunnen worden verwerkt. Het spel bevat vier kaarten waarop de vier meetschalen worden toegelicht. Dat is belangrijke achtergrondinformatie voor elke vakdocent of leerling.

Zelf heb ik de bredere inzetbaarheid al ervaren. De meetschalen worden behandeld in havo 4 wiskunde A. Het onderwerp wordt door veel leerlingen als lastig ervaren. In de lessen rondom dit onderwerp liet ik de leerlingen de kaartjes indelen op de verschillende niveaus. In groepen doorliepen de leerlingen de verschillende niveaus van het spel en oefenden zo met het onderverdelen van de variabelen bij de juiste meetschaal. Daarbij kunnen

dan ook meteen de begrippen kwalitatief en kwantitatief worden behandeld. Aanvankelijk was ik wat huiverig voor de reacties: Als leerlingen binnen vmbo basis dit kunnen doorlopen, is het dan niet te eenvoudig voor een havo 4 leerling? Het tegendeel bleek: leerlingen gingen enthousiast aan de slag met de kaartjes. Maar dat niet alleen: de volgende les vroegen ze opnieuw om de kaartjes. Een leerling die wat onverschillig ten opzichte van het vak wiskunde leek te staan, verwoordde het als volgt: 'Mevrouw, heeft u die kaartjes nog? Ik wil ze weer even gebruiken. Ik vind het fijn om ze even in mijn handen te hebben.' Dat is nu precies de bedoeling van dit materiaal.

Dank

Tot slot wil ik Noordhoff Uitgevers bedanken voor het mogen gebruiken van de illustraties uit verschillende leerwerkboeken van de methode *Getal & Ruimte*. Tevens wil ik Fred Drissen van Epsilon Uitgaven bedanken voor de opmaak van het spel. Dank ook aan Melanie Steentjes en Desiree van den Bogaart van de NVvW voor de redactie. Zonder hen had *Weet wat je meet* niet in deze vorm bestaan.

Weet wat je meet

Inhoud:
24 spelkaarten
6 smileykaarten
4 kaarten met uitleg per schaal
3 kaarten met uitleg per spelniveau

Prijs: 5 euro per stuk, 4 spellen voor 16 euro
Te koop bij:
— NVvW (stand NVvW op het KWG Wintersymposium (11 januari), NWD (31 januari, 1 februari), Nederlands Mathematisch Congres (14 & 15 april)
— Epsilon Uitgaven: *http://www.epsilon-uitgaven.nl/*

Over de auteur

Marijke Hassefras-Zuidbroek is werkzaam als docent wiskunde aan het Driestar College te Gouda.
Ze geeft les in het vmbo en in de bovenbouw havo.
E-mailadres: *hfz@driestarcollege.nl*

Kleintje didactiek

Liefde volgens de wiskunde

Lonneke Boels

Voorlezen

Ik lees in de wiskundeles voor. Dat deed ik lang geleden toen ik regelmatig brugklassen had (de *Telduivel* vond ik daarvoor geschikt). Tegenwoordig geef ik meestal les in de bovenbouw van het vwo. In 5 en 6 vwo en bij alle soorten wiskunde lees ik voor uit het boekje *Liefde volgens de wiskunde*[1]. Ik houd het kort, vijf à tien minuten per week. Ik vind het ideaal aan het begin van de dag of na de korte pauze in een blokuur. Leerlingen luisteren, of werken ondertussen in stilte aan wiskundeopgaven. Wie het boekje niet kent, kan een hilarische, maar wel op serieuze wiskunde gebaseerde, samenvatting vinden in de Engelstalige *Ted Talk* van Hannah Fry[2]. Haar onderkoelde humor maakt dat mijn klas en ik regelmatig dubbel liggen van het lachen.

> "Fry gebruikt statistiek, toegepast op een datingsite, om te laten zien dat je beter maar jezelf kunt zijn."

Kans op een ideale partner

Hannah Fry laat zien hoe je met wiskunde kunt schatten hoeveel potentiële partners er aan je wensen voldoen (en gebruikt daarbij dezelfde wiskundige techniek als ze bij bijvoorbeeld Technische Bestuurskunde leren op de TU Delft). Ze gebruikt wiskunde uit de film *A Beautiful Mind* (over de wiskundige John Nash) om een Nash-evenwicht uit te leggen en daarna met de wiskunde van het 'stabiele-huwelijks-probleem' te laten zien dat meiden beter op jongens kunnen afstappen in een kroeg omdat ze dan met een betere keus eindigen dan af te wachten (en dat geldt natuurlijk ook voor alle andere soorten dates). Hoe je de kans op je ideale partner kunt maximaliseren, wordt ook uitgelegd (al vind ik het filmpje van Ionica Smeets en Janine Daems hierover nog sprekender[3] en komt dit ook - net even anders - aan bod in *Eureka*[4]). Fry gebruikt statistiek, toegepast op een datingsite om te laten zien dat je beter maar jezelf kunt zijn (dus: juist ook je minder fraaie kanten tonen op een foto) en gebruikt een voorbeeld van twittervolgers om te laten zien hoe een simpele vraag de verspreiding van seksueel overdraagbare ziekten kan verminderen doordat op die manier een hub kan worden opgespoord. Wat die hub inhoudt, kun je teruglezen in hoofdstuk 6. Dit boek doet precies wat Robbert Dijkgraaf heeft gezegd: *de vonk ontsteken*. Ook, of misschien wel juist, bij wiskunde C.

Noten

[1] Fry, H. (2016). *Liefde volgens de wiskunde*. Amsterdam: Uitgever: Amsterdam University Press

[2] *https://www.ted.com/talks/hannah_fry_the_mathematics_of_love*

[3] *https://schooltv.nl/video/op-zoek-naar-de-juiste-partner-wiskunde-helpt/#q=partner*

[4] Teleblik (alleen voor abonnee's): *https://beeldengeluidopschool.nl/#/details/program/urn:vme:default:program:2101608150133040331*

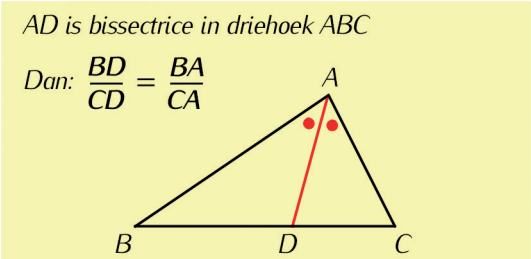
Martin Kindt

Machtige meetkunde (2)

In een eerder artikel met deze titel passeerden de begrippen ‘macht’, ‘machtlijn’ en ‘machtpunt’ de revue. In dit vervolg verschijnen deze begrippen opnieuw en spelen zij een rol bij speciale verzamelingen van cirkels, de zogeheten cirkelbundels. En net als in het vorige artikel vullen synthetische en analytische methoden elkaar aan.

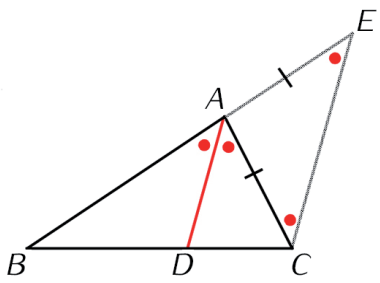
Twee bissectricestellingen

Evenals in de voorganger van dit artikel over ‘macht’ in de meetkunde[1] begin ik met een stelling uit de goede oude *Elementen* van Euclides (boek IV, propositie 3), zie figuur 1.



figuur 1

Euclides verwoordt het aldus:
Indien de hoek van een driehoek middendoor wordt gedeeld en de rechte, die de hoek verdeelt, snijdt ook de basis, dan zullen de stukken van de basis dezelfde verhouding hebben als de overblijvende zijden van de driehoek.
Bij het bewijs gebruikt hij twee hulplijnen, *AE* (verlengde van *BA*) en *CE* (// *DA*), zie figuur 2.



figuur 2

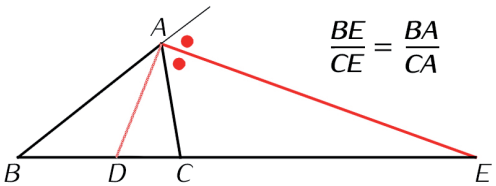
Uit de evenwijdigheid van *DA* en *CE* volgt dat driehoek *ACE* gelijkhoekig in *C* en *E* en bijgevolg gelijkbenig is. Via een bekende evenredigheidsstelling volgt dan

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{EA}=\frac{BA}{CA}.$$

Dezelfde figuur kan worden gebruikt voor het bewijs van het omgekeerde van de bissectricestelling, die door Euclides expliciet is opgenomen in zijn propositie[2].

Een aardige aanschouwelijke demonstratie:
Knip een (niet-gelijkbenige) driehoek uit dun karton en vouw een bissectrice van een van de hoeken. Die bissectrice verdeelt de driehoek in twee driehoeken waarvan de oppervlakten zich verhouden als de stukken waarin de basis wordt verdeeld. Klap nu de kleinste driehoek om langs de bissectrice en de verhouding van de oppervlakten is zichtbaar gelijk aan de verhouding van twee zijden van de driehoek[3].

Er is ook een stelling over de ‘buitenbissectrice van een driehoek’ (niet in de *Elementen* te vinden), zie figuur 3.



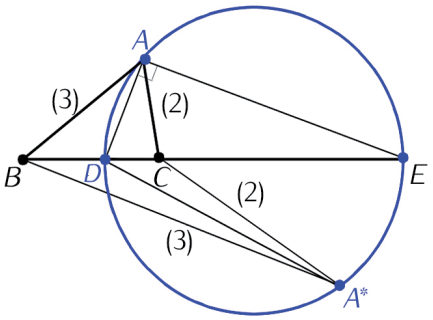
figuur 3

Laat *AE* de bissectrice zijn van een buitenhoek (bij *A*) van driehoek *ABC* met $AB \neq AC$. Die buitenbissectrice *AE* verdeelt nu de zijde *BC uitwendig* in de stukken *BE* en *CE* die zich ook verhouden als de zijden *BA* en *CA*.
Het bewijs kan worden geleverd met hulp van de

lijn door C evenwijdig aan EA. Een aanschouwelijke vouwdemonstratie werkt hier natuurlijk niet.
Drie opmerkingen:
(1) Het puntenviertal $BCDE$ heet *harmonisch*. Dit vanwege de gelijkheid $BD : CD = BE : CE$.
(2) Als $AB = AC$ is D het midden van AC en is de buitenbissectrice evenwijdig aan BC en wordt E ook wel 'gezien' als het 'oneigenlijke punt' van de lijn BC.
(3) De bissectrices AD en AE staan loodrecht op elkaar.

Een cirkel van Apollonius

Veronderstel dat in figuur 3 geldt: $BD : CD = 3 : 2$.
Dan is ook $BA : CA = 3 : 2$ en $BE : CE = 3 : 2$.
Er zijn dus ten minste drie punten met de eigenschap dat hun afstanden tot B en C zich verhouden als 3 : 2. Die punten D, E en A liggen uiteraard op één cirkel, zie figuur 4. Het lijnstuk DE is een middellijn van die cirkel omdat de lijnstukken AD en AE onderling loodrecht zijn[4].

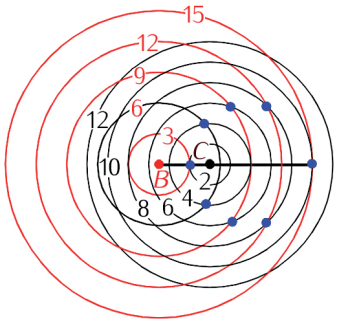


figuur 4

Dat er op de lijn BC behalve D en E niet nog meer punten zijn met de eigenschap dat de afstanden tot A en B zich verhouden als 3 en 2 is eenvoudig te snappen. Als je het punt D op lijnstuk BC een beetje verschuift naar links (rechts) wordt BD kleiner (groter) en CD groter (kleiner), dus de verhouding $AD : BD$ verandert dan. Verschuiving van E heeft tot gevolg dat AE en BE beide met hetzelfde verschil groter dan wel kleiner worden, zodat hun verhouding verandert.

Dat er buiten de lijn BC nog oneindig veel punten met die eigenschap zijn, is ook duidelijk. Neem twee cirkels om B en C waarvan de stralen zich verhouden als 3 en 2 en die niet door D of E gaan en je vindt nog twee (snij)punten met de bedoelde eigenschap. Als je dit daadwerkelijk uitvoert, bijvoorbeeld met GeoGebra, dan rijst al gauw het vermoeden dat al die punten op een gesloten kromme liggen, misschien wel een cirkel...

Het kan ook ouderwets op papier met een passer, zie figuur 5. Om de punten B en C zijn concentrische rode en zwarte cirkels getekend, respectievelijk met straal 3, 6, 9, 12, 15 en 2, 4, 6, 8, 10, 12. Let op de snijpunten (blauw)



figuur 5

van een rode en een zwarte cirkel waarvan de stralen zich verhouden als 3 en 2 en je krijgt de indruk dat die op een gesloten kromme liggen die wel eens een cirkel zou kunnen zijn.
De oplettende lezer heeft het natuurlijk al door: dit is de blauwe cirkel uit figuur 4. Hoe bewijs je dit ?
Wel, stel A^* is een punt met $BA^* : CA^* = 3 : 2$, dan zal volgens de omgekeerden van de bissectricestellingen A^*D een binnenbissectrice zijn van driehoek BCA^* en A^*E een buitenbissectrice, zo dat $A^*D \perp A^*E$. Volgens de stelling van Thales[4] ligt A^* dan op de cirkel met middellijn DE.
Maar weet je nu ook zeker dat je op deze wijze alle punten van de cirkel met middellijn DE te pakken krijgt? Dat dit wel goed gaat, kan via een kleine kunstgreep worden bewezen. Ik laat dit hier voor wat het is en stap even over naar de analytische meetkunde.

Plaats B en C in een assenstelsel zo dat $B = (-3, 0)$ en $C = (2, 0)$. Laat $P = (x, y)$ een punt zijn met de eigenschap $PB : PC = 3 : 2$, dus $PB^2 : PC^2 = 9 : 4$.
Er volgt dan:

$$4[(x + 3)^2 + y^2] = 9[(x - 2)^2 + y^2]$$

wat leidt tot

$$(x - 6)^2 + y^2 = 36$$

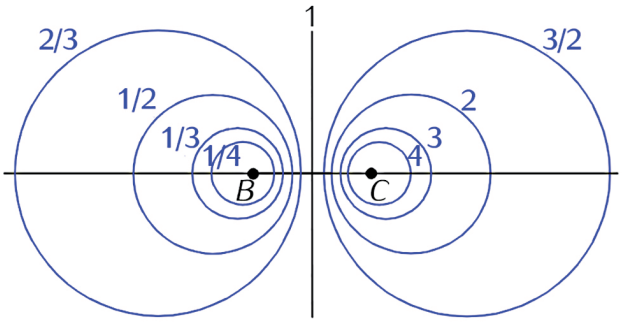
Nu zijn er drie vliegen in één klap geslagen. Je weet dat elk punt met de eigenschap $PB : PC = 3 : 2$ op een cirkel ligt en ook dat elk punt van die cirkel de bedoelde eigenschap heeft. De analytische meetkunde wint het hier van de klassieke synthetische meetkunde, want het opsporen én het heen-en-terug bewijzen van een meetkundige plaats (locus) gaat als het ware in één ademtocht.

Dit was voor mij vroeger de ultieme legitimatie van het onderwijzen van de analytische meetkunde in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Na drie jaar planimetrie viel de analytische meetkunde wat je noemt op vruchtbare bodem, en kon zij, onder meer daar waar >

kegelsneden opbloeiden, efficiënt worden benut. Bij de modernisering van het leerplan in 1968 kwam er een nieuwe analytische meetkunde met vectoren, waarin meetkundige plaatsen nauwelijks voorkwamen en kegelsneden helemaal niet en waarin de meetkunde pover kon worden genoemd. Heeft die geschiedenis zich inmiddels een beetje herhaald of vergis ik mij?

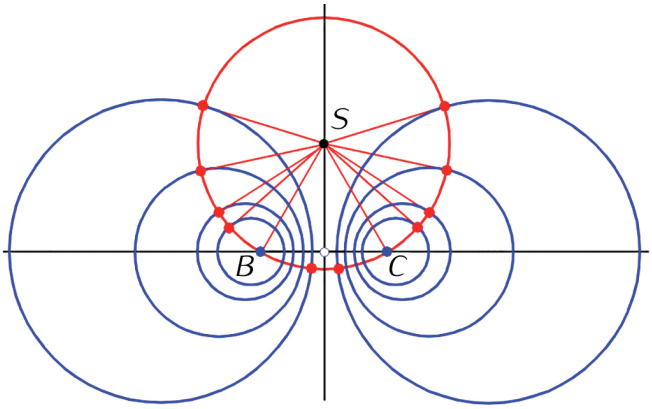
Een Apollonische familie

De verzameling van de punten die een vaste afstandsverhouding (≠ 1) tot twee gegeven punten hebben, is een cirkel die de naam van Apollonius draagt. De verhouding van de afstanden van punten (in een plat vlak) tot B en C (in datzelfde vlak) stel ik gelijk aan $\alpha : 1$. Iedere positieve waarde van $\alpha \neq 1$ levert een cirkel (van Apollonius) op en $\alpha = 1$ levert de middelloodlijn van BC. Zo ontstaat een 'Apollonische familie', zie figuur 6, die ook de naam *cirkelbundel* draagt.



figuur 6 De Apollonische familie bij B en C

Natuurlijk geldt voor elk tweetal cirkels van zo'n familie dat ze disjunct zijn, dat wil zeggen de een ligt ofwel buiten, ofwel binnen de andere. Cirkels die elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de middelloodlijn van BC, corresponderen met omgekeerde verhoudingsgetallen. Elk punt van de middelloodlijn van BC zal blijken gelijke machten te hebben ten opzichte van alle cirkels van de Apollonische familie (bundel). Die lijn wordt daarom ook de *machtlijn* genoemd van de bundel. Dat betekent dan ook dat, als je vanuit een punt van de machtlijn de raaklijnen aan alle cirkels van de bundel trekt, de raaklijnstukken aan elkaar gelijk zijn, zie figuur 7.
Dit moet natuurlijk nog wel worden bewezen. Daartoe plaats ik de figuur in een assenstelsel zó dat B en C de coördinatenparen $(-c, 0)$ en $(c, 0)$ hebben.
Laat $S = (0, s)$ een punt van de middelloodlijn van BC zijn. Een willekeurig exemplaar van de bundel snijdt de x-as in de punten $P = (p, 0)$ en $Q = (q, 0)$.
Het middelpunt M van de cirkel met middellijn PQ heeft dan de x-coördinaat $\frac{1}{2}(p + q)$. De straal r van die cirkel is $|\frac{1}{2}(p - q)|$.



figuur 7

De macht van een punt S ten opzichte van een cirkel met middelpunt M en straal r is gelijk[1] aan $SM^2 - r^2$. Dit levert hier op:

$$s^2 + \tfrac{1}{4}(p + q)^2 - \tfrac{1}{4}(p - q)^2 = s^2 + pq \qquad (*)$$

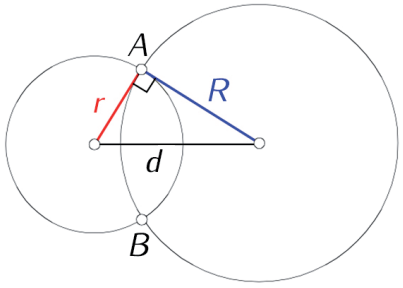
Ik moet nu nog laten zien dat deze vorm alleen afhankelijk is van de waarde van s, met andere woorden dat het product pq een constante waarde heeft. Het viertal $BCPQ$ is een *harmonisch* puntenviertal, zie opmerking (1) onder figuur 3. Dat houdt in dat $BP : BQ$ en $CP : CQ$ aan elkaar gelijk zijn. En dus:

$$\frac{p+c}{c-p} = \frac{q+c}{q-c}$$

Kruislings vermenigvuldigen leidt tot $pq = c^2$, inderdaad constant! De macht van S ten opzichte van alle cirkels van de bundel is gelijk aan $s^2 + c^2$. Dit is juist gelijk aan SC^2 (en SB^2). Kortom: alle raaklijnstukken uit S aan de Apollonische cirkels zijn even lang als SC.

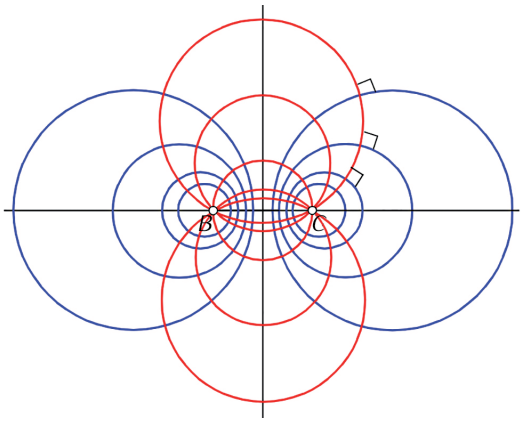
Orthogonale cirkels

De hoek tussen twee cirkels die elkaar in de punten A en B snijden is per definitie de hoek tussen de raaklijnen aan die cirkels in A (of B). Als die hoek 90° is, zeggen we dat de cirkels elkaar loodrecht snijden of ook dat zij orthogonaal zijn, zie figuur 8.



figuur 8

In dit geval moet de raaklijn aan de ene cirkel door het middelpunt van de andere gaan en vice versa. Als de stralen van de cirkels de lengte r en R hebben en als de afstand van de middelpunten d is, dan is $r^2 + R^2 = d^2$ een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het orthogonaal zijn van de cirkels.
Bekijk nogmaals figuur 7. De rode cirkel blijkt orthogonaal te zijn met elke blauwe cirkel. Als ik de straal van de rode cirkel r (dus $r^2 = s^2 + c^2$) noem, die van een willekeurige blauwe cirkel R en de afstand van S tot het middelpunt van die blauwe cirkel d, dan kan de relatie (*) worden vervangen door $d^2 - R^2 = r^2$, de nodige en voldoende voorwaarde voor het orthogonaal zijn van de rode en elke blauwe cirkel.
Als S de middelloodlijn van BC doorloopt, ontstaat er een bundel van rode cirkels die alle door B en C gaan. Elke rode cirkel uit die bundel is orthogonaal met elke blauwe cirkel en we spreken dan van twee *orthogonale bundels*, zie figuur 9.



figuur 9

Een analytische kijk

Als ik het assenstelsel weer zo kies dat $B = (-c, 0)$ en $C = (c, 0)$ en als ik het middelpunt S van een willekeurige rode cirkel het coördinatenpaar $(0, s)$ toewijs, dan past bij een rode cirkel de vergelijking

$$x^2 + (y - s)^2 = c^2 + s^2$$

ofwel

$$x^2 + y^2 - 2sy - c^2 = 0 \qquad (1)$$

Dit is een analytische voorstelling van de rode cirkelbundel. Elke waarde van de parameter s correspondeert met één exemplaar van de bundel.

Nu de blauwe bundel. Geef ik het middelpunt van een blauwe cirkel de coördinaten $(t, 0)$ en noem ik de straal even R, dan volgt uit het voorgaande dat

$$R^2 = (s^2 + t^2) - (s^2 + c^2) = t^2 - c^2$$

zodat een vergelijking van een blauwe cirkel wordt:

$$(x - t)^2 + y^2 = t^2 - c^2$$

ofwel

$$x^2 + y^2 - 2tx + c^2 = 0 \qquad (2)$$

waarmee een analytische voorstelling van de blauwe bundel is verkregen.
Vergelijk de vergelijkingen (1) en (2). Ze lijken enigszins op elkaar, maar er zijn wel duidelijke verschillen. De parameterwaarde $s = 0$ in (1) levert de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = c^2$, dit is de kleinste cirkel van de bundel.
De parameterwaarde $t = 0$ in (2) leidt tot $x^2 + y^2 = -c^2$ en dit is geen reële cirkel. Net zo min worden er reële cirkels gevonden voor t-waarden tussen $-c$ en c. Bij de randwaarden $t = \pm c$ levert (2) de puntcirkels B en C.

Ik bekijk nu de zogenaamde machtsfuncties van de rode en blauwe cirkels, dat wil zeggen de functies
$\sigma(x, y) = x^2 + y^2 - 2sy - c^2$, $\tau(x, y) = x^2 + y^2 - 2tx + c^2$.
Via 'impliciet differentiëren' kan nog eens de orthogonaliteit van de s-cirkels en de t-cirkels worden bewezen.

Ik merk op dat het niet al te gebruikelijk is om op school bij analytische meetkunde ook differentiaalrekening te gebruiken. Zelf denk ik dat het af en toe differentiëren van 'impliciete functies' de vaardigheid in het differentiëren zou kunnen versterken.

Bij wijze van voorproefje kijk ik naar de oervergelijking van de cirkel: $x^2 + y^2 = r^2$. Afgezien van de punten $(r, 0)$ en $(-r, 0)$ kun je om elk punt van de cirkel een gebied kiezen waarop y een functie is van x.
Differentiatie van y naar x geeft dan $2x + 2y \cdot y' = 0$.
Voor $y \neq 0$, geeft dit: $y' = -x/y$ voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt (x, y), waaruit nog eens volgt dat die raaklijn loodrecht staat op de straal naar (x, y), waarvan de richtingscoefficiënt immers gelijk is aan y/x . Voor wie geen angst heeft voor differentialen in combinatie met vectoren, kan het ook via

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0$$

Ik pas deze werkwijze nu toe op de s- en t-cirkels.
— Differentiëren naar x van $\sigma(x, y) = 0$ en $\tau(x, y) = 0$ geeft respectievelijk:
$x + (y - s)y' = 0$ en $(x - t) + y \cdot y' = 0$.
— Voor de snijpunten van een s-cirkel en een t-cirkel geldt: $\sigma(x, y) = \tau(x, y)$ ofwel $tx - sy = c^2$.

>

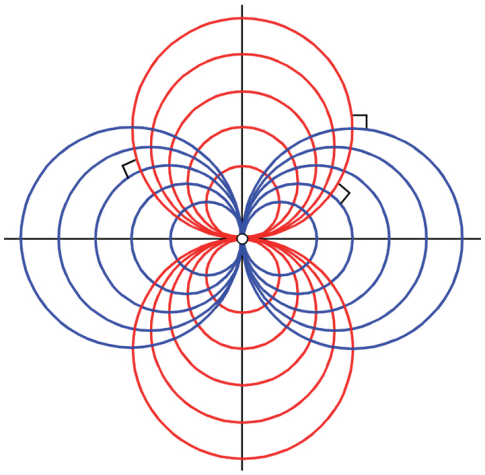
Nu nog een beetje goochelen met richtingscoëfficiënten of normaalvectoren om de orthogonaliteit te verifiëren. Ik kies voor het laatste en kijk naar het inproduct van de vectoren $(x, y - s)$ en $(x - t, y)$. Dit is:

$$x^2 - tx + y^2 - sy$$

Substitutie van $tx = sy + c^2$ geeft $x^2 + y^2 - 2sy - c^2$ en dat is gelijk aan 0 voor elk punt dat het snijpunt is van een s- en een t-cirkel.

Twee orthogonale (raak)bundels

In het voorgaande heb ik stilzwijgend aangenomen dat $c \neq 0$, ofwel dat B en C verschillende punten zijn. Wat gebeurt er nu als ik B en C laat samenvallen, dus als $c = 0$? De machtsfuncties worden dan $\sigma(x, y) = x^2 + y^2 - 2sy$ en $\tau(x, y) = x^2 + y^2 - 2tx$ die dan horen bij de verzamelingen cirkels, gegeven door: $x^2 + y^2 - 2sy = 0$ en $x^2 + y^2 - 2tx = 0$, die dan weer paarsgewijs orthogonaal zijn, zie figuur 10.



figuur 10

De s-cirkels zowel als de t-cirkels gaan door de oorsprong. Zij hebben respectievelijk de middelpunten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ en de stralen $|s|$ en $|t|$.
De s-cirkels raken de x-as in O, de t-cirkels doen dit met de y-as en daaruit volgt, zonder differentiaalrekening, dat elke s-cirkel orthogonaal is met elke t-cirkel.

De drie typen cirkelbundels

In dit verhaal zijn drie verschillende typen cirkelbundels langsgekomen.

(1) Een bundel waarvan alle exemplaren door twee vaste punten (de basispunten) gaan en die geen puntcirkels bevat.
(2) Een bundel waarvan alle exemplaren in één basispunt aan dezelfde lijn raken. Dat basispunt is als puntcirkel ook element van de bundel.
(3) Een bundel zonder basispunten, maar met twee puntcirkels die als element van de bundel kunnen worden beschouwd.

Bij alle drie typen bundels hoort een machtlijn, dat is dan de lijn waarvan elk punt gelijke machten heeft ten opzichte van alle cirkels van de bundel.
De algemene analytische voorstelling voor deze drie typen bundels is:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C + \lambda(Dx + Ey + F) = 0 \quad (*)$$

Hierin zijn A, B, C, D, E en F vast en doorloopt λ de reële getallen. Er zijn drie mogelijkheden voor de onderlinge ligging van de lijn $Dx + Ey + F = 0$ en de cirkel $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

— ze snijden elkaar in twee punten: dan stelt $(*)$ een bundel van type (1) voor, met die twee als basispunten;
— de lijn raakt de cirkel en de bundel is dan van type (2);
— de lijn ligt buiten de cirkel en dan hebben we te maken met een bundel van type (3).

De lijn $Dx + Ey + F = 0$ is dan steeds de machtlijn van de bundel.

In twee artikelen over 'macht' in de meetkunde heb ik willen demonstreren, dat synthetische en analytische meetkunde elkaar prima kunnen ondersteunen. Het vertalen van een zuiver meetkundig probleem naar algebra kan worden gezien als modelleren, en is dat niet een zeer waardevolle activiteit in hedendaags wiskundeonderwijs?

Noten

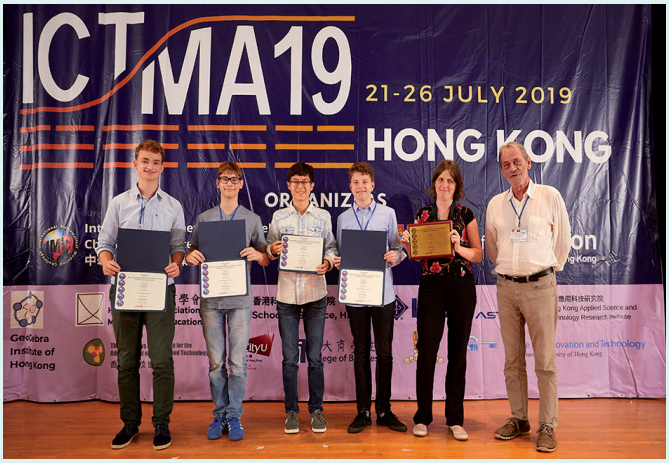
[1] Zie *Euclides* 95-3
[2] Het zich bewust zijn van het feit dat het omgekeerde van een ware implicatie niet automatisch waar is, was een belangrijk aandachtspunt in het vroegere meetkundeonderwijs.
[3] Zie ook Kindt, M. (1992). De bissectricestelling, *Euclides*, *(68)*2, 37-43, waarin negen bewijzen van de stelling staan.
[4] Stelling van Thales: een driehoek is rechthoekig als en alleen als een zijde de middellijn is van de omgeschreven cirkel.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

Nederland in de wereldtop bij IMMC 2019

Een team van het Utrechts Stedelijk Gymnasium eindigde in de top-5 van de wereld bij de internationale wiskunde modelleerwedstrijd IMMC in 2019. Vanuit 33 landen zijn 57 werkstukken beoordeeld door een internationale jury. Het tweede Nederlandse team, van GSG Leo Vroman, scoorde net onder de top-5. Een uitgebreider verslag van IMMC 2019 vind je in de volgende *Euclides*.



Het team van USG werd, samen met de vier andere topteams, gehuldigd tijdens ICTMA19 in Hong Kong. Nieuwsgierig naar deelname aan IMMC 2020 in de periode 7 maart–eind april? Informatie bij *henkvanderkooij@gmail.com.* Op de website *www.immchallenge.org* vind je alle informatie.

WORD JIJ 1E-GRAADS DOCENT WISKUNDE?

Prikkel je leerlingen. Daag ze uit met wiskundige vragen en spoor ze aan tot onderzoek en nieuwe redeneringen. Scherp je didactische vaardigheden aan. Onderzoek en vernieuw lesmethoden.

- → Start in september 2020
- → Duaal, 3 jaar
- → Behaal je Master of Education
- → Direct doorstromen vanuit bachelor mogelijk (zonder pre-master)
- → Uitbreiding vakkennis op basis van de landelijke kennisbasis
- → Praktijkgericht onderzoek
- → Masterproject: vernieuwing van leerarrangementen bovenbouw havo/vwo

'Waarom bleven de resultaten wiskunde achter? Dat heb ik onderzocht. Mijn lessen zijn er anders uit gaan zien. Klassengesprekken stimuleren de leerlingen nu er zelf mee aan de slag te gaan. Huiswerk is slechts een middel.'

Jeroen Verberkt, afgestudeerd Master Leraar wiskunde

VOOR PERSOONLIJK ADVIES
(024) 353 15 06 | masters@han.nl | han.nl/mlwi

Dédé de Haan, Mieke Abels, Monica Wijers, Vincent Jonker

Het Fizier gericht op...

De rol van taal in wiskunde in het vmbo en mbo

Voor veel leerlingen in het vmbo en mbo is de taal in een wiskundeopgave een obstakel. Binnen het Europese project Lamavoc is lesmateriaal ontwikkeld waarin expliciet aandacht wordt besteed aan de rol van taal in wiskunde. Het Freudenthalinstituut nam deel aan dit project.

Wasmiddelopgave

Leerlingen kunnen bij een wiskundevraagstuk een *dubbel* probleem ervaren. We illustreren dat aan de hand van een opgave die we bij de nascholing binnen dit project gebruiken, zie figuur 1.

figuur 1 Wat valt je op aan het taalgebruik in deze opgave?

Om de opgave te kunnen maken moet er, naast wiskunde, taal begrepen worden. Leerlingen moeten in ieder geval herkennen

- dat wasmiddel hetzelfde is als waspoeder (synoniemen);
- wat een wasbeurt en een maatbeker is (is dat dagelijkse taal voor leerlingen?);
- dat de foto van het maatschepje informatie geeft over de maatbeker waarover in de opgave gesproken wordt (combineren van tekst en beeld);
- dat 'per keer' en 'hoe vaak' telkens om het aantal wasbeurten gaat;
- dat het om een pak wasmiddel van 4 kg gaat (combineren van tekst en beeld);
- dat met 'heel erg vies' hetzelfde wordt bedoeld als met 'extra vuil' (synoniemen).
- wat met het '=' - teken wordt bedoeld in 'maatschepje' = 150 ml = ongeveer 100 g' dat '1½ maatbeker' betekent 'een volle en een halfvolle maatbeker';
- dat 'ongeveer' in 'ongeveer 100 g' suggereert dat je moet schatten, maar dat je dat mag negeren in de rest van de opgave.

Ook termen als 'ml', 'gram', 'g', 'kg' en het '=' - teken zijn vaktaal (waarschijnlijk geen dagelijkse taal voor leerlingen).
Een dubbel probleem dus, want als leerlingen de taalbarrière hebben geslecht, dan kan het nog spaaklopen op de wiskunde: onder andere met het kiezen van de juiste bewerkingen, het gebruik van de rekenmachine, of het werken met eenheden.

> "Voor deze leerlingen zou het goed zijn om de wiskunde aan te laten sluiten op de beroepscontext."

Afstandelijk en onbegrepen

Juist in vmbo-bb/kb en mbo-1/2 hebben leerlingen moeite met zowel taal/Nederlands als rekenen/wiskunde, als deze te ver van hun werkelijkheid worden aangeboden. De wiskunde is hierdoor vaak afstandelijk en onbegrepen, en het heeft dan weinig zin om aandacht te besteden aan de benodigde wiskundige vaardigheden. Voor deze leerlingen zou het goed zijn om de wiskunde aan te laten sluiten op de beroepscontext, en op andere veelvoorkomende situaties uit het dagelijks leven. Als de aangeboden wiskunde betekenisvol wordt gemaakt binnen herkenbare contexten met herkenbare taal, dan wordt het uiteindelijk ook eenvoudiger wiskundige vaardigheden goed uit te voeren.

Het project

Binnen Lamavoc sloegen teams uit Duitsland, Zweden en Nederland de handen ineen om hun tradities op het vlak van 'de rol van taal bij wiskunde'[2,3,4] op elkaar af te stemmen en van elkaar te leren. Voor de Nederlandse situatie werd daarin ook voortgebouwd op de ervaringen uit eerdere projecten, zoals bijvoorbeeld Wisbaak[5]. In het project hebben we ons gericht op de onderwerpen: grafieken, procenten en verhoudingen.

Lesmateriaal

Het Lamavoc-team uit Nederland heeft een module over grafieken ontwikkeld en het team uit Duitsland een module over procenten en een over verhoudingen. De materialen zijn uitgeprobeerd, eerst in het eigen land, en vervolgens over en weer vertaald zodat ze ook in de andere landen gebruikt konden worden (er zijn ook versies in het Engels). We geven twee voorbeelden uit de module Grafieken.

Voorbeeld 1 - Vragen bij een tabel

Uit de sector groen (vmbo)

gewas	kiemtemperatuur (°C)		
	minimum	optimum	maximum
cichorei (witlof)	5	25	30
stamslabonen	10	14	30
bieten	3	20	28
koolrabi	5	20-25	29
mais	8	30	40
erwten	1	12-16	40

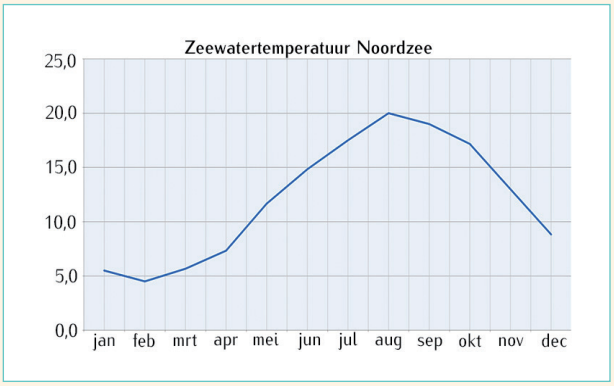
Bespreek en beantwoord samen de volgende vragen:
— Omschrijf de betekenis van de volgende woorden uit de tabel: gewas, kiemtemperatuur, minimum, optimum, maximum.
— Waar geeft deze tabel informatie over?
— In wat voor situatie kun je deze tabel gebruiken?
— Bedenk een passende (korte) titel voor deze tabel.

Hieronder zie je twee zinnen die gaan over de informatie in de tabel:
— *'De minimum kiemtemperatuur voor bieten is 3°C.'*
— *'Mais heeft de hoogste kiemtemperatuur.'*

Maak zelf twee andere zinnen bij deze tabel.

Voorbeeld 2 Vragen bij een lijngrafiek

Bekijk de lijngrafiek hieronder.



A
Kijk goed naar de informatie in de grafiek.
Waarover gaat de grafiek?
Wat valt je op?

B
Vertel het verhaal bij de grafiek. Je verhaal gaat over de temperatuur van het zeewater.

C
Vertel nu hoe de grafiek eruitziet. Gebruik woorden zoals hieronder.
dalen, stijgen, langzaam, snel, constant, op en neer, steil, geleidelijk, hoogste punt (top), laagste punt, knik, plotselinge verandering, horizontaal

D
Maak de zinnen hieronder af:
Het zeewater wordt langzaam warmer in de maanden ..... , ... en ..... . Dat zie ik aan de grafiek die ..... .
Vanaf de maand ..... wordt het zeewater snel kouder. Dat zie ik aan de grafiek die dan ..... . Het kouder worden gaat door tot de maand ..... . Dat zie ik aan de grafiek die dan ..... .

In deze voorbeelden wordt de aanpak binnen Lamavoc zichtbaar: het expliciet aandacht geven aan de rol van taal, waarbij het materiaal zowel de leerling als de docent aanspreekt. De docent biedt de leerlingen ondersteuning bij de benodigde taalvaardigheden binnen een context door de gebruikte taal met elkaar te bespreken. Hierdoor zijn leerlingen beter in staat gebruik te maken van *eigen* >

kennis. Door een brug te slaan naar de eigen ervaring, leerlingen zelf zaken onder woorden te laten brengen, ze beter te laten lezen, en ze te laten discussiëren over wat ze gelezen hebben, wordt de opgave betekenisvoller. Zo kunnen de leerlingen zich verder ontwikkelen op het gebied van wiskunde en (vak)taal.

Stappenplan

De ondersteuning van leerling en docent bij de extra aandacht voor taal in wiskunde kan concreet worden gemaakt met behulp van het stappenplan[6]. Dit plan bevat stappen die de docent helpen bij het voorbereiden van de lessituatie, en ondersteuningstechnieken (scaffolding) voor tijdens de les. Voor meer informatie over de theorie van taalgericht vakonderwijs, inclusief voorbeelden en leerlingwerk, verwijzen we naar Taal en Wiskunde, een artikel van Monica Wijers[7].

Stappenplan voor extra aandacht voor taal bij wiskunde

Wiskundedoel: Bepaal het doel van de opgave
Denkstappen: Ga na welke denkstappen leerlingen maken, in relatie tot:
— de context
— het model/schema/aanpak
— de wiskunde
Taal: Ga na welke taal hiervoor nodig is en maak daarbij onderscheid in:
— dagelijkse woorden
— schooltaalwoorden (zoals tabel, berekenen, hoeveelheid, ...)
— vaktaalwoorden (zoals oorsprong, zaagtand/scheurlijn, ...)
— specifieke formuleringen (zoals 'in factoren ontbinden', ...)
Scaffolding: Ondersteun deze taal gericht met scaffolding-strategieën, zoals:
— herformuleren van leerlinguitingen (gesproken of geschreven)
— verwijzen naar of herinneren aan de benodigde denkstappen
— verwijzen naar of herinneren aan specifieke woorden en formuleringen
— vragen om gesproken of geschreven taal te verbeteren
— correcte, voorbeeldmatige taaluitingen van leerlingen herhalen
— de kwaliteit van taaluitingen benoemen
— leerlingen vragen of aanmoedigen om zelfstandig de talige denkstappen te verwoorden

Nascholing

Van mei tot juli 2019 werd nascholing[8] gegeven met de module Grafieken op drie locaties: een ROC en twee vmbo-groen scholen. De scholing werd gevolgd door vakdocenten en door docenten die een directe verantwoordelijkheid hebben bij rekenen/wiskunde (bijvoorbeeld de rekencoördinator). In deze nascholing werd het Lamavoc-materiaal uitgedeeld als basis voor een discussie over vragen als: Hoe kan een accent op taal leerlingen helpen met wiskundeopgaven? Wat kan een docent doen om dit accent te (ver)leggen? Een belangrijk uitgangspunt voor deze cursus is wat de docenten zelf al doen op het vlak van taal- en context-ondersteuning.

Ontwikkelingen in Nederland

In Nederland ijvert het platform Taalgericht vakonderwijs[9] al langer voor aandacht voor de rol van taal in de diverse vakken (waaronder wiskunde), met consequenties voor de schoolboeken en de professionaliteit van (vak) docenten. Het is – met de stappen die genomen worden bij curriculum.nu – interessant om te zien of dit leidt tot verbeteringen. Dat vraagt iets van de methodeschrijvers en van de betrokken docenten. Houd in de gaten wat het werk van het platform Rekenbewust vakonderwijs[10] in dit kader gaat voortbrengen. In aanvulling op het platform Taalgericht vakonderwijs doet dit platform onderzoek naar de rol van rekenen in andere vakken, een goede aanvulling op deze gezamenlijke verantwoordelijkheden.

Noten

[1] *elbd.sites.uu.nl/lamavoc*, een project van 2017-2020
[2] Hajer, M., & Norén, E. (2016). Teachers' Knowledge about Language in Mathematics Professional Development Courses: From an Intended Curriculum to a Curriculum in Action. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(7b), 4087-4114. *doi:10.12973/eurasia.2017.00808a*
[3] Prediger, S., & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal, 25*, 435–456. *doi:10.1007/s13394-013-0079-2*
[4] Wijers, M., Jonker, V., & Kemme, S. (2004). Authentieke contexten in wiskundemethoden in het vmbo. [Authentic Contexts in Mathematics Textbooks for the Vocational Stream]. *Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen, 21*(1),

1-19. Retrieved from *http://www.fisme.science.uu.nl/tdb/article.php?record=204*
[5] *fi.uu.nl/publicaties/subsets/wisbaak*
[6] Dit stappenplan is een variant van de rekentaalkaart uit het TRaP-project, uitgevoerd in opdracht van de NRO door Hogeschool iPabo, Hogeschool Saxion, Universiteit Utrecht, Stichting Sarkon en Stichting OPO
[7] Wijers, M. (2017). Taal en wiskunde. *Euclides, 93, vmbo*-special, 35-37
[8] De materialen van deze nascholing zijn op aanvraag bij het FI beschikbaar voor vmbo- en mbo-docenten
[9] *taalgerichtvakonderwijs.nl*
[10] *elbd.sites.nl/rbvo*

Over de auteurs

Dédé de Haan, Mieke Abels, Monica Wijers en Vincent Jonker zijn medewerkers van het Freudenthal Instituut.
E-mailadressen: *d.dehaan@uu.nl*, *m.j.abels@uu.nl*, *m.wijers@uu.nl*, *v.jonker@uu.nl*

Hogeschool van Amsterdam

KENNIS IN HET KWADRAAT

Soms is het tijd voor iets nieuws. Een master aan de Hogeschool van Amsterdam biedt je de uitgelezen kans om meer uit jezelf en je carrière te halen. Je ontwikkelt je tot eerstegraadsleraar wiskunde. Het onderwijs wordt verzorgd door hooggekwalificeerde docenten die de praktijk kennen.
Je vakkennis komt op academisch niveau en wordt breder, dieper en up-to-date.
We bieden een flexibel deeltijdprogramma en wat je leert, kun je direct in je werk toepassen. Wil je meer weten? Bezoek onze open dag op 8 februari a.s.

CREATING TOMORROW

HVA.NL/MLRWK

Marjan Botke

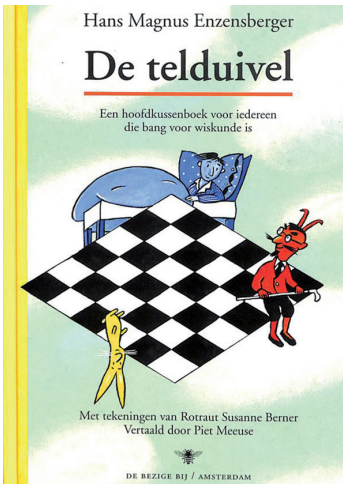
Vijf vragen aan...

In de rubriek Vijf vragen aan ... leren we docenten wiskunde beter kennen. Deze keer vijf vragen aan Marjan Botke, docent, lerarenopleider en voorzitter van de werkgroep havo-vwo van de NVvW.

1 Wie heeft of hebben de meeste invloed gehad op jouw keuze van een loopbaan in het wiskundeonderwijs?

Er zijn drie docenten die een grote invloed hebben gehad op de invulling van mijn docentschap:
Mijn vroegere docent wiskunde B had wiskunde gestudeerd aan de RUG. Na deze studie is hij les gaan geven. Hij kwam altijd netjes met een jasje aan naar school en had vaak bijzondere verhalen in de les, die niet altijd over wiskunde gingen. Hij heeft mij in eerste instantie laten zien hoe mooi wiskunde kan zijn. Daarom ben ik toegepaste wiskunde gaan studeren in Twente. Toen ik na een aantal jaren in het bedrijfsleven toch koos voor het onderwijs en de lerarenopleiding, bleef hij mijn goede voorbeeld. Als docent had hij veel oog voor al zijn leerlingen, of je nou goed of niet zo goed was in wiskunde. Zo herinner ik mij zijn inspanningen voor een blinde leerling in havo 5, die een 4 moest halen voor zijn examen wiskunde om te kunnen slagen. Hij sleepte allerlei materiaal voor deze leerling mee naar school om hem te kunnen helpen, vooral met meetkunde. En hij was ontzettend blij dat deze jongen uiteindelijk geslaagd is voor zijn examen, met een 4 voor wiskunde. Hij heeft mij geleerd dat ik als docent de goede leerlingen moet uitdagen, maar ook de minder goede leerlingen aandacht moet geven en kijken hoe ik hun verder kan helpen. En het mooiste is, als deze leerlingen stiekem toch een beetje lol krijgen in wiskunde.
Mijn docente Nederlands was ook belangrijk voor mij. Zij heeft in klas 2 ontdekt dat ik last heb van dyslexie. En zij heeft me vervolgens laten zien hoe je daaraan kunt werken en ermee leert dealen. Ik hoop dat ik op dezelfde manier een positieve invloed kan hebben op leerlingen, die minder goed zijn in wiskunde.
Tijdens mijn studie wiskunde was het mijn afstudeerprofessor die me altijd heeft weten te motiveren en me mooie toepassingen van de wiskunde liet zien in de wereld om ons heen. Kennisgrafen en vriendschapsnetwerken waren hier voorbeelden van. Hij heeft mij laten zien welke mogelijkheden de wiskunde allemaal te bieden heeft. Ik probeer mijn leerlingen ook altijd te vertellen dat er overal in de wereld om je heen wiskunde is.

> "We moeten eens ophouden met roepen dat wiskunde moeilijk is."



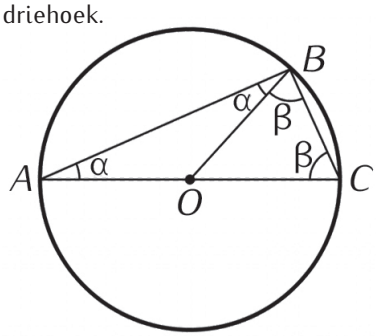
2 Welk verhalend boek over wiskunde zou jij je collega's aanraden te lezen?

De telduivel, een hoofdkussenboek voor iedereen die bang is voor wiskunde van Hans Magnus Enzensberger. Hoe mooi is het dat er een boek is met echte wiskunde, voor mensen die bang zijn voor wiskunde. Geschreven voor kinderen, maar ook leuk voor volwassenen. We moeten eens ophouden met roepen dat wiskunde moeilijk is. De meeste wiskunde is helemaal niet moeilijk, als je er maar goed mee omgaat en voldoende

mee oefent. Vooral voor mensen die altijd gedacht hebben dat ze niet slim genoeg zijn of waren voor wiskunde, kan dit boek een eyeopener zijn. De wiskundige concepten die worden besproken zijn eenvoudig te lezen en daarmee ook te begrijpen.
Ik heb meerdere malen leerlingen met wiskunde A1 of wiskunde C een extra hoofdstuk voor dit boek laten schrijven als praktische opdracht. Het was leuk om te zien hoe deze leerlingen met hele leuke en creatieve onderwerpen aan de slag gingen voor deze opdrachten. Ze gingen zich echt verdiepen in hun onderwerp en vonden het ook leuk om het hoofdstuk te schrijven.

? 3 Welke meetkundige stelling heeft voor jou schoonheid en verrassing?

Persoonlijk: Bewijzen met volledige inductie.
Het principe van volledige inductie heb ik geleerd in het eerste jaar van mijn wiskundestudie in Twente. Het heeft mij een half jaar gekost voordat ik echt begreep hoe deze bewijsvoering in elkaar zat en hoe je er mee kunt werken. De schoonheid van deze manier van bewijzen heeft me toen al wel gegrepen. Met dit principe is het mogelijk om met een kort bewijs (twee stappen), te laten zien dat een uitspraak geldt voor alle natuurlijke getallen.
In het onderwijs: De stelling van Thales: een driehoek ingeschreven in een cirkel, en waarvan één zijde een middellijn van de cirkel vormt, is een rechthoekige driehoek.



Deze stelling is eenvoudig te bewijzen: aangezien O het middelpunt van de cirkel is, is de afstand OA gelijk aan OB en de hoeken α gelijk zijn. Op dezelfde wijze is te zien dat de hoeken β gelijk zijn. Voor de driehoek ABC geldt dat de som der hoeken gelijk is aan 180°. Hieruit volgt dat $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180°$ en dus dat $\alpha + \beta = 90°$.
Een ander bewijs is:

a. Construeer een punt D in het verlengde van BO waarbij $|DO| = |BO|$
b. $|BD| = |AC|$ beide zijn middellijnen van de getekende cirkel
c. BD en AC snijden elkaar in het midden bij O
d. Uit b. en c. blijkt dat de vierhoek $ADCB$ een rechthoek is, en de hoek in B dus een rechte hoek is.

Er zijn, zoals vaker, nog meer mogelijkheden om deze stelling te bewijzen.
Voor mij is deze stelling belangrijk, omdat het in mijn onderwijs de eerste stelling is waarvan ik het nodig vind dat mijn leerlingen hem kunnen bewijzen en dit ook nog eens netjes kunnen opschrijven. Na deze kennismaking met stellingen en hun bewijzen, mogen mijn leerlingen verder met het bewijzen van meer stellingen in de meetkunde en kunnen ze na verloop van tijd behoorlijk ingewikkelde vraagstukken oplossen met deze mooie stelling als basis.

? 4 Welk kunstwerk moet volgens jou door elke wiskundeleraar gezien worden?

— Alle onmogelijke kunst van Escher.
Escher is in staat om het onmogelijke mogelijk te maken in zijn kunstwerken. Water loopt omhoog en een binnenkant wordt een buitenkant. Ik vind het geweldig om te zien hoeveel vragen een tekening kan oproepen.
— Mathematicum
De objecten in het *Mathematicum* in Gießen laten mensen in verwondering zien wat er allemaal mogelijk of onmogelijk is in de wiskunde. Ze kunnen het zelf gemakkelijk uitproberen. Zo wordt wiskunde tastbaar en minder moeilijk.

? 5 Welk advies geef jij je collega's?

Geef met plezier les. En blijf leren. Van jezelf, van je collega's, van nieuwe collega's en van je leerlingen of studenten. Op deze manier kun je je eigen lessen blijven aanpassen aan jezelf, je leerlingen en de tijdgeest. Dit houdt je scherp en zo houd je plezier in je vak en dat straal je uit naar je leerlingen.

Over de auteur

Marjan Botke is docent wiskunde A, B, C en D op het Erasmiaans Gymnasium Rotterdam, lerarenopleider wiskunde aan de universiteit Delft en voorzitter van de werkgroep havo-vwo van de NVvW.

Jos Remijn

Wereldwiskunde Boeken

Naast de donaties van € 2,50 die veel leden van de NVvW elk jaar geven, levert de boekenverkoop van het Wereldwiskunde Fonds[1] elk jaar zo'n 5500 euro op. Vanaf het voorjaar 2011 is Jos Remijn de veilingmeester[2] van het WwF. Hij vertelt in dit artikel over zijn belevenissen.

Hoe het allemaal begon

Het WwF houdt zich al sinds haar oprichting in 1993 bezig met het verkopen van gebruikte wiskundeboeken. De opbrengst hiervan wordt volledig besteed aan wiskundeprojecten in ontwikkelingslanden.
De geschiedenis van deze boekenverkoop wordt beschreven in het jubileumboekje dat vorig jaar op de jaarvergadering uitkwam ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van het WwF[3].
In de winter van 2010/2011 reageerde ik op een bericht in de WiskundE-brief waarin het WwF een nieuwe veilingmeester voor de boekenverkoop zocht. De klus leek mij een geweldige uitdaging.
De afscheidnemende veilingmeester, Christian Bokhove, en ik spraken af in Utrecht en ik werd ingewijd in de werkzaamheden. In het Utrechtse St-Gregorius College stonden nog zo'n kleine duizend boeken in de kelder, dat werd mijn startvoorraad. De boeken lagen in bananendozen in de stookkelder van de school. De temperatuur was daar continu zo'n 35 °C, dus de boeken lagen er in een superdroge omgeving opgeslagen. De website die Christian voor een groot deel zelf had geprogrammeerd, werkte helaas niet meer. Oplappen hiervan was voor mij, bij gebrek aan programmeervaardigheden, geen optie. Mijn eerste uitdaging was dus het zoeken van een nieuw veilingprogramma op internet, en natuurlijk moest dit gratis zijn.

De eerste veilingsite

Ik vond de website *www.goedgeplaatst.nl*[4]. Hier waren gratis mogelijkheden om de te veilen boeken te plaatsen. De boekenvoorraad kon in een simpele html-pagina worden gepresenteerd. Een proefveiling in mei 2011 van zo'n 40 meest recreatieve wiskundeboekjes leverde een aardig bedragje van € 238 op.
We besloten dus in zee te gaan met deze veilingsite. Ik vond een geweldige ruime opslagruimte boven de gymzalen van Het Rhedens Dieren[5], dichtbij mijn woonplaats Velp. Deze was makkelijker te bereiken dan het Gregorius in het centrum van Utrecht. We besloten vanaf 2011 heel ambitieus elk jaar twee keer een boekenveiling te organiseren. Eén in de maand oktober en één in de maand mei.
Er was voor mij als veilingmeester veel werk tijdens de veiling. Niets ging vanzelf, van alle boeken hield ik handmatig bij welke bieder welke prijs had geboden. Na afloop van de veiling was er vaak discussie over het middernachtelijke tijdstip waarop ik de veiling handmatig sloot. Ik had van tevoren niet bedacht dat de bieders natuurlijk vooral de laatste minuten hun bod nog snel even verhoogden. En toen ging in de hitte van de strijd opeens de veilingsite uit de lucht... Het opmaken van alle facturen was een tijdrovende klus, dat gebeurde ook allemaal handmatig. Wat wel zeer plezierig was (en dit is nog steeds het geval): het fantastische betaalgedrag van alle kopers. Facturen inclusief verzendkosten worden bijna altijd binnen een week betaald!

Vernieuwde site

Vanaf 2015 is de veilingwebsite volledig vernieuwd. Gefinancierd door de NVvW schafte webmaster Erik van den Hout een professioneel veilingprogramma aan. Hij vertaalde alle tekst vanuit het Engels in het Nederlands en zorgde ervoor dat het programma helemaal geschikt werd voor onze boekenveilingen. Op deze site gaat alles helemaal gesmeerd, de ingelogde bieders hebben altijd een actueel overzicht van hun biedingen, ze krijgen per mail bericht als ze overboden worden en (bijna) alle administratie rondom het einde van een veiling gaat automatisch. De opbrengsten zijn al een aantal jaren geweldig hoog, zo'n 2500 euro per veiling en zo'n 300 à 400 euro per zomer/winterverkoop van de restjes voor een vaste prijs.

> "Bij de boeken horen altijd verhalen, over de opleiding tot docent, soms naast een baan in de avonduren."

Hoe komen we aan boeken?

Door het succes van de eerste veilingen werd ik ongerust over de afnemende boekenvoorraad. Waar haalde ik nieuw aanbod vandaan? Er was inmiddels een flink aantal schoolboeken en didactiekboeken van het Freudenthal Instituut binnengekomen. Door de verhuizing uit het ruime pand in Overvecht naar de Uithof was er geen ruimte meer voor alle boeken, dus veel (vaak dubbele) boeken werden aan het WwF gegeven.
Maar gelukkig: de oproep die we op de veilingsite plaatsten dat gebruikte wiskundeboeken erg welkom waren, begon inmiddels te werken. Uit het hele land kwamen aanbiedingen om boeken over te nemen. Universiteitsbibliotheken, die ruimte tekort kwamen, boden vele dozen met mooie studieboeken aan. Wiskundeleraren die met pensioen gingen, ruimden vaak snel en rigoureus de kasten leeg. Dat leverde leuke ontmoetingen op met wiskundecollega's. Soms werden de boeken met de auto bij mij thuis in Velp afgeleverd. Erg gezellige ontmoetingen, soms was de partner van de 'donor' meegekomen en werd er na het uitladen van de boeken met een kop koffie erbij over het wiskundeonderwijs van toen en nu gesproken. Het allerleukste vind ik de huisbezoeken bij gepensioneerde collega's die hun boeken aanbieden. Dat levert vaak een mooie vangst aan studieboeken uit de aktentijd en de MO-studies op. Soms ook mooie algemene boeken over wiskundegeschiedenis en recreatie. Bij de boeken horen altijd verhalen, over de opleiding tot docent, soms naast een baan in de avonduren. Ik krijg handgeschreven collegedictaten, of heel oude schoolboekjes waarmee op de hbs de interesse voor de wiskunde begonnen was. Het zijn de emoties die dan bij de donoren zichtbaar zijn bij het overdragen van de boeken, die ook mij wat doen. Het is immers een definitief afscheid van het werkzame leven in de wiskunde. Jammer dat die emoties niet altijd meer te zien zijn in de boeken. Soms wel.

Briefjes met aantekeningen

In de wat oudere school- en studieboeken zitten vaak briefjes met aantekeningen. Soms duidelijk afkomstig van de eigenaar van het boek: een ijverige student die het een en ander heeft nagerekend. In de boeken geschreven door P. Wijdenes vond ik doorslagen van brieven die de eigenaar aan Wijdenes had geschreven om hem te wijzen op een onvolledigheid of fout in een bewijs. Daar zat soms ook een antwoord van Wijdenes bij. Natuurlijk laat ik dergelijke zaken in het boek zitten. Een prachtige vangst deed ik enige jaren geleden. Een schoondochter van de bekende schoolboekenauteur C.J. Alders schonk ons een enorme partij van zijn boeken uit de jaren 1930 tot 1968. Alders was dus vele jaren actief en in sommige boeken waren door hem doorhalingen, verbeteringen en nieuwe vraagstukken genoteerd. Op zo'n moment denk ik weleens: 'dit is bijna museaal, moet ik het bewaren of niet? Want verkopen gaat niet zomaar, wie wil een boek volgeschreven met aantekeningen?'
Bijzonder indrukwekkend zijn de bezoeken aan huizen van overleden wiskunde(hoog)leraren. Het is fantastisch dat de nabestaanden op het spoor van het WwF zijn gekomen. Men is heel blij dat de boeken waar de overledene zeer aan gehecht was een tweede leven kunnen krijgen en ook nog wat opbrengen voor een goed doel.

Marktkraam

Het persoonlijk contact met wiskundedocenten en –studenten is voor mij een grote drijfveer bij dit werk. We staan altijd op de studiedag van de NVvW met een marktkraam. Er worden daar niet alleen boeken verkocht, maar steeds meer collega's nemen hun overbodige boeken voor ons mee. Die kunnen we dan meteen in de verkoop doen. Vanaf 2017 staan we ook op de NWD. >

Verkoop van boeken tijdens de studiedag van de NVvW en NWD

Het is geweldig dat zoveel collega's elke veiling weer boeken kopen en daarmee veel fraaie wiskundeboeken voor de papierbak behoeden. En tegelijk een bijdrage leveren aan projecten van wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. Want daar doen we het allemaal voor. Kijk op onze website voor recente projecten die door het WwF zijn gesteund. En, als je een voorstel voor een nieuw project hebt, dat kan bijvoorbeeld zijn omdat jouw school een educatief project in een ontwikkelingsland steunt, dan horen we dat ook graag.

Noten

[1] zie *www.wereldwiskundefonds.nl*
[2] *www.veiling.wereldwiskundefonds.nl*
[3] *Wereldwiskunde Fonds: 25 jaar - Verbeteren van wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden.* Voor € 2,00 (incl. verzendkosten) te verkrijgen bij het WwF.
[4] Een restant van de eerste site staat nog op internet: *www.goedgeplaatst.nl/site/3684102831*
[5] Website van de school: *www.hetrhedens.nl/het-rhedens-dieren/*. Met dank aan de geweldige conciërge Eric Catz.

Over de auteur

Jos Remijn is toetsdeskundige bij Cito en veilingmeester van het WwF. E-mailadres: *wereldwiskundeboeken@nvvw.nl*

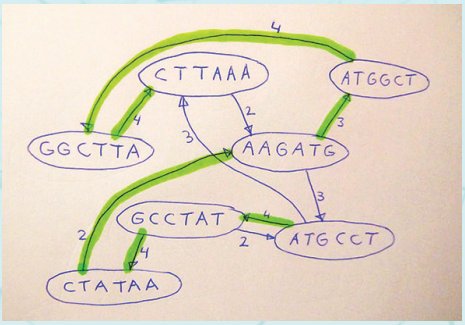
Wis en Waarachtig

figuur 1 De aarde en de zon, gefotografeerd vanaf internationaal ruimtestation ISS. © NASA

Computer bedenkt draaien aarde om zon

Ruim vijfhonderd jaar na Nicolaas Copernicus heeft nu ook een computer ontdekt dat de aarde om de zon draait. De kunstmatige intelligentie die dat voor elkaar kreeg, moet op termijn vraagstukken oplossen waarop natuurkundigen de tanden stukbijten. Het programma kreeg van de bedenkers de naam SciNet, vermoedelijk een knipoog naar het moordlustige Skynet uit de filmreeks Terminator. In tegenstelling tot zijn bijna-naamgenoot heeft SciNet alleen vredelievende motieven. Hij doet dienst als een robot-natuurkundige die de wereld om ons heen vangt in elegante wiskundige regels. SciNet zou op die manier in staat moeten zijn om, bijvoorbeeld, Albert Einsteins relativiteitstheorie te bedenken en die vervolgens aan ons te openbaren.
Dat neurale netwerken - zelflerende systemen die geïnspireerd zijn op het menselijk brein - in staat zijn tot bijzondere prestaties, is al langer bekend. Voer zo'n kunstbrein voldoende foto's en hij kan je moeiteloos vertellen of je op een foto een hond ziet of een wolf.

Soms zijn dergelijke systemen zelfs in staat tot nieuwe ‘ontdekkingen’. In april voerden wetenschappers de regels van vierhonderd bestaande sporten aan een kunstbrein, waarna deze een nieuwe sport bedacht. Die sport – werktitel ‘speedgate’ – wordt gespeeld met een soort rugbybal, op een veld dat bestaat uit drie cirkels.
De Zwitserse natuurkundige Renato Renner besloot samen met collega’s de bijzondere kracht van neurale netwerken in te zetten om de werkelijkheid waarin we leven beter te leren begrijpen. Dat schrijven zij in een artikel dat binnenkort verschijnt in het vakblad *Physical Review Letters*. Uiteindelijk willen zij hun robot-natuurkundige loslaten op de belangrijkste onopgeloste problemen in de moderne fysica. Zo zit het heelal bijvoorbeeld tjokvol donkere materie: mysterieus, nog onbegrepen spul dat zijn aanwezigheid alleen indirect kenbaar maakt en dat je met het blote oog niet kunt zien. Wat het is, en of het wel echt bestaat, weet niemand. Wellicht biedt SciNet uitkomst.
Bij wijze van test lieten de onderzoekers hun programma alvast los op een aantal problemen die natuurkundigen al hadden opgelost. Zo ontdekte het systeem niet alleen dat de aarde om de zon draait, maar stelde het ook natuurwetten op voor complexe slingerbewegingen. Ook kon SciNet overweg met de quantumfysica, de tegendraadse natuurkundetheorie die het gedrag van de werkelijkheid beschrijft op de allerkleinste schaal.
Bron: de Volkskrant 12 november 2019



figuur 2 Principe van de overlapgraaf.
Losse brokstukken (de knooppunten van de graaf) worden verbonden door een pijl als het eind van het ene brok minstens twee letters overlapt met het begin van een ander brok. Als je een volledige route langs alle knooppunten vindt, is er een goede kans dat dit het oorspronkelijke ‘genoom’ is, in dit geval ATGCCTATAAGATGGCTTAAA.
Bron: www.nemokennislink.nl

Wiskunde in strijd tegen virussen

Een virus zoals Ebola of HIV is moeilijk te bestrijden, omdat virussen veel sneller muteren dan planten of dieren. Dat maakt het lastig om hun DNA af te lezen. Wiskundige Jasmijn Baaijens ontwierp het eerste algoritme dat de genetische samenstelling van een onbekend virus ‘vanaf nul’ in kaart kan brengen.
Je kunt er op wachten: ergens op de wereld breekt een nieuwe, zeer besmettelijke en gevaarlijke virusziekte uit. Welk virus is het? Is het een nieuwe variant van Ebola of HIV? Of van het Zika-virus? Hoe snel muteert het? Waar is het ontstaan? Hoe wordt het overgedragen? Zijn er ook dragers zonder ziektesymptomen? Wat zijn kansrijke aangrijpingspunten voor een vaccin of geneesmiddel?
Bij al deze vragen helpt het, als je de genetische samenstelling van het virus snel en volledig in kaart kunt brengen. Dat is bij een virus veel lastiger dan bij een dier- of plantensoort, omdat virussen veel sneller muteren. Vaak ontstaan in een patiënt tijdens het ziekteverloop al meerdere stammen van het virus.
Jasmijn Baaijens – inmiddels postdoc aan Harvard Medical School in Boston, maar in september gepromoveerd aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam – ontwikkelde diverse algoritmes om het DNA van virussen beter te kunnen analyseren. ‘Ik ben met dit onderzoek begonnen omdat dit type algoritmes me erg aansprak,’ vertelt ze. ‘Bovendien was het erg actueel, er was toen namelijk een grote Ebola-uitbraak gaande in West-Afrika.’

Jongens zijn niet beter in wiskunde dan meisjes

Het is een hardnekkig misverstand dat maar moeilijk de wereld uit gaat: jongens zouden beter zijn in wiskunde dan meisjes. Een nieuwe studie maakt definitief een einde aan de mythe.
Eerdere onderzoeken baseerden zich met name op testscores om te bewijzen dat mannen en vrouwen even goed zijn in de exacte vakken. Voor deze nieuwe studie is een kijkje genomen in de hersenen. Daaruit blijkt dat jongens en meisjes precies dezelfde mechanismes en netwerken in het brein gebruiken bij het oplossen van wiskundevraagstukken.
‘We bestudeerden het gedrag van jonge meisjes en jongens op basis van wiskundige testen. Terwijl ze die invulden konden we vaststellen dat hun prestaties statistisch gezien gelijk waren. Beiden ontwikkelen in hun jeugd dezelfde vaardigheden in hetzelfde tempo’, aldus Jessica Cantlon, hoogleraar ontwikkelingsneurologie.
Vervolgens kregen 104 kinderen tussen de 3 en 10 jaar oud een hersenscan terwijl ze de tests maakten. ‘We keken naar welke delen in de hersenen sterk reageren op wiskundige vraagstukken in video’s en testen. Die vergeleken we met niet-wiskundige content zoals het alfabet lezen. Op die manier kun je het wiskundige deel in de hersenen herkennen door te kijken naar de delen in het brein die er sterker op reageren.’
‘Wanneer we dat doen bij kleine meisjes, dan zien we dat een bepaald deel in het brein inderdaad reageert. Maar bij jongens is dat exact hetzelfde deel.’ Cantlon: ‘Geen enkele factor kan bewijzen dat er genderverschillen zijn op vlak van wetenschap en wiskunde.’
Bron: www.welingelichtekringen.nl

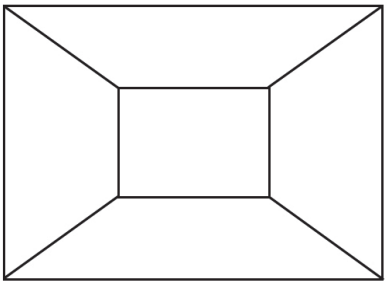
Ab van der Roest

Vastgeroest

Problemen die niet loslaten

Een op het oog niet zo ingewikkeld probleem roept alleen maar meer vragen op. Ab van der Roest beantwoordt ze allemaal.

Vlak voor de kerstvakantie kreeg ik van een collega het volgende probleem: Neem een A4 (een A3 mag ook) papier en verdeel dat op de volgende manier in vijf stukken met dezelfde oppervlakte:



Kan dit? Natuurlijk kan dat, was mijn snelle reactie. Ik ging aan het rekenen, maar het viel toch niet mee. En zo nam ik het probleem mee de vakantie mee. Ik kreeg als het ware een probleemvakantie door mijn collega, wat ik overigens helemaal niet erg vond. Voor je verder leest: probeer het eerst zelf eens!

De afmetingen van een A4 zijn 297 mm bij 210 mm. De rechthoek in het midden gaf ik de afmetingen a mm bij b mm, met de lengte van de lange zijde a en van de korte zijde b. De oppervlakte van het A4 is dus $297 \times 210 = 62370$ mm^2.
Dat levert de volgende vergelijkingen op:
$a \cdot b = 62370/5 = 12474$ mm^2 (rechthoek in het midden) en $\frac{1}{2}(a + 297) \cdot \frac{1}{2}(210 - b) = 12474$ mm^2 ('lange' trapezium).
Hier een stelsel van maken, haakjes uitwerken en invullen $b = 12474/a$ geeft de vergelijking $210a - (297 \times 12474)/a = 0$.
Dit is te herleiden tot $a^2 = (297 \times 12474)/210$ en $a \approx 132{,}82$ en $b \approx 93{,}92$.

Het kan! Maar, de antwoorden op elkaar delend, geeft ongeveer $\sqrt{2}$ en dat is een bekende verhouding bij een A4. Is er dan een slimmere aanpak mogelijk? Kunnen we ook los van de A4 iets zeggen? Het probleem kan dus nog niet losgelaten worden.

Ja dat kan. Uitgaande van gelijkvormigheid, kun je zeggen dat *oppervlakte kleine rechthoek* vijf keer zo klein is als

oppervlakte papier. Dus de zijdes zijn

$\frac{1}{5}\sqrt{5} \times 297 \approx 132{,}82$ en $\frac{1}{5}\sqrt{5} \times 210 \approx 93{,}92$.

Dit overtuigt natuurlijk niet en daarom meteen een algemeen geval. We nemen nu een papier met lengte a en breedte b en verdelen dit op de manier zoals hierboven is getekend. Uitgaande van gelijkvormigheid zijn de zijdes van de rechthoek

respectievelijk $\frac{1}{5}\sqrt{5} \times a$ en $\frac{1}{5}\sqrt{5} \times b$. Oppervlakte van de

rechthoek is dan keurig $\frac{1}{5}ab$.

Nu moeten we aantonen dat de oppervlakte van een trapezium ook $\frac{1}{5}ab$ is. Eén trapezium is genoeg,

want vanwege de symmetrie hebben ze alle dezelfde oppervlakte.

De oppervlakte berekenen we met een welbekende

formule:
$\frac{1}{2}(a + \frac{1}{5}\sqrt{5}a) \times \frac{1}{2}(b - \frac{1}{5}\sqrt{5}b) = \frac{1}{4}(ab - \frac{1}{5}ab) = \frac{1}{5}ab$.

Klaar.

Na de vakantie praatten we nog even door over de opgave. Moet er sprake zijn van gelijkvormigheid? Ik dacht van niet, maar na beter te hebben gekeken, ging ik twijfelen. Dus ook hier maar weer gaan rekenen. Stel de zijde van het papier weer a en b, en de zijdes van de rechthoek x en y. Nu moet gelden dat de oppervlaktes van alle trapezia gelijk zijn. Dit leidt tot de volgende vergelijking:

$$\tfrac{1}{2}(x+b) \times \tfrac{1}{2}(a-y) = \tfrac{1}{2}(y+a) \times \tfrac{1}{2}(b-x).$$

Dit is te herleiden tot $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ en de noodzaak van gelijkvormigheid is bewezen.

Wat een geweldige problemen kunnen wiskundedocenten toch hebben! Toen ik aan mijn collega vroeg hoe hij bij dit probleem gekomen was, verzuchtte hij: mijn vrouw! Janita, de vrouw van mijn collega, wilde voor een Bijbelstudie een A3 verdelen volgens bovengenoemde schets, omdat ze een werkvorm met placemats wilde toepassen. Mijn collega moest dat maar even opknappen. Zo zie je dat werkvormen geweldige problemen kunnen veroorzaken. Problemen die niet makkelijk loslaten, maar waar we ten volle van kunnen genieten.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Een nieuwe reeks is geboren!

Giraf

bedoeld voor leerlingen en docenten vmbo en onderbouw havo/vwo
uitgegeven door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en Epsilon Uitgaven

Het eerste deel in de Giraf-reeks is

WEET WAT JE MEET

Een statistiekspel op verschillende niveaus

kaartspel ontworpen door Marijke Hassefras-Zuidbroek

Voor € 5 per spel te koop op de Nationale Wiskunde Dagen op 31 januari en 1 februari en het NMC op 14 en 15 april, of bestel 4 stuks voor € 20 (incl. porto) op www.epsilon-uitgaven.nl.

THE FUTURE IS HERE

HP Prime

Grafische Rekenmachine

Voordelen van de HP Prime

- Touchscreen; nooit meer gedoe met het instellen van de window
- Supersnelle processor; nooit meer wachten tot een grafiek getekend is
- Ingebouwde handleiding; je kunt direct aan de slag!

En de prijs?
Die is hetzelfde als die van de concurrent!

Kom langs bij onze stand tijdens **de Nationale Wiskunde Dagen** en maak kans op mooie prijzen!

www.hp-prime.nl

Olympiadepuzzel 95-4

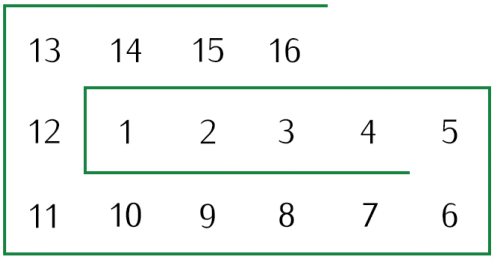
Labyrint

Birgit van Dalen
Quintijn Puite

PZZL

In deze jaargang vind je in nummers 2, 4, en 6 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Probeer de puzzel eens met je klas!

In de Efteling wordt een nieuwe attractie gebouwd: een labyrint, bestaande uit vierkante tegels van 1 bij 1 meter en afscheidingshagen met een lengte van 1 meter per stuk. Op dit moment, zie figuur 1, bestaat het labyrint uit 16 tegels, terwijl er 25 meter aan afscheidingshaag is geplant: 4 meter onder de vakjes 1 t/m 4; 1 meter links van vakje 1; 5 meter boven vakjes 1 t/m 5; 2 meter rechts van vakje 5 en 6, et cetera. Men bouwt het labyrint op deze spiraalvormige manier verder totdat het in totaal 10.000 meter haag bevat. Hoeveel tegels zijn er dan in totaal nodig?



figuur 1

Stuur je oplossingen uiterlijk 28 februari naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel nr. 95-2

Deze keer zijn onze lezers aan de slag gegaan met een meetkundepuzzel, waarbij de hoek van een bepaalde driehoek bepaald moest worden. In de puzzel werd gevraagd om alle mogelijke antwoorden te geven. Wanneer men hiermee aan de slag ging, bleek er maar één juist antwoord te zijn. Dit leidde soms tot verwarring, maar was toch echt juist. De vraag om alle oplossingen te geven betekent namelijk niet dat er meer dan één oplossing moet zijn, maar dat men wel moet aantonen dat de gegeven oplossing de enige mogelijke is. Gelukkig was dit het geval bij veel inzendingen.
Een andere valkuil van deze opgave is als het plaatje te perfect getekend wordt. Dan wordt er al allemaal informatie over de driehoek bekend, maar dit moet natuurlijk wel bewezen worden en kan niet zomaar aangenomen worden omdat het in het plaatje klopt. (Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Esther Steenkamer voor het nakijken van de inzendingen.) De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de acht inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Jos Remijn.

vakbladeuclides.nl/954olympiadepuzzel

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Eerste ronde Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade is in volle gang. Verspreid over heel Nederland laten ruim 300 scholen hun leerlingen meedoen aan deze wedstrijd met verrassende en uitdagende wiskundeopgaven, waar nauwelijks voorkennis voor is vereist. De opgaven en uitwerkingen van de eerste ronde verschijnen begin februari op de website www.wiskundeolympiade.nl. Uiterlijk 10 februari wordt bekend welke 1000 leerlingen verder mogen naar de tweede ronde. Daarnaast maken we rond die tijd ook de vier winnende scholen bekend: de beste school overall, de school met de beste onderbouwleerlingen, de school met de beste vrouwelijke deelnemers en de beste nieuwe school (die sinds hooguit drie jaar meedoet). Wie weet valt jouw school dit jaar in de prijzen!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2020

Wo 12/02
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

Vr 13/03
12 NEDERLANDSE UNIVERSITEITEN
Tweede ronde Nederlandse
Wiskunde Olympiade

Do 19/03
LANDELIJK
Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Wo 15/04 Di 21/4
EGMOND AAN ZEE
European Girl's Mathematical Olympiad
Organisatie:
Nederlandse Wiskunde Olympiade

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 95

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	17 maart 2020	06 januari 2020
6	05 mei 2020	02 maart 2020
7	23 juni 2020	27 april 2020

CASIO

Casio fx-CG50

Voor uw onderwijsbehoeften, nu en in de toekomst!

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

De perfecte rekenmachine met emulator!

De emulator software werkt ook in combinatie met laptop of digitaal schoolbord.

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

MODERNE WISKUNDE

NIEUW!
Moderne Wiskunde 12e editie Tweede Fase

– Eenvoudig differentiëren door verschillende leerroutes
– Uitgebreide examentraining voor alle vaardigheden
– Met vernieuwde statistiektool én Examensprint
– Eenvoudig switchen tussen het boek en de digitale leeromgeving.

Vraag nu gratis beoordelingsmateriaal aan op
modernewiskunde.noordhoff.nl/tweedefase