ONMETELIJKE GANGEN NAAR DE WORKSHOPS VAN VERLANGEN...
NWD25

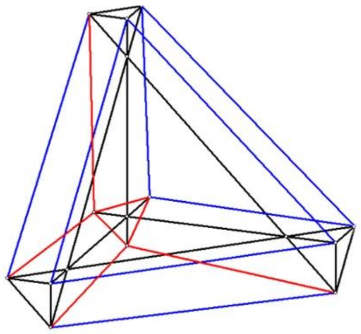
Rob van Oord

{intro}
Op 1 en 2 februari jl vonden de 25e Nationale Wiskunde Dagen plaats, eenmalig in de Koningshof te Veldhoven in plaats van het vertrouwde Noordwijkerhout. Rob van Oord bespreekt de voordrachten waar hij zelf bij was en die hij zelf met Marjan Botke gegeven heeft. Via de link naar de hand-out kun je daar zelf mee aan de slag!
{intro}

Jan de Lange
De start van deze NWD werd verzorgd door de oprichter van de NWD, Jan de Lange. Op de voor hem typerende manier, vol anekdotes en verrassende kwinkslagen werd duidelijk waarom deze NWD in Veldhoven plaats vonden en niet in Noordwijk. Wie naar het noorden zoekt met zijn IPhone, krijgt een andere richting dan wie zoals een echte padvinder een kompas gebruikt. Het magnetische noorden heeft te maken met een voortdurend bewegende declinatie t.o.v. het geografische noorden. Dit jaar is die van 1° 34' in 1994 naar 1° 09', dus 25 minuten, opgeschoven.
Dus is het logisch dat we nu na 25 jaar in Veldhoven terecht zijn gekomen.
Nu we het toch over plaatsbepaling hebben, het 'virus' van GeoCaching is ook naar de NWD overgewaaid. Zo'n 35 deelnemers verzamelden zich rondom Heleen van der Ree om acht puzzels op te lossen die elk naar een van de codes in een verstopte koker leidden.

Sjoerd Verduyn Lunel
Vervolgens kregen we in een betoog van Sjoerd Verduyn Lunel over zijn onderzoek aan RU Utrecht en het RUMC naar het kunnen vaststellen of een patiënt lijdt aan astma of aan COPD. Hierbij wordt een (vrij nieuwe) techniek van wiskundige analyse van dynamische data gebruikt. Het gaat hierbij niet om het oplossen van een vergelijking, maar om het stellen van de juiste vraag. Longartsen hebben door metingen van trillingen in de longen veel data gegenereerd. Het blijkt dat het gebruik van gemiddelden geen verschil laat zien tussen beide soorten patiënten. Maar als je groepjes data bij elkaar neemt dan kun je via een plaatje van een kansverdeling een attractor zoeken. Die blijkt verschillend bij beide longaandoeningen. Er verschenen bekende plaatjes met bifurcaties op het scherm zoals die van de Lorenz-attractor, die voldoet aan de logistische vergelijking $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ met $0 < x < 1$ en $2{,}4 < r < 4{,}0$. Kortom uit een chaos aan data kun je met wiskundige analyse van dynamische systemen toch iets zinvols uit die data halen.

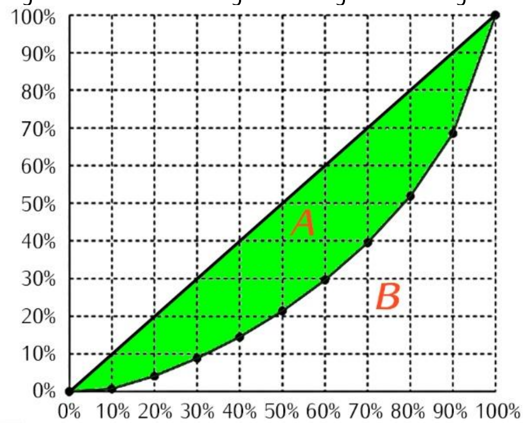
Bert Wikkerink
Na de lunch schoof ik aan bij Bert Wikkerink over 'de driehoek van getallen'. Naast even, oneven, priemgetallen, kwadraten, driehoeksgetallen en volmaakte getallen wist ik niet veel andere soorten. Maar met de aanpak van Bert kwamen we op rijtjes getallen die je krijgt als je een cake, pizza, banketstaaf met een rechte snede in steeds meer stukken verdeelt. Bij het snijden van een cake komt het neer op in hoeveel delen je de ruimte verdeelt met telkens een vlak erbij dat niet parallel is met de gekozen vlakken en ook niet door een zelfde punt gaat. Eén vlak verdeelt de ruimte in twee delen, een tweede erbij maakt vier delen, een derde geeft acht ruimtedelen, denk aan de drie vlakken Oxy, Oxz en Oyz. Die gaan vanzelf wel door één punt. Maar het vierde vlak mag dan niet door O gaan. Rijtje 1, 2, 4, 8, ... Je zou verwachten 16 ruimtedelen te krijgen, maar het zijn er 15. En met nog een vlak erbij zijn het er 26. Die laatste is niet makkelijk te zien. Bij een vijfde vlak ontstaan er nieuwe holtes maar ook nieuwe oneindige volumes aan de buitenkant. Hier moet ik nog over nadenken. In figuur 1 kun je zien hoe vier vlakken de ruimte in 15 volumes opdelen. Bert had hiervoor een kartonnen model gemaakt om die 15 ruimtedelen te kunnen zien.
Allereerst de piramide (holte) gevormd door de coördinaatvlakken en het schuine vlak (1). Dan op elke zijde een naar buiten galmend volume (4). Op elke ribbe zie je een trogvormig volumedeel (6). Tenslotte vanuit elk hoekpunt nog een driehoekige toeter (4). Bedenk dat de piramide vast is en dat de volumes aan de buitenkant eigenlijk oneindig ver uitdijen. Dus totaal $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ volumedelen.



figuur 1 vier vlakken verdelen de ruimte in 15 delen.

Johan Deprez

De tweede workshop die ik heb bijgewoond werd gegeven door Johan Deprez. Een collega uit België, werkzaam aan de lerarenopleiding aan de KU Leuven. We werden aan het denken gezet over de Lorenzkromme bij de inkomensverdeling (van de Belgen). Hierbij wordt het cumulatieve percentage van het inkomen uitgezet tegen het cumulatieve percentage van de bevolking van laag naar hoog inkomen, zie figuur 2.



figuur 2 Lorenzkromme van de inkomensverdeling van België

Zo kun je aflezen dat de minst verdienende 50% van de bevolking ongeveer 20% van het bruto nationaal inkomen verdient. En de rijkste 10% verdient ruim 30% van het totale inkomen. De punten op de grafiek van de Lorenzkromme liggen zodoende altijd onder de diagonaal. Alleen bij een maatschappij waarin iedereen evenveel verdient is de Lorenzkromme gelijk aan de diagonaal. In feite bestaat de Lorenzkromme uit een aantal punten die uit de gegevens van een tabel gehaald worden, verbonden door rechte lijntjes.
De Gini-coëfficiënt (g) is het quotiënt van de oppervlakte tussen de diagonaal en de Lorenzkromme, en de oppervlakte van de oppervlakte onder de diagonaal (het halve vierkant). Zie figuur 2: $g = A / A + B$. Omdat $A + B = ½$ geldt $g = 2A$, met $0 < g < 1$. Hoe groter de Gini-coëfficiënt, des te groter de verschillen tussen de inkomens.
Wanneer de hogere inkomens relatief meer belasting betalen dan de lagere, dan zal de Lorenzkromme van het netto inkomen iets boven die van het bruto inkomen liggen. De inkomens zijn dan iets eerlijker verdeeld.
Om meer wiskundig met de Gini-coëfficiënt bezig te kunnen zijn is het soms handig om een formule bij de Lorenzkromme te vinden. De oppervlakte kan dan met een integraal worden berekend.
Na een discussie over welke krommen (op een werkblad gegeven) wel of geen Lorenzkromme kunnen zijn probeerden we functievoorschriften te vinden die een goede benadering kunnen zijn van een Lorenzkromme. De kromme gaat in elk geval door (0, 0) en (1, 1). Een uitdaging voor je leerlingen om te laten bedenken welke formules grafieken kunnen opleveren die aan de voorwaarden van de Lorenzkromme moeten voldoen. De kromme lijkt op de grafiek van een machtsfunctie of een exponentiële functie. $f(x) = x^n$ en $f(x) = a \cdot e^{bx} - a$ zijn dan voor de hand liggende benaderingen.

Avonduren

De avond begon traditioneel met een optreden. Dit keer mochten er vliegtuigjes met vragen en woorden op het toneel gegooid worden. Hoogleraar wetenschapscommunicatie Ionica Smeets, cabaretier en wiskundige Jan Beuving en pianist Tom Dicke wisten die op hilarische wijze af te handelen. Met af en toe een lied. Het lied over de sinus en de cosinus die een kwart periode achter elkaar lopen (en ook zo gezongen werd) vroeg weer de nodige concentratie. Ook de breeklijnen van de chocoladerepen van Tony's Chocolonely werden kritisch ontleed.

figuur 3 V.l.n.r: Ionica, Jan en Tom

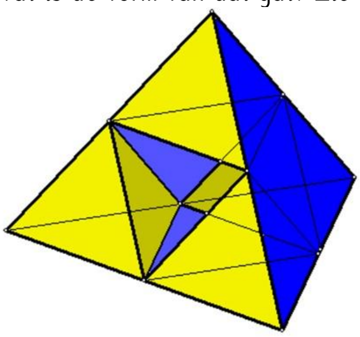
Elke deelnemer kreeg als cadeau een speciaal voor de NWD deelnemers ontworpen spel mee naar huis. 'Resolf' is (zelfcorrigerend) leermateriaal waarin leerlingen door creatief en probleemoplossend te denken, de reken-wiskunde puzzel (willen) oplossen. Het boekje met opgaven om mee te beginnen kun je vinden op de NWD site[1].

Tot in de kleine uurtjes bleef ik nog op de dansvloer bij de band. Daarna nog kletsen met de winnaars van de Wisrun Erwin de Bruin en Anouk van Berkel, collega's op De Breul in Zeist. Dat is de school waar de mooie meisjes vandaan kwamen waar ik (eind jaren zestig) op de dansles van dansschool Wildschut verliefd werd. Maar zij waren katholiek, dus het is niets geworden.

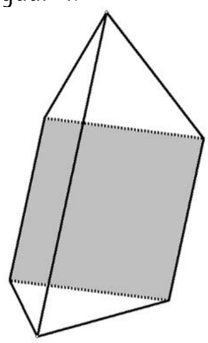
Zaterdag ochtend was een voor ons onbekend parcours uitgezet voor de Funrun. Iets korter dan voorheen, omdat 'er in de Koningshof al heel veel meters gelopen zijn' door de onmetelijke gangen....

Rob van Oord en Marjan Botke

Om 9.00 uur begon onze workshop 'Wiskunde, daar zit wat in'. Marjan en ik hadden thuis al veel bouwplaten en ruimtelijke modellen gemaakt zodat de deelnemers lekker door konden met de opdrachten. Ook stonden er grote felgekleurde kartonnen modellen klaar om waar nodig de workshop te illustreren. Eerst werden regelmatige viervlakken gevouwen. Vier kleine en een dubbel zo grote. Als je de vier kleine in de hoeken van de grote stopt houd je een gat over. Wat is de vorm van dat gat? Zie figuur 4.

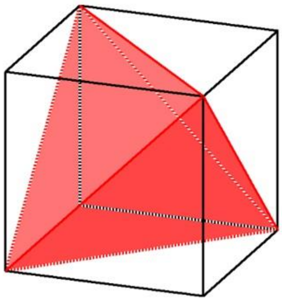


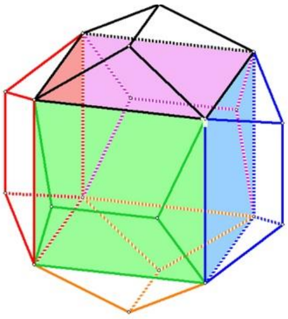
figuur 4 Het gat in een viervlak



figuur 5 Halve tetraëder

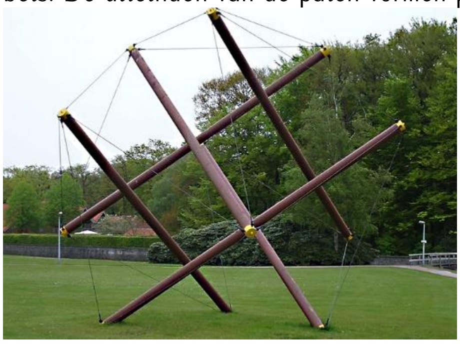
Er lagen ook modellen en bouwplaten van halve tetraëders, zie figuur 5. Twee van die helften vormen 'de (meest fascinerende) kleinste puzzel van de wereld'. Daarna moest in een kubus de ligging van een tetraëder worden getekend waarbij de ribben van het 4-vlak zijvlak diagonalen van de kubus zijn, zie figuur 6.





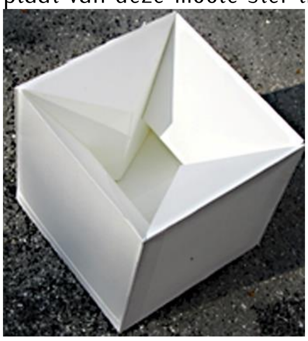
figuur 6 Viervlak in kubus figuur 8 Twaalfvlak met dakpunten

Als je diagonaalvlakken van een icosaëder bekijkt dan kun je drie onderling loodrechte zeshoeken ontdekken. In elk diagonaalvlak zitten rechthoeken die als zijden twee tegenover elkaar liggende ribben van het twintigvlak hebben en twee lichaamsdiagonalen, die met de ribben een gulden snede verhouding hebben. Op de campus van TU-Twente staat een kunstwerk 'Het Ding', een zogeheten *tensegrity* figuur, waar de zes diagonalen zichtbaar zijn opgehangen in kabels. De uiteinden van de palen vormen precies de twaalf hoekpunten van het twintigvlak, zie figuur 7.



figuur 7 Het Ding, gemaakt door studenten Jaap Hos, Jasper Latté en Frits van den Berg

De deelnemers konden sleuven knippen in drie voorgetekende rechthoeken en daarna proberen die in elkaar te schuiven. Als het goed is kregen ze dan een model met de drie rechthoeken die onderling loodrecht staan dat precies in het door ons op tafel gezette 20-vlak past. Als apotheose werd de dodecaëder onder de loep genomen. Op de buitenkant van de bouwplaat kun je twaalf diagonalen tekenen die precies een draadmodel van een kubus vormen, zie figuur 8. Als je de (zes) 'dakpunten' van het 12-vlak afzaagt dan kun je die aan elkaar plakken tot een bouwplaat van een kubus. Klap je de zes dakpunten naar binnen dan vormen de vierkante bodems van die 'zolders' precies de buitenkant van een kubus. Maar er zit een gat in. Wat is de vorm van dat gat? Zie figuur 9. Aan de deelnemers is het om thuis de bouwplaat van deze mooie ster in elkaar te zetten.



figuur 9 het gat in de kubus

De tijd was te kort om dat ook nog in deze workshop voor elkaar te krijgen. Uiteraard liet ik de deelnemers zien hoe de ster uit het gat tevoorschijn komt. De apotheose! In de hand-out[2] kun je lezen hoe je kunt berekenen dat dit gat ongeveer 20% van de kubus beslaat. Bedenk dat de ribben van het 12-vlak de randen zijn van regelmatige vijfhoeken. De ribben van de genoemde kubus zijn diagonalen in die vijfhoeken en vormen met de zijden van de vijfhoek de gulden snede.

Tot slot
Na de workshopronde zagen we hoe je wiskunde kunt gebruiken om een choreografie voor een dans te definiëren. Tom Verhoeff onderzoekt hoe je alle permutaties van *n* dingen (zeg de getallen van 1 t/m *n*) kunt krijgen door enkel verwisselingen van twee naasten. Dit zijn de zogenaamde sporen van Lehmer. Het 'spoor' van 1 blauw 2 groen en 2 rood werd in beeld gebracht door de dansgroep van Roos van Berkel[3]. De dansers hadden kleding in die kleuren aan en voerden al dansend de wisselingen van twee naasten uit naar telkens een andere permutatie van deze vijf. Op het grote scherm kon je de dans volgen door gelijktijdige wisselingen van gekleurde blokjes.

Met Matt Parker is weer een inspirerende Brit (geboren in Australië) gestrikt voor de slotlezing. Hij is een standup mathematician die op de BBC en op scholen optreedt met op wiskunde stoelende grappigheden. Voorspellen van het laatste getal van een barcode, tegenwerkende tandwielen op posters, zie figuur 10, het maken van een spreadsheet van een digitale foto (je krijgt een veld vol blauwe, groene en rode pixels, alle met een intensiteit van 0 (= zwart) tot 255). En ja hoor bij het inzoomen zie je zijn olijke hoofd opdagen. Op YouTube promoot hij zijn boek Humble Pi over met fouten die met wiskunde gemaakt zijn.

Figuur 10 All parts are working....

Zo kwam er een eind aan deze speciale NWD. Ik blijf alleen nog zitten met de vraag: wat ga ik 31-01 en 01-02 2020 doen?

Noten
[1] zie: https://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen/resolf-cadeau-25-jaar-nwd
[2] zie: https://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen/handouts-presentaties-en-fotos-2019
[3] zie: https://www.cursor.tue.nl/nieuws/2019/februari/week-1/stelling-van-lehmer-in-beweging/

Over de auteur
Rob van Oord is docent wiskunde, van augustus 1974 tot augustus 2014 op het Coenecoop College in Waddinxveen, daarna als invaller op scholen in de regio. Hij is voorzitter van de NVvW werkgroep havo-vwo en redactielid van de Zebra reeks. E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*