Harmonisch totaal en aanverwanten deel 2

In *Euclides* 95|2 staat een tweede artikel van Gerard Koolstra over het *harmonisch totaal.* De versie die in *Euclides* verscheen is ingekort. Hieronder het volledige artikel.

Het harmonisch gemiddelde is een van de vele gemiddelden die gevangen kunnen worden onder de formule:

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{{x_1}^p + \dots + {x_n}^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \neq 0)$$

De bijbehorende *Totalen* die gedefinieerd worden door:

$$T_p(x_1, \dots, x_n) = ({x_1}^p + \dots + {x_n}^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \neq 0) \text{ [formule 1a]}$$

In plaats van formule 1a kunnen we natuurlijk ook schrijven:

$${T_p}^p = {x_1}^p + \dots + {x_n}^p \qquad \text{[formule 1b]}$$

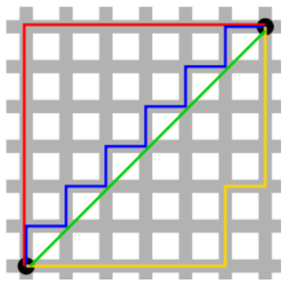
Om complicaties te voorkomen gaan we uit van positieve argumenten $x_1, \dots, x_n$.
Voor a>0 geldt dat a^p >0 .

Bovendien geldt dan $(a^p)^{\frac{1}{p}}$ =a en is $a^p = b^p$ gelijkwaardig met a=b.

Als we voor p de waarde -1 nemen krijgen we $({x_1}^{-1} + \dots + {x_n}^{-1})^{-1}$ en dat is natuurlijk niets anders dan het *Harmonisch Totaal*. Dus = $H(x_1, x_2, .., x_n) = T_{-1}(x_1, \dots, x_n)$

Voor p=1 geldt dat T_p= $x_1 + \dots + x_n$, de gewone som, die we uiteraard ook met bijv. d's kunnen noteren in plaats van met x-en:

T_1= $d_1 + \dots + d_n$
Wanneer we in een rechthoekig assenstelsel XOY afspreken dat
$d_1 = |x_1 - x_2|$ en $d_2 = |y_1 - y_2|$ geeft o.a.
$T_1(d_1, d_2)$ [= d_1+d_2] wel iets interessants: de zo genoemde 'taxi-afstand' (of *Manhattan*-afstand) tussen twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2).


Figuur 1

In figuur 7 illustreren de rode, blauwe en gele routes deze afstand. In het meer dimensionale geval is de *Hamming-afstand* een bekende toepassing.

Voor p=2 krijgen we een goede bekende:

$T_2(x_1, \dots, x_n)$= $({x_1}^2 + \dots + {x_n}^2)^{\frac{1}{2}}$ = $\sqrt{{x_1}^2 + \dots + {x_n}^2}$,
de lengte van de vector **x** = $(x_1, x_2, .., x_n)$, die gebruikt wordt voor het bepalen van de *Euclidische* afstand tussen twee punten. Figuur 1 illustreert dat de *Euclidische* afstand - met groen aangeduid - doorgaans kleiner is dan de *Manhattan*-afstand.

Ook p=-2 kan leiden tot herkenbare verbanden.
De afstand van de oorsprong tot een vlak met vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ kan berekend worden met $d = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2 + (\frac{1}{c})^2}}$ = $(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$

Dus $d = T_{-2}(a, b, c)$. Vaak wordt dit verband geschreven als : $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

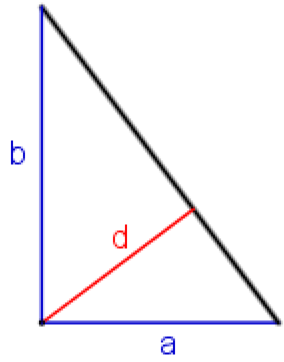
In het twee dimensionale geval gaat het (bijvoorbeeld) om de afstand tussen het snijpunt van de rechthoekszijden en de tegenoverliggende hypotenusa in een rechthoekige driehoek. Deze interpretatie geeft ons de mogelijkheid ook deze T_p in beeld te brengen.

In figuur 2 geldt $a \cdot b = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot d$ en dus $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Kwadrateren geeft: $d^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ en 'omkeren' vervolgens:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

We weten dus $d = T_{-2}(a, b)$



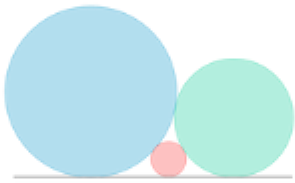
Figuur 2

Er zijn meer waarden van *p* waarbij T_p gebruikt kan worden om een verband kort te formuleren. Zo is het verband tussen de stralen van drie rakende cirkels met de configuratie zoals in figuur 3 te schrijven als:

$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ [met r_3 de straal van de kleinste cirkel]

Dit kan ook geschreven worden als $r_3^{-\frac{1}{2}} = r_1^{-\frac{1}{2}} + r_2^{-\frac{1}{2}}$ of als:

$$r_3 = \left(r_1^{-\frac{1}{2}} + r_2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$$


Figuur 3

In dit geval geldt: $r_3 = T_{-\frac{1}{2}}(r_1, r_2)$ en zien we een toepassing voor p= - ½

$T_p(x_1, \dots, x_n)$ duikt dus in allerlei gedaantes op.

Het is de moeite waard om eens na te gaan welke eigenschappen deze functie heeft, en wat daarvan de gevolgen zijn voor de diverse toepassingen. Zoals gezegd beperken we ons gemakshalve tot positieve argumenten.

Uiteraard is de volgorde van de argumenten niet van belang, en ook hier geldt dat de berekening stapsgewijze kan plaatsvinden.

Zo geldt $T_p(x_1, \dots, x_n) = T_p(T_p(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ ($n \geq 3$)

Immers:

$$T_p{}^p(T_p(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) = T_p{}^p((x_1{}^p + \dots + x_{n-1}{}^p)^{1/p}, x_n) =$$

$$= \left((x_1{}^p + \dots + x_{n-1}{}^p)^{1/p}\right)^p + x_n{}^p = (x_1{}^p + \dots + x_{n-1}{}^p) + x_n{}^p = T_p{}^p(x_1, \dots, x_n)$$

En vanwege de positieve (tussen)uitkomsten geldt nu ook:

$$T_p(x_1, \dots, x_n) = T_p(T_p(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

Als we *p*=2 en *n*=3 gebruiken in formule 1a krijgen we:

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$$

Dit is in overeenstemming met de wetenschap dat de lichaamsdiagonaal van een balk met gegeven afmetingen zowel direct als via een van de (drie) zijvlaksdiagonalen berekend kan worden.

Als we voor $p \neq 0$ definiëren: $a \sum^p b = c \leftrightarrow T_p(a,b) = c$, blijkt $\sum^p$ een bewerking die zowel commutatief als associatief is.[1])

Van groot belang is dat $T_p(x_1, \dots, x_n)$ voor alle waarden van *p* ($p \neq 0$) een *homogene* functie is:
$T_p(kx_1, \dots, kx_n) = k\, T_p(x_1, \dots, x_n)$ ($k>0$)
Deze eigenschap maakt het bijvoorbeeld mogelijk om het te gebruiken om bijv. een lengte op basis van gegeven lengtes te berekenen. Wanneer de eenheid wordt gewijzigd (van bijv. van meter in mm bijv.) is het resultaat eenvoudig aan te passen

Wanneer alle argumenten gelijk zijn ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$) geldt:

$$T_p(a, \dots, a) = (na^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot a$$

We gaan uit van $n > 1$
Nu wordt de waarde van *p* van belang.

Voor $p<0$ geldt : $0 < n^{\frac{1}{p}} < 1$

voor $0<p<1$: $n^{\frac{1}{p}} > n$ en

voor $p>1$: $1 < n^{\frac{1}{p}} < n$

Dat betekent:
$T_p(a, \dots, a) < a$ voor $p<0$
$T_p(a, \dots, a) > n \cdot a$ voor $0<p<1$
$a < T_p(a, \dots, a) < n \cdot a$ voor $p>1$

Meer algemeen geldt: (voor positieve argumenten)

- $T_p(x_1, \dots, x_n) < \min(x_1, \dots, x_n)$ voor $p<0$ [i]
- $T_p(x_1, \dots, x_n) > x_1 + \dots + x_n$ voor $0<p<1$ [ii]
- $\max(x_1, \dots, x_n) < T_p(x_1, \dots, x_n) < x_1 + \dots + x_n$ voor $p>1$ [iii]

Voor het bewijs van [i] kijken we – net als eerder bij het harmonisch totaal – naar het effect van toevoeging van een (positief) argument aan ${T_p}^p = {x_1}^p + \cdots + {x_n}^p$

Uiteraard wordt ${T_p}^p$ altijd groter. Wat betekent dat voor T_p [= $\left({T_p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$]?

p<0 T_p wordt **kleiner** als we een argument toevoegen [A]
immers x $\rightarrow x^{\frac{1}{p}}$ is dan een dalende functie

p>0 T_p wordt **groter** als we een argument toevoegen [B]
(x $\rightarrow x^{\frac{1}{p}}$ is dan een stijgende functie)

We ordenen nu de argumenten van klein naar groot. Nu geldt volgens [A]:

$$min(x_1, \dots, x_n) = x_1 = T_p(x_1) < T_p(x_1, x_2) < \cdots < T_p(x_1, \dots, x_n)$$

Voor het bewijs van [ii] en [iii] is de tweede afgeleide van x $\rightarrow x^{\frac{1}{p}}$ van belang
$f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{p} x^{\frac{1-p}{p}}$ en $f''(x) = \frac{1-p}{p} x^{\frac{1-2p}{p}}$
Uiteraard geldt voor p>0 dat $f'(x) > 0$ We hebben dus te maken met een stijgende functie

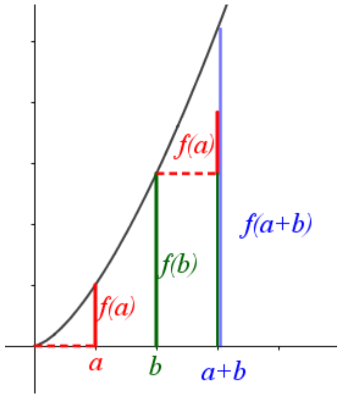
Het teken van $f''(x)$ wordt (voor x>0) bepaald door $\frac{1-p}{p}$

Voor p>1 is dit negatief en voor 0<p<1 positief

Voor 0<p<1 is f: x $\rightarrow x^{\frac{1}{p}}$ een steeds sneller stijgende functie.

Voor zo'n functie geldt: $f(a+b) > f(a)+f(b)$ (zie figuur 4),
en meer algemeen: $f(a_1+..+a_n) > f(a_1)+..+f(a_n)$

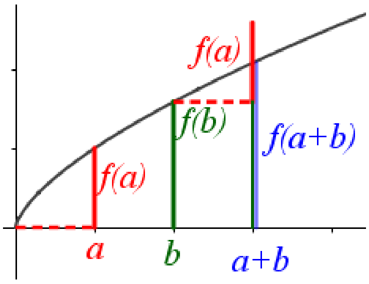
Dus ook $(x_1{}^p + \cdots + x_n{}^p)^{\frac{1}{p}} > (x_1{}^p)^{\frac{1}{p}}+\ldots+(x_n{}^p)^{\frac{1}{p}} = x_1 + \ldots + x_n$



Figuur 4

Voor p>1 is f: x $\rightarrow x^{\frac{1}{p}}$ een steeds langzamer stijgende functie.
Dan geldt $f(a+b) < f(a)+f(b)$ (zie figuur 5), en (dus)
$f(a_1+..+a_n) < f(a_1)+..+f(a_n)$

Dus ook $(x_1{}^p + \cdots + x_n{}^p)^{\frac{1}{p}} < (x_1{}^p)^{\frac{1}{p}}+\ldots+(x_n{}^p)^{\frac{1}{p}} = x_1 + \ldots + x_n$



Figuur 5

Om het linkerdeel van [iii] te bewijzen gebruiken we [B]
We ordenen nu de argumenten van *groot naar klein*. Nu geldt

$$max(x_1, \ldots, x_n) = x_1 = T_p(x_1) < T_p(x_1, x_2) < \cdots < T_p(x_1, \ldots, x_n)$$

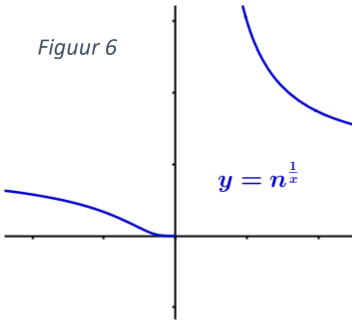
Voor $p \geq 1$ is T_p nauw verwant met *p-norm* van een vector
De p-norm van de vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, .., x_n)$ is gedefinieerd door

$$||\boldsymbol{x}||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$$

en deze bepaalt weer de zogenaamde *Minkowski-afstand* tussen twee punten:

$$(|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad ((p \geq 1)$$

Voor p=0 is de definitie $T_p(x_1, \ldots, x_n) = (x_1{}^p + \cdots + x_n{}^p)^{\frac{1}{p}}$ niet te gebruiken. Ook het nemen van de limiet (voor p naar 0) levert weinig bruikbaars op, immers

Figuur 6


$$\lim_{p\downarrow 0} T_p = \lim_{p\downarrow 0}(x_1{}^p + \cdots + x_n{}^p)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\downarrow 0}(1 + \cdots + 1)^{\frac{1}{p}} =$$

$= \lim_{p\downarrow 0} n^{\frac{1}{p}} = \infty$ en $\lim_{p\uparrow 0} n^{\frac{1}{p}} = 0$ (zie ook figuur 6)

Echter $\lim_{p\to 0} M_p$ (dus de limiet van het bijbehorende gemiddelde voor $p \to 0$) geeft wel een interessant resultaat.

We concentreren ons in eerste instantie op

$$\ln(M_p) = \ln\left[\left(\frac{x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\right] = \frac{1}{p}\ln\left(\frac{x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p}{n}\right) = \frac{\ln(x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p)-\ln(n)}{p} \quad \text{[formule 2]}$$

Immers $\ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p} \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{p}(\ln(a) - \ln(b)) = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{p}$

Voor zowel teller als noemer van de breuk waarmee formule 2 eindigt geldt dat de limiet voor $p \to 0$ gelijk is aan 0.

We kunnen dus gebruik maken van de regel van l'Hôpital die stelt dat we teller en noemer mogen vervangen door de afgeleides (naar *p*)

De afgeleide van de teller is gelijk aan $\frac{{x_1}^p \cdot \ln(x_1) + \cdots + {x_n}^p \cdot \ln(x_n)}{{x_1}^p + \cdots + {x_n}^p}$

Immers $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln(f(p)) = \frac{1}{f(p)} \cdot f'(p)$ en $\ln(n)$ is niet afhankelijk van *p*

De limiet van de afgeleide van de teller is eenvoudig te berekenen

$$\lim_{p \to 0} \frac{{x_1}^p \cdot \ln(x_1) + \cdots + {x_n}^p \cdot \ln(x_n)}{{x_1}^p + \cdots + {x_n}^p} = \frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n}.$$

De afgeleide van de noemer is 1, dus de conclusie is dat $\lim_{p \to 0} \ln(M_p) = \frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n}$

Omdat $f: x \to e^x$ een continue functie is kunnen we schrijven:

$$\lim_{p \to 0} M_p = e^{\frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n}} = \left(e^{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{\ln(x_1)} \cdot \ldots \cdot e^{\ln(x_n)}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ Het gaat dus om het *meetkundig gemiddelde* !

Vaak wordt M_0 dan ook zo gedefinieerd:

$M_0(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ [formule 3]

Het verband tussen M_p en T_p wordt gegeven door $M_p = T_p \cdot n^{-\frac{1}{p}} \leftrightarrow T_p = M_p \cdot n^{\frac{1}{p}}$

Maar daar schieten we niet echt veel mee op.

Het is misschien verleidelijk om naar analogie daarvan te stellen dat

$T_0(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ [suggestie 1]

maar dat zou tot rare sprongen leiden. Zo geldt:

$T_{0,1}(2, 3) = (2^{0,1} + 3^{0,1})^{10} \approx 2{,}51 \times 10^3$; $T_{-0,1}(2, 3) = (2^{-0,1} + 3^{-0,1})^{-10} \approx 2{,}39 \times 10^{-3}$;

$T_{0,01}(2, 3) = (2^{0,01} + 3^{0,01})^{100} \approx 3{,}11 \times 10^{30}$; $T_{-0,01}(2, 3) \approx 1{,}93 \times 10^{-30}$;

$T_{0,001}(2, 3) = (2^{0,001} + 3^{0,001})^{1000} \approx 2{,}62 \times 10^{301}$ en $T_{-0,001}(2, 3) \approx 2{,}29 \times 10^{-301}$;

Terwijl volgens suggestie 1 zou moeten gelden: $T_0(2, 3) = 2 \times 3 = 6$

Wel lijkt te gelden: $T_p(a, b) \times T_{-p}(a, b) = a \times b$ (voor $a, b > 0$)

Dit klopt inderdaad. Immers $a^{-p} + b^{-p} = \frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} = \frac{b^p}{a^p b^p} + \frac{a^p}{a^p b^p} = \frac{a^p + b^p}{a^p b^p}$

Daaruit volgt $T_{-p} = (a^{-p} + b^{-p})^{-1/p} = \left(\frac{a^p + b^p}{a^p b^p}\right)^{-1/p} = ab \cdot (a^p + b^p)^{-1/p}$

Anderzijds geldt: $T_p = (a^p + b^p)^{1/p}$

Vermenigvuldigen geeft het gewenste resultaat.

Meer algemeen lijkt te gelden:

$$\lim_{p\to 0}\left(T_p(x_1,\dots,x_n)\cdot T_{-p}(x_1,\dots,x_n)\right) = (x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{2}{n}}$$

Om dit te bewijzen gebruiken we soortgelijke aanpak als bij M_p.

$\ln\left(T_p(x_1,\dots,x_n)\cdot T_{-p}(x_1,\dots,x_n)\right)=$

$$\ln\left[(x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p)^{1/p}\cdot(x_1{}^{-p}+\cdots+x_n{}^{-p})^{-1/p}\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\ln(x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p)-\frac{1}{p}\ln(x_1{}^{-p}+\cdots+x_n{}^{-p}) =$$

$$= \frac{\ln(x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p)-\ln(x_1{}^{-p}+\cdots+x_n{}^{-p})}{p}$$

Bij het bepalen van de limiet voor $p\to 0$ gebruiken we weer l'Hôpital.

De afgeleide van de teller is: $\frac{x_1{}^p\cdot\ln(x_1)+\cdots+x_n{}^p\cdot\ln(x_n)}{(x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p)}+\frac{x_1{}^{-p}\cdot\ln(x_1)+\cdots+x_n{}^{-p}\cdot\ln(x_n)}{(x_1{}^{-p}+\cdots+x_n{}^{-p})}$

De limiet voor $p\to 0$ geeft nu $\frac{\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n)}{n}+\frac{\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n)}{n}=\frac{2}{n}\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)$

Voor $T_p(x_1,\dots,x_n)\cdot T_{-p}(x_1,\dots,x_n)$ betekent dit dat dit voor $p\to 0$ convergeert naar

$$e^{\frac{2}{n}\cdot\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)} = \left(e^{\ln(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)}\right)^{\frac{2}{n}} = (x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{2}{n}}$$

Dat zou ervoor pleiten om $T_0(x_1,\dots,x_n)$ te definiëren als

$\lim_{P\to 0}\sqrt{T_p(x_1,\dots,x_n)\cdot T_{-p}(x_1,\dots,x_n)} = (x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$ [suggestie 2]

Dat zou betekenen dat $T_0(x_1,\dots,x_n)$ evenals $M_0(x_1,\dots,x_n)$ als *meetkundig gemiddelde* kan worden beschouwd van de getallen $x_1,\dots,x_n$.

Toepassingen?

Wat is de relevantie van bovenstaande voor de dagelijkse onderwijspraktijk? Ik denk dat het laten zien dat ogenschijnlijke uiteenlopende verbanden, formules en stellingen behoren tot één familie een belangrijke taak van het wiskundeonderwijs is.
Het benadrukken van de overeenkomsten tussen bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras en de lenzenformule kan al op een zeer eenvoudige wijze.

Bij opgaven n.a.v. de stelling van Pythagoras wordt op het vo al enkele tientallen jaren gewerkt met een tabel, die er ongeveer uit kan zien als hiernaast. Van belang is dat de lengte van de schuine (en dus langste) zijde in het vakje linksonder komt, en de lengte van de rechthoekzijden daarboven. Ervaringen wijzen erop dat met een dergelijke tabel minder fouten gemaakt worden bij toepassingen van de stelling van Pythagoras.
In feite gaat het hier om T_2 met doorgaans twee argumenten

	z	z^2	
rhz	4	16	
rhz	?		+
sz	9	81	

Het is misschien de moeite waarde deze aanpak ook eens uit te proberen bij andere berekeningen rond T_p zoals de lenzenformule en vervangingsweerstanden.
Met behulp van dergelijke tabellen kan formule 1b ($T_p{}^p = x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p$) als het ware geconcretiseerd worden. Een aanpak die m.i. het inzicht in dit type formules kan bevorderen.

Een uitwerking van een opgave waarbij gegeven is dat de brandpuntafstand 9 cm is en de voorwerpsafstand 27 (cm) en de beeldafstand moet worden berekend zou er zo uit kunnen uitzien:

Vanwege het belang van de (juiste) eenheden zijn die uitdrukkelijk vermeld in de kolomkoppen.

		cm	cm^{-1}	
v		27	1/27	
b		?		**+**
f		9	1/9	

Bij Pythagoras worden soms de bewerkingen ‘kwadrateren’ en ‘wortel nemen’ aan het schema toegevoegd. Als het gaat om lenzenformule (of vervangingsweerstand) werkt ‘het omgekeerde nemen’ beide richtingen op, immers: $(x^{-1})^{-1} = x$

Gerard Koolstra

[5-2-2019]

[1] Een veel gebruikte niet commutatieve en niet associatieve bewering is *tot de macht*.
Zo geldt $(10^3)^2 = 10^6$ maar $10^{(3^2)} = 10^9$. Daarom is a^{b^c} alleen gedefinieerd wanneer de conventie wordt geaccepteerd dat daarmee $a^{(b^c)}$ wordt bedoeld.