

Drogredenen in een mathematische analyse

Verdieping van het inzicht in een alledaags mechanisme

Roland Siemons en Christiaan Boudri

Met de vraag naar de beweging van een karretje (vraag 13) in de Nationale Wetenschapsquiz 2018 hebben NWO en de VPRO ons een intrigerende vraag voorgeschoteld. Een vraag met een antwoord naar aanleiding waarvan er behoorlijk over wetenschap kan worden nagedacht. Het antwoord dat op televisie en op de website van NWO werd gepresenteerd is intrigerend. De conclusie is correct en in overeenstemming met de tijdens de tv-uitzending uitgevoerde metingen, maar de analyse is onjuist. We laten zien waarom dit zo is en wat een goede analyse van het mechanisme aan interessante verschijnselen kan onthullen.

Het karretje van de Nationale Wetenschapsquiz

Vraag 13 in de Nationale Wetenschapsquiz 2018 betreft een karretje (Figuur 1).



Figuur 1: Het karretje zoals gepresenteerd door NWO (© Robert Lagendijk / vpro).

De vraag luidde: “Dit karretje staat op tafel, met een liniaal erbovenop. Je drukt de liniaal van boven op het grote wiel en beweegt hem naar rechts. Wat doet het karretje?” Rijdt het naar links, blijft het stilstaan of rijdt het naar rechts? De demonstratie tijdens de tv-uitzending op 28 december 2018 liet zien dat het karretje naar rechts beweegt. Ook als de liniaal stil werd gehouden en de tafel naar links werd getrokken, reed het karretje naar rechts. Volgens NWO was dat laatste makkelijk te begrijpen. Ze beweerde dat als de tafel naar links wordt getrokken, de kleine wieltjes met de klok mee gaan draaien en het grote wiel tegen de klok in. En daaruit volgt, meent NWO, dat het karretje naar rechts rijdt, waarbij het grote wiel naar rechts langs de liniaal glijdt. Aangezien het vanuit de cart niet uitmaakt wat er beweegt: het tafelblad naar links of de liniaal naar rechts, zal het karretje dus ook naar rechts rijden als je de tafel stil houdt en de liniaal naar rechts beweegt, aldus de uitleg tijdens de uitzending en op de website van NWO.¹ Deze argumentatie houdt geen stand. Ze doet een beroep op een ruimtelijke intuïtie die aannemelijk lijkt, maar toch onjuist is.

De cirkelredenering van de Wetenschapsquiz

Het is lastig om dit aan te tonen, juist omdat het een intuïtie betreft die sommigen bij voorbaat al delen. Dat de analyse van NWO echter wel foutief moet zijn blijkt uit het volgende. Aangezien NWO stelt dat het niet uitmaakt “wat er beweegt: het tafelblad naar links, of de liniaal naar rechts”, mogen we hetzelfde argument

¹ www.nwo.nl/actueel/evenementen/terugblik/de+nationale+wetenschapsquiz/2018

voor de bewegende tafel en stilstaande lineaal dus ook toepassen op de stilstaande tafel en de bewegende liniaal. Dan volgt: “*Als je de liniaal naar rechts beweegt, en het tafelblad stilhoudt, gaat het grote wiel met de klok mee draaien, en de kleine wielen tegen de klok in. En dus rijdt het karretje naar links.*” Precies dezelfde redenering leidt dus tot twee tegengestelde conclusies. Daarom moet ze wel foutief zijn. Schijnbaar begrijpt NWO – al vindt zij dit “*moeilijk te begrijpen*”² – zonder het verder uit te leggen, hoe de redenering wel op de bewegende tafel maar niet op de bewegende liniaal zou mogen worden toegepast. Dat inzicht is schijn. Want bij nadere beschouwing berust het argument van NWO op een cirkelredenering: men vooronderstelt datgene wat men wil bewijzen, namelijk dat de kleine wielen met de klok meedraaien. Dat moet echter nog maar blijken. Ze gaan namelijk dan en alleen dan zo draaien indien het het karretje ten opzichte van de tafel naar rechts beweegt (hetgeen eerst bewezen moet worden). En die noodzakelijke conditie wordt allerminst aange-toond door de toevoeging van NWO dat “*naar links rijden niet kan, omdat het grote wiel dan via de kleine wielen zijn eigen snelheid oneindig hoog zou moeten opvoeren.*”³ Mogelijk heeft NWO deze raadselachtige overweging als extra argument bedoeld, maar zonder verheldering kunnen wij hier niet op ingaan. Voor het geval dat de tafel naar links beweegt en de liniaal stilstaat is ook een alternatieve beweging denkbaar, namelijk dat de kleine wielen tegen de klok indraaien, waarbij het karretje sneller naar links beweegt dan de tafel. Zetten we deze gedachtegang door, dan vinden we dat het grote wiel met de klok meedraait, zodat de relatieve snelheid ten opzichte van de liniaal naar links is gericht. Aangezien de liniaal in het geval van de bewegende tafel stilstaat, is deze gedachtegang geheel in zichzelf consistent. En toch met een tegengesteld resultaat voor exact hetzelfde geval. De argumentatie indien zuiver voltrokken kan derhalve niet tot een conclusie leiden.

Ten tweede, voor als dit niet overtuigend genoeg is, brengen we het argument van NWO een klein beetje anders onder woorden om het nog helderder voor ogen te krijgen: *Als je de liniaal stilhoudt en het tafelblad naar links trekt, gaan de wielen die over het tafelblad (het bewegende vlak) rollen met de klok mee draaien, en het wiel dat over de liniaal (het stilstaande vlak) rolt tegen de klok in. En dus rijdt het karretje naar rechts.* Roteer nu het karretje over 180° om een as evenwijdig aan de wielassen door een punt halverwege tafel en liniaal. Als resultaat bevindt de oorspronkelijk rechterkant van het karretje zich nu links en *vice versa*, en het karretje staat met de kleine wielen naar boven. Het gekantelde karretje zal nu naar links bewegen waar het originele karretje naar rechts bewoog en *vice versa*. We passen de redenering van NWO nu toe op het gekantelde karretje: *Als je de liniaal stilhoudt en het tafelblad naar links trekt, gaat het wiel dat over het tafelblad rolt met de klok mee draaien, en de wielen die over de liniaal rollen tegen de klok in. En dus rijdt het karretje naar rechts.* Het zou echter juist naar links moeten gaan, want het originele karretje ging in die situatie naar rechts. De analyse van NWO leidt dus tot een tegenstrijdigheid met zowel het eigen uitgangspunt als met de waarneming, en is dus foutief.

Als extraatje is op de website van de VPRO nog vermeld: “*Bovendien duw je naar rechts. Dus zou het raar zijn als het karretje naar links reed.*”⁴ Ja, dat zou raar zijn! Maar het gaat in deze opgave nu juist over een raar ding met onverwachte eigenschappen. De situatie is veel gecompliceerder dan die van een enkele kracht. Er ontstaan tegenkrachten in de vorm van wrijving, traagheidskrachten en reactiekrachten. En passen we het argument toe op de naar links bewogen tafel met de stilstaande liniaal, dan zou het karretje naar links moeten bewegen, wat het niet deed. Ook dit argument is dus foutief. Het valt bovendien op dat dit argument helemaal niet ingaat op de bijzondere constructie van het karretje. Gegeven de formulering is het net alsof je het zou kunnen toepassen op elk ander object dat de plaats inneemt van het karretje. Bijvoorbeeld op een cilinder. Inderdaad zou zo’n cilinder tussen tafelblad en liniaal, indien de tafel naar links wordt geduwd, niet naar rechts afrollen over de liniaal. En, naar analogie, niet naar links indien uitsluitend de liniaal naar rechts wordt geduwd. Niets bijzonders, maar wat doet het karretje? Daarop heeft dit argument geen vat.

Op drie manieren blijkt dus de analyse van de Wetenschapsquiz tot een tegenstrijdigheid te leiden met zowel het eigen uitgangspunt als met de waarneming, en kan dus niet juist zijn. We moeten op zoek naar een betere verklaring.

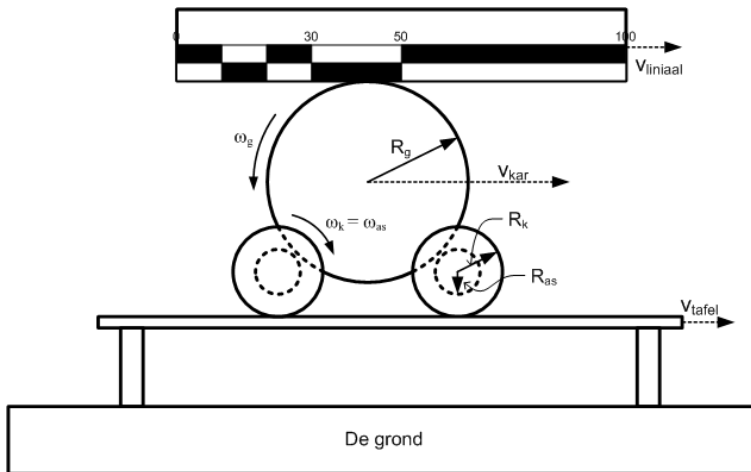
2 www.nwo.nl/actueel/evenementen/terugblik/de+nationale+wetenschapsquiz/2018

3 www.nwo.nl/actueel/evenementen/terugblik/de+nationale+wetenschapsquiz/2018

4 www.vpro.nl/programmas/nwq/lees/nieuws/2018/Vragen-2018.html

Kinematische analyse

Om het mechanisme te verklaren maken we een kinematische analyse van de constructie waarbij we ook naar het inwendige kijken. Figuur 2 is een schematische weergave van het karretje. De pijlen geven niet de feitelijke bewegingsrichting aan, maar definiëren de positieve richting. Als de tafel naar links wordt bewogen, is de snelheid van de tafel derhalve negatief.



Figuur 2: Schematische weergave.

We veronderstellen dat er geen slip optreedt. Dan geldt:

- tussen het grote wiel en de liniaal: op het punt van het grote wiel dat de liniaal raakt is de snelheid van dat wielpunt gelijk aan de snelheid van de liniaal.
- tussen de kleine wielen (onderling identiek) met de tafel: op het punt van een klein wiel dat de tafel raakt is de snelheid van dat wielpunt gelijk aan de snelheid van de tafel. Dus 0 als de tafel stilstaat. Dit lijkt misschien vreemd, maar je maakt het dagelijks mee op je fiets: als het ventiel zich aan de onderkant van je wiel bevindt staat het heel even stil, en als het bovenaan vooruit flitst gaat het twee keer zo snel als je fiets.
- De omtreksnelheden van het grote wiel en de beide assen van het kleine wiel zijn gelijk. Dit geeft een verband tussen de beweging van het grote wiel en die van de kleine wielen, waar we later op terugkomen.

Het grote wiel rolt zonder slip over de liniaal. Het karretje heeft dezelfde snelheid als de as van het grote wiel. Deze snelheid wordt bepaald door de omwentelingssnelheid van het grote wiel, de straal van dat wiel, en de snelheid van de liniaal, als volgt:

$$v_{kar} = \omega_g \cdot R_g + v_{liniaal} \quad (1)$$

Je kunt ook zeggen dat voor het verschil tussen de snelheid van de liniaal en die van het karretje geldt:

$$v_{kar} - v_{liniaal} = \omega_g \cdot R_g \quad (2)$$

De kleine wielen rollen zonder slip over de tafel. Analoog aan de voorgaande vergelijking geldt voor de verschillensnelheid van tafel en karretje:

$$v_{kar} - v_{tafel} = \omega_k \cdot R_k \quad (3)$$

Als $v_{tafel} = 0$ volgt $v_{kar} = \omega_k \cdot R_k$; een vergelijking die geldt voor een wiel dat zonder te vervormen en zonder te slippen over een stilstaande weg rolt. Met behulp van deze vergelijking wordt de snelheid berekend die wordt weergegeven op het dashboard van een ouderwetse auto, nog zonder GPS. Door de snelheid van de tafel in de formule te houden (niet reeds op 0 te stellen), kunnen we straks situaties analyseren waarbij de tafel beweegt, bijvoorbeeld naar links of rechts terwijl de liniaal stilstaat.

Er zijn twee identieke assen die het grote wiel koppelen aan de kleine wielen. Omdat er, in het geïdealiseerde model, geen slip optreedt, is de onderlinge draaisnelheid van de wielen bepaald als:

$$\omega_k = \omega_{as} \quad (4)$$

$$\omega_{as} = \omega_g \cdot \frac{R_g}{R_{as}} \quad (5)$$

Uit de vergelijkingen 2, 3, 4 en 5 volgt de volgende algemene formule:

$$v_{kar} = \frac{\left(v_{liniaal} - v_{tafel} \frac{R_{as}}{R_k}\right)}{\left(1 - \frac{R_{as}}{R_k}\right)} \quad (6)$$

Hiermee is er een precies gedefinieerde relatie gegeven tussen de drie snelheden, v_{kar} , $v_{liniaal}$ en v_{tafel} . Als er twee gegeven zijn, ligt de derde ook vast (behalve in een bijzondere situatie, waarop we nog nader zullen ingaan). We merken op dat de vergelijkingen gelden voor alle denkbare waarden van R_{as} , R_k en R_g . Zelfs voor situaties waarin R_{as} groter dan R_k zou zijn. In zo'n geval moet er ruimte wordt gegeven aan de dikke as, bijvoorbeeld door de kleine wielen over een rails te laten rijden.

Als de snelheid van de tafel gelijk 0 is, volgt uit vergelijking 6:

$$v_{kar} = \frac{v_{liniaal}}{\left(1 - \frac{R_{as}}{R_k}\right)} \quad (7)$$

Omdat in de gestelde opgave de as van de kleine wielen dunner is dan de kleine wielen zelf (dus $R_{as} < R_k$) geldt dat de noemer van vergelijking 7 kleiner is dan 1 maar groter dan 0. v_{kar} heeft daarom hetzelfde teken als $v_{liniaal}$ en is in absolute zin groter. Als de liniaal naar rechts beweegt, dan gaat het karretje nog sneller naar rechts. En als de liniaal naar links beweegt, gaat het karretje nog sneller naar links. Er is wel iets vreemds aan de hand als de straal van de kleine wielen in de buurt komt van die van de as: dan wordt de noemer bijna gelijk aan 0 en wordt de snelheid van het karretje heel erg groot.

Als de liniaal stilstaat en de tafel beweegt, dan is $v_{liniaal} = 0$ en herschrijven we vergelijking 6 tot:

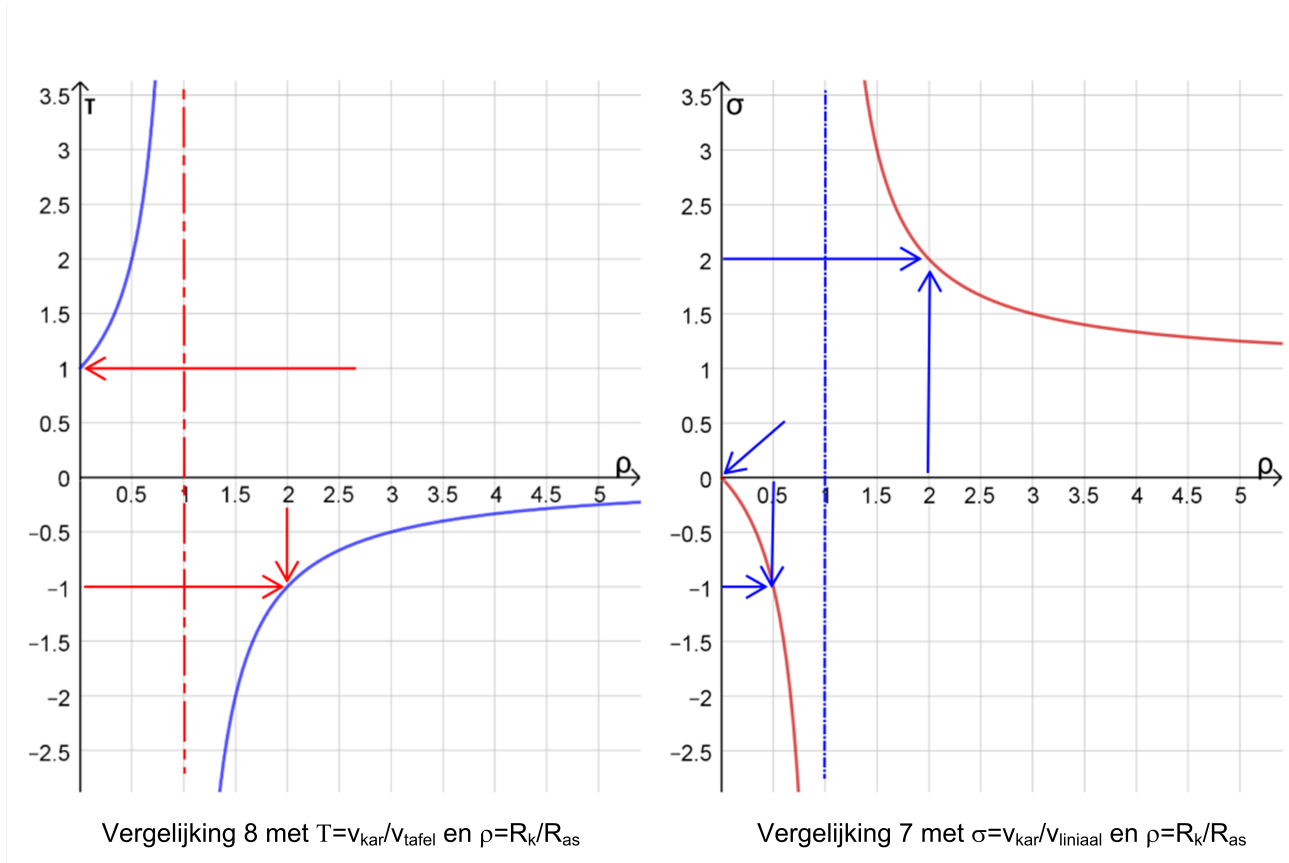
$$v_{kar} = \frac{-v_{tafel}}{\left(\frac{R_k}{R_{as}} - 1\right)} \quad (8)$$

Als de as van de kleine wielen dunner is dan de kleine wielen zelf (dus $R_{as} < R_k$), is de noemer positief. v_{kar} is dan tegengesteld gericht aan v_{tafel} . Als de tafel naar links beweegt (negatieve snelheid), gaat het karretje naar rechts. Omgekeerd gaat het karretje naar links als de tafel naar rechts beweegt. En wat gebeurt er als de assen dikker zouden zijn dan de kleine wielen ($R_{as} > R_k$) (bij toepassing van rails, zie de opmerking onder vergelijking 6)? In dat geval wordt in zowel vergelijking 7 als vergelijking 8 de noemer negatief, en beweegt het karretje tegengesteld aan de bewegende liniaal, respectievelijk in dezelfde richting als de bewegende tafel.

Meer algemeen is de snelheid van het karretje afhankelijk van de verhouding van de stralen van de kleine wielen en hun assen:

- $R_k > 2 R_{as}$: het karretje beweegt langzamer dan de tafel, maar in tegengestelde richting.
- $R_k = 2 R_{as}$: het karretje beweegt even snel als de tafel, maar in tegengestelde richting.
- $R_{as} < R_k < 2 R_{as}$: het karretje beweegt sneller dan de tafel, in tegengestelde richting.
- $R_k < R_{as}$: het karretje beweegt in dezelfde richting als de tafel.

De vergelijkingen 7 en 8 zijn grafisch weergegeven in Figuur 3. Daarbij hebben we met pijlen enkele punten aangewezen die een nader onderzoek waard zijn.



Figuur 3: Grafische weergave van vergelijking 7 en 8.

Beschouwen we het oorspronkelijke geval dat de as van de kleine wielen dunner is dan de kleine wielen zelf (dus $R_{as} < R_k$). Wat gebeurt er als de wielmaat in de buurt komt van R_{as} ? Dan komt de noemer van vergelijking 6, 7 en 8 steeds dichterbij 0, en gaat het karretje dus steeds sneller. Hoe kan dit? Tot nu toe was de analyse zuiver kinematisch of meetkundig. De benodigde krachten hebben we buiten beschouwing gelaten. Maar je zult een kracht moeten uitoefenen op de liniaal, al is het maar om de wrijvingskrachten van het rollende karretje te overwinnen. Stel je nu voor, – je begint met een klein wiel dat maar een fractie groter is dan zijn as, terwijl door snelle slijtage de wielmaat steeds dichterbij de asmaat benadert. We bewegen de liniaal met een constante snelheid, maar de snelheid van het karretje wordt steeds groter, zo blijkt uit vergelijking 7. Dus worden de wrijvingskrachten ook steeds groter. Om de liniaal een constante snelheid te blijven geven zul je steeds harder moeten duwen of trekken. Dit heeft natuurlijk zijn beperkingen; uiteindelijk ontbreekt je de kracht om de liniaal in beweging te houden, en valt het karretje stil.

Ga je uit van een situatie waarbij de stralen van de as en de kleine wielen meteen al gelijk zijn, dan kun je de liniaal überhaupt niet in beweging krijgen ten opzichte van de tafel. Immers – en we analyseren nu weer zuiver kinematisch –, aangezien $\omega_k \cdot R_g = \omega_g \cdot R_k$, volgt uit vergelijking 2 en 3:

$$v_{tafel} - v_{liniaal} = 0 \quad (9)$$

Staat de tafel nu stil ($v_{tafel}=0$), dan staat de liniaal ook stil. De tafel en de liniaal zijn in de horizontale richting onderling vast verbonden door het karretje. Een horizontaal krachtenspel op tafel en liniaal krijgt geen van beiden in beweging. Het karretje ook niet. Over de snelheid van het karretje is in deze situatie niets bepaald. Het karretje kan vrij bewegen!

Conclusie

We hebben laten zien dat de redenering toegepast in de Wetenschapsquiz een cirkelredenering is en daarom de waargenomen bewegingsrichting van het karretje niet kan verklaren. Ook een tweede argument op de website van de VPRO leidt tot een tegenspraak. De Wetenschapsquiz redeneert vooral op grond van intuïties. Maar kennelijk kunnen intuïties voor de analyse van het vraagstuk misleidend zijn.

Met eenvoudige kinematica is het probleem vervolgens opgelost en zijn bovendien enkele bijzondere fenomenen gevonden die niet voor de hand liggen. Mechanismes zoals die van het karretje tussen twee starre platen komen we in iets andere vorm tegen in alledaagse voorwerpen zoals de versnellingsbak van een auto, een versnellingsnaaf van een fiets en uurwerken. Niet lineair maar uitgevoerd in een rotatiesymmetrische vorm.⁵ Het is daarom belangrijk dit soort mechanismen goed te begrijpen.

Misschien zouden de quizmasters er goed aan doen hun eigen analyse zoals weergegeven op de website van NWO en VPRO te rectificeren, en daarbij ook uit te leggen waarom die foutief is. Het is voor ons allen immers leerzaam niet alleen in te zien wat de juiste redenering is, maar ook waarom een onjuiste redenering onjuist is.

Auteurs

dr. ir. Roland V. Siemons (siemons@cleanfuels.nl) studeerde werktuigbouwkunde aan de Universiteit Twente, en promoveerde in de economie en econometrie aan de Universiteit van Amsterdam. Roland ontwikkelt technologieën voor de productie van duurzame energiedragers uit biomassa bij de firma Clean Fuels.

dr. ir. J. Christiaan Boudri (Christiaan.Boudri@han.nl) studeerde werktuigbouwkunde aan de Universiteit Twente, en promoveerde in de wetenschapsgeschiedenis. Christiaan is docent Engineering aan de Faculteit Techniek van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen en voorzitter van de Werkgroep MBO-HBO Wiskunde (NVVW).

⁵ Een website met vele voorbeelden is https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Epicyclic_gears