Rob van Oord
*Waddinxveen*
*robvanoord@tiscali.nl*

**Evenement** 25ste Nationale Wiskunde Dagen

# Kop of munt? Groep of individu? Knots of Lint?

**Op vrijdag 1 februari en zaterdag 2 februari vonden voor de 25ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Omdat de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout niet beschikbaar was vanwege een verbouwing werd voor deze jubileumeditie uitgeweken naar de Koningshof in Veldhoven. Een persoonlijke impressie van Rob van Oord.**

Hoe verzin je een pakkende titel bij een verslag van de 25ste Nationale Wiskunde Dagen? Het design op de achterkant van het FUNRUN-T-shirt suggereert $1+3+5+7+9 = 25$ (hardlopers, zie foto). Daarmee zou ik $\sum_0^4 2n+1$ als titel kunnen nemen. Of: 25 jaar wiskundedagen, en het worden er steeds meer! Deze werden het niet.

De echte reden van de titel is dat er drie mensen op de NWD waren die ze alle 25 hebben meegemaakt: Peter Kop, Job van de Groep en Hans van Lint.

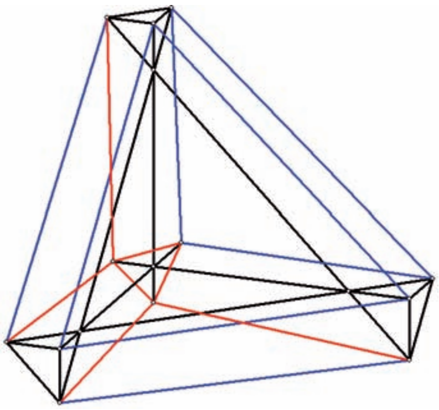
De start van deze NWD werd verzorgd door de oprichter van de NWD, Jan de Lange. Op de voor hem typerende manier, vol anekdotes en verrassende kwinkslagen werd duidelijk waarom deze NWD in Veldhoven plaatsvonden en niet in Noordwijkerhout. Wie naar het noorden zoekt met zijn iPhone, krijgt een andere richting dan wie zoals een echte padvinder een kompas gebruikt. Het magnetische noorden heeft te maken met een voortdurend bewegende declinatie ten opzichte van het geografische noorden. Dit jaar is die van $1°34'$ in 1994 naar $1°09'$, dus 25 minuten, opgeschoven. Dus is het logisch dat we nu na 25 jaar naar Veldhoven zijn doorgeschoven.

Vervolgens kregen we in een betoog van Sjoerd Verduyn Lunel over zijn onderzoek aan de Universiteit Utrecht en het Radboud UMC naar het kunnen vaststellen of een patiënt lijdt aan astma of aan COPD. Hierbij wordt een (vrij nieuwe) techniek van wiskundige analyse van dynamische data gebruikt. Het gaat hierbij niet om het oplossen van een vergelijking, maar om het stellen van de juiste vraag. Longartsen hebben door metingen van trillingen in de longen veel data gegenereerd. Het blijkt dat het gebruik van gemiddelden geen verschil laat zien tussen beide soorten patiënten. Maar als je groepjes data bij elkaar neemt dan kun je via een plaatje van een kansverdeling een attractor zoeken. Die blijkt verschillend bij beide longaandoeningen. Er verschenen bekende plaatjes met bifurcaties op het scherm zoals die van de Lorenz-attractor, die voldoet aan de logistische vergelijking $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ met $0<x<1$ en $2{,}4<r<4{,}0$. Kortom uit een chaos aan data kun je met wiskundige analyse van dynamische systemen toch iets zinvols uit die data halen.

FUNRUN-T-shirt van de 25ste NWD

## Cake en pizza snijden

Na de lunch mocht ik aanschuiven bij Bert Wikkerink over 'de driehoek van getallen'. Naast even, oneven, priemgetallen, kwadraten, driehoeksgetallen en volmaakte getallen wist ik niet veel andere soorten. Maar met de aanpak van Bert kwamen we op rijtjes getallen die je krijgt als je een cake, pizza, banketstaaf met een rechte snee in steeds meer stukken verdeelt. Bij het snijden van een cake komt het neer op in hoeveel delen je de ruimte verdeelt met telkens een vlak erbij dat niet parallel is met de gekozen vlakken en ook niet door een al bestaand punt gaat. Nul vlakken geeft nog



**Figuur 1** Vier vlakken verdelen de ruimte.

geen delen, dus één ruimte-‘deel’, één vlak verdeelt de ruimte in twee delen, een tweede erbij maakt vier delen, een derde geeft acht ruimtedelen, denk aan de drie vlakken $Oxy$, $Oxz$ en $Oyz$. Drie (niet evenwijdige) vlakken snijden elkaar wel in één punt, in dit geval de oorsprong. Maar het vierde vlak mag dan niet door $O$ gaan. Rijtje $1, 2, 4, 8, \ldots$ Je zou $16$ verwachten als volgende getal in de rij, maar het volgende getal is $15$. Met behulp van een ruimtelijk model kun je die $15$ vlakdelen wel zien. Zie Figuur 1. Bert had voor ons een kartonnen model van deze figuur gemaakt. Daarmee kun je snappen hoe de $15$ delen rondom die vier vlakken zitten. Allereerst de piramide (holte) gevormd door de coördinaatvlakken en het schuine vlak $(1)$. Dan op elke zijde een naar buiten galmend volume $(4)$. Op elke ribbe zie je een trogvormig volumedeel $(6)$. Ten slotte vanuit elk hoekpunt nog een driehoekige toeter $(4)$.Bedenk dat de piramide begrensd is en dat de volumes aan de buitenkant eigenlijk oneindig ver uitdijen. Dus totaal $1+4+6+4=15$ volumedelen. Een tabel met $n=$ aantal keer snijden en het aantal volumedelen $(v)$ leidt tot de volgende rij $(n,v)$: $(0,1)\,(1,2)\,(2,4)\,(3,8)\,(4,15)\,(5,26)\ldots$ Bij een vijfde vlak ontstaan er nieuwe holtes maar ook nieuwe oneindige volumes aan de buitenkant. Ik moet nog eens gaan nadenken hoe ik dit met redeneren, eventueel aan de handvan een kartonnen model kan begrijpen.

| | |
|---|---|
| 1 | $0+0+0+1=1$ |
| 1 1 | $0+0+1+1=2$ |
| 1 2 1 | $0+1+2+1=4$ |
| 1 3 3 1 | $1+3+3+1=8$ |
| 1 4 6 4 1 | $1+4+6+4=15$ |
| 1 5 10 10 5 1 | $1+5+10+10=26$ |
| ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ | |

**Tabel 1** De rij van de cakegetallen.

De getallen vinden we terug in de driehoek van Pascal. Als je van elke horizontale rij uit de rij de eerste vier optelt krijg je precies de cakegetallen. Neem in de eerste drie rijen voor de getallen die er niet staan even $0$. Zie Tabel 1. Neem nu een aantal maal de verschilrij:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nummer | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ⋯ |
| cakegetal | 1 | 2 | 4 | 8 | 15 | 26 | ⋯ |
| eerste verschil | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | ⋯ | |
| tweede verschil | 1 | 2 | 3 | 4 | ⋯ | | |
| derde verschil | 1 | 1 | 1 | ⋯ | | | |

Het derde verschil blijft constant $1$. Je zou kunnen zeggen dat de ‘derde afgeleide’ constant is. Als er een formule is voor de rij dan zal dat een derdegraads moeten zijn:

$$c(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$$

lijkt het te doen. $n=0$ geeft $c=1$, $n=1$ geeft $c=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+1=2$, $n=2$ geeft $c=\frac{8}{6}+\frac{10}{6}+1=\frac{18}{6}+1=4$, $n=3$ geeft $c=\frac{27}{6}+\frac{15}{6}+1=\frac{42}{6}+1=8$, enzovoort. Maar als je bedenkt dat de driehoek van Pascal is opgebouwd uit combinatiegetallen $\binom{n}{k}$, dan kun je met de eerste vier combinatiegetallen de formule vinden:

$$\begin{aligned} c(n) &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3} \\ &= 1+n+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \\ &= \frac{1}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+n+1 \\ &= \frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1. \end{aligned}$$

Als je een pizza doorsnijdt langs telkens een andere lijn die alle vorige snijdt, dan krijg je de rij van pizzagetallen: $1, 2, 4, 7, 11, 16$ (zie Figuur 2); daarvan is het tweede verschil al constant. De directe formule van de pizzarij is dan

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1.$$

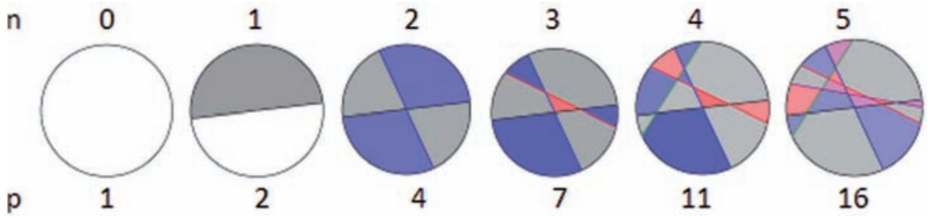
## Lorenzkromme

De tweede workshop die ik heb bijgewoond werd gegeven door Johan Deprez. Een collega uit België, werkzaam aan de lerarenopleiding aan de KU Leuven. We werden aan het denken gezet over de Lorenzkromme bij de inkomensverdelingen (van de Belgen). Hierbij wordt het cumulatieve percentage van het inkomen uitgezet tegen het cumulatieve percentage van de bevolking van laag naar hoog inkomen. Zie Figuur 3. Zo kun je aflezen dat de minst verdienende $50\%$ van de bevolking slechts $18\%$ van het bruto nationaal inkomen verdient. En de rijkste $10\%$ verdient $30\%$ van het totale inkomen. De punten op de grafiek van de Lorenzkromme liggen zodoende altijd onder de diagonaal. Alleen bij een maatschappij waarin iedereen evenveel verdient is de Lorenzkromme gelijk aan de diagonaal. In feite bestaat de Lorenzkromme uit een aantal punten die uit de gegevens van een tabel gehaald worden, verbonden door rechte lijntjes.

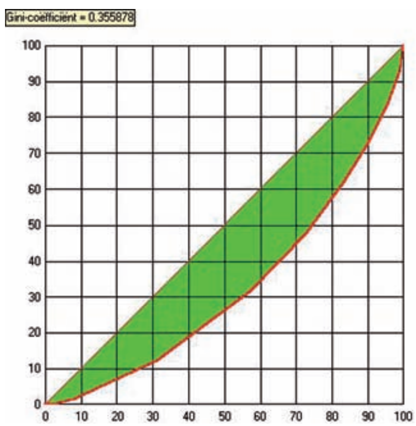
De Gini-coëfficiënt $(g)$ is het quotiënt van enerzijds de oppervlakte van het vlakdeel tussen de diagonaal en de Lorenzkromme, en anderzijds de oppervlakte van de driehoek onder de diagonaal (het halve vierkant). Zie figuur 4:

$$g=\frac{A}{A+B}.$$

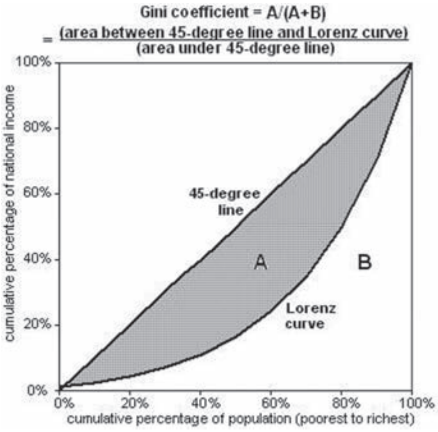
Omdat $A+B=\frac{1}{2}$ geldt $g=2A$, met $0\le g\le 1$. Hoe groter de Gini-coëfficiënt,




**Figuur 2** Pizzagetallen $(n,p)$.




**Figuur 3** Lorenzkromme inkomensverdeling België.




**Figuur 4**

des te groter de verschillen tussen de inkomens.

Wanneer de hogere inkomens relatief meer belasting betalen dan de lagere, dan zal de Lorenzkromme van het netto inkomen iets boven die van bruto liggen. De inkomens zijn dan iets eerlijker verdeeld.

Om meer wiskundig met de Gini-coëfficiënt te kunnen bezig zijn is het soms handig om een formule bij de Lorenzkromme te vinden. De oppervlakte kan dan met een integraal worden berekend. Na een discussie over welke krommen (op een werkblad gegeven) wel of geen Lorenzkromme kunnen zijn, probeerden we functievoorschriften te vinden die een goede benadering kunnen zijn van een Lorenzkromme. De kromme gaat in elk geval door $(0,0)$ en $(1,1)$. Een uitdaging voor je leerlingen om te laten bedenken welke formules grafieken kunnen opleveren die aan de voorwaarden van de Lorenzkromme moeten voldoen. De kromme lijkt op de grafiek van een machtsfunctie of een exponentiële functie. $f(x)=x^n$ en $f(x)=a\cdot e^{bx}-a$ zijn dan voor de hand liggende benaderingen. Er geldt: $b=\ln((a+1)/a)$ of $a=1/(e^b-1)$. Als je de Gini-coëfficiënt ($g$) weet, dan kun je variabelen $a$ en $b$ of $n$ berekenen. Een mooie oefening voor wiskunde B of D.

$$g=2A=2\left(\frac{1}{2}-\int_0^1 x^n\,dx\right)$$

geeft

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}g=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

Hieruit volgt

$$n=\frac{1+g}{1-g}.$$

Merk op dat $n>1$ is. Zo ook

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}g&=\int_0^1 a(e^{bx}-1)dx\\&=a\left[\frac{1}{b}e^{bx}-x\right]_0^1\\&=a\left(\frac{1}{b}e^b-1-\frac{1}{b}\right)\\&=\frac{1}{e^b-1}\left(\frac{1}{b}(e^b-1)-1\right)\\&=\frac{1}{b}-\frac{1}{e^b-1}\\&=\frac{1}{b}-a.\end{aligned}$$

Voor de kromme van België ($g=0{,}36$) krijg je dan $b=2{,}352$ en $a=0{,}105$ of $n=2{,}125$.

## Wortel 3

Het is voor mij natuurlijk niet mogelijk om meer dan twee workshops/lezingen bij te wonen. Maar ik heb zo links en rechts wat informatie ingewonnen. Ook heb ik enkele hand-outs en slides bekeken.

De dia's van de lezing van Martin Kindt (ik ben fan van Martin, onder andere vanwege zijn nimmer aflatende reeks artikelen in de *Nieuwe Wiskrant* en *Euclides*, zoals laatst over de stelling van Napoleon) riep bij mij herinneringen op aan mijn studietijd. In 1972 deed ik een bijvak geschiedenis van de exacte wetenschappen bij professor R. Hooykaas. In een bijgebouwtje tegen de Janskerk in Utrecht bestudeerden we de exhaustiemethode (uitputtingsmethode) van Archimedes om $\pi$ te benaderen door middel van insluitende en omhullende veelhoeken. Uitgaande van de zeshoeken en dan steeds het aantal verdubbelen ($6$-, $12$-, $24$-, $48$- en $96$-hoek), ofwel de bijbehorende middelpuntshoek halveren. Wat ik niet wist is dat ik samen met mijn toekomstige rector (op dat moment nog geschiedenisdocent, en als belangstellende deelnemer aan dit college) de sommen aan het maken was. Hoe groot was de verrassing toen ik twee jaar later bij mijn sollicitatie tegenover Maarten Verhoog zat. Wie weet gaf de prettige herinnering aan ons gezamenlijke college de doorslag dat ik werd aangenomen op de school waar ik veertig jaar ben gebleven.

Martin laat zien hoe je $\sqrt{3}$ kunt benaderen met een webgrafiek van

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right),$$

nodig voor de sinus van $60°$. Uiteindelijk leidt de methode van Archimedes ertoe dat $\pi$ tussen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$ ligt. Een onwaarschijnlijk goede benadering voor die tijd.

## Vliegtuigjes en spelletjes

De avond begon traditioneel met een optreden. Dit keer mochten er vliegtuigjes met vragen en woorden op het toneel gegooid worden. Jan Beuving en Ionica Smeets wisten die op hilarische wijze af te handelen. Met af en toe een lied. Het lied over de sinus en de cosinus die een kwart periode achter elkaar lopen (en ook zo gezongen werd) vroeg weer de nodige concentratie. Ook de breeklijnen van de chocoladerepen van Tony's Chocolonely werden kritisch ontleed.

Ook dit jaar heb ik tijdens de avondsessie weer met plezier enkele nieuwe spelletjes bekeken en uitgeprobeerd. Enkele kakelende collega's deden het Regenwormenspel. Een soort Yahtzee waarbij je fiches met wormen moet sparen. Ik vroeg me al af waarom er geen 6 gegooid werd. Dom, op die zijde van de dobbelstenen staan wormen. Een erg vermakelijk spel waarbij je ook van andere spelers een worm mag afpakken.

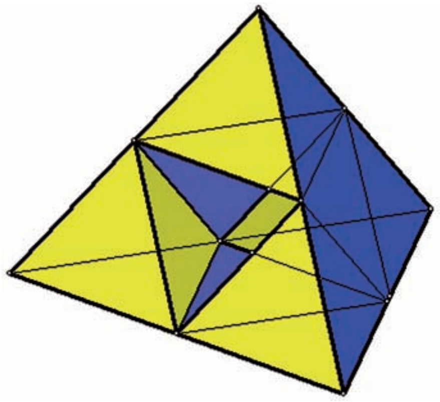
Zelf speelde ik Laser Maze (zie Figuur 5), een logicaspel waarbij kaarten met startopstelling en einddoel in oplopend niveau moeten worden uitgespeeld. Bij het drukken op de laserknop moeten als het goed is via een doolhof van spiegeltjes en schermpjes de signaallampjes gaan branden.

Elke deelnemer kreeg als cadeau een speciaal voor de NWD-deelnemers ontworpen spel mee naar huis, RESOLF. Het spel RESOLF is (zelfcorrigerend) leermateriaal waarin leerlingen door creatief en probleemoplossend te denken, de reken-wiskundepuzzel (willen) oplossen. Het boekje met opgaven om mee te beginnen kun je vinden op www.resolf.nl.

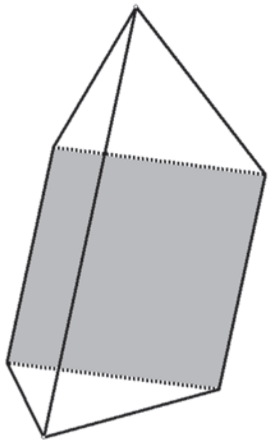
Over spelletjes gesproken. Hoewel Odette De Meulemeester vorig jaar haar 'laatste workshop' gaf, kwam ze donderdagavond gelijktijdig met mij aan in Veldhoven. Ook dit jaar had ze weer een karrevracht aan

**Figuur 5** Laser Maze.

Figuur 6 NWD-puzzel.



Figuur 7 Het gat in een viervlak.



Figuur 8 Halve tetraëder.

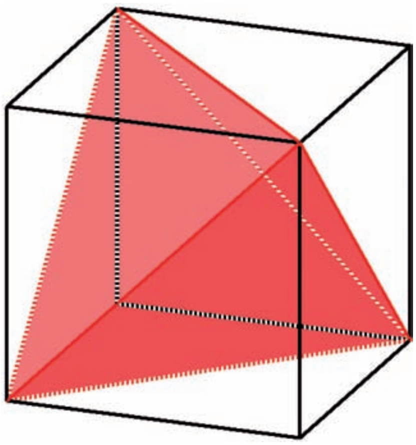
spelletjes uitgezocht en gemaakt, samen met Matthijs Coster. Ze gaf me een puzzel: 9 stukjes die 3 bij 3 de letters N, W en D vormen, moeten in een vierkant gelegd worden (waarin je dan 25 zou kunnen lezen). Zie Figuur 6. De mooiste puzzel die ze gemaakt had was van een rombische triacontaëder die helemaal gevuld kon worden met parallellepipeda.

### Wiskunde, daar zit wat in

Op zaterdag om 9.00 uur begon onze workshop 'Wiskunde, daar zit wat in'. Marjan en ik hadden thuis al veel bouwplaten en ruimtelijke modellen gemaakt zodat de deelnemers lekker door konden met de opdrachten. Ook stonden er grote felgekleurde kartonnen modellen klaar om waar nodig de workshop te illustreren. Eerst werden regelmatige viervlakken gevouwen. Vier kleine en een dubbel zo grote. Als je de vier kleine in de hoeken van de grote stopt houd je een gat over. Wat is de vorm van dat gat? Zie Figuur 7. Er lagen ook modellen en bouwplaten van halve tetraëders. Zie Figuur 8. Twee van die helften vormen 'de kleinste puzzel van de wereld'. Ik heb die puzzel altijd op de openhuisavond van school liggen. Maar veel ouders kunnen hem niet zo maar even oplossen. Daarna moest in een tekening van een kubus de ligging van een tetraëder in een kubus worden getekend waarbij de ribben van het viervlak zijvlakdiagonalen van de kubus zijn. Zie Figuur 9.

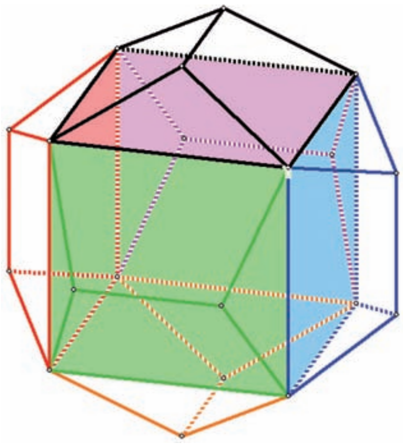
Als je diagonaalvlakken van een icosaëder bekijkt dan kun je drie onderling loodrechte zeshoeken ontdekken. In elk diagonaalvlak zitten rechthoeken die als zijden twee tegenover elkaar liggende ribben van het twintigvlak hebben en twee lichaamsdiagonalen, die met de ribben de verhouding van de gulden snede hebben. Op de campus van de Universiteit Twente staat een kunstwerk, een zogeheten tensegrity-figuur, in de volksmond 'het ding' genoemd, waar de zes diagonalen zichtbaar zijn opgehangen in kabels. De uiteinden van de palen vormen precies de twaalf hoekpunten van het twintigvlak. Zie Figuur 10. Vijf minuten voor het begin van onze workshop werd ik door mijn vrouw gebeld dat onze kleindochter, Bo, was geboren. Ik ontving een hartelijk applaus van de deelnemers en liep vervolgens de hele tijd met een blijde lach op mijn gezicht rond. Toen we er op kraamvisite heen gingen zag ik dat ze een speeltje had gekregen precies zoals 'het ding', van The Manhattan Toy Company ('Rammelaar', € 22,95). Thuis heb ik het ding met houten stokjes en draad na een paar mislukte pogingen om het zelf in elkaar te flansen in een hoek gegooid.

De deelnemers konden sleuven knippen in drie voorgetekende rechthoeken en daarna proberen die in elkaar te schuiven. Als het goed is kregen ze dan een model met de drie rechthoeken die onderling loodrecht staan dat precies in het door ons op tafel gezette 20-vlak past. Als apotheose werd de dodecaëder onder de loep genomen. Op de buitenkant van de bouwplaat kun je twaalf diagonalen tekenen die precies een draadmodel van een kubus vormen. Zie Figuur 11. Als je de (zes) 'dakpunten' van het 12-vlak afzaagt dan kun je die aan elkaar

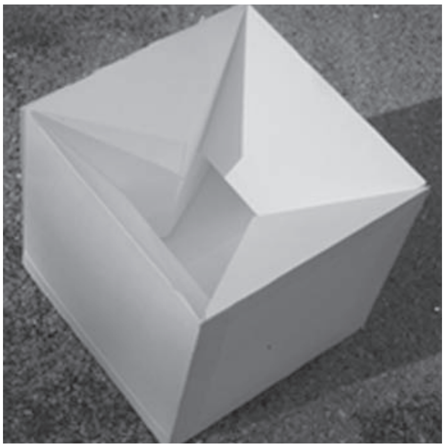


Figuur 9 Viervlak in een kubus.

Figuur 10 20-vlak tensegrity.



Figuur 11 12-vlak met dakpunten.



**Figuur 12** Het gat in de kubus.

plakken tot een bouwplaat van een kubus. Klap je de zes dakpunten naar binnen dan vormen de vierkante bodems van die ‘zolders’ precies de buitenkant van een kubus. Maar er zit een gat in. Wat is de vorm van dat gat? Zie Figuur 12. Aan de deelnemers is het om thuis de bouwplaat van deze mooie ster in elkaar te zetten. De tijd was te kort om dat ook nog in deze workshop voor elkaar te krijgen. Uiteraard liet ik de deelnemers zien hoe de ster uit het gat tevoorschijn komt. De *apotheose*! In de hand-out (deel 1) kun je lezen hoe je kunt berekenen dat dit gat ongeveer $20\%$ van de kubus beslaat. Bedenk dat de ribben van het 12-vlak de randen zijn van regelmatige vijfhoeken. De ribben van de genoemde kubus zijn diagonalen in die vijfhoeken en vormen met de zijden van de vijfhoek de gulden snede. Als je de formule van de inhoud van een 12-vlak op Wikipedia gebruikt, dan krijg je

$$I_{\text{dodecaeder}} = \frac{1}{4}z^3(15+7\sqrt{5});$$

zijde van de kubus = diagonaal $d$ van de vijfhoek met zijden $z$; met $d=1$ is

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}.$$

Daarmee

$$I_{\text{dakpunten}} = I_{\text{12-vlak}} - I_{\text{kubus}},$$

dus

$$\begin{aligned} I_{\text{gat}} &= I_{\text{kubus}} - I_{\text{dakpunten}} \\ &= I_{\text{kubus}} - (I_{\text{12-vlak}} - I_{\text{kubus}}) \\ &= 2 \cdot I_{\text{kubus}} - I_{\text{12-vlak}}. \end{aligned}$$

Met $z^2 = 1 - z$ (formule van de gulden snede) krijg je

$$z^3 = z(1-z) = z - z^2 = z - (1-z) = 2z - 1.$$

Dus

$$\begin{aligned} I_{\text{gat}} &= 2d^3 - \frac{1}{4}z^3(15+7\sqrt{5}) \\ &= 2d^3 - \frac{1}{4}(2z-1)(15+7\sqrt{5}) \end{aligned}$$

(nu invullen $d = 1$ en $z = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 1^3 - \frac{1}{4}\Big(2\Big(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\Big) - 1\Big)(15+7\sqrt{5}) \\ &= 2 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-2)(15+7\sqrt{5}) \\ &= 2 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}+35-30) \\ &= 2 - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} \\ &= 0,19! \end{aligned}$$

## Dansen, standup en logaritmen

Na de workshopronde zagen we hoe je wiskunde kunt gebruiken om een choreografie voor een dans te definiëren. Tom Verhoeff onderzoekt hoe je alle permutaties van $n$ dingen (zeg de getallen van $1$ t/m $n$) kunt krijgen door enkel verwisselingen van twee naasten. Dit zijn de zogenaamde sporen van Lehmer. Het ‘spoor’ van één blauw, twee groen en twee rood werd in beeld gebracht door de dansgroep van Roos van Berkel. Zie Figuur 13. De dansers hadden T-shirts in overeenkomstige kleuren aan, en voerden al dansend de wisselingen van twee naasten uit naar telkens een andere permutatie van deze vijf. Op het grote scherm kon je de dans volgen door gelijktijdige wisselingen van gekleurde blokjes. Tom heeft uitgezocht dat je voor de permutaties van $n=4$ niet met $23$ wisselingen in een keer alle permutaties kunt krijgen. Er zijn onderweg $2$ keer $2$ extra wisselingen nodig om aan het eind alle $24$ volgordes te hebben gehad.

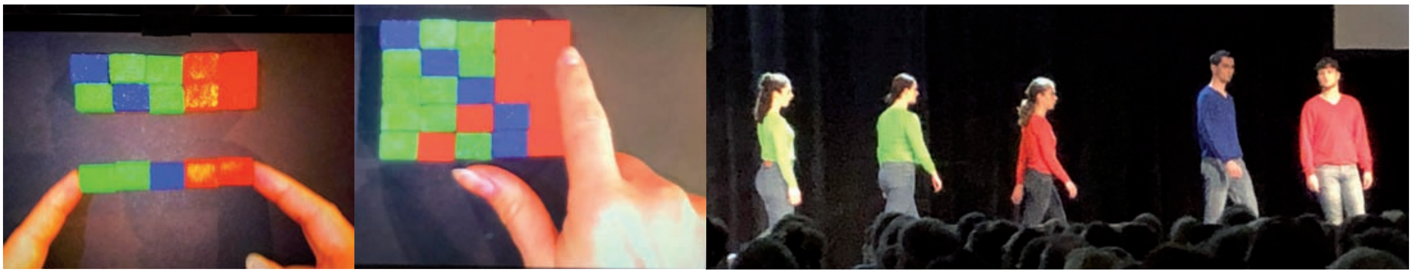
Met Matt Parker is weer een inspirerende Brit (geboren in Australië) gestrikt voor de slotlezing. Hij is een standup-mathematician die op de BBC en op scholen optreedt met op wiskunde stoelende grappigheden. Voorspellen van het laatste getal van een barcode, tegenwerkende radertjes op een munt, het maken van een spreadsheet van een digitale foto (je krijgt een veld vol blauwe, groene en rode pixels, alle met een intensiteit van $0$ (= zwart) tot $255$). En ja hoor bij het inzoomen zie je zijn olijke hoofd opdagen. Op YouTube promoot hij zijn boek *Humble Pi* over fouten die met wiskunde gemaakt zijn.

Steven Wepster vertelde me tijdens de afsluitende lunch dat er in zijn workshop flink vermenigvuldigd was door optellen van logaritmen. Indertijd was het voor astronomen (eind zestiende eeuw, Tycho Brahe) erg belangrijk om snel en nauwkeurig met sinussen te kunnen rekenen. Omdat er door sterrenkundigen al behoorlijk nauwkeurig hoeken in de hemelsfeer gemeten konden worden, kon men met behulp van voor hen bekende sinusformules nauwkeurig plaats en tijd bepalen op aarde. Maar door het ontbreken van rekenmachines nam men bij die berekeningen hun toevlucht tot sinustabellen en logaritmetabellen. Aanvankelijk gebruikte men de prostaphaerese methode met de formule

$$\begin{aligned} &\sin p \cdot \sin q \\ &\quad = \frac{1}{2}(\sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q)), \end{aligned}$$

totdat het gemak van rekenen met logaritmen algemeen bekend werd. In *Pythagoras* van september 2017 heeft hierover ook al een mooi artikel gestaan, geschikt om met je leerlingen eens door te nemen.

Zo kwam er een eind aan deze speciale NWD. Ik blijf alleen nog zitten met de vraag: wat ga ik 31 januari en 1 februari 2020 doen?



**Figuur 13** Permutaties in een spoor van Lehmer.