Olympiadepuzzel

Euclides 94 nummer 7

Delen met rest

Opgave

Jan heeft een geheel getal van 5 cijfers in zijn hoofd (dus tussen de 10.000 en de 99.999). Dit getal heeft de volgende bijzondere eigenschappen als je gaat delen met rest:

- Als je het getal deelt door 20, houd je rest 18 over;
- Deel je het getal juist door 18, dan houd je rest 16 over;
- Deel je het getal juist door 16, dan houd je rest 14 over;
- Deel je het getal juist door 14, dan houd je rest 12 over;
- Deel je het getal juist door 12, dan houd je rest 10 over;
- Deel je het getal juist door 10, dan houd je rest 8 over;
- Maar als je het deelt door 22, dan gaat de deling wel op (rest 0).

Welk getal heeft Jan in zijn hoofd?

Uitwerking

Noem het getal van Jan N. Had Jan het getal $N+2$ in gedachten gehad, dan was er steeds 2 meer rest en waren die eerste zes delingen-met-rest wel op gegaan. We laten dit zien voor de eerste deling-met-rest; de andere vijf gaan analoog. Op grond van de eerste bewering geldt $N = 20q + 18$ voor zeker (geheel) quotiënt q. Hieruit volgt dat $N + 2 = 20q + 20 = 20(q + 1)$. Maar dat betekent dat $N + 2$ deelbaar is door 20.

Kortom, $N + 2$ is deelbaar door 20, 18, 16, 14, 12 en 10. Maar dan moet $N + 2$ ook deelbaar zijn door het kleinste gemene veelvoud van deze zes getallen. Dat is $2 \cdot \text{kgv}(5, 6, 7, 8, 9, 10) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$. Dus $N + 2 = 5040 \cdot k$, oftewel $N = 5040k - 2$.

Voor $k = 1$ krijgen we $N = 5038$ en dat is deelbaar door 22. We schrijven daarom $N = 5040k - 2 = 5040(k-1) + 5038$, waaruit volgt dat ook $5040(k-1)$ deelbaar moet zijn door 22. Nu is $5040(k-1)$ sowieso deelbaar door 2. Omdat 5040 niet deelbaar is door het priemgetal 11, moet dan $k-1$ deelbaar zijn door 11. Dus $k = 1$ of $k = 12$ of $k = 23$ of $\ldots$.

Het geval $k = 1$ geeft $N = 5038$, dat aan alle deelbaarheidseisen voldoet, maar te klein is. Het geval $k = 23$ geeft $N = 115918$, maar dat is juist te groot. Grotere k leiden tot nog grotere N, dus voldoen zeker ook niet. Er blijft maar één geval over en dat is $k = 12$. Dat geeft $N = 60478$, dat niet alleen aan de juiste deelbaarheids/rest-eigenschappen voldoet, maar ook het juiste aantal cijfers bevat. We concluderen dat Jan het getal 60478 in gedachten had.

Inzenders met een juiste uitwerking

Wim Bökkerink, Wilma Broere, Gert Hoogeboom, Hans Huisman, William van Ingen, Henk Jansen, Hans Linders, Jan Meerhof, Gerhard Meinen, Jos Remijn, Jack Schilder, Ruben Schuurman, Ruud Stolwijk, Monica Woldinga.

Winnaar van de cadeaubon

Gert Hoogeboom.