EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Craig Barton aan het woord
Interview met de auteur van *Volgens Barton*

Machtige meetkunde
Een fusie van analytische en synthetische meetkunde leidt tot mooie resultaten

Buigpunten
Een kritische beschouwing op hoe je buigpunten kunt vinden

0,9999 = 1?
Over de toepassing van hyperreële getallen

Curriculum.nu
Doelstellingen van een nieuw curriculum

JAARGANG 95 - DECEMBER 2019

NR.3

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

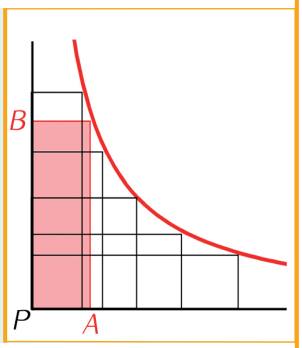
EUCLIDES JAARGANG 95 NR3

IN DIT NUMMER

CRAIG BARTON AAN HET WOORD
René Kneyber
4

KLEINTJE DIDACTIEK
Lonneke Boels
8

MACHTIGE MEETKUNDE (1)
Martin Kindt
10



BUIGPUNTEN, WAT VIND IK ERVAN? OF EROVER?
Simon Biesheuvel
15

0,9999 = 1?
Jos Groot
18

DE HOEKSTREEP
Jan Beuving
21

BOEKBESPREKING
DE MEETKUNST VAN ALBRECHT DÜRER
Michel Roelens
22

CURRICULUM.NU - EEN ANTWOORD?
Maarten Müller
26

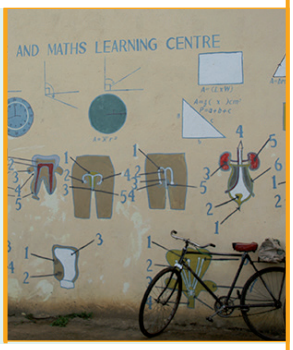
(HET GEVOLG) VAN KRASSEN MET FORMULES
Dick Klingens
29

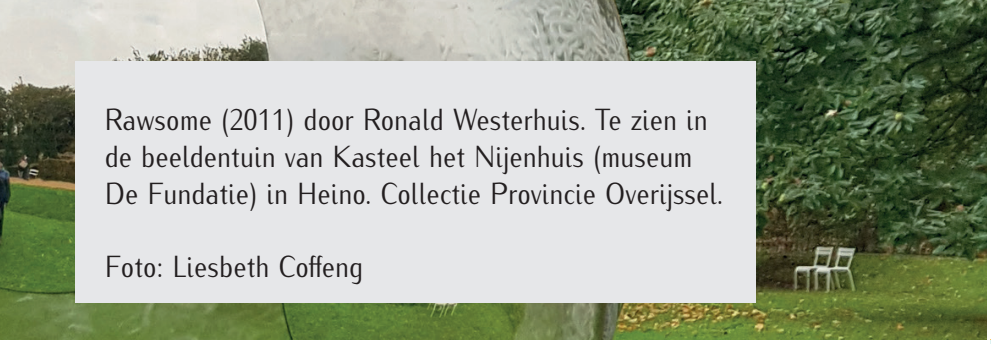
UITDAGENDE PROBLEMEN
DOOR DYNAMISCH DENKEN ...
Jacques Jansen
32

ALGEBRA MET DWO
Bart Zevenhek
37

WIS EN WAARACHTIG
40

WERELDWISKUNDE FONDS
LESMATERIAAL IN KENIA
Martin Kindt
42





Rawsome (2011) door Ronald Westerhuis. Te zien in de beeldentuin van Kasteel het Nijenhuis (museum De Fundatie) in Heino. Collectie Provincie Overijssel.

Foto: Liesbeth Coffeng

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

PUZZEL
Lieke de Rooij
Wobien Doyer
45

SERVICEPAGINA
46

Spel 30 seconden wiskunde

Ter gelegenheid van de verschijning van het 750ste nummer van *Euclides* ontwierp de redactie het spel 30 seconden wiskunde. Dit spel heeft een onderbouw- en een bovenbouwvariant en geeft gegarandeerd uren spelplezier, binnen en buiten de wiskundeles. Tijdens de studiedag is het spel uitgereikt aan alle aanwezigen. Voor iedereen die er niet kon zijn, of die een extra exemplaar wil, is het spel te bestellen via de website. Ook staan daar pdf's van de kaarten, zodat je het spel zelf kunt printen.

vakbladeuclides.nl/30secondenwiskunde

Digitale *Euclides*

Euclides is voor abonnees ook gratis te lezen in de app. Zo heb je altijd alle nummers van de afgelopen jaargangen bij de hand. In de digitale *Euclides* zijn links aanklikbaar en zijn sommige artikelen verrijkt met video's. Extra bestanden bij een artikel, zijn ook direct te downloaden.
Een instructie hoe je de app installeert staat op:

nvvw.nl/euclides/online/

Kort vooraf

Op het moment van schrijven ligt de studiedag van onze vereniging een week achter ons. En langzaam maar zeker zie je de feestverlichting in de straten, de etalages en zelfs al in de huizen verschijnen. Over een paar dagen breekt de kerstvakantie aan, waarin een mooie nieuwe editie van *Euclides*, dit keer met een reuze kerstbal op de voorkant, niet mag ontbreken. Over de voorkant gesproken, degenen die niet op de studiedag waren zijn vast ook nieuwsgierig naar de manier waarop het getal 750 is uitgebeeld op de voorkant van het vorige nummer. Een mooie ervaring: ik vroeg Henk van der Vorst of hij een idee had voor 750 en meteen dacht hij aan $2 \times 3 \times 5^3$, de priemfactorontbinding van 750. En die 5^3 inspireerde direct tot kubussen van $5 \times 5 \times 5$. Daar zie je er dus zes van, ofwel: 750 kubusjes, voor elke *Euclides* één. In die clusters van kubussen zijn vervolgens de priemgetallen weergegeven met opgevulde kubusjes, zo krijg je een weergave van de priemgetalverdeling in het 5-, 10- en 15-tallig stelsel. Met een kleurverloop van de kleuren van ons logo naar de steunkleur van dit jaar. Ik weet niet zeker of mijn uitleg helemaal overgekomen is tijdens de studiedag, de melding aan het einde van de dag dat er over is nagedacht in ieder geval wel.

Deze editie opent met een interview van René Kneyber met Craig Barton. Eén antwoord viel me nogal op: dat het hoogste doel van zijn wiskundelessen is dat zijn leerlingen het examen halen. Ik geloof er niets van eerlijk gezegd. Iemand die zo bevlogen en begaan is met het onderwijs streeft hogere doelen na. Net als de meesten van ons, toch?
Fijne feestdagen namens de hele redactie, de makers van de website en digitale *Euclides* en de ledenadministratie!

Tom Goris

René Kneyber

Craig Barton aan het woord

Craig Barton gaf als wiskundedocent twaalf jaar lang, naar eigen zeggen, 'gelukzalig' les. Tot hij in aanraking kwam met onderzoek naar cognitieve psychologie en wiskundedidactiek. Hij kwam erachter dat veel van wat hij deed niet werkte, misschien zelfs wel averechts uitpakte, en hij gooide al zijn lessen over een andere boeg.

Craig Barton

Je schrijft dat je veel verkeerd deed als docent...

'Veel dingen leken van te voren een goed idee. Breuken introduceren aan de hand van cakerollen, of een les over Pythagoras beginnen door verkleed als Pythagoras het lokaal binnen te lopen. Maar het leidde leerlingen eerder af dan dat ze er iets zinnigs van opstaken. Ik vroeg een jaar later eens aan een leerling 'Weet je nog waar de les over cakerollen over ging?' 'Over cakerollen, meneer', zei ze toen. Zo begon ik mijn lessen ook vaak door leerlingen te laten ploeteren op lastige vragen, waarna ik ze daarna pas ging uitleggen, met het idee dat ze dan meer open zouden staan voor mijn uitleg. Dat sloeg natuurlijk nergens op.'

Toch vind ik je daarover regelmatig iets te streng voor jezelf. Ik denk dat al deze ervaringen je ook hebben laten zien hoe je het nu wel wilt hebben.

'Daar heb je gelijk in. Het waren ook vormende jaren. Ik twijfel wel eens over hoe bruikbaar dit boek is voor startende docenten of voor studenten. Ze hebben geen leservaring, en ook niet de fouten gemaakt die ik heb gemaakt. Ervaren docenten zeggen wel eens dat ik hun gevoelens goed onder woorden heb gebracht. Dus wellicht is het meer een boek voor docenten zoals ik. Aan de andere kant, als ik bij beginnende docenten zoveel jaren aan fouten kan voorkomen dan is dat natuurlijk ook wat waard.'

Er kunnen zomaar twaalf jaar voorbijgaan zonder dat je met enig onderzoek in aanraking komt...

'Ja. Als docent heb je het gewoon druk. Ik stond vijf dagen in de week voor de klas. Maar ik had geen enkele stimulans om te veranderen. De leerlingen waren blij, mijn collega's tevreden, en de inspectie beoordeelde me als uitstekend. En er zat dus ook wel enige arrogantie achter, als ik eerlijk ben. Maar ik wist er gewoon ook niets vanaf. Het was geen onderdeel van de lerarenopleiding, en op conferenties hadden ze het alleen over wiskundige puzzels en probleem oplossen. Niemand die het had over de cognitieve belastingtheorie.'

Uitgewerkt voorbeeld	Reflectie	Jouw beurt
Druk t uit in p $t-2p = ap+bt$		Druk t uit in h $t-mh = 3h+5t$
$t-2p+2p = ap+bt+2p$ $t = ap+bt+2p$	*Waarom heb ik 2p opgeteld aan beide zijden van de vergelijkingen?*	
$t-bt = ap+bt+2p-bt$ $t-bt = ap+2p$	*Waarom heb ik dit keer afgetrokken in plaats van opgeteld?*	
$t-bt = p(a+2)$	*Hoe wist ik dat ik moest ontbinden in factoren?*	

figuur 2 Uit Volgens Barton deel 1, blz 248

Uitgewerkte voorbeelden – Craig Barton is een groot voorstander van het gebruik van uitgewerkte voorbeelden. Wanneer hij voor het eerst een opdracht voordoet doet hij dat in stilte (zie figuur 2, links). Pas als hij het helemaal heeft uitgewerkt licht hij het voorbeeld toe. Daarnaast plaatst hij een aantal dingen om over na te denken (midden). Het idee is niet dat leerlingen hier nu al het antwoord op vinden, maar het is goed als ze deze vragen aan zichzelf stellen. Daarna proberen leerlingen zelf een soortgelijke opdracht uit (rechts).

Critici zeggen dat er voor je oude didactiek ook veel bewijs is, maar dat je dat niet bespreekt in je boek.
'Ik heb naar al het onderzoek gekeken. Er is niks dat "werkt", je moet je altijd afvragen "voor wie", "wanneer" en "onder welke condities". Ik gooide mijn leerlingen te veel in het diepe en dat werkte uitstekend voor goede leerlingen die geen moeite hadden om zichzelf te motiveren, zelfs wanneer succes uitbleef. Maar in dit boek richt ik me veel meer op wat werkt voor zo veel mogelijk leerlingen.'

Ik vond dat ook de aantrekkingskracht van het boek. Veel van wat ik leerde op de docentenopleiding was gericht op de havo- of de vwo-leerling.
'Het is niet dat wat ik deed niet goed was, en ik wil het ook niet afserveren. Ik deed het gewoon op het verkeerde moment, op de verkeerde plek. Vroeger coachte ik mijn leerlingen vooral. Met coachen is in principe niet zoveel mis, maar leerlingen moeten over heel wat voorkennis, intrinsieke motivatie, zelfvertrouwen en zelfregulerend vermogen beschikken om dat te laten slagen. Als dat er allemaal is... prima. Maar zo niet – en dat is vaak het geval – dan is het heel onverstandig.'

Een ander punt van kritiek is dat je niet expliciet maakt wat je met je wiskundeonderwijs probeert te bereiken.
'Mijn voornaamste doel is dat leerlingen hun examen halen. En dat probeer ik te bereiken door ze zoveel mogelijk succes te laten ervaren, zodat ze zich ook succesvol gaan voelen. Als ik wil dat mijn leerlingen gemotiveerd blijven als het tegenzit, dan moet er een groot reservoir aan succeservaringen zijn om ze op de been te houden Een bijvangst kan dan zijn dat ze zich meer gaan interesseren in het onderwerp en er wellicht iets over opzoeken in hun vrije tijd, of een exacte studie gaan doen. Maar dat is niet waar het mij primair om gaat.'

Factorweetjes
Laat zien dat er, zonder enige twijfel mogelijk, drie paren van opeenvolgende getallen zijn, van minder dan 100, die allebei precies zes factoren hebben.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Vind de drie trio's van opeenvolgende getallen van minder dan 100 die allemaal precies vier factoren hebben.

figuur 3 Uit Volgens Barton deel 2, blz 141

Doelbewust oefenen – Regelmatig staan we in de examenklas onderwerpen te herhalen die leerlingen op de basisschool ook al hebben gehad, en dat weten leerlingen natuurlijk. Als je ze weer eenzelfde soort opdrachten voorschotelt zullen sommigen al zo negatief ertegenover staan dat ze niet de serieuze oefening ondernemen die eigenlijk nodig is. De kunst is dan om leerlingen datgene te laten oefenen wat wij willen, maar dat de vorm van de opdracht uitnodigt om de benodigde procedure regelmatig toe te passen.

Er staan in beide boeken zoveel lesideeën dat het wellicht wat overweldigend kan zijn. Waar zouden docenten kunnen beginnen?
'Probeer één ding per keer te veranderen. Ik geef wel eens een workshop en dan behandel ik bijvoorbeeld zes nieuwe technieken. Sommige docenten lopen dan de dag erna de les in en gaan al die zes technieken tegelijk toepassen: de stille leraar, quizjes waarbij weinig op het spel staat, doelbewust oefenen, noem maar op. En dat is gewoon te veel van het goede: te veel voor de leraar, maar zeker ook voor de leerlingen. Die kunnen het dan helemaal niet meer volgen.'

In je boek stel je ook dat je leerlingen altijd moet uitleggen wat je aan het doen bent en waarom.
'Dat is zo. Ik leg mijn leerlingen altijd uit over het werkgeheugen, het langetermijngeheugen en waarom ik doe wat ik doe. Dat maakt de kans groter dat ze meedoen. Als je zes dingen gaat veranderen in je les dan gaat dat natuurlijk niet.'

Dus waar kan een docent volgens jou het beste mee beginnen?
'Wat redelijk makkelijk om te doen is, is om niet over de tekst van een PowerPoint of een uitgedeelde tekst heen te praten. Het werkgeheugen kent verschillende kanalen die overbelast kunnen raken. Als je gewoon je mond houdt kunnen leerlingen de visuele informatie beter verwerken. Ik zeg wel dat het makkelijk is, maar ik vond het nog knap lastig trouwens.
Je kunt ook iedere les beginnen met een korte quiz over benodigde voorkennis en eerder behandelde stof. Dat is ook redelijk eenvoudig om te implementeren, een keer per week, of twee keer per week. Maar de opbrengsten kunnen enorm zijn, zeker voor het langetermijnleren.
En als je de kinderen wat beter kent kun je de stille-leraar-techniek gebruiken, het idee is dat je een uitgewerkt voorbeeld presenteert en dat in stilte voordoet. Hierdoor geef je leerlingen meer de ruimte om uit-te-leggen-aan-jezelf zoals het in mijn boek heet.' >

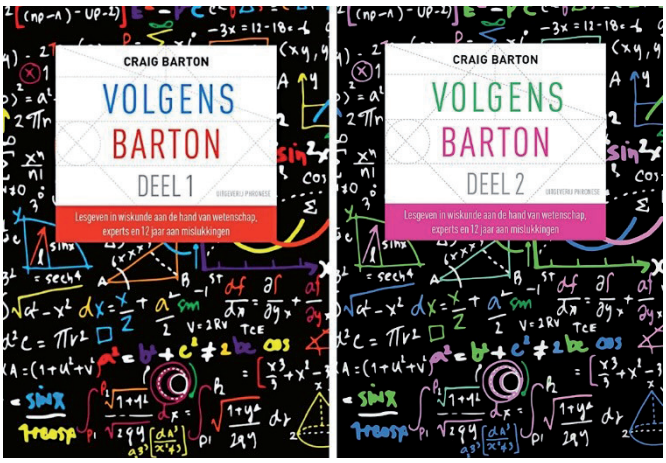
1. $\frac{1}{5}$ van 60
2. $\frac{1}{5}$ van 30
3. $\frac{2}{5}$ van 30
4. $\frac{20}{5}$ van 30
5. $\frac{20}{50}$ van 30
6. $\frac{20}{50}$ van 300
7. $\frac{2}{5}$ van 3
8. $\frac{5}{2}$ van 3
9. $\frac{3}{2}$ van 5
10. $\frac{3}{5}$ van 2

figuur 4 Uit Volgens Barton deel 2, blz 49

Slimme oefening – Bij slimme oefening sorteert de leraar opdrachten zorgvuldig tot een reeks met minimale verschillen. Hierdoor zijn leerlingen in staat om een voorspelling te doen over het mogelijke antwoord, en vervolgens erop te reflecteren als het antwoord anders blijkt te zijn. Dit leidt tot een dieper conceptueel begrip. Kijk maar eens naar de reeks in figuur 4.

Staat er nog een volgend boek in de planning?

'Voor nu heb ik een zeven maanden oude baby die mijn vrije tijd opslokt. Maar in de toekomst hoop ik een heel boek te schrijven over slimme oefeningen, waar ik in dit boek slechts een paar bladzijden aan besteed. Slimme oefeningen zijn een reeks aan opdrachten die steeds maar minimaal verschillen. Naar mijn idee hebben deze een hele positieve impact op het leerproces, maar ze worden slecht begrepen. Dus een volgend boek zou alleen daar over kunnen gaan.'



Noot

[1] *Volgens Barton* – deel 1 & 2 zijn te bestellen en in te zien via: http://www.uitgeverijphronese.nl/?page_id=466

Auteur

René Kneyber (1978) is docent wiskunde, auteur en vertaler van divderse boeken, lid van de Onderwijsraad & ex-columnist van *Trouw.*

Verschenen

De grenzen van het getal

Titel: De grenzen van het getal
Ondertitel: Wiskundigen aan het woord
Auteur: Karin Verouden
Uitgever: ISVW Uitgevers, Leusden
ISBN: 978-94-92538-45-1
Prijs: € 24,95
(160 pagina's; paperback)

Van de uitgever:
'Er is geen zekerheid in de wetenschap waar wiskunde niet kan worden toegepast', schreef Leonardo da Vinci al vijf eeuwen geleden. In het boek *De grenzen van het getal* komen wetenschappers, sporters en kunstenaars aan het woord. Zij vertellen over hun liefde voor wiskunde en de schoonheid ervan, maar er zit ook een schaduwkant aan hun verhalen. Door wiskunde begrijpen we steeds meer

van de wetten van de natuur en kunnen we ook ingrijpen in ons eigen lichaam. Het lijkt erop dat we doordraven en de banden met de natuur helemaal willen doorsnijden. Doen wij er wel goed aan om onze technologische kennis in te zetten voor een uitsluitend door mensen gemaakte wereld?

Karin Verouden interviewde tientallen professionals over de toepassingen van wiskunde in de samenleving. Zij benadrukken ethische vraagstukken en tonen aan dat wiskunde als geen andere wetenschap de wereld vormt. Maar of wiskunde ons ook meer thuis laten voelen op de wereld, daarbij zetten zij stevige vraagtekens.

KWG wintersymposium

Wiskunde in weer, klimaat en mileu

Zaterdag 11 januari 2020, Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein)
Tijd: 10.30-16.00 uur.

Orkaan Isabel (2003) vanuit ISS gefotografeerd

Op zaterdag 11 januari 2020 is het jaarlijkse wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap KWG. Dit jaar over de toepassingen van wiskunde in weer, klimaat en milieu. In het symposium is aandacht voor de volgende thema's: aardbevingsmodellen voor Groningen en Kashmir, de statistiek van extreem weer, kantelpunten in het klimaatsysteem, communicatie over klimaat.
Het symposium is in de eerste plaats bestemd voor docenten wiskunde, maar ook voor leerlingen en collega's van andere vakgebieden kan het symposium interessant zijn. Alle belangstellenden zijn van harte welkom.

Inschrijving

Het volledige programma is te vinden op de website van het KWG: *www.wiskgenoot.nl*. De link naar o.a. het digitale inschrijfformulier bevindt zich rechts op deze pagina.
De kosten voor deelname aan het symposium bedragen voor KWG-leden € 35, voor niet-leden € 40 en voor leerlingen, studenten en standhouders € 20. De bijdrage is inclusief lunch en consumpties gedurende de dag.
Bij betaling na 31 december 2019 worden de deelnamekosten met € 5 verhoogd.

Nadere inlichtingen: Theo van den Bogaart, *theo.vandenbogaart@hu.nl*, tel. (06)23375306.

Lonneke Boels

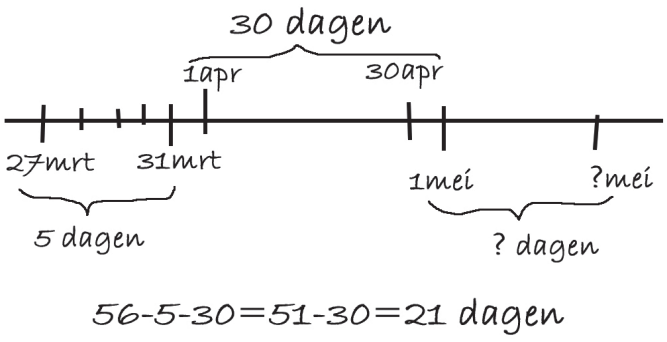
Kleintje didactiek

Bomen, pillen en vakanties op de getallenlijn

Bomen, pillen en vakanties hebben minstens twee dingen met elkaar gemeen. Allereerst, als we er in het dagelijks leven mee moeten rekenen, doen we dat vaak verkeerd (en om dat te voorkomen, gebruiken veel mensen hun vingers). Het tweede dat ze gemeen hebben, is dat we op een denkbeeldige getallenlijn de ene keer de sprongen en de andere keer de posities tellen. Hieronder volgt een aantal voorbeelden van dergelijke praktische situaties. Bij elk voorbeeld bespreek ik (met leerlingen) of het om de sprongen of de posities op de getallenlijn gaat.

Voorbeeld 1

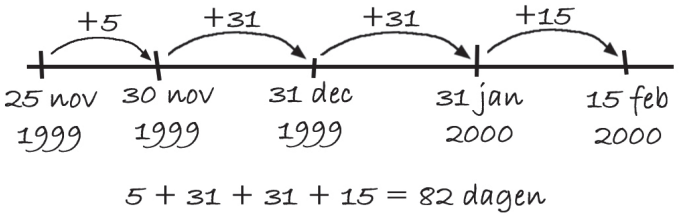
Recept: 1 x per dag ½ pil innemen, 28 pillen meegeven. De oma van Patrick begint op 27 maart aan een pillenkuur. Op de laatste dag van de kuur moet zij terugkomen. Op welke datum moet zij terugkomen (dd - mm)?[1] In dit voorbeeld gaat het om de posities op de getallenlijn, zie figuur 1, en daarnaast speelt ook kennis van breuken en maanden een rol evenals de omzetting van een maand naar een getal van twee cijfers. Het aantal posities is hier in feite het aantal sprongen plus één. Bij de berekening van het aantal dagen in mei gebruik ik bovendien rijgend rekenen - een strategie die met name voor zwakke rekenaars in hun basispakket hoort te zitten omdat deze het werkgeheugen het minst belast (en dus de kans op fouten verkleint).[2]



figuur 1 Einddatum pillen: tellen aantal posities op getallenlijn

Voorbeeld 2

Jasper is geboren op 25 november 1999. Jesse is geboren op 15 februari 2000. Hoeveel dagen is Jasper ouder dan Jesse?[1] In dit voorbeeld gaat het om de sprongen op de getallenlijn, zie figuur 2. Daarnaast speelt weer kennis van het aantal dagen in de maanden een rol.



figuur 2 Aantal dagen ouder: tellen van sprongen op getallenlijn

Voorbeeld 3

Een lastigere variant van dit soort problemen staat in figuur 3[3].

figuur 3

Als de bollen op de rand zouden worden geplaatst, zou dit een probleem zijn waarbij je posities moet tellen, zowel horizontaal als verticaal (dus: aantal sprongen plus één). Door echter alle bollen 5 cm van de rand te zetten,

wordt één positie weggehaald en kun je deze opgave oplossen door de sprongen te tellen en dat kan in dit geval met de delingen 150 : 10 en 180 : 10 (want een herhaalde aftrekking is immers te schrijven als een deling) en dus zijn er $15 \times 18 = 270$ bloembollen nodig. Een veelvoorkomende variant op deze vraag is hoeveel bomen er langs een weg moeten worden geplaatst als de weg 2 kilometer lang is, aan beiden zijden bomen komen, de afstand tussen de bomen 15 meter is en aan het begin en het einde van de weg géén bomen staan (dus je begint op 15 meter). In dit geval tel je weer de posities maar dan tussen het begin- en eindpunt op de getallenlijn en dat is het aantal sprongen min één. En dat een vakantie van acht dagen (posities) maar zeven overnachtingen (sprongen) kent, hoef ik je natuurlijk niet uit te leggen. Ook bij de onderwerpen rijen ($n = 0$ tot en met $n = 9$ zijn tien termen, want dit zijn tien posities op de getallenlijn) als bij het onderwerp tellen speelt dit een rol.

Noten

[1] Bron: voorbeeldrekenexamen 2F, VO 2013.
[2] Zie bijvoorbeeld Kleintje didactiek over negatieve getallen in *Euclides* 91-6 (manier I, getallenlijn; waarbij de getallen onder de lijn bij de druk helaas verschoven zijn maar daar kom je vast wel uit).
[3] Bron: voorbeeldrekexamen 3F, VO 2013

Uitslag Nederlandse Wiskunde olympiade 2019 en inschrijving 2020

Op vrijdag 8 november werden op de Technische Universiteit Eindhoven de winnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2019 bekend gemaakt. De vijf leerlingen (in elk van drie categorieën) die over drie rondes de beste prestatie hebben behaald, ontvingen geldprijzen van 50 tot 250 euro, beschikbaar gesteld door de NVvW. De prijswinnaars en natuurlijk ook hun wiskundedocenten mogen erg trots zijn op deze fantastische resultaten.

Prijswinnaars klas 4 en lager

1 Peter Zhou	United World College Maastricht (4 vwo)
2 Jelle Bloemendaal	Corlaer College Nijkerk (4 vwo)
3 Hylke Hoogeveen	OSG Schoonoord Zeist (3 vwo)
4 Casper Madlener	Leo Kannercollege VSO Leiden (4 vwo)
5 Kees den Tex	Gemeentelijk Gymnasium Hilversum (4 vwo)

Prijswinnaars klas 5

1 Han Datema	Chr. SG Het Streek Ede
2 Ruben Savelkouls	RK SG St. Ursula Horn
3 Samantha Li	Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven
4 Thian Tromp	Chr. Gymnasium Beyers Naudé Leeuwarden
5 Kevin van Dijk	Stedelijk Gymnasium Nijmegen

Prijswinnaars klas 6

1 Jesse Fitié	Maerlant Lyceum Den Haag
2 Jippe Hoogeveen	OSG Schoonoord Zeist
3 Jovan Gerbscheid	St. Ignatiusgymnasium Amsterdam
4 Charlie Tang	Christiaan Huygens College Eindhoven
5 Tjeerd Morsch	Corderius College Amersfoort

Een nieuwe jaargang van de Wiskunde Olympiade start in januari. Elke school kan zelf een geschikte dag en tijd kiezen in de periode van 20 t/m 30 januari 2020.

Aanmelden kan tot 9 januari 2020. Zie *www.wiskundeolympiade.nl* voor meer informatie. Wie weet behoort volgend jaar wel een van jouw leerlingen tot de prijswinnaars!

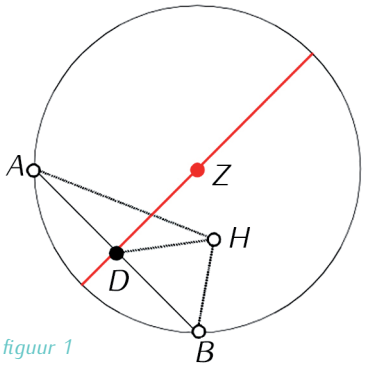
Martin Kindt

Machtige Meetkunde (1)

De wiskundige term ‘macht’ kennen we niet alleen in de rekenkunde of algebra. Ook in de meetkunde behoort de term ‘macht’ tot de vaktaal. Zo’n halve eeuw geleden kon je dit begrip nog in de schoolboeken voor de middenbouw tegenkomen, en wie weet komt het ooit weer eens terug. Want met leerplannen weet je het maar nooit.

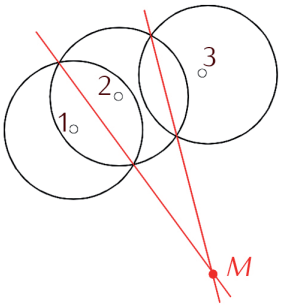
Euclides in zijn *Element(en)*

Boek III van *De Elementen* van Euclides behandelt de cirkel. Na een lijst van elf definities, onder andere van het begrip raaklijn, komt de eerste propositie in de vorm van een constructieopdracht: ‘*Bij een gegeven cirkel het middelpunt te vinden*’. De oplossing van Euclides is zó: teken een willekeurige koorde (*AB*), verdeel die in twee gelijke stukken, richt in het midden de loodlijn op die koorde op, construeer dan het midden van het lijnstuk dat de cirkel van die loodlijn afsnijdt en je hebt het middelpunt *Z*. Zie figuur 1.



figuur 1

Euclides bewijst uit het ongerijmde dat een punt *H* buiten de middelloodlijn van *AB* niet het middelpunt kan zijn. Deze gedachtegang is later in de schoolboeken tevoorschijn gekomen in het bewijs dat de middelloodlijn van een lijnstuk *AB* de meetkundige plaats (locus) is van de punten in het vlak die even ver van *A* en *B* afliggen. Met als belangrijk gevolg: *door drie punten die niet op één lijn liggen gaat precies één cirkel*. Dat stond vroeger in elk meetkundeboek en het was een fraaie toepassing van het principe dat door Polya werd aangeduid als dat van ‘the two loci’ [1]. Dat het er niet toe doet hoe dichtbij of hoe ver uit elkaar de drie punten liggen, stond niet in het boek, waarom ook, maar was voor de leraar wel leuk om erbij te vertellen.



figuur 2

Figuur 2 toont de bijpassende constructie van het middelpunt van de cirkel die door 1, 2 en 3 gaat. De rode lijnen zijn niet parallel omdat de punten 1, 2 en 3 niet collineair zijn!

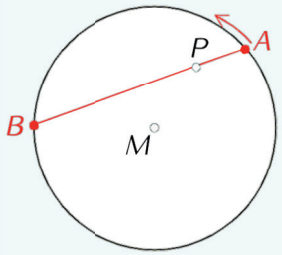
Het kan ook analytisch

De analytische meetkunde is terug van weggeweest in havo en vwo. Een cirkel wordt daarin gerepresenteerd door een vergelijking, bijvoorbeeld van de vorm $x^2 + y^2 = Ax + By + C$. Een kwestie van de stelling van Pythagoras en een beetje algebra. De drie onafhankelijke parameters vertellen dat een cirkel bepaald is door ten minste drie punten, zeg (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3). Substitutie in bovenstaande vergelijking leidt immers tot een stelsel van drie eerstegraadsvergelijkingen met drie onbekenden (A, B, C) en daarbij kun je dan één oplossing verwachten, mits het stelsel onafhankelijk is!
Het niet-collineair zijn van de drie punten blijkt hiervoor garant te staan. Op school worden stelsels van drie vergelijkingen niet meer systematisch behandeld, dus deze redenering zal de huidige leerling misschien niet aanspreken. Een vaardigheid die bij het onderwijs in de analytische meetkunde zou moeten worden aangebracht, is om bij een gegeven probleem een geschikt assenstelsel te kiezen. In dit geval is het handig om één van de drie gegeven punten, zeg (x_3, y_3), te promoveren tot oorsprong. Met als gevolg dat in de cirkelvergelijking de parameter C

de waarde 0 krijgt. Substitutie van de coördinaten x_1, y_1, x_2, y_2 leidt nu tot twee vergelijkingen met A en B als onbekenden en die hebben precies één oplossing als de paren (x_1, y_1) en (x_2, y_2) onafhankelijk zijn, dus als $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) niet collineair zijn!

Een vergeten stelling

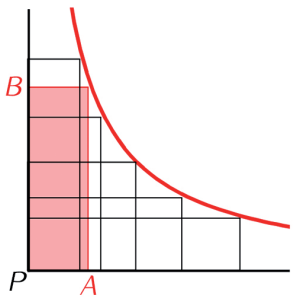
Bij een gastcollege meetkunde voor studenten van de eerstegraads lerarenopleiding aan de Hogeschool van Amsterdam werd aan de volgende opgave gewerkt:



figuur 3

$P \neq M$ ligt op koorde AB van een cirkel met middelpunt M. Het punt A doorloopt de cirkel. Pas de lijnstukken PA en PB af op respectievelijk de positieve X-as en Y-as van een rechthoekig assenstelsel (met P in de oorsprong) en teken de rechthoek met zijden PA en PB. Herhaal dit enige malen. Krijg je een vermoeden? Zo ja, welk?

Sommige studenten vermoedden al snel dat de hoekpunten tegenover P van de rechthoeken (PA, PB) op een orthogonale hyperbool liggen, ofwel dat de rechthoeken allemaal dezelfde oppervlakte hebben, zie figuur 4.

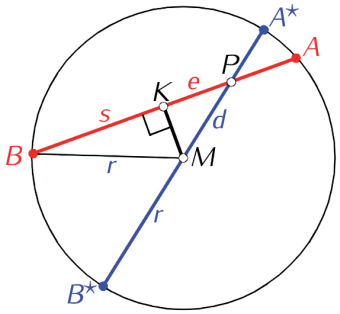


figuur 4

Met andere woorden: het product van de stukken waarin de draaiende koorde XY door P wordt verdeeld, lijkt constant te zijn. En ja, dit is een stelling die vroeger in de schoolboeken stond, maar nu vergeten lijkt:

Als twee koorden van een cirkel elkaar binnen de cirkel snijden, dan zijn de producten van de lijnstukken waarin die koorden door hun snijpunt worden verdeeld, gelijk aan elkaar.

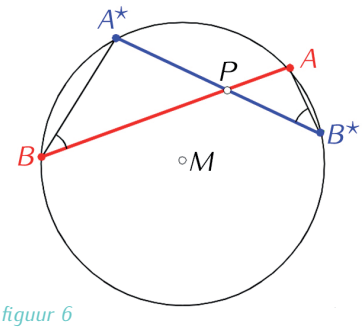
Het practicum dat ik de studenten van de HvA voorlegde sloot aan bij Euclides' formulering in boek III van *De Elementen* (propositie 35):
Als binnen een cirkel twee rechten elkaar snijden, is de rechthoek omvat door de delen van de ene, gelijk aan de rechthoek omvat door de delen van de andere.
Ik geef nu eerst een bewijs dat in essentie overeenkomt met dat van Euclides, maar door gebruik van algebrataal makkelijker te volgen is. In het geval $P = M$ is er weinig te bewijzen, stel daarom $P \neq M$. Nog een ingreep: ik kies voor een van de koorden de middellijn A^*B^*. Als ik nu voor een willekeurige andere koorde AB kan bewijzen dat $PA \times PB = PA^* \times PB^*$, dan ben ik klaar.



figuur 5

Stel de straal van de cirkel is r en de afstand van P tot M is d. Trek nu MK loodrecht op de koorde AB en stel KB $(= KA$!$) = s$ en $KP = e$.
Er geldt, zie figuur 5:
$PA^* \times PB^* = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2$
$PA \times PB = (s - e)(s + e) = s^2 - e^2$
Blijft te bewijzen: $r^2 - d^2 = s^2 - e^2$ ofwel
$r^2 - s^2 = d^2 - e^2$. Nu helpt Pythagoras, want die laatste twee verschillen van kwadraten zijn elk gelijk aan KM^2. (Q.E.D.)

Zo stond het bewijs niet in de schoolboeken van weleer. Hoe dan wel? Zie figuur 6.



figuur 6

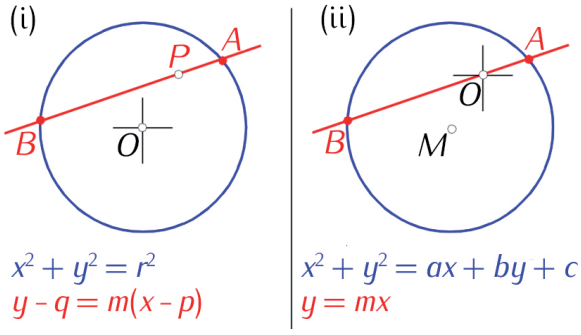
De driehoeken PAB^* en PA^*B hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig. Hieruit volgt:

$$\frac{PA}{PB^*}=\frac{PA^*}{PB} \text{ en dus: } PA \times PB = PA^* \times PB^*.$$

Alles goed en wel, maar hoe weet je nu dat de hoeken bij B en B^* aan elkaar gelijk zijn? Het antwoord is omdat die twee zogeheten *omtrekshoeken* op dezelfde boog AA^* staan. Dit bewijs oogt misschien makkelijker dan het vorige, maar vereist ook meer voorkennis. En bij Euclides kwamen de stellingen over hoeken en bogen pas in het volgende boek (IV) ter sprake.

Het kan ook analytisch

De natuurlijke vraag is weer: kan het ook analytisch? En daarbij: *hoe kies ik het coördinatenstelsel en wat wordt de strategie?*
In de koordenstelling komen twee vaste punten voor: het punt P en het middelpunt M van de cirkel. Het lijkt handig om één van de twee als oorsprong te kiezen, zie figuur 7.



figuur 7

In beide opties krijg ik te maken met vier parameters en zal ik de coördinaten van A en B daarin moeten uitdrukken. Ik kies voor optie (ii) omdat de vergelijking waaraan de x-coördinaten van A en B moeten voldoen in dat geval wat vriendelijker oogt:
$(1 + m^2)x^2 - (a + bm)x - c = 0 \quad (*)$

Ook de uitdrukkingen voor de lengten van de lijnstukken waarin de koorde wordt verdeeld zijn bij optie (ii) eenvoudiger, namelijk:
$|x_A|\sqrt{1+m^2}$ en $|x_B|\sqrt{1+m^2}$
zodat het product gelijk is aan

$$|x_A x_B|(1+m^2)$$

Ik hoef de afzonderlijke x-coördinaten van A en B niet te kennen, als ik maar hun product weet!
Vroeger was dit een eitje: iedere leerling hoorde te weten dat het product van de wortels van de standaard vierkantsvergelijking gelijk is aan 'c gedeeld door a'.

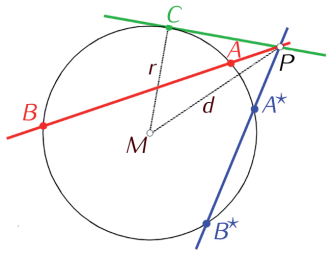
Hier wordt dat:

$$x_A x_B = \frac{-c}{1+m^2}.$$

Dus: $PA \times PB = \left|\frac{-c}{1+m^2}\right|(1+m^2) = |c|.$

Dit product is onafhankelijk van m en dus constant! Het bewijs is geleverd. Zonder de *product-van-de-wortels-formule* is het rekenwerk een stukje lastiger. Om toch de discriminant te omzeilen, zou je de leerling een handje kunnen helpen door de vierkantsvergelijking $(*)$ ook te schrijven als:
$(1 + m^2)(x - x_A)(x - x_B) = 0$.
De constante term levert bovenstaande formule voor het product van x_A en x_B.
Vind ik het analytische bewijs mooi? Jawel, maar de twee synthetische bewijzen bevredigen mij toch meer.

Echter, het analytische bewijs heeft wel een belangrijk pluspunt! Als je het nog eens naloopt, zie je dat nergens gebruik gemaakt is van het feit dat het punt P *binnen* de cirkel moet liggen. Kortom het constant zijn van het product $PA \times PB$ geldt ook voor het geval P *buiten* de cirkel ligt (over P op de cirkel hoef ik uiteraard niets te zeggen). Je zou het een cadeautje van de analytische meetkunde kunnen noemen. Bij Euclides is dit een volgende propositie (36), in boek III van *De Elementen*, en het bewijs dat hij geeft is analoog aan dat van propositie 35. Ook het gelijkvormigheidsbewijs laat zich analoog vertalen, maar moet eveneens apart worden gegeven.
Een verschil met de situatie waarbij P binnen de cirkel ligt is nog dat nu niet alle lijnen door P de cirkel in twee punten snijden. Er zijn oneindig veel lijnen door P die geheel buiten de cirkel liggen en er zijn twee raaklijnen door P aan de cirkel.

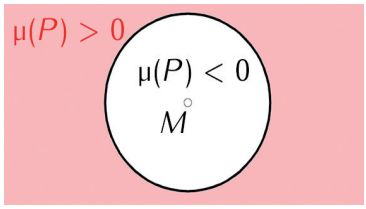


figuur 8

De draaiende lijn door P heeft een limietstand PC, waarbij C de rol van zowel A als B overneemt.
Dat brengt ons op het idee dat niet alleen
$PA \times PB = PA^* \times PB^*$
maar ook:
$PA \times PB = PC^2 = d^2 - r^2$.
Het bewijs hiervan laat ik aan de lezer.

De macht van een punt t.o.v. een cirkel

In het geval dat P *buiten* de cirkel ligt, zeggen we dat P de koorde AB *uitwendig* verdeelt in de stukken PA en PB. In dit geval is het product van PA en PB gelijk aan $d^2 - r^2$, terwijl (zie het bewijs bij figuur 5) dit bij een inwendige verdeling (dus P binnen de cirkel) gelijk is aan $r^2 - d^2$.
Een typisch kenmerk van wiskunde is om verschillende gevallen onder één hoedje te vangen. In de hier beschreven situaties gaat dat zó:
Als het punt P op een afstand d van het middelpunt M van een cirkel met straal r ligt, is de *macht* van P t.o.v. die cirkel gelijk aan het getal $d^2 - r^2$. Een soms gebruikte notatie hiervoor is: $\mu(P) = d^2 - r^2$.
De cirkel (M, r) verdeelt het vlak in twee gebieden die gekenmerkt worden door $\mu(P) < 0$ en $\mu(P) > 0$, zie figuur 9:

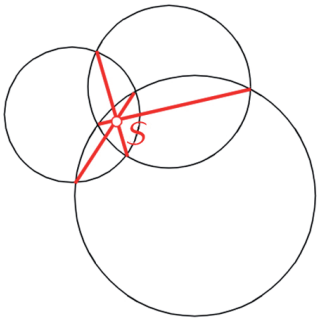


figuur 9

Voor de punten op de cirkelomtrek geldt $\mu(P) = 0$.
De minimale waarde van $\mu(P)$ is $-r^2$ ofwel $\mu(M)$.
Uitgaande van de cirkelvergelijking
$x^2 + y^2 = Ax + By + C$ kan de macht van (x_P, y_P) ook analytisch worden gedefinieerd, namelijk zó:
$\mu(x_P, y_P) = x_P^2 + y_P^2 - Ax_P - By_P - C$
want het rechterlid is gelijk aan:
$(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 - r^2$.

Machtlijnen

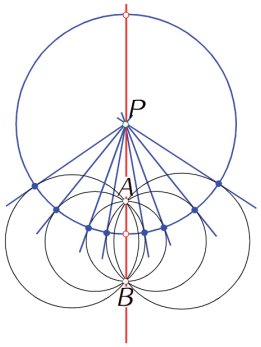
Bekijk twee cirkels, c_1 en c_2, die elkaar in twee punten, A en B, snijden. Als P een punt is op de lijn door A en B, dan geldt $\mu_1(P) = \pm PA \times PB = \mu_2(P)$. Hier zijn μ_1 en μ_2 de respectievelijke machtsfuncties bij c_1 en c_2. Je moet er dan nog bij bedenken dat elk punt van AB óf buiten, óf op, óf binnen *beide* cirkels ligt.
De lijn AB wordt de *machtlijn* van c_1 en c_2 genoemd. De middelpunten van c_1 en c_2 liggen elk even ver van A en B, dus de verbindingslijn van die middelpunen (de *centraal*) is de middelloodlijn van AB.
Voor elk punt P buiten de machtlijn geldt $\mu_1(P) \neq \mu_2(P)$. Met andere woorden: de machtlijn is de 'locus' van de punten met gelijke macht t.o.v. c_1 en c_2.
Dit laatste is hier nog niet bewezen en kan á la Euclides uit het ongerijmde worden aangetoond. Hier wint opnieuw de analytische meetkunde. Stel de twee cirkels voor door de vergelijkingen
$x^2 + y^2 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$x^2 + y^2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$
en het is onmiddellijk duidelijk dat een punt gelijke machten heeft t.o.v. beide cirkels, als en alleen als:
$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0$
De vergelijking van de machtlijn wordt in de sommetjes op school wel gebruikt om de snijpunten van twee cirkels, elk gegeven door een vergelijking, te berekenen. Een aardig gevolg van het voorgaande is, dat als drie cirkels elkaar twee aan twee snijden, de drie gemeenschappelijke koorden door één punt S gaan, zie figuur 10.



figuur 10 S is het machtpunt van de drie cirkels

Het bewijs is analoog aan het bewijs van het concurrent zijn van de drie middelloodlijnen van een driehoek. >

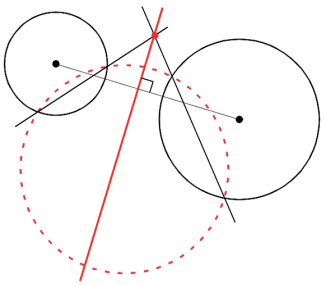
Laten twee cirkels elkaar snijden in A en B en laat P een punt op de machtlijn zijn, dat buiten die cirkels ligt. De raaklijnstukken vanuit P aan de beide cirkels zijn dan even lang. Het wordt nog wat spectaculairder als je de raaklijnen uit P aan *alle* cirkels door A en B bekijkt, zie figuur 11.



figuur 11

Het punt P heeft ten opzichte van alle cirkels van de bundel dezelfde macht, namelijk $PA \times PB$. Omdat die macht ook gelijk is aan het kwadraat van elk raaklijnstuk uit P aan een cirkel van de bundel, liggen alle bijbehorende raakpunten op een cirkel met middelpunt P. Is nu elk punt van de blauwe cirkel zo'n raakpunt?
Er zijn twee uitzonderingen, namelijk de snijpunten van de lijn AB met de blauwe cirkel. Elk ander punt van de blauwe cirkel vormt samen met A en B een niet-collineair drietal en ligt dus op één cirkel uit de bundel. En de snijpunten van elk exemplaar uit de bundel met de blauwe cirkel zijn de raakpunten van de raaklijnen uit P aan die cirkel.
Bij de redenering vanuit de twee cirkelvergelijkingen is niets gezegd over de onderlinge ligging van de twee cirkels. Alleen in het geval dat de cirkels concentrisch zijn, is er geen machtlijn.
Dan geldt $A_1 = A_2$ en $B_1 = B_2$ en dan stelt $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0$ geen rechte lijn voor. Ook uit de definitie $\mu(P) = d^2 - r^2$ volgt direct dat er bij concentrische cirkels geen punten bestaan met gelijke macht ten opzichte van die cirkels.
Als twee niet-concentrische cirkels geen gemeenschappelijke punten hebben, is er wel een machtlijn, met de hierboven genoteerde vergelijking. Die machtlijn is eenvoudig te construeren door een derde (hulp)cirkel te nemen die de beide cirkels snijdt en te bedenken dat de machtlijn loodrecht staat op de centraal van de twee cirkels, zie figuur 12. Dit laatste kan via de algebraïsche voorstelling van de machtlijn worden begrepen.

De begrippen macht, machtlijn en machtpunt zijn verdwenen uit de schoolmeetkunde. In de planimetrie van voor 1968 kwamen ze in de laatste fase van de middenbouw aan bod, mits .... er genoeg tijd was.
In de boeken voor analytische meetkunde in die tijd kwamen deze begrippen ter sprake bij het onderwerp *cirkelbundels*. In het vervolg op dit artikel kom ik daarop terug. Ook daarin wil ik laten zien dat een soort van fusie van analytische en synthetische meetkunde tot mooie resultaten kan leiden.



figuur 12

Noten

[1] George Polya beschrijft in zijn inspirerende boek *Mathematical Discovery (deel1)*, dit principe bij het oplossen van constructieproblemen als volgt:
- Reduceer het probleem tot de constructie van één punt.
- Splits de voorwaarde in *twee* delen zó dat elk deel een locus (rechte of cirkel) voor het gezochte punt voortbrengt.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

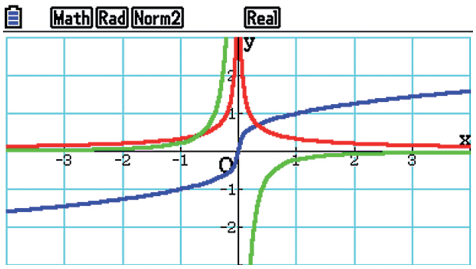
Simon Biesheuvel

Buigpunten, wat vind ik ervan? Of erover?

Buigpunten. Even het tekenverloop van de tweede afgeleide maken en je vindt ze. Of zit het toch iets ingewikkelder in elkaar? Hoe gaan de twee grote methodes ermee om?

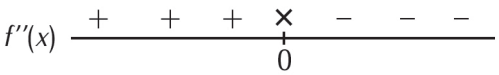
Inleiding

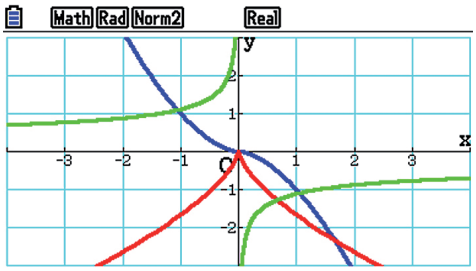
Op mijn school had ik een gesprek met een collega die zijn leerlingen leert om na het berekenen van de dubbele afgeleide een tekenschema daarvan te maken en te kijken of er een tekenwisseling plaatsvindt. Dan weet je bij welke waarde van x er een buigpunt is. Want soms kun je aan een grafiek niet goed zien of er een buigpunt is.
Ik liet mijn leerlingen na $f''(x) = 0$ oplossen, altijd naar de grafiek kijken. Zo leerde het boek ons dat en dat ging tot nu toe goed. Maar ik moet toch eens uitvinden wat de juiste methode is.
Het blijkt dat een tekenwisseling bij een punt dat niet tot het domein van de dubbele afgeleide hoort soms wel en soms niet een buigpunt oplevert.
Zie de functies f, g en h, in figuur 1, 2 en 3. Steeds hetzelfde tekenschema, maar niet steeds een buigpunt.



figuur 1

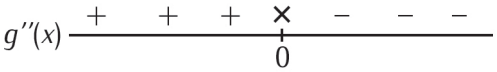
— $f(x)=\sqrt[3]{x}$ (de blauwe grafiek) *met* buigpunt.
— $f'(x)$ (de rode grafiek) heeft geen maximum. De y-as is de verticale asymptoot.
— Het tekenschema van $f''(x)$ (de groene grafiek) is:

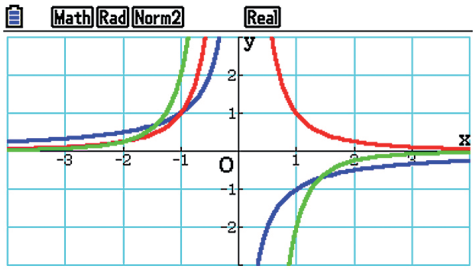




figuur 2

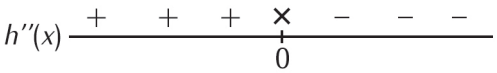
— $g(x)=-x\sqrt[3]{x^2}$ (de blauwe grafiek) *met* buigpunt.
— $g'(x)$ (de rode grafiek) heeft een maximum.
— Het tekenschema van $g''(x)$ (de groene grafiek) is:





figuur 3

— $h(x)=-\frac{1}{x}$ (de blauwe grafiek) *zonder* buigpunt.
— $h'(x)$ (de rode grafiek) heeft geen maximum. De y-as is de verticale asymptoot.
— Het tekenschema van h ''(x) (de groene grafiek) is:



>

Nodige en voldoende voorwaarde

Omdat ik alleen de boeken van *Moderne Wiskunde* en *Getal & Ruimte* heb, ben ik gaan zoeken hoe daar de berekening van buigpunten wordt uitgelegd, zie figuur 4 en 5.

Het punt A heet een **buigpunt**. In figuur 6.8c gaat de grafiek in het buigpunt over van toenemend stijgend in afnemend stijgend.
Ook bij de overgangen
- van afnemend stijgend naar toenemend stijgend
- van afnemend dalend naar toenemend dalend
- van toenemend dalend naar afnemend dalend

heb je te maken met een buigpunt.

figuur 4 Uit: Getal en Ruimte vwo wiskunde B deel 2, blz 64

En op blz. 65 staat in plaats daarvan:
De grafiek van f heeft een buigpunt als de afgeleide f' een extreme waarde heeft.

Werkschema: berekenen coördinaten buigpunten
1 Bereken $f'(x)$ en $f''(x)$.
2 Los op $f''(x) = 0$.
3 Schets de grafiek van f.
4 Kijk of de oplossingen van $f''(x) = 0$ buigpunten opleveren.

Theorie

Als de afgeleide functie een extreme waarde heeft, is er een punt op de grafiek waar de helling een maximale of minimale waarde heeft. Zo'n punt heet een **buigpunt**. Je berekent de extreme waarden van f' door f' te differentiëren.
De afgeleide van f' heet de **tweede afgeleide**. Je noteert de tweede afgeleide als f'' (f-dubbel accent).
Andere notaties zijn y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.
Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen en met een plot te onderzoeken of de grafiek voor die waarden van x een buigpunt heeft.
De raaklijn in het buigpunt heet ook wel de **buigraaklijn**.

figuur 5 Uit: Moderne Wiskunde vwo wiskunde B deel 5, blz. 79

Getal & Ruimte begint de introductie van een buigpunt (in klas 4) met een nette definitie van een buigpunt. In het werkschema gaat die verloren en wordt, net als bij *Moderne Wiskunde* (in klas 5), gesteld dat de dubbele afgeleide nul moet zijn. Dat is echter niet nodig, zie de grafiek van $f(x)$ en $g(x)$ in figuur 1 en 2.
Beide methodes laten de leerling in een grafiek kijken of er wel een buigpunt is. Maar soms is dat buigpunt niet duidelijk te zien, zie figuur 8 de grafiek van $m(x)$ bij $x = 1{,}5$.

Getal & Ruimte vwo wiskunde B, deel 5 (klas 6), blz. 102 blijft bij:
In een buigpunt gaat een grafiek
— over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend of
— over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend of
— over van afnemend dalend naar toenemend dalend of
— over van toenemend dalend naar afnemend dalen.

Maar *Moderne Wiskunde* vwo wiskunde B, deel 6 blz. 120 meldt nu iets beters, zie figuur 6:

De grafiek van een functie f heeft een buigpunt als de grafiek overgaat van afnemend stijgend (dalend) naar toenemend stijgend (dalend) of andersom. Het is mogelijk dat er een buigpunt is hoewel $f''(x) = 0$ geen oplossing heeft. Omgekeerd geldt ook dat de oplossingen van $f''(x) = 0$ niet altijd bij een buigpunt horen.

figuur 6

In de 6e klas gaat *Moderne Wiskunde* opeens veel dieper op het probleem in met niet alleen maar $f''(x) = 0$ en komen de auteurs ook met de schitterende grafiek van

$m(x) = x\sqrt[3]{x-1}$, zie figuur 8.

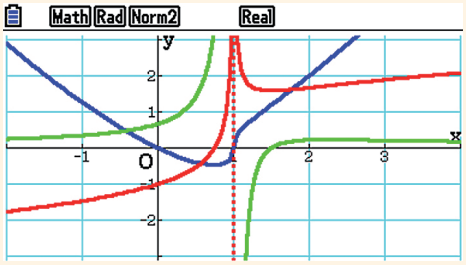
Maar in het antwoordenboek, zie figuur 7, staat dat $f''(x) = 0$ geeft:

$x = 1\frac{1}{2}$
Buigpunt $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$
Een plot van de grafiek van f laat zien dat ook $(1, 0)$ een buigpunt met een verticale raaklijn is.

figuur 7

Er wordt helaas geen methode gebruikt om dat verticale buigpunt (1, 0) te vinden.

"Je zult bij het zoeken naar een buigpunt toch altijd ook naar de grafiek moeten kijken."



figuur 8

In *Moderne Wiskunde* staat in deel 6, blz. 121,

$m(x)=x\sqrt[3]{x-1}$, (de blauwe grafiek) met twee buigpunten.

$m'(x)=\dfrac{4x-3}{3\sqrt[3]{x-1}^{2}}$ (de rode grafiek) heeft geen

maximum, want de lijn met vergelijking $x = 1$ is de verticale asymptoot. Wel is er een minimum.

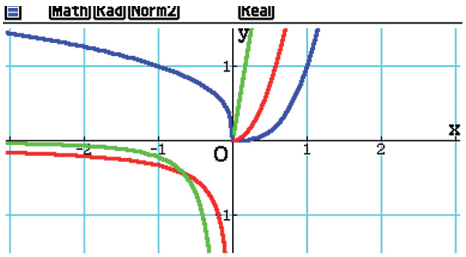
$m''(x)=\dfrac{4x-6}{9\sqrt[3]{x-1}^{5}}$ (de groene grafiek) wisselt van teken

bij $x = 1$, daar is een buigpunt met verticale raaklijn en m''(x) wisselt ook van teken bij $x = 1{,}5$ maar dat daar een buigpunt is, kun je niet zien. Ook niet goed bij uitzoomen.

Conclusie

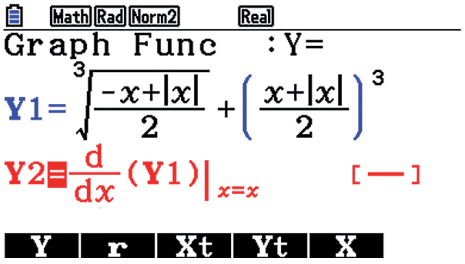
Voor een buigpunt moet de grafiek van afnemend stijgend naar toenemend stijgend overgaan, of … .
Dat toon je aan door bij een dubbele afgeleide te berekenen voor welke waarde(n) van x de dubbele afgeleide nul is of niet bestaat. Zie je in een *grafiek* dat daar een buigpunt is, dan is het buigpunt gevonden (of meerdere). Is het niet duidelijk uit de grafiek, dan kijk je naar een tekenwisseling bij de dubbele afgeleide.
En let je *ook op de grafiek* of het wel mogelijk is. (Zie als waarschuwing functie *h* in figuur 3. Daar is bij de gevonden waarde van x geen punt op de grafiek, dus is er ook geen buigpunt).

Het laatste wat ik me afvroeg was: kun je een tekenwisseling bij de dubbele afgeleide hebben en daarbij een punt op de grafiek dat toch geen buigpunt is?
Vanuit de grafiek van de dubbele afgeleide gedacht kwam ik op figuur 9.



figuur 9

Blauw is de grafiek van $f(x)$, rood is de grafiek van $f'(x)$ en groen is de grafiek van $f''(x)$. Die laatste heeft een tekenwisseling bij $x = 0$.
De drie grafieken had ik snel, maar het functievoorschrift van $f(x)$ duurde veel langer. Toch is het gelukt.
Geen fraai functievoorschrift, zie figuur 10, maar het gaat om het principe!



figuur 10

Je zult bij het zoeken naar een buigpunt toch altijd ook naar de grafiek moeten kijken. Net als een piloot voor het instappen moet kijken of de vleugels wel aan het vliegtuig zitten.

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum. E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*

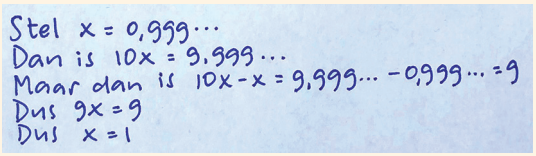
Jos Groot

0,999... = 1?

Om de vraag of 0,999... nu wel of niet gelijk is aan 1 te kunnen beantwoorden neemt Jos Groot je mee naar het domein van de hyperreële getallen.

Een speld tussen te krijgen?

Abraham: 'Ha, die Karl. Was wiskunde nog wat vandaag?'
Karl: 'Nou, deze keer wel. Ze had echt iets leuks dit keer. Wist je dat 0,999... hetzelfde is al 1? Ik bedoel, dat een nul met oneindig veel negens achter de komma hetzelfde is als 1?'
Abraham: 'Ja, geloof je het zelf?'
Karl: 'Geloven? Ze heeft het zelfs bewezen!'
Abraham: 'Hoe dan?'
Karl: 'Hier, ik heb het opgeschreven:



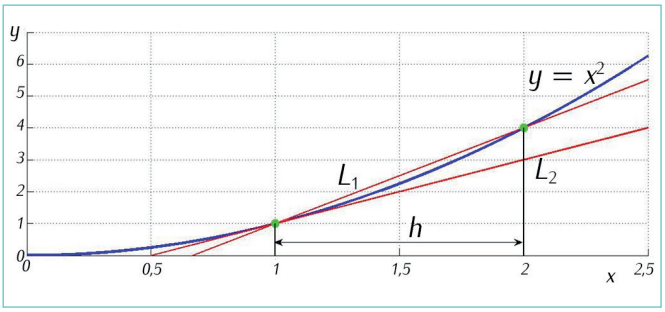
figuur 1 Het bewijs van de lerares van Karl

'Zo, geen speld tussen te krijgen!'
Abraham: 'Bizar. Hoe kan dat nou? Dat kan toch niet? 0,999... heeft alleen maar 9's na de komma en 1 alleen maar 0'en als je 1,000... schrijft. Dus dan kunnen ze toch nooit hetzelfde zijn?
Karl: '0,999... is gewoon een andere manier om 1 op te schrijven. Denk maar aan 1 en 2/2, die zijn toch ook allebei 1? En trouwens, ik kan het ook nog op een andere manier bewijzen.
Abraham: 'Dat 2/2 1 is, dat weet mijn rekenmachine ook wel. Maar... er zit toch altijd nog wat tussen 0,999... en 1? Geef maar een 0 met een hoop negens erachter en ik kan je zo'n getal geven.'
Karl: '0,9999.'
Abraham: 'Ha, 0,99995! Dat is groter dan jouw 0,9999 en kleiner dan 1. Je komt zo nooit bij 1, want hoeveel negens je me ook geeft, ik weet altijd zo'n tussenliggend getal. En dat kan ík nou eens bewijzen. Neem maar zo'n getal en noem het x. Dan ligt $(1 + x)/2$ altijd tussen de x en de 1. Dus je komt nooit bij de 1, snap je? Ik kan er altijd een speld tussen krijgen!'
Karl: 'Ja, maar wat dacht je van dit tweede bewijs: ik kan zo dicht bij 1 komen als ik wil! Geef maar eens een klein afstandje van 1.'
Abraham: '0,000001, een miljoenste.'
Karl: '1 - 0,000001 = 0,999999. Met nog een 9 erachter wordt dit 0,9999999. Zo ben ik dichter bij 1 dan jouw miljoenste. Ik kan zo dicht bij 1 komen als ik wil. Geen speld tussen te krijgen, ik zei het toch al?'
Abraham: 'Ja, daar heb je ook weer gelijk in. Raar. Voor mijn gevoel zijn 0,999... en 1 toch verschillend. Er is denk ik wel een speld tussen te krijgen. Ik weet alleen nog niet precies hoe. Misschien weet Pierre het?'

De infinitesimalen van Pierre de Fermat

Pierre de Fermat was een Franse, 17e-eeuwse wiskundige. Hij gebruikte infinitesimalen om de richtingscoëfficiënt (helling) van een raaklijn aan een kromme te vinden. Een raaklijn raakt de kromme in een punt, maar snijdt hem niet. Fermats oplossing voor het probleem van de helling bekijken we aan de hand van de functie $y = x^2$ en $x = 1$.

In figuur 2 is de blauwe functie getekend samen met twee rode lijnen L_1 en L_2. Lijn L_1 snijdt de functie in de twee groene punten. Als we het rechter groene snijpunt over de curve naar links verplaatsen wordt h kleiner en gaat lijn L_1 uiteindelijk over in L_2, als de twee punten samenvallen. L_2 is de raaklijn.
Dit is hoe Fermat de helling in formulevorm berekende,



figuur 2

met h zijn infinitesimaal, dat hij opvatte als een 'oneindig klein getal':

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \overset{(1)}{=} \frac{2xh+h^2}{h} \overset{(2)}{=}$$

$$2x+h \overset{(3)}{=} 2x \overset{(4)}{=} 2 \text{ (want } x = 1\text{).}$$

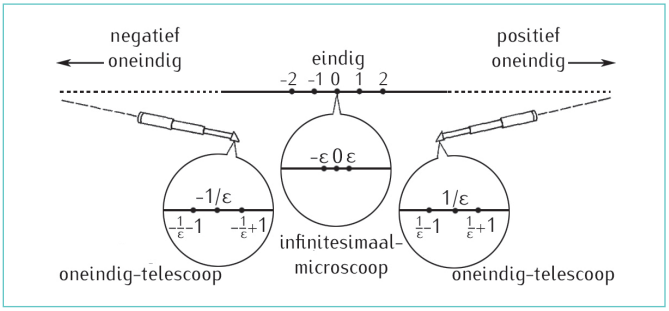
Dit is het juiste antwoord, maar zie je de tegenstrijdigheid in de afleiding? Bij (2) wordt aangenomen dat h niet 0 is, want er wordt door gedeeld. Maar bij (3) neem je aan dat $h = 0$, want je laat h weg. Dat een getal zowel 0 als niet 0 zou zijn wordt een *inconsistentie* genoemd. Inconsistenties worden echter niet toegestaan in de wiskunde. Er was daarom veel kritiek op het gebruik van de merkwaardige infinitesimalen. Zoals van de Ierse filosoof George Berkeley, die voorstelde ze 'ghosts of departed quantities' te noemen. Vrij vertaald: een infinitesimaal is nul-komma-niks. Maar toch, de resultaten klopten als je het maar handig aanpakte, zoals veel wis- en natuurkundigen van naam deden. De kritiek leidde uiteindelijk tot een solide wiskundig fundament, maar pas een paar honderd jaar later. Daarmee werd Fermats methode met infinitesimalen buiten spel gezet.

Limieten en 'epsilon-delta bewijzen'

Het fundament werd gelegd door de Duitse, 19e-eeuwse wiskundige Karl Weierstrass. In essentie werd dit gevormd door de methode die Karl in de introductie gebruikte. Daar laat hij Abraham zien dat hij zo dicht bij 1 kan komen (met 0, en een hoop 9's erachter) als hij maar wil. Weierstrass zou zeggen dat Karl met een 'ε - δ bewijs' heeft aangetoond dat de limiet van de reeks 0,9, 0,99, 0,999, ... gelijk aan 1 is. ε en δ zijn (kleine) reële getallen. In het x^2-voorbeeld komt de methode van Weierstrass erop neer dat je kunt laten zien dat, hoe dicht $((x + \delta)^2 - x^2)$ / δ ook bij 2 moet liggen (zeg: op afstand ε), je een δ kunt vinden waarmee je dat voor elkaar krijgt. Wiskundig gezien klopt alles nu en zijn er geen infinitesimalen meer nodig. Maar het werkt wel omslachtiger.

De infinitesimalen van Abraham Robinson

Verrassenderwijs ontwikkelde de wiskundige Robinson rond 1960 een wiskundig solide theorie waaruit infinitesimalen voortvloeiden. Een infinitesimaal is hierin een getal groter dan 0 maar kleiner dan elk positief reëel getal. Het is dan ook geen reëel getal. Het is de 'speld' die tussen 0,999... en 1 te krijgen is. De reële getallen en infinitesimalen vormen samen de hyperreële getallen. De hyperreële getallenlijn[1] zie je in figuur 3.



figuur 3 De hyperreële getallenlijn

Met de 'infinitesimaal-microscoop' zijn twee infinitesimalen -ε en ε rond 0 zichtbaar gemaakt. Die leiden ook tot oneindig grote getallen, zoals zichtbaar met de 'oneindig-telescoop'. Maar rond 0 zitten veel meer infinitesimalen, die samen een 'halo' vormen. Tot deze halo behoren ook getallen als 1,5ε , ε^2, enzovoort. Niet alleen rond 0, maar rond elk reëel getal zit zo'n zelfde halo. Uit Robertsons theorie volgen ook rekenregels voor superreële getallen. Met die rekenregels wordt de hiervoor gegeven afleiding van Fermat als volgt, met ε een infinitesimaal volgens Robertson:

$$\text{st}\left(\frac{(x+\varepsilon)^2-x^2}{\varepsilon}\right) \overset{(1)}{=} \text{st}\left(\frac{2x\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right) \overset{(2)}{=}$$

$$\text{st}(2x+\varepsilon) \overset{(3)}{=} 2x \overset{(4)}{=} 2 \text{ (want } x = 1\text{)}$$

De st-functie staat voor 'standaarddeel'. Het rondt een hyperreëel getal af naar het dichtstbijzijnde reële getal. Omdat ε niet 0 is mag stap (2) genomen worden. En stap (3) volgt omdat $2x$ het reële getal is dat het dichtst bij $2x + \varepsilon$ ligt.

> "Wiskundig gezien bestaat iets als het ingebed is in een consistent wiskundig raamwerk."

Bestaan infinitesimalen?

Een voor de hand liggende vraag is of infinitesimalen bestaan. Dat hangt ervan af hoe je 'bestaan' definieert. Je kunt bijvoorbeeld zeggen dat iets bestaat als je het kunt zien. Een boom bestaat dan, maar lucht? Wiskundig gezien bestaat iets als het ingebed is in een consistent wiskundig raamwerk. 'Consistent' betekent dat je geen tegenspraken kunt krijgen. Een tegenspraak zagen we >

juist bij het 17e-eeuwse idee van infinitesimaal: die was zowel 0 als niet 0. Vandaar het ongemak van wiskundigen. Robinson maakte echter een consistent raamwerk, waardoor de 'moderne infinitesimaal' wiskundig gezien bestaat. Net zoals de wortels uit 2 en -1 bestaan.

Samenvatting

Even een samenvatting van de gang van zaken. In de 17e eeuw (en zelfs daarvoor) werd er voor allerlei wiskundige problemen handig gebruik gemaakt van 'oneindig kleine getallen', infinitesimalen genaamd. Maar het rammelde. Dan werd weer aangenomen dat ze 0 waren, dan weer niet, maar net hoe het uitkwam. Toch klopten de resultaten wel, wat suggereert dat de beoefenaars wel degelijk impliciet consistente regels volgden. Wellicht was dat een essentieel onderdeel van hun genie. In de 19e eeuw werden de reële getallen netjes gedefinieerd en werden limieten en 'epsilon-delta bewijzen' ingevoerd, waardoor infinitesimalen niet meer gebruikt hoefden te worden.
Een en ander was echter wel omslachtig. Rond 1960 blies Robinson onverwacht de infinitesimalen nieuw leven in. Hij ontwikkelde een consistent raamwerk waardoor nu netjes met infinitesimalen gewerkt kan worden. Een infinitesimaal is binnen dit raamwerk een getal groter dan 0 en kleiner dan elk reëel getal. De reële getallen en infinitesimalen samen heten de hyperreële getallen. Daarin zit rond elk reëel getal een halo van infinitesimale getallen.

Het gelijk van Karl en Abraham

Wie had nu gelijk, Karl of Abraham? Ze hadden allebei gelijk, als je de context in aanmerking neemt. Karls bewijs en dat van zijn lerares kloppen als je je tot de reële getallen beperkt. Dan geldt 0,999... = 1. Het idee van Abraham, dat er toch iets tussen 0,999... en 1 zit, is niet waar voor de reële getallen, maar wel voor de hyperreële getallen. Voor deze laatste heb je een andere notatie nodig dan voor de reële getallen, en dat maakte het voor Abraham moeilijk om uit te leggen wat hij precies bedoelde. Maar hij voelde prima aan dat er een getal zoals $1 - \varepsilon$ bestaat.

Noten

[1] Keisler, H.J. (2012). *Elementary calculus: an infinitesimal approach.* Dover Publications. http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

Met dank aan prof. dr. Sylvia Wenmackers (KU Leuven) voor enkele waardevolle opmerkingen.

Over de auteur

Jos Groot studeerde natuurkunde. Na 23 jaar TNO werkt hij nu als signaalverwerker bij IP2 Solutions. E-mailadres: *jos.groot@casema.nl*

Verschenen

Superlogisch

Titel: Superlogisch
Ondertitel: Hoe getallen je helpen om de wereld beter te begrijpen
Auteur: Ionica Smeets
Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam
ISBN: 978-90-57125-20-1
Prijs: € 18,95 (208 pagina's; paperback)

Van de uitgever:
In ons dagelijks leven regent het getallen – en niet alleen als er 10 procent kans is op regen. Wat zit er achter die getallen? Wat is de logica achter een BH-maat zoals 70F en hoe kun je een miljoenennota van 284.500.000.000 euro begrijpen? Hoe zie je of een kortingsactie bij de supermarkt voordelig is en waarom sta je altijd in de verkeerde rij?

Al tien jaar lang schrijft Ionica Smeets, hoogleraar wetenschapscommunicatie aan de Universiteit Leiden, met glasheldere logica en veel humor over getallen voor *de Volkskrant*. *Superlogisch* bundelt haar beste columns en combineert grote vragen met vrolijke raadsels en praktische tips. Na het lezen van dit boek zul je op een andere manier naar getallen kijken en regelmatig in jezelf mompelen: 'Ah, zo zit dat... Superlogisch!'

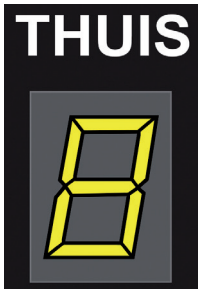
Jan Beuving

De Hoekstreep

Dekpunten

Ik stond laatst op een voetbalveld in Blaricum, toen ik zag dat ze er twee scoreborden hadden. Niet omdat scoreborden altijd maar één cijfer per ploeg aankunnen, en de thuisploeg een goede spits had, maar omdat er twee velden waren met een scorebord. (Overigens zit daar best een leuke combinatorische opgave in voor wiskunde A-leerlingen: Stel er wordt dertien keer gescoord in een wedstrijd, en er is een scorebord dat maar één cijfer per ploeg kan aangeven. Hoeveel uitslagen zijn er dan waarbij het scorebord niet toereikend is?)

Beide borden waren digitaal, maar de een had ongeveer 300 ledpixels om een cijfer op te bouwen, de ander zeven streepjes, zie figuur 1.



figuur 1

CIJFER	AANTAL STREEPJES
0	6
1	2
2	5
3	5
4	4
5	5
6	5/6
7	3
8	7
9	6

figuur 2

Op dat tweede bord wil ik me even concentreren. Als alle zeven streepjes branden, heb je een 8. Dat bracht mij natuurlijk bij de vraag: is er een cijfer waarbij het aantal brandende streepjes gelijk is aan het cijfer zelf? Een 1 is 2 streepjes, een 2 heeft er 5 nodig, en zie verder de tabel in figuur 2.

Zo zie je dat de 4 en de 5 hun eigen aantal streepjes nodig hebben. Bij de 6 twijfelde ik of er 5 of 6 streepjes gebruikt zouden worden, zie figuur 2. Rechts zou energiezuiniger zijn, maar links acht ik waarschijnlijker. Van de 9 weet ik vrij zeker dat ze er 6 streepjes voor gebruiken. (Nu ik erover nadenk: waarschijnlijk is de rechter zes helemaal niet energiezuiniger: een 6 komt altijd na een 5 op het scorebord. Naar de linker zes is dat een verandering van één streepje: linksonder moet aan. Voor de rechter zes moeten twee handelingen verricht worden: linksonder aan, en horizontaal boven uit. En naar de 7 toe is ook weer intensiever vanaf die rechter zes.) Hoe het ook zij: ik moest op dat moment natuurlijk denken aan de dekpuntstelling van Brouwer. Ik citeer even Wikipedia: Laat D de gesloten eenheidsbol zijn in de n-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$ en f een continue afbeelding van D naar D, dan heeft f ten minste één dekpunt, dat wil zeggen: er is een x zodat $f(x) = x$. Dit heb ik altijd een fascinerende stelling gevonden, omdat je gevoel zegt dat er toch een tegenvoorbeeld gevonden moet kunnen worden. Nu is een scorebord met zeven streepjes natuurlijk niet echt een topologische ruimte zoals die eenheidsbol (zouden er ook eenheidsbosschebollen zijn, vraag ik me af), maar in zekere zin (ik heb nu trouwens zin in een bossche bol) kun je zeggen dat er bij de cijfers 4 en 5 (en misschien 6) sprake is van een dekpunt.

Naar dit soort praktische dekpunten kun je een vrolijke zoektocht beginnen in het dagelijks leven. Is er een korte treinreis tussen twee stations denkbaar waarbij het aantal passagiers gelijk is aan het aantal bielzen waar je overheen gaat? Is er een anagram van het woord 'ekster' waarbij er geen dekpunt is? Of meer dan 1? En zijn er getallen die, als je ze uitschrijft, precies geschreven worden met hun eigen aantal letters? Laat de leerlingen maar eens een tabelletje maken zoals in figuur 3. Dan zie je dat 4 voldoet. (Een heel slimme leerling zal misschien inzien dat 'min zes' uit zes letters bestaat, maar ja, niet uit min zes letters, helaas.)

GETAL	AANTAL LETTERS
nul	3
één	3
twee	4
drie	4
vier	4
vijf	4
zes	3
zeven	5
acht	4
negen	5
tien	4

figuur3

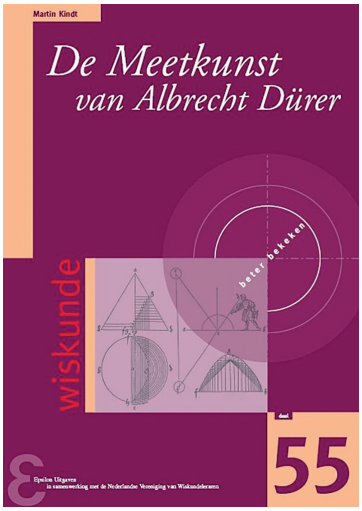
Het vermoeden is natuurlijk dat als je verder gaat tellen, altijd zal gelden dat 'getal > aantal letters om dat getal mee te schrijven'. Best nog ingewikkeld om te bewijzen. Want hoe weet je zeker dat er ergens vlak voor de oneindigheid niet een getal is waarvoor we bijna oneindig veel letters nodig hebben? Als een leerling denkt dat dit toch het geval is, kun je vragen om het te bewijzen door het getal even op te schrijven.

Over de auteur

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier.
Hij toert vanaf september weer door het land met zijn nieuwe voorstelling Rotatie. Kijk voor de speellijst op www.janbeuving.nl. E-mailadres: *janbeuving@gmail.com*

Michel Roelens

De meetkunst van Albrecht Dürer



Titel: De meetkunst van Albrecht Dürer
Auteur: Martin Kindt
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2018)
ISBN: 978-90-5041-175-2 60 pagina's (softcover)
Prijs: € 10,00

Het woord 'meetkunst' uit de titel verwijst niet enkel naar een oude benaming voor meetkunde, maar ook naar de combinatie tussen meetkunde en kunst. Albrecht Dürer (15de en 16de eeuw) was immers een groot kunstenaar die ook boeken schreef over meetkunde. Hij was niet klassiek geschoold en schreef in het Duits in plaats van in het Latijn, de wetenschappelijke taal van die tijd.
Op (studie)reis in Venetië had hij een Latijnse vertaling van *De Elementen* van Euclides (rond 300 v.C.) op de kop getikt. Met de hulp van een vriend die wel Latijn kende, kon hij dit boek ontcijferen. Hierdoor geïnspireerd, schreef hij *Underweysung der Messung*[1] een dik boek over meetkunde, met veel kunstzinnige constructies maar zonder de euclidische theoretische opbouw en bewijzen. Hij richtte zich tot een minder wiskundig publiek, zoals blijkt uit dit fragment uit de inleiding van zijn boek:
De allerscherpzinnigste Euclides heeft de fundamenten van de meetkunde bijeengebracht. Zij die hem goed begrijpen, kunnen wat hier volgt laten voor wat het is, want dit is geschreven voor jongeren en voor hen die geen goed onderwijs hebben genoten.
Met dit Zebraboekje ontdekt de lezer het meetkundig werk van Albrecht Dürer. Maar daar blijft het niet bij. In drie opzichten gaat Martin Kindt verder dan Dürer.

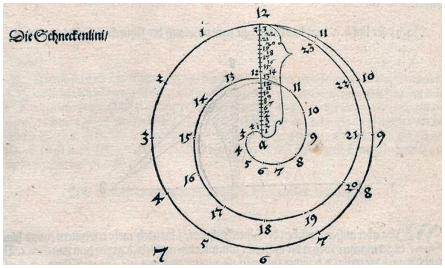
1. Hier en daar maakt Dürer een fout. In dit boekje wordt hier dankbaar op ingespeeld: de leerling-lezer ontdekt wat juist is en wat fout en hoe de fouten kunnen worden gecorrigeerd. Het is goed dat leerlingen zien dat ook beroemde mensen fouten maken. Fouten zijn interessant en nuttig als je iets wilt leren. . .
2. Dürer tekent en beschrijft maar geeft geen bewijzen. Kindt is bekend van zijn bewijzenrubriek in *Nieuwe Wiskrant* en in *Euclides* (waarvan de eerste 60 afleveringen gebundeld zijn in *Wat te bewijzen was*[2]). Hij is bij uitstek de geknipte persoon om Dürer hierbij aan te vullen. Hadden die twee in eenzelfde tijd geleefd, dan hadden ze samen *Underweysung der Messung mit Beweisen* kunnen schrijven. De lezer van het Zebraboekje wordt met mooie opdrachten aan het werk gezet om wat Dürer alleen toont, daadwerkelijk te bewijzen.
3. Er wordt gewerkt met authentieke oude tekeningen, maar ook met GeoGebra-figuren. Historische wiskunde bestuderen betekent niet dat je je moet beperken tot de hulpmiddelen van toen. Kindt actualiseert Dürer en laat ook hedendaagse toepassingen zien van deze eeuwenoude meetkunde.

In het vervolg van deze bespreking behandel ik sprongsgewijze de inhoud van het boekje en illustreer ik deze drie punten met voorbeelden.

> "Kindt actualiseert Dürer en laat ook hedendaagse toepassingen zien van deze eeuwenoude meetkunde."

Spiralen

Dürer legt eerst uit hoe je een eenvoudige spiraal kunt tekenen die is opgebouwd uit halve cirkels. Zijn tweede spiraal, geïnspireerd door Leonardo da Vinci, werkt met een omgeschreven cirkel verdeeld in twaalf gelijke boogjes en een ronddraaiende straal verdeeld in 24 gelijke stukjes, zie figuur 1. Zo construeert hij 24 punten die hij met elkaar verbindt. De kromtestraal verandert al minder abrupt dan bij de eerste spiraal. Nog beter is de spiraal van Archimedes, die ontstaat als de baan van een punt dat eenparig beweegt op een halfrechte die eenparig rond zijn beginpunt draait.
Kindt maakt dit nog levendiger dan Archimedes: 'Een mier stapt op de secondewijzer van een klok. Ze start vanuit het middelpunt van de klok en ze legt 5 cm per seconde af.' Op die manier vergeet je de archimedische spiraal nooit meer. Een volgende opgave levert parametervergelijkingen



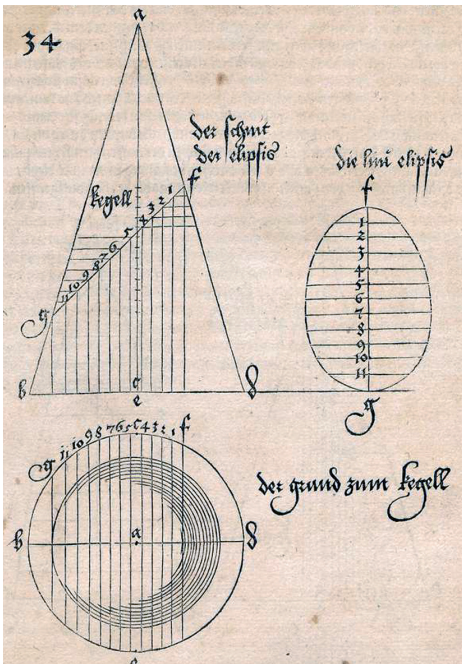
figuur 1 Tweede spiraal (Dürer, 1525, p. 11)

op, waarmee deze spiraal gemakkelijk met GeoGebra of een grafische rekenmachine kan worden getekend. De snelheidsvector van de mier op een bepaald moment is te ontbinden als de som van twee onderling loodrechte snelheidsvectoren: de snelheid van de mier op de wijzer en de snelheid van dat punt van de wijzer ten opzichte van de klok. Op basis hiervan ontdekken de leerlingen dat je de snelheidsvector ook kunt verkrijgen door de parametervergelijkingen af te leiden naar de tijd.

Dürer tekende ook een wenteltrap. Hij maakte een voor- en een bovenaanzicht (Monge avant-la-lettre) en waarschijnlijk was hij hiermee de eerste die een sinusoïde tekende. Door die wenteltrap van bovenuit, vanuit een punt van de as, in perspectief te bekijken, krijg je een andere spiraal die je ook met GeoGebra of de grafische rekenmachine kunt tekenen. Het hoofdstuk eindigt met het *folium van Dürer*, waar ik hier niet op inga.

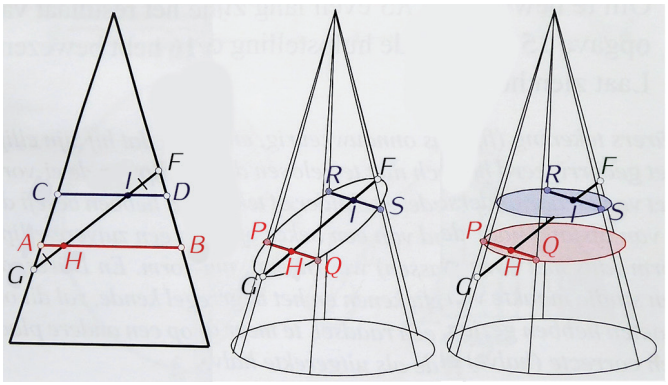
Ellips en parabool

Niet enkel van de wenteltrap tekende Dürer een voor- en een bovenaanzicht, maar ook van een kegel gesneden door een vlak, zie figuur 2.



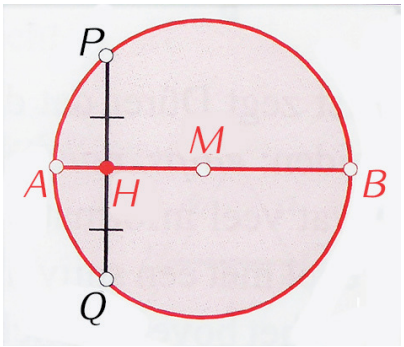
figuur 2 Aanzichten van een kegel gesneden door een vlak (Dürer, 1525, p. 35)

Naast dit tweeaanzicht toonde hij hoe de doorsnede er in werkelijkheid uitziet. Hier lijkt hij te denken dat die doorsnede een eivorm is: bovenaan smaller omdat de kegel daar smaller is. In werkelijkheid is de doorsnede een perfecte ellips, met niet alleen een 'verticale' maar ook nog een 'horizontale' symmetrieas. De lezer van het Zebraboekje krijgt de opdracht om eerst zelf de doorsnede nauwkeuriger te construeren en dan aan de hand van een paar opdrachten te bewijzen dat de lijnstukken PQ en RS van figuur 3 even lang zijn.



figuur 3 Bewijs dat de doorsnede een tweede symmetrieas heeft

Met twee paar gelijkvormige driehoeken, namelijk $\Delta AGH \sim \Delta CGI$ en $\Delta DFI \sim \Delta BFH$, zie de linker tekening van figuur 3 bewijzen de leerlingen dat $AH \cdot BH = CI \cdot DI$. Als hulpstelling bewijzen ze ook dat $AH \cdot BH = PH^2$, zie figuur 4. Lezers die van meetkunde kaas hebben gegeten, herkennen hierin de 'macht' van H ten opzichte van de cirkel, of nog een 'middelevenredigheid' in de (rechthoekige!) driehoek APB, maar voor het bewijs van het boekje is deze kennis niet nodig). Analoog is $CI \cdot DI = RI^2$. Hiermee kunnen ze het bewijs afronden: $PH^2 = AH \cdot BH = CI \cdot DI = RI^2$ waaruit volgt dat $PQ = RS$.



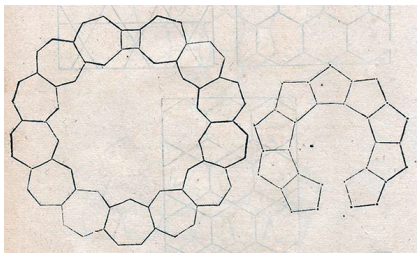
figuur 4 Hulpstelling

Dürer construeerde ook de parabool als een snede van een kegel en hij liet de weerkaatsingseigenschap zien in een parabool. In het Zebraboekje wordt deze >

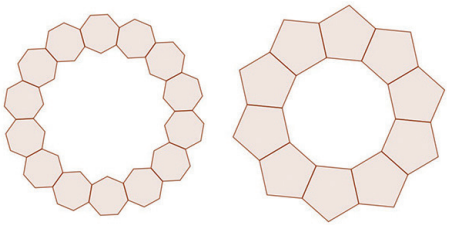
eigenschap bewezen en in verband gebracht met moderne toepassingen (schotelantennes, radiotelescopen, het verhitten van olieleidingen in de Nevadawoestijn…).

Regelmatige veelhoeken

Dürer legde uit hoe je met passer en liniaal verschillende regelmatige veelhoeken kunt construeren vertrekkend vanuit hun omgeschreven cirkel. Ook de regelmatige zevenhoek is daarbij. Nochtans weten wij sinds Gauss (19de eeuw) precies voor welke regelmatige veelhoeken een dergelijke constructie mogelijk is en daar is de regelmatige zevenhoek niet bij. De constructie van Dürer is een benadering, waarbij de fout kleiner is dan 0,2%.
Hij probeerde een krans te maken van regelmatige vijfhoeken en van regelmatige zevenhoeken. Uit figuur 5 blijkt dat het hem niet is gelukt, terwijl wij met GeoGebra gemakkelijk zulke kransen kunnen maken, zie figuur 6. In het Zebraboekje wordt uitgezocht voor welke regelmatige *n*-hoeken zulke kransen mogelijk zijn (zie ook De Langhe[3]). Het antwoord is dat het altijd gaat, op minstens één manier. Met regelmatige 12-hoeken zijn er vier mogelijkheden: met 3, 4, 6 of 12 stuks.



figuur 5 Veelhoekenkransen, poging (Dürer 1525, p. 69)

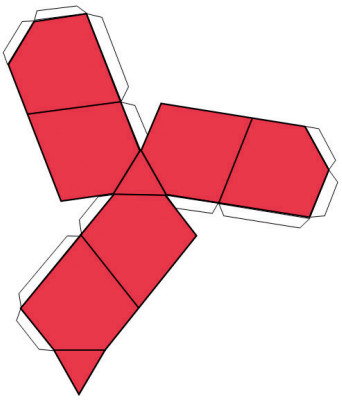


figuur 6 Veelhoekenkransen, GeoGebra-figuren

Veelvlakken

Dürer tekende aanzichten en vlakke ontwikkelingen van regelmatige en halfregelmatige veelvlakken. Bij de aanzichten tekende hij er ook de omgeschreven bol bij, maar hierbij maakte hij weer een fout: het aanzicht van de omgeschreven bol van een kubus tekende hij als een cirkel door de vier hoekpunten van het vierkant. Maar: de straal van die omgeschreven bol (½√3 maal de ribbe) is in werkelijkheid groter dan de halve diagonaal van het vierkant (½√2 maal de ribbe)… Ook erg interessant is de passage over de verdubbeling van een kubus, één van de gekende 'onmogelijke constructieproblemen' uit de Oudheid. Dürer loste het op. Alweer een fout van Dürer? Neen, de constructie is onmogelijk met passer en liniaal, maar Dürer gebruikt een liniaal waar je een streepje op mag aanbrengen. Over een dergelijke 'neusisliniaal' bestaat een ander interessant Zebraboekje van Ad Meskens en Paul Tytgat[4].

Het laatste hoofdstuk gaat over een mysterieus veelvlak, dat voorkomt in de gravure *Melencolia*[5]. Een prachtig kunstwerk om het boekje mee af te sluiten. Martin Kindt reconstrueert met de lezer, op basis van een aannemelijke hypothese over de gelijkheid van bepaalde lengtes, hoe het veelvlak eruit moet hebben gezien.
Om alle hoeken te berekenen, hebben de leerlingen kennis nodig over hoeken in een cirkel, die bij ons in Vlaanderen leerstof is in de tweede graad[6] (omtrekshoek en middelpuntshoek, koordenvierhoek…).
Omdat de Nederlandse leerlingen daar niet noodzakelijk mee vertrouwd zijn, is er in het boekje een intermezzo hierover ingelast. Uiteindelijk verkrijgen de leerlingen een vlakke ontwikkeling waarmee ze het veelvlak in karton kunnen maken, zie figuur 7, uit de uitwerkingen en antwoorden.



figuur 7 Vlakke ontwikkeling van het veelvlak van Melencolia

In het boekje staat ook een foto van een 3D-print, alweer een techniek die Dürer natuurlijk niet kende.
Als slotopdracht wordt de lezer uitgenodigd om meer informatie op te zoeken over het magisch vierkant dat op dezelfde gravure voorkomt.

Besluit

Ik heb genoten van dit Zebraboekje: de vlot leesbare tekst, de originele tekeningen en interessante fouten van Dürer, de mooie bewijzen van Martin Kindt… Alle antwoorden en uitwerkingen van de 52 opdrachten staan achterin, waardoor het boekje geschikt is voor zelfstudie. Er zit veel variatie in om leerlingen met verschillende interesses te

boeien. De hoofdstukken kunnen onafhankelijk van elkaar gelezen worden; elk afzonderlijk hoofdstuk is een bron van interessant onderzoekswerk door leerlingen.

Noten

[1] Dürer, A. (1525). *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und richtscheyt, in Linien, Ebnen und gantzen Corporen*. Neurenberg. *https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/17139/1/*

[2] Kindt, M. (2015). *Wat te bewijzen was*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[3] De Langhe, J. (2008). Kransen van regelmatige veelhoeken. *Uitwiskeling* 24/4.

[4] Meskens, A., Tytgat, P. (2015). *Met passer, liniaal en neusislat*. Zebra-reeks nr. 41. Amsterdam: Epsilon.

[5] Dürer, A. (1514). Melencolia. Gravure. Frankfurt am Main: Städelsches Kunstinstitut und Städtische Galerie. Zie bijvoorbeeld *https://www.youtube.com/watch?v=BTguDfbQmw8*

[6] De Vlaamse tweede graad van het secundair onderwijs is niet hetzelfde als het tweedegraadsgebied in Nederland. Zie *https://onderwijs.vlaanderen.be/het-voltijds-gewoon-secundair-onderwijs*

Over de auteur

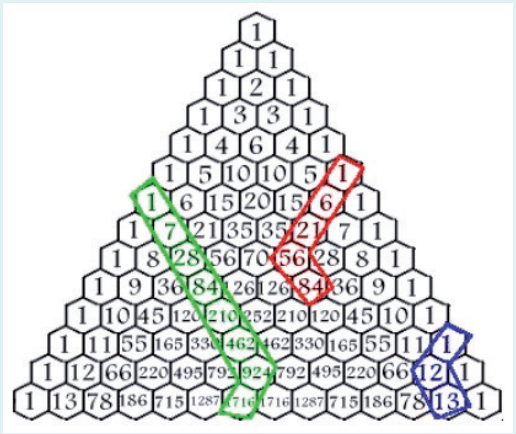
Michel Roelens is wiskundeleraar in het Maria-Boodschaplyceum (Brussel), lerarenopleider wiskunde aan de hogeschool UCLL (Diepenbeek) en redactielid van *Uitwiskeling* (*www.uitwiskeling.be*), het Vlaamse zustertijdschrift van *Euclides*.

Henk Rozenhart

Kerstmis en wiskunde

Er zijn maar twee bekende stellingen in de wiskunde die geassocieerd worden met kerstmis. De eerste is de **kerstmisstelling** (Christmas Theorem) van Pierre de Fermat (1601 – 1665), zo genoemd omdat hij deze opschreef in een brief aan Mersenne (1588 – 1648), gedateerd 25 december 1640. De stelling zegt dat elk priemgetal dat 1 meer is dan een viervoud op precies 1 manier te schrijven is als een som van twee kwadraten. Dit zijn enkele voorbeelden:
$5 = 1^2+2^2$, $29 = 2^2 + 5^2$, $41 = 4^2 + 5^2$.

De tweede stelling is de **kerstkousstelling** (Christmas Stocking Theorem of Hockey Stick Theorem) van Blaise Pascal (1623 – 1662). De naam heeft alles te maken met een structuur die we terugvinden in de bekende driehoek van Pascal. De som van de getallen in het been van de kous is gelijk aan het getal in de teen.



Maarten Müller

Curriculum.nu – Een antwoord?

Maarten Müller maakte deel uit van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde van Curriculum.nu. En hoewel curriculum.nu voor de bovenbouw havo/vwo alleen aanbevelingen doet, schetst hij de mogelijke invloed van de uitgangspunten op zijn eigen lespraktijk.

curriculum.nu

VANDAAG WERKEN AAN HET ONDERWIJS VAN MORGEN

'Meneer, waarom moeten we dit eigenlijk leren?'
Een veelgehoorde vraag in de wiskundeles en ook een terechte vraag. Het beantwoorden is niet gemakkelijk. Aan het eind van dit artikel zal ik een poging doen deze vraag deels te beantwoorden.

Opzet van Curriculum.nu

Vanaf februari 2018 heeft een groep van 150 docenten en schoolleiders een voorstel geschreven voor aanpassingen aan het curriculum. Zij werden verdeeld in negen ontwikkelteams, waaronder het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde. Veel docenten wiskunde buiten het ontwikkelteam hebben feedback gegeven tijdens een vijftal consultatiefases. Op 10 oktober is het eindproduct door Curriculum.nu aan de minister aangeboden[1]. De minister zal het nog voor de jaarwisseling naar de Tweede Kamer brengen.

Redenen voor een nieuw curriculum

Een veelgestelde vraag is waarom er eigenlijk een nieuw curriculum nodig is. Nadat cTWO enige tijd geleden gezorgd heeft voor een nieuw curriculum voor de bovenbouw havo en vwo wordt nu het gehele curriculum van begin PO tot eind VO in één keer aangepakt. Een groot deel van het gedachtegoed van cTWO is weer terug te vinden in de stukken van Curriculum.nu. cTWO is niet zo lang geleden, maar het curriculum voor het vmbo en de referentieniveaus zijn al veel ouder. Het feit dat het lang geleden is, is natuurlijk niet voldoende en zo is ook veelvuldig de vraag opgeworpen waarom een curriculumherziening eigenlijk nodig is. In de opdracht voor de ontwikkelteams stond een aantal generieke doelstellingen. Het ontwikkelteam heeft deze vertaald naar een aantal redenen, die op hun beurt vertaald kunnen worden naar doelstellingen, die specifiek zijn voor Rekenen & Wiskunde. De redenen voor een nieuw curriculum zijn als volgt beschreven:

1. de veranderende positie van wiskunde in de maatschappij;[2]
2. een dalend beheersingsniveau bij de betere leerlingen;[3], [4]
3. manco's in de doorlopende leerlijnen (in het bijzonder PO naar VO, vmbo-b naar vmbo-k en vmbo-gt naar havo[5];
4. gebrek aan samenhang en afstemming met andere vakken;[6], [7]
5. gebrek aan motivatie bij leerlingen.[3], [4]

Doelstellingen van een nieuw curriculum

Bij de vijf genoemde redenen horen doelstellingen die met het nieuwe curriculum behaald moeten worden. Ik heb hier zelf het volgende lijstje bij gemaakt. Dit zijn niet de enige zes doelstellingen, maar wel de meest in het oog springende voor mij persoonlijk.

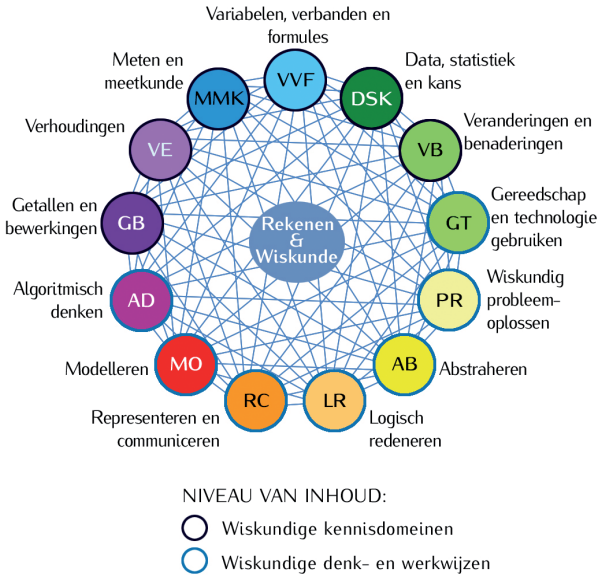
— een goede balans tussen wiskundige inhoudsdomeinen en wiskundige denk- en werkwijzen;
— een juiste balans tussen formele wiskunde en functionele wiskunde;
— de introductie van reken- en wiskundeconcepten binnen de vakken rekenen en wiskunde voordat ze nodig zijn bij andere vakken;
— een zekere basis van wiskunde voor iedereen, betreffende rekenen, verbanden en statistiek;
— op elkaar aansluitende en vloeiend in elkaar overgaande leerlijnen en opstroomlijnen (bijvoorbeeld van vmbo-t naar havo);

— voldoende mogelijkheden tot uitdaging voor alle leerlingen op elk moment in hun onderwijsloopbaan.

Het is niet de bedoeling in dit artikel de volledige visie te bespreken, daarvoor zou ik willen verwijzen naar het eindproduct van het OT Rekenen & Wiskunde[1]. Wel wil ik de eerste twee doelstellingen nader onder de loep nemen.

Wiskundige inhoudsdomeinen en denk- en werkwijzen

In figuur 1 staan de meer traditionele inhoudsdomeinen en de inhouden die we denk- en werkwijzen noemen (in het huidige curriculum 'wiskundige denkactiviteiten').



figuur 1

Ik zal in dit artikel aan de hand van twee voorbeelden deze inhouden illustreren. Voor een uitvoerigere beschrijving verwijs ik naar het eindproduct van Curriculum.nu[1]. Bij 'Gereedschap en technologie gebruiken' wil ik echter wel benadrukken dat het gebruik ervan geen doelstelling is, maar een middel. Het op een verantwoorde manier omgaan met gereedschap en technologie is wel een doelstelling. Alle dertien inhouden van rekenen en wiskunde hangen met elkaar samen, vandaar ook alle verbindingslijntjes. Het is mogelijk om geïsoleerd binnen één inhoud te werken, maar dan zal er waarschijnlijk sprake zijn van een oefensituatie. In de meeste 'echte' situaties worden ze met elkaar gecombineerd. Hierna volgen twee voorbeelden, maar eerst nog even iets anders.

Doel of middel?

Zijn de inhoudsdomeinen nu de doelen en de denk- en werkwijzen de middelen of is het precies andersom? Dat onderscheid hoeft niet gemaakt te worden. Het is van belang dat leerlingen beide tot zich nemen. Voor veel leerlingen zal gelden dat ze een groot deel van de inhoudsdomeinen na de middelbare school niet meer tegen zullen komen, maar de denk- en werkwijzen weer wel. Voor andere leerlingen geldt dat de inhouden erg belangrijk zijn voor hun vervolgopleiding en later in hun werk. Voor deze leerlingen kunnen de denk- en werkwijzen bijdragen om zich de inhoudsdomeinen eigen te maken. Doel en middel lopen hier dus door elkaar.

Voorbeeld 1

In de supermarkt is gehakt vaak te koop in rechthoekige blokken. Thuis maak je daar een of meer gehaktballen van. Deze gehaktballen kun je door paneermeel rollen zodat ze lekker krokant worden bij het bakken. De grootte van het oppervlak bepaalt hoeveel paneermeel je nodig hebt. In huis is dat misschien niet zo'n groot punt, maar wel in een cateringbedrijf waar dagelijks honderden gehaktballen bereid worden voor ziekenhuizen, verzorgingstehuizen en bedrijfskantines. Stel dat een cateringbedrijf op een dag 800 gehaktballen moet bereiden van elk 50 gram. Hoeveel kg paneermeel is daarvoor nodig?

Voor deze opdracht heb je kennis nodig uit de volgende inhoudsdomeinen:
— getallen en bewerkingen: rekenen met breuken, machten en wortels;
— verhoudingen: het omrekenen van hoeveelheden;
— meten en meetkunde: inhouds- en oppervlakteberekeningen;
— variabelen, verbanden en formules: formules om bovengenoemde verbanden te beschrijven.

Er wordt een beroep gedaan op de volgende denk- en werkwijzen:
— modelleren: we moeten aannames maken die niet in overeenstemming zijn met de werkelijkheid, zoals het benaderen van ballen gehakt met een bol;
— representeren en communiceren: er worden allerlei wiskundige notaties gebruikt;
— wiskundig probleem oplossen: dit zal geen routineopgave zijn;
— gereedschap en technologie gebruiken: gebruik van de rekenmachine.

>

Voorbeeld 2

Onderzoek of een kikker of een mens naar verhouding verder kan springen.

Het is mogelijk om deze opdracht zo open te houden als hierboven, maar je kunt zelf de vraag al op allerlei manieren sturen. Voor deze opdracht heb je kennis nodig uit de volgende inhoudsdomeinen:

— getallen en bewerkingen: uitvoeren van bewerkingen;
— verhoudingen: werken met factoren of verhoudingstabellen;
— data, statistiek en kans: gegevens verzamelen (eventueel door aflezen van een statistische weergave) en de bron beoordelen.

Er wordt een beroep gedaan op de volgende denk- en werkwijzen:

— modelleren: welke variabelen spelen een rol? Kijken we bijvoorbeeld naar gewicht of lengte van het lichaam of lengte van de benen?;
— gereedschap en technologie gebruiken: gebruik rekenmachine.

Dat is toch niet nieuw?

In mijn lessen komen op dit moment de denk- en werkwijzen al veel aan bod, maar ik merk wel eens dat ik dingen zeg als: 'Laten we ons eerst even richten op het uitvoeren van de oplossingsstrategie en dan kijken we later, als we meer tijd hebben, waarom deze methode eigenlijk werkt.' Vaak komt dit er dan niet van. Meer open opdrachten bied ik vaak alleen aan leerlingen aan die meer aankunnen. Of ik laat mijn leerlingen meedoen aan de wiskunde A-lympiade of B-dag, maar de voorbereiding hierop komt vaak in het gedrang. Ik merk dat ik te vaak te weinig tijd heb om de verschillende denk- en werkwijzen aan bod te laten komen in mijn lessen. De nadruk in de les ligt, meer dan mij lief is, op het aanleren van oplossingsstrategieën. Hopelijk komt er meer tijd om aandacht te hebben voor het overige.

Formele en functionele wiskunde

Onder werken met formele wiskunde verstaan we hier het uitgaan van axioma's en via logische gevolgtrekkingen de wiskunde verder opbouwen. In het huidige onderwijs wordt dit zelden helemaal netjes gedaan. Als ik in mijn eigen lessen kijk, benader ik dit nog het meest bij wiskunde D op het vwo als ik met meetkundig bewijzen bezig ben, maar zelfs dan worden er stappen overgeslagen en in plaats van te beginnen bij de axioma's kiezen we een aantal stellingen waar we mee beginnen (onze axioma's als het ware) en van daaruit construeren we ons bouwwerk. Als we het hebben over formele wiskunde binnen het onderwijs, moeten we dit 'formeel', dus met een korreltje zout nemen, maar als we naar wiskunde B kijken op vwo, dan komen we bij veel onderwerpen aardig in de buurt. Bij wiskunde A (en zeker op havo) werken we veel meer met contexten en dan is het nauwelijks meer formeel te noemen. Het gaat er dan om dat we het kunnen toepassen en dan spreken we van functionele wiskunde. Laten we eens als voorbeeld het onderwerp goniometrische verbanden nemen en in het bijzonder de formule $y = a + b \cdot \sin(c\,(x - d\,))$.

> "De nadruk in de les ligt, meer dan mij lief is, op het aanleren van oplossingsstrategieën."

Bij een formele aanpak, gaan we uit van de standaardformule $y = \sin(x)$. Leerlingen kennen op het moment dat we hiermee beginnen de sinus als de verhouding tussen de overstaande en de schuine zijde en kunnen met behulp hiervan een idee krijgen van de vorm van de grafiek van $y = \sin(x)$, zolang $0^o < x < 90^o$. Voor het werken met $x = 0^o$ en $x = 90^o$ kunnen we een gesprek aangaan met leerlingen over limieten, maar voor $x < 0^o$ en $x > 90^o$ moeten we met een nieuwe definitie van de sinus komen. Om vervolgens van $y = \sin(x)$ de stap te maken naar $y = a + b \cdot \sin(c\,(x - d\,))$ kunnen we de transformaties gebruiken. Binnen het wiskundeonderwijs zouden we dit een formele manier van werken noemen.
Bij een functionele aanpak, zouden we kunnen beginnen bij een verschijnsel als eb en vloed. De formule $y = a + b \cdot \sin(c\,(t - d\,))$ komt hier tevoorschijn als wiskundig model voor dit verschijnsel. Met de grafische rekenmachine kunnen we de leerlingen laten onderzoeken wat er gebeurt als we de waarden van a, b, c en d variëren. De conclusie zou zijn dat a de evenwichtstand, b de amplitude, $2\pi/c$ de periode en d de waarde van t is waar de grafiek stijgend door het evenwicht gaat.

Formeel versus functioneel

Welke aanpak de beste is, hangt af van het doel dat je nastreeft en is per leerling verschillend. Laten we weer even kijken naar het voorbeeld met de goniometrische verbanden.
De functionele aanpak (als het formele deel niet behandeld wordt) is moeilijk uit te breiden naar een

volgende stap. Als je bijvoorbeeld een formule wilt bekijken met een negatieve waarde van *b*, is er een groot probleem. We moeten er ineens allerlei nieuwe theorie bij halen, of een regel verzinnen, terwijl bij de formele aanpak het heel eenvoudig gaat. We kunnen dan namelijk gewoon spreken van een vermenigvuldiging vanuit de *x*-as met een negatieve waarde en het wordt heel snel duidelijk hoe de grafiek eruit moet zien.
Als we de formele weg bewandelen wordt ook onmiddellijk de samenhang duidelijk met andere formules. De transformaties kun je namelijk toepassen op alle typen formules.
De formele aanpak is voor een deel van de leerlingen wel heel erg abstract en werkt daardoor niet erg motiverend, terwijl het zien van de toepassing helpt om het belang duidelijk te maken. Andere leerlingen zijn gefascineerd door het feit dat je eigenschappen bij wortelfuncties zo kunt vertalen naar eigenschappen bij goniometrische functies.
Als ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde hebben we nog geen uitspraak gedaan over hoe deze balans moet zijn in de bovenbouw, maar er moet aandacht zijn voor beide. Wellicht is deze benadering een manier om wiskunde A en B hun eigen gezicht te geven?

> "Wiskunde is niet altijd het doel, maar soms ook het middel om andere dingen te leren."

Waarom moeten we dit eigenlijk leren?

De vraag 'waarom moeten we dit eigenlijk leren?', zal altijd een lastige blijven, die aan mij in de wiskunde A-les vaker gesteld wordt dan in de wiskunde B-les. Functionele wiskunde maakt beter zichtbaar waar je de wiskunde voor kunt gebruiken dan formele wiskunde en kan dus deels een antwoord geven op die vraag. Toch is het onwenselijk om bij alles naar contexten te zoeken. Al is het alleen maar omdat het ontzettend inefficiënt is. Wie veel wiskunde wil leren, moet zich niet steeds de vraag stellen wat de praktische toepassing van iets is. Veel leerlingen vinden dat ook niet nodig en vinden het ontdekken van de samenhang en structuur binnen de wiskunde al mooi genoeg.
Toch is het niet zo dat de vraag dan dus niet meer beantwoord kan worden. Zoals ik eerder al zei is de wiskunde niet altijd het doel, maar soms ook het middel om andere dingen te leren. Abstraheren, logisch redeneren en algoritmisch denken kun je niet leren zonder inhoud, maar met behulp van abstracte, formele wiskunde gaat dit heel goed. En als je dan veel meer wiskunde beheerst, komen er weer allerlei andere interessante toepassingen in beeld.

Noten

[1] Curriculum.nu (2019). *https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/uitwerking-rekenen-wiskunde/*
[2] Platform Wiskunde Nederland. (2012). *Formulas for Insight and Innovation, Mathematical Sciences in the Netherlands*; Vision document 2025. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.
[3] Graft, M. van, Leeuwen, B. van., Zanten, M. van (2017). *Leerplankundige verkenning van TIMSS-trends*. Enschede: SLO.
[4] Hoeven, M. van der, Schmidt, V., Sijbers, J., Silfhout, G. van, Woldhuis, E., & Leeuwen, B. van. (2017). *Leerplankundige analyse PISA 2015*. Enschede: SLO.
[5] Schmidt, V. (2018). *Aansluiting in perspectief*. Enschede: SLO.
[6] Nelissen, J.M. (2007). Recent onderzoek naar transfer. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(1), 11-18.
[7] Rijborz, D. (2018). Op zoek naar een vakoverstijgende didactiek voor rekenen-wiskunde en aardrijkskunde op de lerarenopleiding basisonderwijs. *Volgens Bartjens - Ontwikkeling en Onderzoek*, 47(5), 41-50.

Over de auteur

Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo en is lid van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde van curriculum.nu. E-mailadres: *m.muller@marianum.nl*

Dick Klingens

(Het gevolg van) krassen met formules

Goniometrische identiteiten: er zijn nogal wat leerlingen die daar niet blij van worden. Maar je kunt er wel mooi mee goochelen. 'Krassen' noemt Dick Klingens dat. Het levert verrassende resultaten op!

Inleiding

Allereerst een toelichting op het woordje 'krassen' in de titel. Ik vond in een oud goniometrieboek een blaadje met enkele handgeschreven goniometrische identiteiten, deels met bewijzen ervan, waarin heel wat doorhalingen zaten. Naar ik vermoed wilde ik die identiteiten gebruiken in repetities – toen goniometrie nog (samen met analytische meetkunde) een apart (in de betekenis zelfstandig) vak was. De doorhalingen, het kraswerk, laat ik in hetgeen volgt weg. *Krassen* in het oud-Grieks is *grafein* (γράφειν), maar dit laatste werkwoord heeft ook de betekenis *schrijven*.
En ook: de (grootte van de) hoeken van de driehoek ABC, waarin zich het allemaal zal afspelen, geef ik aan met de letters A, B en C. Dat zal naar ik verwacht geen verwarring geven, ook niet als ik daarbij de meeste overbodige spaties weglaat (zonder die kun je het ook wel lezen). Toen ik dit artikel met pen op papier had gezet, stonden die spaties er in de meeste gevallen ook niet.

I

In elke driehoek ABC is:
$\sin C = \sin(180^\circ - C) = \sin(A + B) =$
$\sin A\cos B + \cos A\sin B$
Gekwadrateerd geeft dat – en waarom ik dat doe, blijkt hierna:
$\sin^2 C =$
$\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + 2\sin A\cos B\cos A\sin B =$
$\sin^2 A(1 - \sin^2 B) + \sin^2 B(1 - \sin^2 A) + 2\sin A\cos B\cos A\sin B =$
$\sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin^2 A\sin^2 B + 2\sin A\cos B\cos A\sin B$

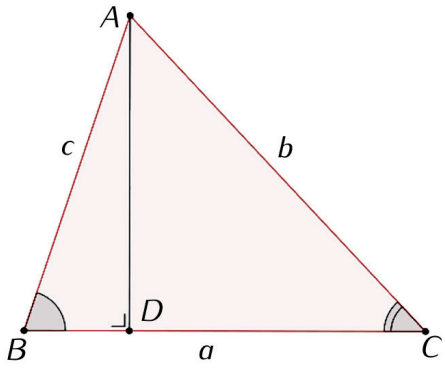
Dan blijkt:
$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C =$
$2\sin A\sin B(\sin A\sin B - \cos A\cos B) =$
$-2\sin A\sin B\cos(A + B) = -2\sin A\sin B\cos(180^\circ - C) =$
$2\sin A\sin B\cos C$

Ik zeg: een niet onaardig, en bijna symmetrisch, homogeen resultaat.[1]
Maar natuurlijk is de sinusregel ook bekend:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}$$, zodat $\sin A = ka$, $\sin B = kb$ en $\sin C = kc$.[2]

Na substitutie en ordening volgt uit het bovenstaande het aardige resultaat:
$k^2(a^2 + b^2 - c^2) = 2k^2ab \cdot \cos C$ zodat:
$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos C$
En al dit 'gekras' leidt dus tot de cosinusregel:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.
Als afleiding weer eens een wat andere afleiding. Of ook, de cosinusregel bewezen met de sinusregel.

Een toegiftje hierbij. In diezelfde driehoek is:
$\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$
Dan is, omdat ook deze identiteit homogeen [1] is in $\sin A$, $\sin B$ en $\sin C$: $a = b\cos C + c\cos B$.
Die uitdrukking komt natuurlijk bekend voor!
Zeker als je naar figuur 1 kijkt.



figuur 1

II

Niet vreemd in een driehoek is natuurlijk:

$\sin(A + B + C) = 0$

En dan is:

$\sin((A + B) + C) =$

$\sin(A + B)\cos C + \cos(A + B)\sin C =$

$(\sin A\cos B + \cos A\sin B)\cos C + (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\sin C = 0$

Dit resultaat is niet verrassend. Maar wat mij wel verraste – na een iets andere ordening – is de symmetrie in:

$\sin A\sin B\sin C = \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C$.

III

Ik gebruik bij het hierna volgende gekras een van de zogeheten *prosthaphaeresis-formules* (ook wel formules van Simpson genoemd)[3], [4], namelijk:

$\frac{1}{2}\sin X + \frac{1}{2}\sin Y = \sin\frac{1}{2}(X + Y)\cos\frac{1}{2}(X - Y)$

Ik ga uit van $F = T(A, B, C) + T(B, C, A) + T(C, A, B)$, waarin $T(X, Y, Z) = \sin^3 X\cos(Y - Z)$.

Dan is:

$T(A, B, C) = \sin^3 A\cos(B - C) =$

$\sin^2 A\sin A\cos(B - C) = \sin^2 A\sin(B + C)\cos(B - C) =$

$\frac{1}{2}\sin^2 A(\sin(2B) + \sin(2C)) =$

$\sin 2A(\sin B\cos B + \sin C\cos C)$

En *mutatis mutandis*:

$T(B, C, A) = \sin 2B(\sin C\cos C + \sin A\cos A)$ en

$T(C, A, B) = \sin 2C(\sin A\cos A + \sin B\cos B)$

Een uitdrukking van F in termen van 'sin' (en eerst ook nog 'cos') is gemakkelijk gevonden:

$F = \sin A\sin B(\sin A\cos B + \sin B\cos A) +$

$+\sin B\sin C(\sin B\cos C + \sin C\cos B) +$

$+\sin C\sin A(\sin C\cos A + \sin A\cos C) +$

$\sin A\sin B\sin(A + B) + \sin B\sin C\sin(B + C) +$

$+\sin C\sin A\sin(C + A) = 3\sin A\sin B\sin C$

IV

Naar aanleiding van mijn gekras in paragraaf I kwadrateer ik ook:

$\cos C = -\cos(A + B) = -(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$

Dus:

$\cos^2 C = \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B +$

$-2\cos A\cos B\sin A\sin B =$

$\cos^2 A\cos^2 B + (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) +$

$-2\cos A\cos B\sin A\sin B =$

$1 - \cos^2 A - \cos^2 B + 2\cos^2 A\cos^2 B +$

$-2\cos A\cos B\sin A\sin B$

Zodat:

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C =$

$1 + 2\cos A\cos B(\cos A\cos B - \sin A\sin B) =$

$1 + 2\cos A\cos B\cos(A + B) =$

$1 - 2\cos A\cos B\cos C$

Leuk toch?

V

En dan is het zeker ook fijn om te weten dat:

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

Reken maar na!

Noten

[1] Een relatie als $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C$ heet 'homogeen in $\sin A$, $\sin B$ en $\sin C$' omdat de relatie onafhankelijk is van k als tegelijk $\sin A$ door $k \cdot \sin A$, $\sin B$ door $k \cdot \sin B$ én $\sin C$ door $k \cdot \sin C$ worden vervangen.

[2] Als R de lengte is van de straal van de omgeschreven cirkel van de beschouwde driehoek, dan is $1/k = 2R$.

[3] Zie bijvoorbeeld: Klingens, D. (2013). Gonio – Prosthaphaeresis. *Euclides, 89*(3), pp. 23-24.

[4] WikipediA NL: Lijst van goniometrische gelijkheden.
Via: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_goniometrische_gelijkheden*

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).

Jacques Jansen

Uitdagende problemen Door dynamisch denken...

De column 'Ionica zag een getal' is al vaker de bron geweest voor artikelen. Jacques Jansen raakte geïnspireerd door het geschetste bol/cilinderprobleem en ging op zoek naar meer problemen die op het eerste gezicht wegens een gebrek aan gegevens onoplosbaar lijken.

figuur 1 Ionica zag een getal[1]

Ionica zag een getal en dit keer was dat het getal zes. We hebben het over haar leuke columns in *de Volkskrant* en in het bijzonder de column van 7 juli 2018. Maar zag ze eigenlijk niet een heleboel getallen? Zou de kop van haar artikel niet moeten zijn '*d* centimeter' in plaats van '6 centimeter'? Of sloeg die zes op de komende zes weken dat er geen artikel van haar in de wekelijkse katern van *de Volkskrant* zou verschijnen?

Het raadsel

Ionica kreeg een boekje getiteld *My Best Mathematical and Logic Puzzles* geschreven door de Amerikaanse wiskunde columnist Martin Gardner (1914 - 2010) [2]. Op pagina 8 staat het probleem *Hole in the Spere*, waarvan Gardner zelf zegt: 'This is an incredible problem- incredible because it seems to lack sufficient data for a solution'.

Recht door het midden van een massieve bol is een cilindervormig gat geboord met een lengte van zes centimeter. Wat is het volume dat er overblijft van de bol?

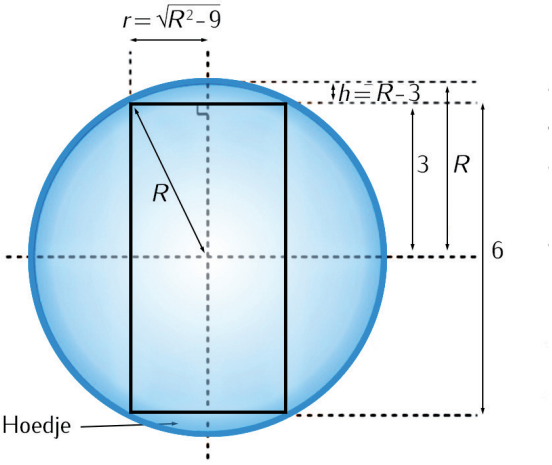
In figuur 2 zie je de aanpak van Ionica. De zes inches vervangt Ionica door 6 cm.

Volume bol: $\frac{4}{3}\pi R^3$

Volume cilinder: $6\pi r^2 = 6\pi(R^2 - 9) = 6\pi R^2 - 54\pi$

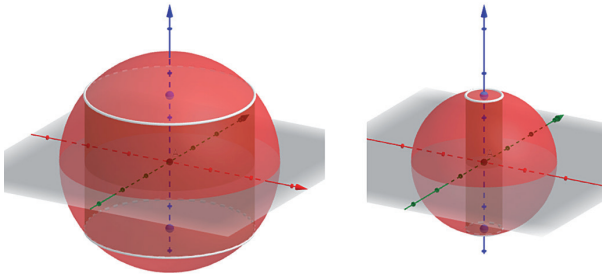
Volume hoedje: $\frac{\pi h^2}{3}(3R-h) = \frac{\pi(R-3)^2}{3}(2R+3) = \frac{2}{3}\pi R^3 - 3\pi R^2 + 9\pi$

Volume bol – cilinder – twee hoedjes: $\frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi R^2 + 54\pi - \frac{4}{3}\pi R^3 + 6\pi R^2 - 18\pi = 36\pi$



figuur 2

Het zal je opvallen dat de grootte van de bol – bij voldoende grootte overigens – er niet toe doet omdat de uitkomst een constante is, namelijk 36π. Ionica zag dus ook een elegantere oplossing die ook achter in het boekje van Gardner wordt vermeld. Je kijkt naar een grensgeval, dat is dus de situatie – mooi te zien met behulp van een animatie in GeoGebra – dat het cilindergat verdwijnt. Dat is dus bij een bol met een straal van 3 cm. Het overblijfsel is die bol zelf en de inhoud ervan is $\frac{4}{3}\pi 3^3 = 36$.
Zie ook figuur 3.

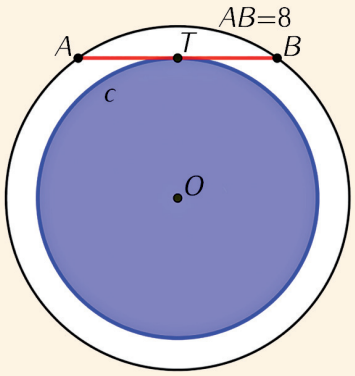


figuur 3

Nemen we een cilindrisch gat van d cm dan is de inhoud van het overblijfsel $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$ en weten we hoe de titel van Ionica's column had kunnen zijn. De keuze van een cilindrisch gat van 6 cm leidt tot een mooie uitkomst. Dat zal bij Gardner voor zijn keuze doorslaggevend geweest zijn. Ionica zelf spreekt van een werkelijk fantastisch raadsel.

Soortgelijke raadsels

Ik onderschrijf het, maar zijn er meer van dit soort opgaven? En jawel, een oude studievriend wees mij op het boek *Mathematical Curiosities* van de auteurs Alfred S. Posamemtier en Ingmar Lehmann.[3] Het gaat om Problem 62 op pagina 195.



figuur 4

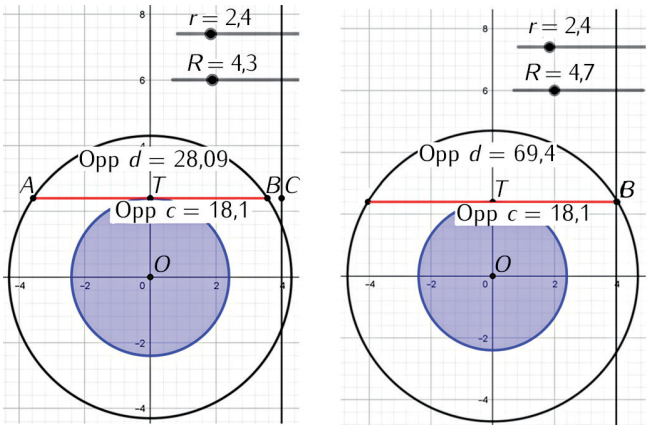
Zie figuur 4: AB is een koorde van de grootste van twee concentrische cirkels. AB raakt de kleinste cirkel in punt T. Bereken de oppervlakte van het witte gebied tussen de twee cirkels als $AB = 8$.

Je ziet dat de grootte van de stralen van de cirkels ontbreken. Punt O is het gemeenschappelijke middelpunt. Wil je leerlingen uitdagen, dan is deze opgave wellicht geschikter om mee te beginnen. Hoe gaan ze beginnen? Is het erg als leerlingen variabelen invoeren voor de stralen? Het is eigenlijk al heel mooi als ze dat uit zichzelf doen. Ze mogen wel nadenken over de uitkomst. Maar nu eerst de berekening.
De straal van de grotere cirkel noemen we R en de straal van de kleinere cirkel noemen we r. Berekenen we de oppervlakte van de ring en letten we op ΔOTB, die rechthoekig is, dan vinden we $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 16\pi$. En bij dit antwoord mag met leerlingen worden stilgestaan. Wat valt op bij deze uitkomst? De groottes van de cirkels doen er niet toe. Een belangrijke vraag kan zijn: 'heb je een beeld bij het getal 16π?' 'Hadden we de opgave ook anders kunnen aanpakken?'

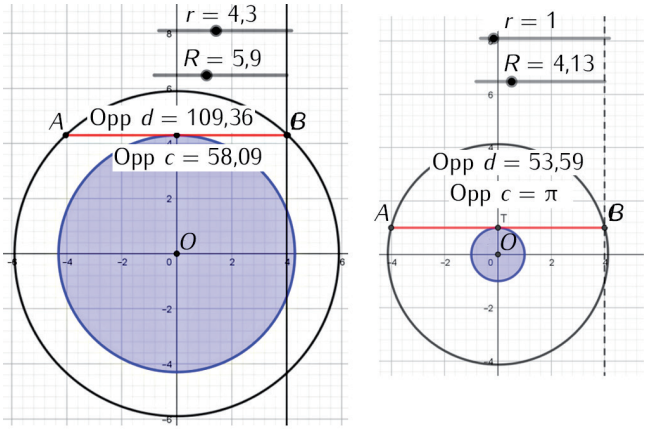
Een andere aanpak met GeoGebra

Wat is een variabele eigenlijk? Hoelang duurt het dat een leerling dat echt door heeft? De leerlingen zijn in de onderbouw al snel flink bezig met letterrekenen. Haakjes verdrijven en korter schrijven. Maar begrijpen ze wel wat ze aan het doen zijn? GeoGebra biedt weer uitkomst. Voor de twee cirkels, het gaat om de variabele stralen dus, kunnen we werken met twee schuifknoppen. Geef die schuifknoppen aan met 'r' en 'R'. En verder? >

— Teken cirkel c met de oorsprong O als middelpunt en straal r en concentrische cirkel d met straal R. Zorg hierbij dat $R > r$.
— Noem het hoogste punt van cirkel c punt T.
— Trek door punt T een lijn evenwijdig met de X-as.
— Noem de snijpunten van deze lijn met cirkel d, A en B.
— Teken lijn $x = 4$.
— Zorg met schuifknop 'R' dat punt B op lijn $x = 4$ komt te liggen zodat AB lengte 4 heeft.
— Schakel oppervlakteknop in voor de beide cirkels.
Zie de figuren 5 en 6.



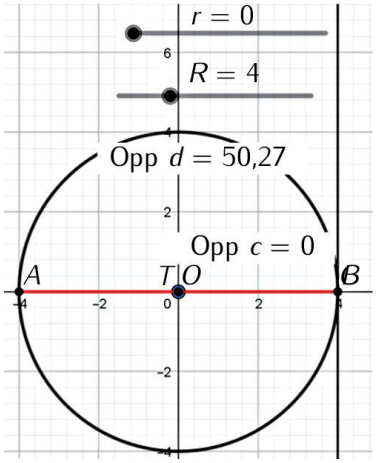
figuur 5 links: B en C vallen bijna samen, rechts: B en C vallen samen



figuur 6

Met het maken van een tabel zal de leerling waarschijnlijk een vermoeden krijgen over de oppervlakte van de ring.

En het zou dan zomaar kunnen dat de leerling voor cirkel d straal 4 neemt, waarbij cirkel c verdwijnt en de ring in cirkel d verandert waarvan de oppervlakte 16π is (afgerond 50,27), zie figuur 7.



figuur 7

Gelijkvormige ellipsen met samenvallende symmetrieassen

We bekijken de volgende analoge opdracht:

Zie figuur 8: AB is een koorde van de grootste van twee gelijkvormige 'concentrische' ellipsen. AB raakt de kleinste ellips in punt T. Bereken de oppervlakte van het witte gebied tussen de twee ellipsen als $AB = 8$.

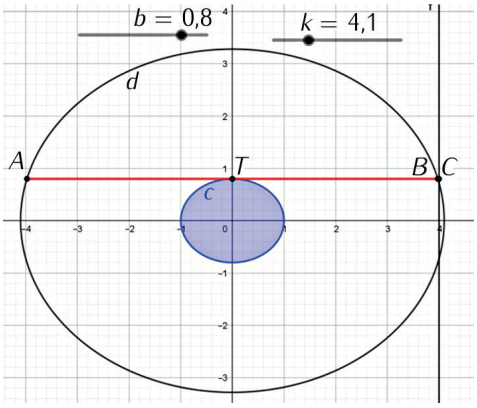
We kijken naar ellipsen waarvan de symmetrieassen samenvallen met het assenstelsel. Even onze kennis opfrissen. De oppervlakte van een ellips met afmetingen a en b is gelijk aan $\pi \cdot a \cdot b$. Als $a = b$, dan hebben we een cirkel met herkenbare oppervlakte $\pi \cdot a^2$.
Om het aantal variabelen te beperken nemen we ellipsen met de afmetingen 1 bij b (we kiezen dus voor a de waarde 1) en nemen $0 < b < 1$. De bijbehorende formule van kleinste ellips c kan dan zijn: $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Figuur	r	R	Opp. cirkel c	Opp. cirkel d	Opp. ring
5 r	2,4	4,7	18,1	69,4	51,3
6 l	4,3	5,9	58,09	109,36	51,27
6 r	1	4,1	π	53,59	50,45

met een oppervlakte die gelijk is aan $\pi \cdot b$. We nemen nu een gelijkvormige ellips waarbij de afmetingen k keer zo groot zijn ($k > 1$).

De bijbehorende formule: $\frac{(\frac{y}{k})^2}{b^2} + (\frac{x}{k})^2 = 1$ of $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = k^2$

en de oppervlakte is gelijk aan $\pi \cdot k \cdot bk = \pi \cdot b \cdot k^2$. We maken in GeoGebra twee schuifparameters voor b en k, zie figuur 8.

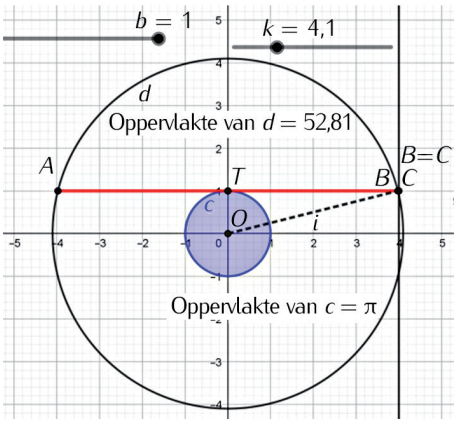


figuur 8

Merk op $T = (0, b)$ en $C = (4, b)$. Er moet gelden $AB = 8$.

We stellen schuifknop 'k' zo dat de punten B en C samenvallen. We vullen de coördinaten van punt B in vergelijking $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = k^2$ in en dat geeft $k^2 = 17$.

Oppervlakte ellipsring = $\pi b \cdot k^2 - \pi b = \pi b(k^2 - 1) = \pi b(17 - 1) = 16\pi b$. Maar helaas, deze waarde is geen constante. Dan kijken we niet naar het verschil van de oppervlaktes maar naar de verhouding. De verhouding van de oppervlaktes blijkt 17 te zijn. De afmetingen van ellips c speelt bij de verhouding geen rol. Als AB niet lengte 8 heeft maar m, dan kun je nagaan dat $k^2 = (\frac{1}{2}m)^2 + 1$. De verhouding van de oppervlaktes van de ellipsen hangt niet af van hun afmetingen maar wel van de lengte van koorde AB. De vraag is weer: 'kan de uitwerking nog eleganter?' We kijken naar een grensgeval en nemen $b = 1$, zie figuur 9. Nu hebben we weer twee cirkels c en d. We willen het verhoudingsgetal k^2 uitrekenen.



figuur 9

Maar nu geldt:

$$k^2 = \frac{\text{Opp}(d)}{\text{Opp}(c)} = \frac{\pi \cdot (OB)^2}{\pi \cdot 1^2} = (OB)^2 =$$
$$OT^2 + TB^2 = 1 + 16 = 17$$

Tot slot

Het boekje van Martin Gardner bevat ook uitwerkingen. Hij vertelt daarin dat hij de opgave voor het eerst tegenkwam in het boekje *Mathematical Nuts* van Samuel I. Jones. Een eigen uitgave, Nashville 1932. In dat boekje staat ook het probleem van de twee concentrische cirkels met de rakende koorde. John W. Campbell, Jr, uitgever van *Astounding Science Fiction* was een van de eersten met een elegante oplossing.

Noten

[1] Smeets, I (2018, 7 juli). Ionica zag een getal. *de Volkskrant,* katern *Sir Edmund.*

[2] Gardner, M. (1994). *My best mathematical & logic puzzles.* New York Dover Publications, Inc.

[3] Posamentier, A.S. & Lehman, I. (2014). *Mathematical Curiosities.* New York: Prometheus Books.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

Texas Instruments nieuws in 2020

Kom langs bij de Nationale Wiskunde Dagen

Gaat u op 31 januari naar de Nationale Wiskunde Dagen?

Kom dan zeker langs bij Texas Instruments! We horen graag uw ervaringen bij het gebruik van technologie in de klas, en vertellen u meer over onze programma's met voordelen voor leraren. Verder is 2020 het jaar van een aantal bijzondere vernieuwingen van de TI-Nspire™ CX II-T technologie. Die laten wij u dan zien!

Programmeernieuws

Een van de nieuwtjes is dat leraren en leerlingen die werken met deTI-Nspire™ CX II-T technologie gebruik kunnen gaan maken van object georiënteerd programmeren (OOP), in plaats van programmeren in TI Basic.

Bij de stand vertellen we u nog meer nieuws!

Bezoek ons op 31 januari of kijk op: **education.ti.com/nederland**

Texas Instruments

©2019 Texas Instruments

Bart Zevenhek

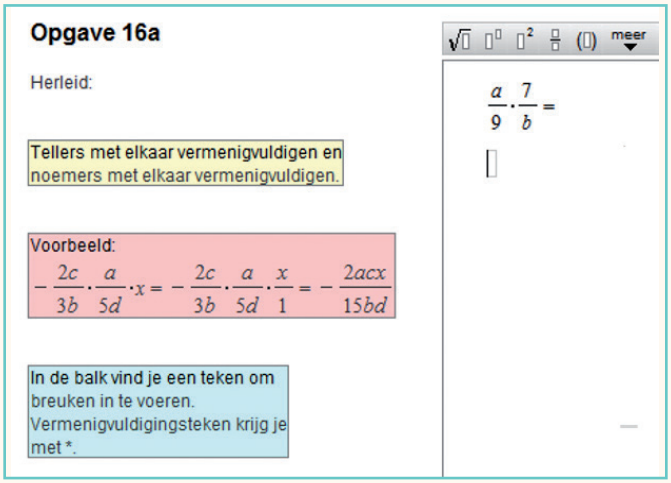
Algebra met DWO

Het Leraren Ontwikkel Fonds (LOF) gaf subsidie en begeleiding aan initiatieven van, voor en door leraren die bijdragen aan de ontwikkeling van het onderwijs, professionalisering van leraren en het versterken van de beroepsgroep leraren. Bart Zevenhek deed onderzoek naar het effect van het inzetten van de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO) in zijn klassen.

Inleiding

De afgelopen twee jaar is er op het Barlaeusgymnasium in Amsterdam een kleinschalig onderzoek gedaan naar het maken van het huiswerk voor de algebralessen op de computer. Er is gekeken naar het effect hiervan op de proefwerkresultaten en op de motivatie van de leerlingen. Er is gebruikgemaakt van de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO) die is ontwikkeld door het Freudenthal Instituut en die nu Numworx heet.[1] Het onderzoek is gesubsidieerd door het Leraren Ontwikkel Fonds (LOF).
De Digitale Wiskunde Omgeving is een programma speciaal ontwikkeld voor het onderwijs. Hiermee kunnen docenten opgaven en theorie digitaal aanbieden, feedback laten geven op gemaakte opgaven en toetsen afnemen. Bovendien biedt het programma de mogelijkheid om klassen in te voeren en zo te zien welke leerlingen de sommen hebben gemaakt en in hoeveel tijd. Gebruiksvriendelijk is het programma niet te noemen, maar dat komt ook door de vele mogelijkheden die het programma biedt. Zowel voor de gebruiker als voor de ontwikkelaar zijn er echter uitstekende handleidingen[2] op het internet beschikbaar.

In figuur 1 zie je een detail van een pagina in de docentenomgeving. Consequent heb ik bij iedere opgave kort de theorie weergegeven (geel), een voorbeeld (rood) en opmerkingen (groen). Het programma controleert iedere tussenstap en reageert met een rood kruisje, een geel vinkje (je moet nog verder...) of een groen krulletje. Vaak vond ik dit genoeg feedback, en soms heb ik uitgebreider commentaar toegevoegd. De leerlingen konden zowel op school als thuis binnen de DWO aan hun huiswerk werken.



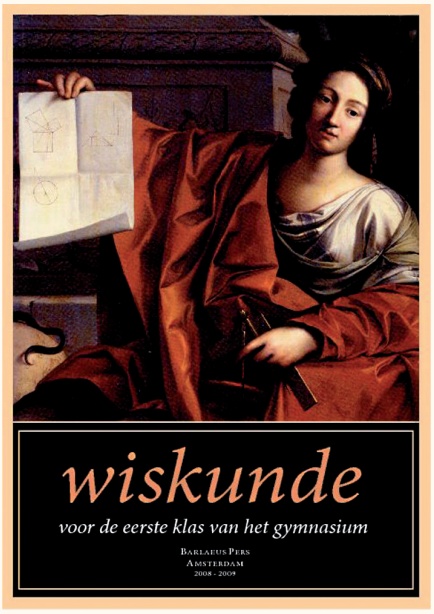
figuur 1 Detail van een scherm van de docentenomgeving [3]

Leraren Ontwikkel Fonds

Het Leraren Ontwikkel Fonds[4] maakt het voor docenten mogelijk om een idee te ontwikkelen om het onderwijs te verbeteren en uit te voeren. Er is hiervoor niet alleen een zak geld beschikbaar, maar docenten worden ook goed begeleid door coaches. Deelnemers worden erg gestimuleerd tot uitwisseling, onder het motto 'delen, delen, delen'. Ik deed een individuele aanvraag. De €18.000 die ik ervoor kreeg zette ik geheel in om mijn lestaken te verminderen (ter waarde van twee jaar lang een 15% aanstelling). Er is ook de mogelijkheid om als groep een aanvraag in te dienen. De deelname is me zeer goed bevallen en ik kan het iedereen aanraden. Het is goed dat er initiatieven komen vanuit de werkvloer, de docenten en niet van bovenaf, het ministerie, of van onderwijsontwikkelaars! >

De uitgangssituatie

In de eerste klas wordt door ons een zelfgeschreven boek gebruikt[5], zie figuur 2. De opzet is traditioneel en gericht op gymnasiumleerlingen. De algebra wordt 'droog' aangeboden, zonder context. Er is uitgegaan van klassikale uitleg en bespreking van het huiswerk. Er staan veel rijtjes sommen in om te oefenen. Het is ouderwets stampwerk dus!



figuur 2 Wiskundemethode ontwikkeld op het Barlaeusgymnasium in Amsterdam

Het bespreken van het huiswerk kost veel tijd. Sommige collega's projecteren de uitwerkingen en laten de leerlingen zelf nakijken. Ik geef en bespreek alle antwoorden mondeling. Leerlingen moeten met krulletjes en streepjes aangeven of hun uitwerking goed of fout was en in het laatste geval het goede antwoord noteren. Lastige onderdelen bespreek ik en doe ik voor op het bord. Tijdens het bespreken krijg ik een goed beeld van welke leerlingen hun huiswerk hebben gemaakt en met welke sommen zij problemen hebben. Al met al kost deze grondige aanpak minstens een kwartier per les. Na het bespreken van het huiswerk leg ik nieuwe theorie uit en gaan de leerlingen aan de slag met het huiswerk. Kortom: een stereotype wiskundeles. Een beetje saai, maar leerlingen varen wel bij de duidelijke structuur en vinden het vaak zelfs prettig.

De onderzoeksopzet

In de afgelopen jaren heb ik steeds vaker gedacht dat het maken en bespreken van het huiswerk voor algebra effectiever en efficiënter zou kunnen als gebruik gemaakt wordt van de computer. Een leerling kan dan onmiddellijke feedback krijgen, zodat er geen fouten in slijten en er geen lestijd meer nodig is om alle antwoorden te geven. Ik heb ervoor gekozen om twee eerste klassen om de beurt een hoofdstuk algebra met de computer te laten maken. Op deze manier kan ik zoveel mogelijk factoren min of meer constant houden, zoals de leerlingpopulatie en de docent. Beide klassen krijgen klassikaal de theorie voorgeschoteld. Alleen het maken en het bespreken van het huiswerk verschilt. De klas die met de computer aan de slag gaat, leg ik alleen de theorie uit en met hen bespreek ik de algemene vragen over het huiswerk, zodat zij vervolgens in het computerlokaal aan hun huiswerk kunnen gaan werken. Behalve het vergelijken van de proefwerkcijfers van de twee klassen ten opzichte van het gemiddelde van al hun cijfers, neem ik twee enquêtes af. Eentje direct na de periode waarin ze met de computer werken en eentje aan het eind van het jaar, zodat ze de twee werkwijzen kunnen vergelijken.

Voorbereiding

Twee schooljaren geleden ben ik begonnen met het invoeren van alle algebraopgaven van ons boek in de DWO. Een collega die dat jaar twee parallelklassen had, heeft toen meteen een klein vooronderzoekje uitgevoerd. Een van zijn twee klassen werkte met de computer, de andere klas zonder. De klas die met de computer had gewerkt, haalde bij het proefwerk gemiddeld een 7,3. Dat is een iets hoger gemiddelde dan de 6,8 van de andere klas. Gemiddeld over alle schriftelijke werken van dat jaar was de computerklas ook iets beter: 7,0 versus 6,8. Je zou dus kunnen stellen dat de computerklas 0,3 punt voordeel behaalde door het gebruik van de computer. Aangezien de standaarddeviatie in de buurt van de 1,1 ligt is dit voordeel niet significant te noemen. Toch gaf dit vooronderzoekje goede hoop. Het opstellen van de modules voor de twee hoofdstukken was een aardige klus.

> "Leerlingen gaven aan dat je het beter onthoudt en begrijpt als je de sommen met de hand opschrijft."

Mijn ervaringen

Vorig schooljaar had ik twee eerste klassen van elk 28 leerlingen waarmee ik aan de slag kon. Het werken achter de computer tijdens de les verliep niet helemaal vlekkeloos. Het bleek vaak dat leerlingen erg slecht hadden geluisterd bij de uitleg en helemaal niet keken naar de uitleg op de computer over de sommetjes. Ze vulden maar wat in, in de hoop dat het goed was. Dat was

het soms ook, maar als het fout was hadden ze geen idee waarom en moest ik persoonlijke uitleg verschaffen. De lessen ervoer ikzelf als chaotisch en rommelig, het was moeilijk om de regie in handen te houden.

De resultaten

Bij het eerste proefwerk scoorde de computerklas (A) 0,8 punt slechter[5]. Maar aangezien deze klas over het hele schooljaar ook 0,4 punt lager scoorde dan de B-klas, kun je zeggen dat het *nettonadeel* 0,4 punt was. Bij het tweede proefwerk zie je dat het *nettovoordeel* van het computergebruik voor de B-klas 0,7 punt was.
De enquête gaf een eenduidiger, en helaas negatief, beeld. Leerlingen gaven aan dat je het beter onthoudt en begrijpt als je de sommen met de hand opschrijft. Met de computer is het meer gokken. Wel merkten ze op dat het prettig is dat je meteen ziet wanneer je het fout doet. Er zou dan meer uitleg moeten komen. Enkelen vonden het leuk om met de computer te werken, maar velen merkten op dat het niet fijn is en dat het een heel gedoe is, stressvol en demotiverend is.

Conclusies

De behaalde cijfers geven geen aanleiding voor een conclusie voor of tegen de inzet van de computer. Het merkwaardige effect van een nadeel bij DWO-gebruik van klas A, tegenover een voordelig effect bij klas B is, afgezien van een mogelijk toeval, op enkele manieren te verklaren.
In de eerste plaats verschilde de werkhouding van de twee klassen. In het begin van het schooljaar was de A-klas wat beter dan de B-klas. In de loop van het jaar ontpopte de A-klas zich echter als een drukke en ongeconcentreerde klas die matig werkte. Hierdoor was de A-klas gevoeliger voor de verminderde regie die ik had bij het werken met de computer.
In de tweede plaats speelde de volgorde de A-klas parten. Doordat ze het eerste hoofdstuk slecht beheersten kwamen ze bij het tweede hoofdstuk, dat een vervolg was op het eerste, veel problemen tegen.
In de derde plaats was ik zelf bij de B-klas meer thuis in het programma en ervarener in het geven van de lessen ermee. Ik wist bijvoorbeeld beter gebruik te maken van de mogelijkheid om de verrichtingen van de leerlingen via de site te volgen, zodat ik hun erop kon aanspreken als ze achterliepen.
De antwoorden op de enquêtes spreken duidelijker taal. Alhoewel de B-klas iets minder negatief was dan de A-klas, die de slechte resultaten toeschreef aan het computergebruik, was de algemene mening tegen het gebruik van de computer, in het voordeel van de traditionele manier.
Voor mij en mijn collega's was de conclusie, helaas, dat we DWO niet gaan gebruiken of er verder mee zullen experimenteren.

Reflectie

Op het onderzoek valt vanzelfsprekend veel aan te merken. In de eerste plaats is het veel te kleinschalig om algemene conclusies te trekken. De conclusie kan ik voor mezelf rechtvaardigen, maar zou ik niet naar andere docenten of scholen willen doortrekken. Ongetwijfeld had ik ook het invoeren van de opgaven in DWO beter kunnen uitvoeren. Meer en gedetailleerder feedback geven en uitleggen wat er fout ging. De lessen had ik effectiever kunnen maken, waarbij meer ervaring vast geholpen zou hebben. Te weinig heb ik ook gebruik gemaakt van de mogelijkheid om de verrichtingen van de individuele leerling in te zien. De enige algemene conclusie die ik zou willen trekken is dat het effect van de inzet van computers bij het maken van het huiswerk sterk afhangt van het type klas en van de docent.
Voor alles ben ik me gaan realiseren hoe moeilijk didactisch onderzoek is. Het is onmogelijk om met aselecte groepen te werken en tegelijk voldoende factoren, de docent, de school e.d., constant te houden.

Noten

[1] De naam DWO en de bijbehorende site zijn inmiddels verouderd en vervangen door *https://www.numworx.nl/*.
[2] Handleidingen DWO: *https://www.dwo.nl/site/gettingstarted.html* *http://www.fisme.uu.nl/wisweb/dwo/DWO_handleidingen/2013-03-28handleiding_auteursomgeving.pdf*
[3] Digitale *Euclides*: klik op afbeelding voor een leesbare vergroting. *Euclides*: kijk op de website voor een leesbare vergroting
[4] Zie *https://www.lerarenontwikkelfonds.nl*
[5] Als je geïnteresseerd bent in de spreadsheets met alle cijfergegevens en enquêteresultaten, dan kun je deze vinden op de site van het Barlaeus: *https://www.barlaeus.nl/iedereen/vakken-uitgebreid/wiskunde/*

Over de auteur

Bart Zevenhek is al vele jaren docent wiskunde op het Barlaeusgymnasium in Amsterdam.
E-mailadres: *BartZevenhek@gmail.com*

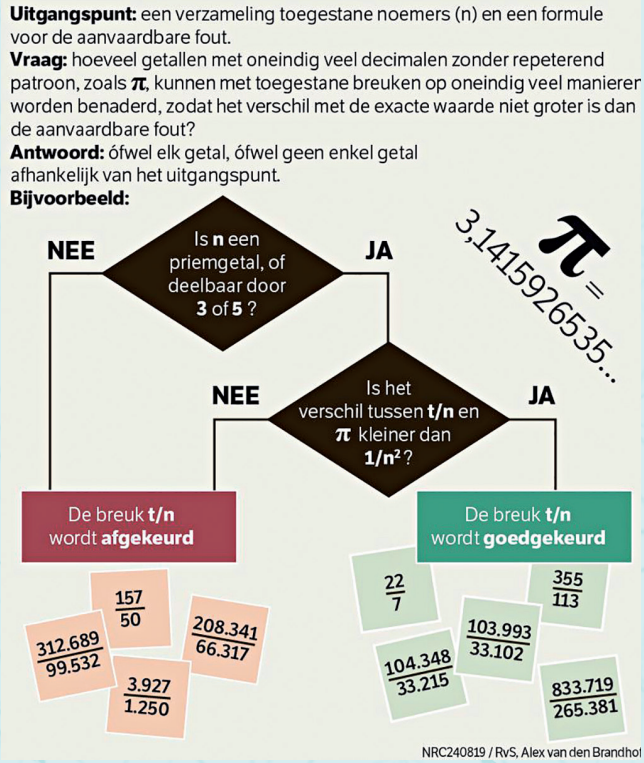
Wis en Waarachtig

Den Bosch wint wiskundetoernooi

Het 28e wiskundetoernooi van de Radboud Universiteit Nijmegen is eind september gewonnen door het Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch. Net als de afgelopen jaren bestond het toernooi uit twee delen. In de ochtend de Estafette, waarbij de leerlingen zo snel mogelijk opgaven moesten maken om maximaal 500 punten binnen te halen. Na de lunch volgde de zogenaamde Sum of Us, waarin altijd een maatschappelijk relevant thema centraal staat. Dit jaar was het thema ruimtevaart.
Getuige de scores die behaald werden waren de opgaven dit jaar vrij lastig. Het team uit Den Bosch en het team van het Huygenslyceum uit Eindhoven stonden na de Estafette op de eerste plaats, op de voet gevolgd door het Openbaar Lyceum uit Zeist. Bij de Sum of Us behaalden de Bosschenaren, als enig team 300 punten en toonden zich daarmee een verdiende winnaar. Zie voor de volledige uitslag, opgaven en antwoorden:
Bron: https://www.ru.nl/wiskundetoernooi/editie-2019/editie-2019/

Goede benaderingen van irrationale getallen

Waarschijnlijk heb je vroeger als kind wel eens gerekend met 22/7 als benadering voor π. Een mooie benadering: kleine getallen en nauwkeurig tot op twee cijfers achter de komma. Een iets betere benadering is 355/113. Zes correcte decimalen en ook weer kleine getallen. Een derde benadering, 104348/33215, geeft maar liefst negen correcte decimalen. Alle drie benaderingen waarbij het aantal cijfers van de noemer flink kleiner is dan het aantal correcte decimalen.
Dimitris Koukoulopoulos (universiteit van Montreal) en James Maynard (universiteit van Oxford) hebben onderzoek gedaan naar eenvoudige breuken die irrationale getallen goed benaderen. Bij de beoordeling of een benadering goed is, speelt de grootte van de noemer een essentiële rol: 22/7 en 157/50 benaderen beide π tot op twee decimalen nauwkeurig, maar vanwege de kleinere noemer zullen wiskundigen de benadering 22/7 prefereren. Wil je uitmaken welke rationale benadering door de beugel kan en welke niet, dan moet je eerst afspreken wat je een goede benadering vindt. Je kunt bijvoorbeeld afspreken dat een benadering goed is als het verschil met de werkelijke waarde niet groter is dan 1 gedeeld door het kwadraat van de noemer. 22/7 is dan een goede



benadering. Ben je strenger, dan eis je bijvoorbeeld dat het verschil kleiner moet zijn dan 1 gedeeld door de vierde macht van de noemer. En dan is 22/7 niet goed: het verschil met π is ongeveer 0,00126 en dat is groter dan 0,0004, de vierde macht van 1/7.
In het onderzoek naar rationale benaderingen leggen wiskundigen beperkingen op aan de noemers: die moeten niet al te groot zijn en om allerlei wiskundig interessante redenen eist men ook nog dat bepaalde getallen verboden zijn. Hoe meer beperkingen je oplegt, des te moeilijker wordt het om goede benaderingen te vinden. Al in de jaren '40 van de vorige eeuw was bekend dat hoe je de voorwaarden voor de noemers en de aanvaardbare fouten ook kiest, ofwel bijna élk getal, ofwel bijna geen énkel getal op oneindig veel manieren goed benaderbaar is. Het is alleen moeilijk om uit te maken met welk van die twee gevallen je van doen hebt. In 1941 publiceerden Duffin en Schaeffer een artikel waarin ze met behulp van een formule een criterium beschreven dat daarover uitsluitsel geeft.

Bijna tachtig jaar later slaagden Koukoulopoulos en Maynard er in om na twee jaar werken aan te tonen dat Duffin en Schaeffer gelijk hadden.
Bron: NRC 24 en 25 augustus 2019

Ook 42 is som van drie derde machten

In *Euclides* nummer 7 schreven we dat met het vinden van drie derde machten met som 33 van de getallen onder de 100 alleen van het getal 42 nog niet bekend was of deze ook de som van drie derde machten zou zijn. Maar nu is er, na een slordige miljoen uur parallelle rekentijd, wel degelijk een antwoord.
Half september publiceerden Andrew Sutherland van het Massachussets Institute of Technology en Andrew Booker van Bristol University dat ook 42 is te schrijven als som van drie derde machten:

$42 = (-80538738812075974)^3 + 80435758145817515^3 + 12602123297335631^3$

Bron: https://www.nemokennislink.nl

> "Er is sowieso maar één wiskunde: als je het dekoloniseert krijg je niet opeens een andere wiskunde"

Valt wiskunde te dekoloniseren?

Bij1-politica Sylvana Simons sprak in september in de Amsterdamse gemeenteraad haar wens uit om de wiskunde en exacte vakken in ons onderwijs te dekoloniseren. Er volgden veel reacties, o.a. in het radioprogramma *Dr. Kelder en Co* op NPO Radio 1, gepresenteerd door Jort Kelder.
Dr. Kelder vroeg zich af wat dekoloniseren inhoudt en belde met prof. dr. Jan Hogendijk, hoogleraar Geschiedenis van de wiskunde aan de Universiteit Utrecht. 'Ik begrijp helemaal niet wat mevrouw Simons daarmee bedoelt. Misschien dat ze denkt dat er iets met de leerstof aan de hand is. Er zijn veel invloeden van andere culturen dan de westerse op wiskunde die wij tegenwoordig gebruiken. Bijvoorbeeld de cijfers die wij gebruiken. Het decimaal positiestelsel is uitgevonden in India; de vorm van de cijfers is West-Arabisch; de algebra heeft een hele oude geschiedenis en is waarschijnlijk begonnen in het oude Babylon....'
'Meer diversiteit dan in de wiskunde, bestaat er dus eigenlijk niet', concludeerde dr. Kelder.
Hogendijk: 'Het enige wat ik erbij kan bedenken is dat je wiskunde van een culturele context kan voorzien. Wat er te dekoloniseren is, begrijp ik niet helemaal. Er is sowieso maar één wiskunde: als je het dekoloniseert krijg je niet opeens een andere wiskunde.'
Bron: https://www.nporadio1.nl

> "Het is moeilijk om geschikte en gekwalificeerde kandidaten te vinden, of überhaupt kandidaten."

Lerarentekort zorgt voor lesuitval

Zeker tientallen Nederlandse middelbare scholen kampen met lesuitval vanwege een gebrek aan leraren, blijkt uit onderzoek van NU.nl onder 149 schoolleiders. Eén op de drie deelnemende schoolleiders had op het moment dat de vragenlijst werd ingevuld nog onvervulde vacatures. En van de schoolleiders die geen vacatures hadden, verwachtte ruim 70 procent dat wanneer er in het komende jaar vacatures bij sommige vakken ontstaan, ze lastig in te vullen zullen zijn.

'Het is moeilijk om geschikte en gekwalificeerde kandidaten te vinden, of überhaupt kandidaten', aldus een schoolleiders. Uit de vragenlijst komt naar voren dat vooral vakken als wiskunde, natuurkunde en Duits kampen met een lerarentekort. Bij deze vakken is ook volgens de VO-raad al 'geruime tijd' sprake van een lerarentekort, dit zijn de zogenoemde tekortvakken.
Bron: https://www.nu.nl

Wereldwiskunde Fonds

Betty Straatman

Lesmateriaal in Kenia

Vanaf 2003 ben ik betrokken bij de sponsoring van twee Primary Schools in Kenia. Eerst als begeleider van een groep leerlingen van het Adelbert College uit Wassenaar op hun reis naar Kenia. De Keniaanse scholen werden gesponsord door het Adelbert College. We hebben toen met een bijdrage van het Wereldwiskunde Fonds materiaal meegenomen vanuit Nederland, zoals bordmateriaal en ruimtefiguren, en nog wat later, voor een startende middelbare school, rekenmachines en geodriehoeken. Na een aantal jaren reizen met leerlingen ben ik verknocht geraakt aan Kenia. Ieder jaar staat er wel een Keniareis op de agenda en bezoek ik een aantal vaste scholen, twee Primary Schools en een Secondary School.

> "De helft van de dag was er geen leraar beschikbaar en werd van de leerlingen verwacht dat ze zelfstandig werkten."

Verschillen

Opvallend was dat de lesomstandigheden wel heel veel verschillen van ons schoolleven. Volle klassen, één boek per twee, drie of vier leerlingen, opgaven voorgeschreven op het bord, kleine stukjes krijt, een vieze doek om het schoolbord schoon te maken, maar ook: enthousiaste leerlingen. De helft van de dag was er geen leraar beschikbaar en werd van de leerlingen verwacht dat ze zelfstandig werkten.
In Kenia worden aantekeningen in een vochtig schriftje gemaakt, zittend op de grond, zo goed en zo kwaad als het kan. Creatieve leerkrachten hangen ook zelfgemaakte posters in de klassen met de belangrijkste leerstof. Wiskundige figuren worden op de buitenmuren geschilderd zodat men het na school nog in het hoofd kan stampen. Het klassikaal instampen, op de bekende Afrikaanse zingende toon, is favoriet.
Het viel mij verder op dat de leerlingen van de lagere school al vanaf de eerste klas al wat wiskundeonderwijs krijgen. De laatste jaren heb ik dat hier in Nederland ook gezien. Jonge kinderen kunnen de eenvoudige wiskundige vormen al snel met de juiste namen benoemen.

Belangrijke formules voor wiskunde, biologie en scheikunde staan als wandversiering op de buitenmuren. Niks geen formuleboekjes

Op de lagere school leren de kinderen al eenvoudige wiskundige vormen

Resultaten

De leefomstandigheden van de leerlingen verschilt heel veel van hier. Gebrek aan eten, water en ziektes zoals malaria, zorgen nogal voor uitval. Zeker is dat de leerlingen en docenten heel blij zijn met onze steun. Boeken zijn een onmisbaar onderdeel in het lesgeven en leren van de wiskunde. De eerste resultaten in het gebruik zijn zichtbaar. Op de Mahuruni Primary School, die aan het eind van schooljaar 2016-2017 boeken ontving van het WWF, is aan het gemiddelde voor de wiskunde eindscores (KCPE; een soort Cito-score) een duidelijke vooruitgang te zien. Er kan nu meer tijd besteed worden aan uitleg, de leerlingen hoeven de opgaven niet eerst van het bord over te nemen voordat ze aan het werk kunnen en de leerkracht

Gesponsord sinds oktober 2016			Gesponsord sinds 2017			Nog geen sponsoring		
Mahuruni			Menzamwenye			Dzombo niet gesponsord		
Jaar	Score KCPE	Gemiddeld aantal boeken	Jaar	Score KCPE	Gemiddeld aantal boeken	Jaar	Score KCPE	Gemiddeld aantal boeken
2015	51,86	1 op 4						
2016	53,19	1 op 3	2016	54,55	1 op 3	2016	54,68	1 op 2
2017	54,01	1 op 3	2017	65,17	1 op 2	2017	50,23	1 op 4
2018	60,33	1 op 2	2018	52,39	1 op 3	2018	51,4	1 op 3

kan leerlingen meer individueel helpen en de betere leerling kan zelfstandig de verdiepingsopgaven maken. Op de tweede school die ik regelmatig bezoek zijn de boeken later gekomen en daar was de verbetering nog niet zo duidelijk zichtbaar, maar daar wordt hard aan gewerkt door in het weekend extra lessen te geven.
De door het WWF gesponsorde scholen zijn de Mahuruni en de Menzamwenye. Beide scholen liggen zo'n anderhalf uur rijden van Mombasa. Er is sinds twee jaar beperkt internet op school. De kinderen wonen in lemen hutten. Vanaf begin van deze eeuw zijn de meeste schoolgebouwen van steen. Deels gebouwd door de overheid maar het merendeel door sponsoren. Een tweetal lokalen zijn voorzien van glas om er wat oude computers neer te zetten. Vorig jaar heeft de regering ook wat tablets en een beamer geplaatst. Toen we er in januari 2019 kwamen, hebben we die gedemonstreerd maar

er zullen eerst wat mensen een cursus moeten krijgen voordat ze efficiënt gebruikt kunnen worden. Om te laten zien dat onze steun, vooral door middel van het leveren van lesboeken, mee kan helpen volgen wat cijfers in de tabel bovenaan deze bladzijde.

In 2019 zijn er door meer stichtingen in Kenia aanvragen gedaan voor lesmateriaal, die het WWF heeft kunnen honoreren. Dit was mogelijk dankzij de bijdrages bij de jaarlijkse contributie, de boekenveilingen en de verkoop op de Wiskundedagen in februari en de jaarlijkse NVvW studiedag. Hopelijk blijven jullie ons massaal steunen!

Over de auteur

Betty Straatman was tot aan haar pensioen docent wiskunde op het Adelbert College te Wassenaar en is lid van de werkgroep Wereldwiskunde Fonds.

THE FUTURE IS HERE

HP Prime

Grafische Rekenmachine

Voordelen van de HP Prime

- Touchscreen; nooit meer gedoe met het instellen van de window
- Supersnelle processor; nooit meer wachten tot een grafiek getekend is
- Ingebouwde handleiding; je kunt direct aan de slag!

En de prijs?
Die is hetzelfde als die van de concurrent!

Kom langs bij onze stand tijdens **de Nationale Wiskunde Dagen** en maak kans op mooie prijzen!

www.hp-prime.nl

Puzzel 95-3

Alleen positieve cijfers tellen mee

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

In deze puzzel gaan we zoeken naar bepaalde positieve gehele getallen met een gegeven aantal cijfers die groter zijn dan 0. En dat doen we in verschillende talstelsels.
We kiezen een talstelsel met grondtal t.
We zullen getallen die zijn genoteerd in een talstelsel met een grondtal $t \neq 10$ onderstrepen, bijvoorbeeld als $t = 7$ dan is $18 = \underline{24}$
We kiezen ook positieve gehele getallen a en c.
De functie $f_t(n)$ = aantal cijfers ongelijk 0 van n, waarbij n is genoteerd in het t-tallig stelsel.
Als bijvoorbeeld $t = 10$ en $n = 105$, dan is $f_t(105) = 2$ (want 105 heeft 2 cijfers ongelijk 0).
We gaan op zoek naar een geheel getal b, zo dat $f_t(a \times b) = c$.

Een voorbeeld: $t = 3$, $a = 46 = \underline{1201}$ en $c = 5$.
We zoeken een b zo, dat $f_3(a \times b) = 5$.
De kleinste is $b = 5 = \underline{12}$
Dan is $f_3(a \times b) = f_3(230) = f_3(\underline{22112}) = 5$.
Met name opgave 1a is ervoor bedoeld om het probleem en de oplossingen onder de knie te krijgen.

Opgave 1a: Bepaal de kleinste b voor $t = 2$, met $a = 15$ en $c = 4$, 5, 6 en 7.
Opgave 1b: Stel een algemene formule/recept op voor b als functie van c met $t = 2$ en $a = 15$.
Bij opgave 1b hoeft dat niet per se de kleinste oplossing te zijn. Het mag wel, dat is nog mooier, maar levert geen extra punten op voor de ladder.
Opgave 1c: Leg uit of het ook mogelijk is om oplossingen voor b te vinden als $c = 2$ of $c = 3$.

Opgave 2: Bepaal voor $t = 10$ de kleinste a waarvoor er oplossingen zijn bij een $c < f_t(a)$.

Je kunt je natuurlijk afvragen of voor gegeven t en a er voor alle $c \geqslant f_t(a)$ een oplossing bestaat. Dat blijkt wel zo te zijn, maar om een net bewijs op te schrijven is zeker niet eenvoudig. Dat vragen we dan ook niet, maar wie er zin in heeft kan het natuurlijk proberen. Maar nu zoeken we het alleen voor bepaalde combinaties van a en t.

Opgave 3a: Toon aan dat als $a \leqslant t$ er voor elke $c \geqslant f_t(a)$ een b bestaat zodat $f_t(a \times b) = c$.
Opgave 3b: Idem voor het geval $a = t + 1$.
Opgave 3c: Zoek nog meer combinaties van t en a waarbij je kunt bewijzen dat bij elke $c \geqslant f_t(a)$ een b te vinden is zodat $f_t(a \times b) = c$, en geef dat bewijs.
Dit is een open vraag met veel mogelijkheden. We zullen de beoordeling laten afhangen van de mooiste en meest volledige oplossing die we krijgen toegestuurd.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.
Er zijn 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij jouw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken.
De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen!
Inzendingen moeten uiterlijk op 28 januari 2020 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 95-1:

vakbladeuclides.nl/953puzzel

Voor de volledige ladderstand en uitwerkingen van eerdere puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

Top 10 ladderstand

Tot en met puzzel 95-1		
1	H. Bakker	151
2	M. Rijnierse	141
3	R. Stolwijk	122
4	F. Göbel	114
5	B. Groot	108
6	J. Remijn	81
7	H. Huisman	81
8	J. Meerhof	64
9	L. Cizkova	61
10	H. Linders	60

We feliciteren Harm Bakker van harte met de ladderprijs.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2020

Za 11/01 — UTRECHT
Wintersymposium: Wiskunde in weer, klimaat en milieu
Organisatie: KWG

20/01 30/01 — LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Vr 31/01 Za 01/02 — NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

Wo 12/02 — LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

Vr 13/03 — 12 NEDERLANDSE UNIVERSTEITEN
Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Do 17/03 — LANDELIJK
Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 95

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	28 januari 2020	18 november 2019
5	17 maart 2020	06 januari 2020
6	05 mei 2020	02 maart 2020
7	23 juni 2020	27 april 2020

CASIO

Casio fx-CG50

Voor uw onderwijsbehoeften, nu en in de toekomst!

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

De perfecte rekenmachine met emulator!

De emulator software werkt ook in combinatie met laptop of digitaal schoolbord.

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

GETAL & RUIMTE

NIEUW!
Getal & Ruimte 12e editie voor de Tweede Fase

- Optimaal differentiëren met leerroutes in boek en onlineomgeving
- Perfecte mix van boek en digitaal lesmateriaal
- Wiskundig denken van de leerling maximaal stimuleren
- Introductie van de statistische cyclus, met meer aandacht voor de kwalitatieve aspecten van statistiek in wiskunde A
- Oefentoetsen met studieadvies

Vraag gratis beoordelingsmateriaal aan op
getalenruimte.noordhoff.nl/tweedefase

De beste voorbereiding op het examen!

Noordhoff

Brengt je verder