Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

# MERIA SCENARIOS EN MODULES

*(deze pagina is bewust leeg gelaten)*

# MERIA SCENARIOS EN MODULES

EINDREDACTIE
*Kristijan Cafuta*

TEKST GESCHREVEN DOOR
*Sanja Antoliš, Jeanette Axelsen, Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Aneta Copić, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Britta Jessen, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw, Petra Žugec, Vesna Županović*

ONTWERP EN VISUELE VORMGEVING
*Irina Rinkovec*

VERTALING
*Kees Koenders, Rogier Bos*

Project MERIA, augustus 2019.
www.meria-project.eu

*(deze pagina is bewust leeg gelaten)*

# Inhoudsopgave

# Introductie

Het boekje MERIA Scenarios en Modules vertegenwoordigt een van de belangrijkste resultaten van het MERIA-project en omvat vijf onderwijsscenario's en de bijbehorende modules. Het model/sjabloon voor de scenario's en modules is gegeven in *MERIA-Sjabloon voor Scenario's en Modules*. Hierin is nog een voorbeeldscenario en -module gepubliceerd. Het ontwerp van deze materialen is gebaseerd op de theoretische achtergrond gepresenteerd in de *MERIA Practische Gids voor Onderzoekend Wiskundeonderwijs*.

Een *scenario* beschrijft een didactische situatie, te realiseren in een les, en de ondersteunende epistemologische veronderstellingen en redeneringen. Het beschrijft ook de doelen van de situatie in termen van het curriculum en specifieke leerdoelen en competenties, en het biedt een duidelijke structuur voor de les op basis van de Theorie van Didactische Situaties. Een *module* bevat - naast het scenario - geschreven en digitale materialen, zoals opdrachten voor studenten of digitale werkbladen, een bespreking van de reden voor de keuze van de probleemsituatie en de onderwijsmethoden met verdere perspectieven vanuit de theorie van Realistisch Wiskundeonderwijs, en ook fragmenten van de ervaringen en resultaten die zijn verzameld tijdens het uitproberen van het scenario, inclusief potentiële leerwinst en valkuilen voor studenten met specifieke voorkennis.

Het gebruik van een scenario kan een uitdagende taak zijn voor een docent. De basisideeën erachter liggen misschien niet voor de hand, en het leerdoel kan moeilijk te bereiken zijn. Daarom maken de modules enkele van de bedoelingen van de auteurs explicieter en bieden ze ondersteuning aan de docent door variaties te beschrijven die kunnen worden verwacht bij de implementatie van een scenario. Hier worden de volledige modules gepubliceerd; de scenario's worden afzonderlijk in een gebruiksvriendelijkere versie gepubliceerd op de webpagina van het project.

Alle scenario's hebben potentieel voor studenten om ICT te gebruiken voor wiskundig onderzoek, maar de problemen kunnen ook zonder technologie worden aangepakt. Deze variaties worden ook beschreven in het scenario of in de module. Alle aanvullende les- en leermaterialen voor elk scenario worden gepubliceerd op de MERIA-webpagina.

Het moet worden opgemerkt dat het tijd kost voor de studenten om te wennen aan op onderzoekend leren, en ook voor de leraren om het evenwicht te vinden tussen (overmatig) ingrijpen (wat de mogelijkheid voor zelfstandig onderzoek van de studenten bemoeilijkt) en het bieden van te weinig middelen aan de studenten om zinvol onderzoek te kunnen doen. Het MERIA-projectteam is ervan overtuigd dat het optimaal zou zijn als een leraar de scenario's uitprobeert in een cyclus van professionele ontwikkeling door middel van MERIA-workshops, ondersteund door de *MERIA Praktische Gids voor Onderzoekend Wiskundeonderwijs*.

In de periode van juli 2017 tot december 2018 heeft het MERIA-projectteam ongeveer tien verschillende scenario's ontwikkeld die verschillende onderwerpen behandelen uit het curriculum van de partnerlanden: Kroatië, Denemarken, Nederland en Slovenië. In elk land werden drie tot vier scholen bij het project betrokken, waarin de scenario's werden getest. Veel dank gaat uit naar onze partners in bijbehorende scholen voor hun toegewijding. De bijbehorende scholen zijn:

- uit Kroatië: Gospodarska škola Varaždin, Tehnička škola Požega, Elekstrostrojarska škola Varaždin, XII. gimnazija Zagreb
- uit Denemarken: ZBC, Next København, Roskilde Katedralskole
- uit Nederland: Hermann Wesseling College, Stedelijk Gymnasium Utrecht
- uit Slovenië: Ekonomska šola Novo mesto, Gimnazija Jesenice, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Het proces van het testen van de scenario's heeft tot meerdere herzieningen geleid en interessante informatie opgeleverd die de scenario's heeft verbeterd. Het was cruciaal om de keuze te maken voor slechts vijf modules voor dit boekje, als de meest relevante (in alle landen!) en meest succesvolle producten van het project. De docenten van de bijbehorende scholen kregen eerst een theoretische achtergrond middels workshops verzorgd door de projectleden. Op deze manier waren docenten voorbereid om met de scenario's te werken. Implementaties van de scenario's in de klas werden geobserveerd door projectleden en/of een andere docent van dezelfde school. De docenten hebben nadien nagedacht over de uitvoering van de les op basis van een vragenlijst en tijdens de volgende workshop aan de projectleden gerapporteerd. Het werk van studenten is gedocumenteerd en studenten hebben ook een korte vragenlijst ingevuld over in hoeverre zij de les uitdagend en interessant vonden en graag weer een soortgelijke activiteit zouden willen volgen. Meer informatie over de vragenlijsten, rapporten en methodologie is beschikbaar in de *MERIA-Project Impactanalyse*.

De keuze van vijf scenario's, waarvoor complete modules in dit boekje worden gepresenteerd, is gemaakt op basis van criteria die zijn vastgesteld tijdens de projectvergadering in Kopenhagen in augustus 2018: het potentieel voor onderzoek en het a-didactische potentieel van het scenario, de haalbaarheid van het scenario voor de studenten en de leraren, de geschiktheid van het onderwerp in termen van relevantie en toepasbaarheid, reacties van studenten, evenals de diversiteit van onderwerpen die aanwezig zijn in de middelbare schoolcurricula van de partnerlanden.

De gekozen MERIA-scenario's omvatten de volgende onderwerpen: modellering van een eenvoudig bedrijfsprobleem met behulp van een stuksgewijs lineaire functie, modellering van hoe de remweg afhankelijk is van de snelheid met behulp van een kwadratische functie, een elementair meetkundeprobleem (op te lossen met behulp van middelloodlijnen), redeneren over salarisverdeling in enkele bedrijven met behulp van gemiddelde, mod en mediaan, en het modelleren van een een glijbaan of een skischans als introductie op de helling van een kromme. Onze bedoeling was niet om zoveel mogelijk onderwerpen in het (gedeelde) curriculum te behandelen, maar om voorbeelden te geven die leraren ondersteunen bij het opzetten van onderzoekend leren in hun klaslokalen. We vinden deze scenario's geschikt voor de ontwikkeling van wiskundig modelleren, progressieve formalisatie, vermoeden en bewijzen, wetenschappelijke benadering, aanmoediging van begrip in plaats van onthouden, kritisch denken, autonoom onderzoek en toepassingen voor echte problemen.

We eindigen deze inleiding door elk van de vijf scenario's te beschrijven in termen van het centrale probleem en de beoogde leerdoelen.

In het eerste scenario werd de studenten gevraagd om gegevens over de productie van fietsen en de bouw van een fabriek op vier verschillende locaties te overwegen, om een bedrijf te adviseren over het vinden van de optimale locatie, afhankelijk van de te verwachten productie. De productie op elke locatie kan worden gemodelleerd door een lineaire functie en de studenten kunnen verschillende strategieën ontwikkelen om de locaties te vergelijken. Studenten gebruiken grafische weergaven en eventueel ICT, denken kritisch en vatten hun bevindingen samen om een rapport voor het bedrijf te schrijven.

Het tweede scenario vraagt de studenten om de afhankelijkheid van de remafstand van een auto van de beginsnelheid aan het begin van het remmen te bestuderen. De afhankelijkheid is kwadratisch, wat een nieuw type functie voor studenten is (veronderstelde voorkennis omvat alleen lineaire functies). Het scenario dient dus als een inleiding tot kwadratische functies, verbetert numerieke vaardigheden en redeneervermogen, en stimuleert bovendien het trekken van conclusies in alledaagse situaties met verantwoordelijkheidsgevoel.

In het derde scenario krijgen de studenten een kaart van een woestijn met zes putten en wordt hen gevraagd de kaart in gebieden te verdelen, afhankelijk van de nabijheid van punten tot de putten. Om het probleem op te lossen (construeer de zogenaamde Voronoi-diagrammen) is het noodzakelijk om middelloodlijnen te gebruiken. Studenten kunnen speciaal ontworpen applets gebruiken om het probleem te onderzoeken en verdere vergelijkbare situaties te construeren die leiden tot onderzoek naar cyclische configuraties van punten.

Het vierde scenario is gericht op eenvoudige statistische redeneringen over een gegevensset. De gegevens vertegenwoordigen de salarissen van werknemers in verschillende bedrijven en de taak van de studenten is om de gegevens te analyseren en een conclusie te trekken over waar ze het liefst zouden werken. Van studenten wordt verwacht dat ze de centrummaten, zoals gemiddelde en mediaan, ontwikkelen/gebruiken, maar hun analyse kan ook leiden tot andere gezichtspunten, zoals grafische voorstellingen van percentielen enz.

Het vijfde scenario gaat over de constructie van een glijbaan die bestaat uit een gebogen en recht stuk, die op een gladde manier moeten aansluiten - het punt van het scenario is dat "glad" een precieze wiskundige definitie heeft. De studenten wordt alleen gevraagd om de glijbaan zo te construeren dat deze 'comfortabel' glijdt. Daarom is het de taak om te analyseren op welke manier de twee delen moeten worden verbonden en om te ontdekken dat het rechte deel het gebogen deel op het contactpunt moet *raken*. Studenten kunnen verschillende krommen kiezen voor het gebogen pad om mee te beginnen en vervolgens veel verschillende strategieën nemen om de raaklijn te construeren. In het geval van kwadratische krommen kan het probleem op een elementaire manier worden opgelost, maar voor andere krommen leidt het probleem de studenten tot het idee van de afgeleide van een functie.

# MERIA Module “Fietsfabriek”

**Lineaire en stapsgewijze lineaire functies**

## Het lesscenario

<table>
<tr><td>Leerdoel</td><td>De constructie van stapsgewijze lineaire functies als optimale oplossing voor een probleem met meerdere lineaire voorwaarden.</td></tr>
<tr><td>Bredere leerdoelen</td><td>Grafieken tekenen van (lineaire) functies op papier en met ICT. Bespreking over het schalen van de grafieken langs één as. Dieper begrip van lineaire functies (de helling $a$ en de constante $b$) door ze te gebruiken met lineaire voorwaarden om stapsgewijs lineaire functies te construeren. Bespreking van de continue en discrete aspecten in relatie tot algebraïsche en grafische weergaven tijdens het modellering proces.<br>Onderzoeksvaardigheden: experimenteren met getallen voor het tekenen van een grafiek, onbelangrijke data en duidelijk suboptimale fabrieken negeren, resultaten van het modelleren interpreteren, verantwoordelijkheid nemen voor het eindverslag en bevindingen presenteren in de vorm van een advies.<br>Interdisciplinaire vaardigheden: Leerlingen zullen de verscheidene economische aspecten van het probleem kunnen bespreken, zoals de verschillen tussen winst en inkomsten. Professionele communicatievaardigheden worden benadrukt bij het schrijven van het verslag.</td></tr>
<tr><td>Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden</td><td>Het tekenen van de grafiek van een lineaire functie. Bekendheid met de notatie $f(x) = ax + b$ en het interpreteren van $a$ en $b$.</td></tr>
<tr><td>Leerjaar</td><td>Leeftijd van 15-16 jaar, klas 4-5 (nog eerder met kleinere getallen).</td></tr>
<tr><td>Tijd</td><td>50 min (80 min)</td></tr>
<tr><td>Benodigd materiaal</td><td>De tabel met data over de kosten
<table>
<tr><th>Locatie</th><th>Kosten van het bouwen van een fabriek op locatie in €</th><th>Kosten van het produceren van één fiets in de fabriek in €</th></tr>
<tr><td>A</td><td>300 000</td><td>120</td></tr>
<tr><td>B</td><td>450 000</td><td>110</td></tr>
<tr><td>C</td><td>660 000</td><td>60</td></tr>
<tr><td>D</td><td>680 000</td><td>80</td></tr>
</table>
Ruitjespapier en/of applets (om de lineaire voorwaarden aan te passen) en/of ICT in het algemeen, voor het maken van grafieken, aanpassen of toevoegen van voorwaarden, het vinden van snijpunten etc. Een breed krijtbord of whiteboard (of smartboard).</td></tr>
</table>

**Probleem**:
Je bent een consultant die bedrijven adviseert over de locatie waar ze hun nieuwe fietsfabrieken kunnen bouwen. Op basis van de tabel die de kosten laat zien van de verschillende locaties, wat zou je de bedrijven adviseren en waarom?[1]

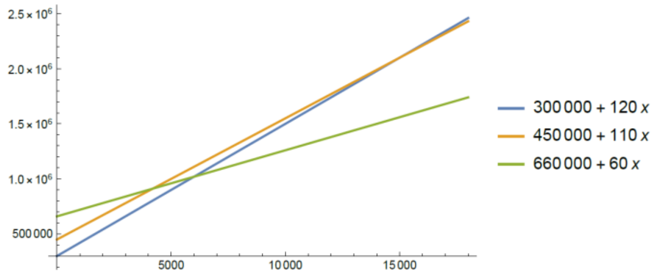

| **Fase** | **Acties van de leerkracht incl. uitleg** | **Acties en reacties van de leerlingen** |
|---|---|---|
| Devolutie (didactisch)<br><br>5 minuten | De leerkracht legt de situatie en de bovenstaande tabel uit, en legt het probleem voor. "Hoe zou je in het algemeen de bedrijven begeleiden bij het kiezen van een locatie voor hun fabriek? Werk samen met je buur en bereid een klassikale presentatie van jullie oplossing voor." | Leerlingen luisteren en begrijpen de relevantie van het probleem. Ze kunnen vragen hebben over de betekenis van de tabel en het probleem. De leerkracht zal de leerlingen de kans moeten geven om zulke vragen te stellen om er voor te zorgen dat iedereen het begrijpt. |
| Actie (a-didactisch)<br><br>15 (20) minuten | De leerkracht observeert en noteert hoe de leerlingen het probleem aanpakken. Dit is waar de leerkracht kennis opdoet over de voorkennis van de leerlingen.<br>Het is belangrijk dat de leerkracht geen hints en alleen – indien nodig - de opdracht nog eens duidelijk maakt. | De paren beginnen met het uitproberen van verschillende strategieën, gebaseerd op hun eigen voorkennis.<br>Zie "Mogelijke manieren voor de leerlingen om het leerdoel te behalen". Omdat de leerlingen in paren werken zal de a-didactische formulering voorkomen. |
| Formulering (didactisch)<br><br>10 (15) minuten | De leerkracht kiest groepen (tenminste drie) die verschillende strategieën presenteren bij het bord – het bord zal verdeeld moeten worden in gebieden voor de presentaties. De leerlingen mogen niets achteraf uitvegen. Laat de gekozen paren mondeling presenteren, beginnende met simpelere oplossingen. Op dit punt zal er geen validatie komen. | De paren presenteren zoals de leraar heeft aangegeven (eerst simpele oplossingen gebaseerd op getallen, daarna oplossingen met grafieken en functies). |
| Devolutie (didactisch)<br><br>1 minuut | Bespreek met je partner wat de overeenkomsten en verschillen zijn tussen de presentaties. Gebruik dat om je eigen antwoord te verbeteren. Jullie hebben vijf (tien) minuten. | Leerlingen luisteren.<br><br>De leerkracht moet ervoor zorgen dat alle leerlingen het begrijpen. |

[1] Dit probleem is geinspireerd door Example 2.10 uit het boek „*Primijenjena matematika podržana računalom*" van het project „*STEM genijalci*".

| | | |
|---|---|---|
| Actie/ formulering (a-didactisch)<br><br>5 (15) Minuten | De leerkracht loopt rond om te observeren wat de paren bespreken, en hoe ze gebruik maken van de ideeën van de anderen. | De paren wijzen naar de overeenkomsten en verschillen, en proberen daarmee hun eigen oplossing te verbeteren. |
| Formulering en validatie (didactisch)<br><br>10 (15) minuten | De leerkracht probeert zoveel mogelijk observaties en verbeterde antwoorden van de paren (klassikaal) te behandelen. De leerkracht streeft ernaar dat leerlingen fouten uit de vorige oplossingen vaststellen. | Leerlingen formuleren overeenkomsten en verschillen, en leggen daarbij uit hoe ze hun eigen oplossing daarmee hebben kunnen verbeteren. Mogelijk wijzen ze ook op tekortkomingen. |
| Institutionalisering (didactisch)<br><br>5 (10) minuten | De leerkracht benadrukt dat er niet één correct antwoord is, maar dat het antwoord afhangt van de hoeveelheid fietsen die geproduceerd worden. De leerkracht baseert uitleg eerst op de antwoorden van de leerlingen, om daarna de notatie van stapsgewijze functies te introduceren met een voorbeeld: $f(x) = \begin{cases} 120x + 3 \cdot 10^5, x \leq a \\ 60x + 6.6 \cdot 10^5, x \geq a \end{cases}$ Waar $a$=6000.<br>Hij/zij gebruikt dit om samen te vatten hoe je het bedrijf advies geeft: locatie B en D zijn nooit optimaal, terwijl A en C optimaal zijn voor productie respectievelijk onder en boven 6000 fietsen. De optimale-kosten functie is een stapsgewijze lineaire functie (gedefinieerd met positieve gehele getallen). | Leerlingen luisteren en herkennen de definitie in hun eigen strategie. Ze reflecteren op hoe dit zich tot de anderen verhoudt. Ze maken hun aantekeningen. |

| | |
|---|---|
| Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen | • Sommige leerlingen beginnen te werken met getallen, om te zien wat ze betekenen:<br>    ○ Sommige leerlingen beginnen met het berekenen van de prijzen voor een bepaald aantal fietsen gemaakt op elke locatie. Proefondervindelijk kunnen ze vinden voor welke aantallen twee locaties even voordelig zijn.<br>    ○ Leerlingen kunnen tabellen maken voor elke locatie waarin ze de totalen kosten voor een bepaald aantal fietsen berekenen. Zo kunnen ze de locaties vergelijken en de |

| | |
|---|---|
| | goedkoopste aanwijzen voor elk aantal fietsen (dit kan op papier of in een spreadsheet worden gedaan).<br>○ Voor elk paar aan locaties kan gekeken worden onder welke voorwaarde de ene beter is dan de andere. Daarvoor moeten de vaste kosten afgewogen worden tegen de variabele kosten. Er zijn in totaal zes van zulke vergelijkingen nodig.<br><br>• Sommige leerlingen gebruiken meteen functies. Ze stellen voor elke locatie een functie op die de totale jaarlijkse kosten bij een productie van $x$ fietsen beschrijft:<br>$f(x) = 120x + 300\,000,$<br>$g(x) = 110x + 450\,000,$<br>$h(x) = 60x + 660\,000,$<br>$k(x) = 80x + 680\,000.$<br>○ De grafieken van de functies worden getekend in één of meer coördinatensystemen. Met die grafische weergave kan bepaald worden welke locatie het beste is.<br>○ Leerlingen die ruitjespapier gebruiken kunnen het snijpunt kunnen aflezen op de assen.<br>○ Leerlingen die ICT gebruiken kunnen alle functies in één keer laten tekenen, maar zullen moeite kunnen hebben met het aanpassen van de assen.<br>○ In elk geval biedt het bovenstaande niet het nodige inzicht hoe de kosten geminimaliseerd kunnen worden. Daarvoor moet er goed nagedacht worden over het probleem. Vergissingen zullen gemaakt worden, zoals de productiekosten verwarren met de verkoopprijzen of winst.<br>○ Door paren van de vergelijkingen aan elkaar gelijk te stellen kunnen de snijpunten exact gevonden worden. Leerlingen zullen gebruik maken van grafische weergaves om te bepalen welke paren van functies relevant zijn. Deze strategie behoeft vaardigheid in het oplossen van vergelijkingen.<br>• De leerlingen kunnen tot verschillende conclusies komen.<br>○ Of de leerlingen werken met getallen (en tabellen), of functies (en grafieken), zullen sommige zich realiseren dat er niet één “beste locatie” is. Het advies hangt namelijk af van het aantal fietsen dat geproduceerd gaat worden. De conclusie kan meer of minder precies zijn geformuleerd: in woorden, vergelijkingen, grafieken, etc.<br>○ Sommige leerlingen zullen met een snel en onjuist antwoord komen, bijvoorbeeld “A is het beste omdat die bij 1, 2, ..., 10 fietsen het altijd de laagste prijs geeft”.<br><br>• **Voorbeelden van grafieken en vergelijkingen die leerlingen zouden kunnen maken** (zowel op papier of als met technologie), |

| | |
|---|---|
| | om te kunnen bepalen welke locaties goedkoper zijn bij verschillende waardes voor het aantal geproduceerde fietsen.<br>In[70]:= Plot[{300 000 + 120 x, 450 000 + 110 x, 660 000 + 60 x}, {x, 0, 18 000}, PlotLegends → "Expressions"]<br>Out[70]= <br>In[66]:= Solve[300 000 + 120 x == y && 450 000 + 110 x == y, {x, y}]<br>Out[66]= {{x → 15 000, y → 2 100 000}}<br>In[67]:= Solve[300 000. + 120 x == y && 660 000 + 60 x == y, {x, y}]<br>Out[67]= {{x → 6000., y → $1.02 \times 10^6$}} |

## Uitleg van het materiaal

Het consulting verhaal en de tabel met kosten zijn ervoor om betrokkenheid bij de leerlingen te creëren tijdens de devolutie fase. De tabel kan als werkblad uitgedeeld worden, op het bord gegeven worden, verwerkt worden in een (PowerPoint) presentatie, of digitaal worden aangeleverd.
In sommige landen zullen de leerlingen bekend zijn met het idee van modelleren, maar in andere niet. Indien nodig kan er meer tijd genomen worden voor het verduidelijken van de tabel. Leerlingen kunnen hun telefoons, grafische rekenmachine, GeoGebra, Wolfram Alpha, ruitjespapier, liniaal, of ICT in het algemeen gebruiken voor het maken van grafieken, het toevoegen en aanpassen van voorwaardes, het vinden van snijpunten etc. Een breed bord, whiteboard, smartboard of posters zijn nodig om alle leerlingen hun presentatie tegelijk te kunnen laten zien (en zichtbaar te houden tot het einde van de les). Ook is er nog extra ruimte nodig voor de uiteindelijke institutionalisering door de leerkracht.

## Variaties gebaseerd op didactische variabelen

De focus tijdens de didactische fasen zal vooral moeten liggen op de formuleringen van de leerlingen en vervolgens de validatie daarvan. Tijdens de a-didactische fasen moet er niet gehint worden naar oplossingen. In deze sectie behandelen we wat er aangepast kan worden in dit scenario (didactische variabelen).

De leerkracht moet uitleggen dat dit financiële model versimpeld is, en er veel factoren genegeerd worden. In de werkelijkheid zijn modellen in het algemeen gereduceerd. In onze berekening houden we rekening met:

a) De kosten van het bouwen van de fabriek op een locatie,
b) De kosten van het produceren van één fiets in de fabriek.

Volgens de standaard definities zijn er ook andere vaste kosten voor het gebruiken van een fabriek, zelfs als er niks wordt geproduceerd. Deze vaste kosten bestaan onder andere uit de verwarming van het pand en het salaris van vaste medewerkers. Deze worden allemaal genegeerd. Kosten b) vallen onder de variabele kosten. Deze zijn afhankelijk van productie hoeveelheid, grondstoffen, onderhoud van de machines (o.a. vervangen van onderdelen), energieverbruik van de machines, het salaris van tijdelijke medewerkers etc. Het probleem kan gegeneraliseerd worden door wat andere kosten toe te voegen, maar voor nu zijn er slechts twee soorten kosten.

Het consultant verslag moet alleen gebaseerd zijn op kosten a) en b). Je kan het overwegen om dit expliciet te vermelden, maar de aannames van leerlingen kunnen een rijkere set aan oplossingen opleveren. Het voorkomen van "verkeerde antwoorden" is geen primaire zorg, omdat de leerlingen daarvan kunnen leren.

De uitdaging van het verhaal is dat de directeur van het bedrijf zal beslissen over de locatie, gebaseerd op de analyse van de consultant. Het is niet nodig dat de consultant (leerling) weet of het bedrijf van plan is om veel of weinig fietsen te produceren, maar leerlingen maken soms spontaan zulke aannames.

Na het besluit van de directeur zal de fabriek op slechts één plek gebouwd worden, waar die zal blijven. De fabriek zal niet worden verplaatst.

*Het milieu*: De kosten (hoeveelheid en type) kunnen anders gekozen worden, maar het is mogelijk een voordeel voor beginners om niet te veel snijpunten te hebben tussen de kost grafieken. Hier is er alleen zo'n snijpunt bij $x = 6000$. Wanneer er andere snijpunten zijn, welke vrij dicht bij elkaar liggen, wordt het probleem meer kunstmatig. Zo is het bijvoorbeeld niet goed als je twee snijpunten hebt bij $x_1$=5000 and $x_2$=5050. Dan wordt er geconcludeerd dat er een andere locatie gekozen moet worden vanwege slechts 50 fietsen.

Het product en andere elementen van het probleem kunnen ook aangepast worden. Fabrieken die meer dan een soort product produceren, met randvoorwaarden, zullen leiden tot meerdere variabelen, zoals in lineair programmeren.

Tijdens de validatie is het belangrijk dat verkeerde strategieën of formules worden gecorrigeerd – voor zover mogelijk – door andere leerlingen. De leerkracht kan de rest van de klas betrekken met vragen naar bepaalde leerlingen als: Kan je herhalen wat zojuist is gezegd? Waarom denk je dat? Waar weet je dit van? Welke vragen gesteld worden hangt af van de voorkennis en behaalde resultaten van de klas.

De *lengte* van de fases kan zeker worden aangepast aan het werk van de leerlingen.

*Tijdens de eerste actie fase* moet leerlingen niet verteld worden wat te berekenen of welke wiskunde nodig is, zoals lineaire functies.
Als de leerkracht er niet zeker van is dat de leerlingen voldoende voorkennis hebben kan die vragen stellen als: Hoe kunnen we de kosten vergelijken? Kunnen we een locatie negeren? Waarom? Etc. Wanneer de meeste studenten wel voldoende voorkennis hebben, moeten de bovenstaande vragen alleen gesteld worden aan groepen of individuen die dat behoeven. De leerkracht moet echter niet elke groep apart les gaan geven. Daarnaast is

*het niet nodig* om bij een groep te blijven tot dat ze een antwoord op zo'n vraag hebben gegeven. Zie het als een kleine devolutie van een gelimiteerd probleem en laat de leerlingen zelf in actie komen, formuleren en valideren. Geef geen hulp met verdere vragen of hints naar het antwoord. Als de meerderheid van de klas zulke vragen nodig heeft moet de fase ingekort worden voor een klassikale les. Zo'n behoefte is normaal een teken dat het initiële probleem te moeilijk is of niet duidelijk voorgelegd is.

Ingrepen tijdens de *tweede actie fase*, formulering en validatie:
Het algemene idee is hetzelfde als hierboven. Als sommige groepen moeite hebben met beginnen kan de leerkracht voorstellen om hun strategie te vergelijken met eentje van een andere groep. De vergelijkbare strategie moet wiskundig goed zijn gekozen zodat er duidelijke relaties te leggen zijn. Dit is soortgelijk aan het dovolueren van een iets minder open sub-probleem aan de groep. Als de identificatie van gelijkheden en verschillen te vaag is voor de leerlingen, kan er altijd voor gekozen worden om een ietwat specifiekere taak te devolueren zoals: "Vind een oplossing van een andere groep die jullie eigen oplossing kan verbeteren, en pas toe. Probeer dan een fout of tekortkoming van een van de oplossingen te vinden, en eg uit waarom je het er niet mee eens bent."

Tijdens *de laatste institutionalisering* is het belangrijk dat de meeste (al dan niet alle) strategieën klassikaal behandeld worden en met elkaar in verband worden gebracht. Door alle mogelijke strategieën te overwegen kan de leerkracht het onderzoeksproces van de leerlingen beter voorzien en navigeren. Denk er aan dat je tijdens het lesgeven te maken hebt met een dynamisch systeem – leerlingen zullen de mogelijkheid moeten hebben om zich aan te passen aan het milieu, dus kan er niet verwacht worden dat ze allemaal hetzelfde antwoord geven.

Het onderzoeksproces zit in *alle* fases. Het kan meer dan één sessie duren voordat de leerlingen volledig betrokken zijn met deze manier van lesgeven. Het kan belangrijk zijn om te benadrukken dat er veel te leren valt van alternatieve of zelfs foutieve oplossingen.

Sommige leerkrachten maken een schema van mogelijke strategieën, om te gebruiken tijdens a-didactische fases. De verwachte strategieën kunnen op een rijtje worden gezet, met bij elke strategie bijvoorbeeld drie vragen die mogelijk nuttig zijn om te stellen wanneer een groep zo'n strategie presenteert. Gedurende de a-didactische fases kan de leerkracht noteren welke groepen de verscheidene strategieën bespreken, om vervolgens te gebruiken voor de organisatie van de daaropvolgende didactische formulering en validatie.

## Observaties uit de praktijk

Een belangrijke observatie van het scenario is dat de leerkrachten probeerden om geen les te geven aan de leerlingen tijdens álle fases. Dit is een goede verbetering om de a-didactische potentie van de situatie te behouden. Leerlingen hadden een aantal vragen om het probleem te verduidelijken. Sommige dachten na over winst, in plaats van kosten. Sommige leerlingen waren in het begin verward (eerste devolutie) en stelden vragen over de kwaliteit van de fietsen, verkoopprijzen, belastingen, het aantal geproduceerde fietsen … Sommige realiseerden zich erg snel: *Degene met de kleinste helling is de goedkoopste.*

Tijdens de actie fase formuleerden leerlingen de volgende aanpakken:
I. Modelleren met lineaire functies en het tekenen van grafieken

- I.1. Met de hand tekenen en het berekenen van snijpunten door lineaire vergelijkingen op te lossen.
- I.2. Technologie gebruiken om de grafieken te maken en snijpunten te vinden (niet altijd correct).

II. Locatie paren met elkaar vergelijken en de resultaten analyseren

- II.1. Met lineaire vergelijkingen.
- II.2. Direct vanuit de tabel, door de vaste kosten te vergelijken.
- II.3. Andere redenaties gebaseerd op berekeningen per locatie en ze vergelijken, soms met zelf bedachte aannames en fouten.

**Vergelijking:**

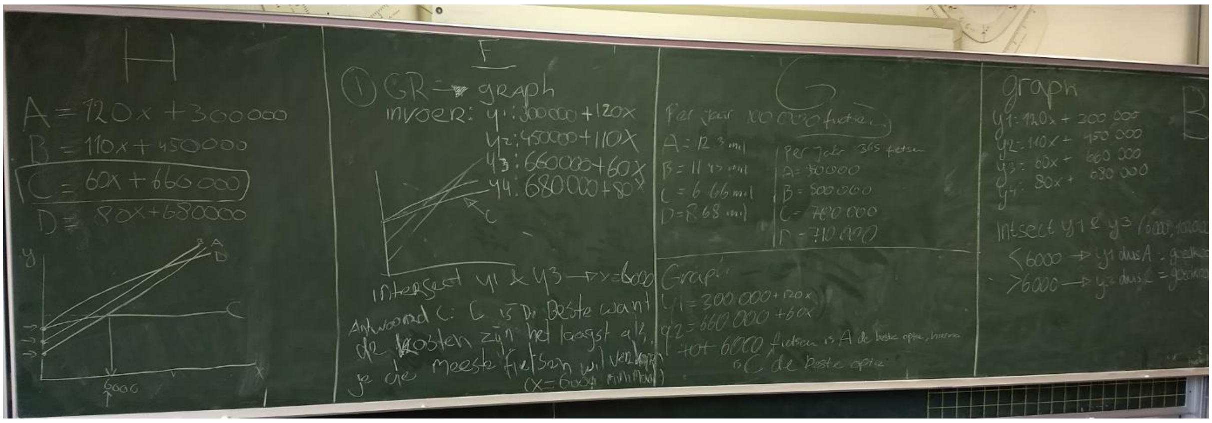
- Aanpakken I.1 en I.2. zijn vastgesteld vanwege het overduidelijke verschil in het gebruik van technologie. Leerlingen zouden opmerken dat I.2. preciezer is en daardoor een betere oplossing geeft, terwijl wij zouden zeggen dat I.1. ook een waardevolle situatie is omdat we daar kunnen herkennen of onze leerlingen moeite hebben met het tekenen van grafieken.
- Approach II. Vereist meer logisch denken om tot de conclusie te komen, alhoewel de strategie gegrond is. We hebben varianten besproken waar leerlingen alleen A en C vergelijken gebaseerd op hun intuïtie noodzakelijkheid om met locatie B te vergelijken.

We hebben aangeduid dat aanpak II.2. laat zien dat het probleem opgelost kan worden zonder kennis over lineaire functies en hun grafieken, dus kan het probleem gebruikt worden om lineaire functies te introduceren.

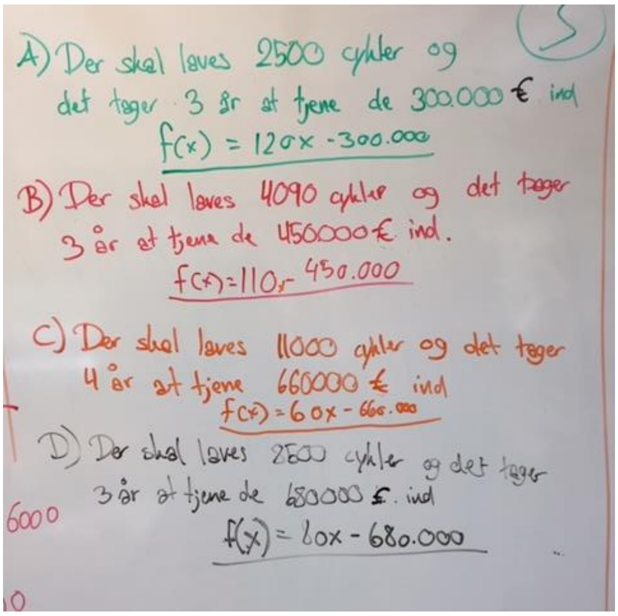
Sommige groepen berekenden en vergeleken prijzen voor een bepaald aan fietsen voor elke locatie A, B, C, en D. In dat geval hadden ze moeite met formuleren omdat ze niet een het exact aantal fietsen konden vinden waar de ene optie beter wordt dan de andere. Soms maakten ze aannames daarover. Ze maakten benaderingen of zeiden dat voor een klein aantal fietsen A beter is, en voor grotere aantallen C. Een van deze groepen realiseerde zich na de tweede devolutie, tijdens de actie fase, dat ze dat aantal fietsen konden vinden door een systeem van vergelijkingen op te lossen.
Verder gevorderde leerlingen waren vergelijkingen aan het oplossen en vergeleken de waarden van de functies in de intervallen die ze hadden verkregen. Sommige groepen hadden een grafische aanpak en vonden snijpunten uit grafieken, met gebruik van GeoGebra of andere software. In dat geval is het belangrijk om assen te kalibreren vanwege de grootte van de getallen waarmee gewerkt wordt.

Leerlingen hadden meer tijd nodig voor de eerste devolutie en actie, maar minder voor de tweede. Op basis daarvan hebben we de tijden aangepast. Sommige leerkrachten ondervonden dat ze wat hints of extra vragen moesten inzetten tijdens de eerste actie en formulering fase. Leerlingen begrepen zonder hulp niet hoe ze opties moesten vergelijken.

Volgens een MERIA enquête, waren 73.3% van de Kroatische leerlingen het er mee eens dat de wiskunde verwant is aan het echte leven, 87% zei dat de les interessant was of interessanter dan de normale les, en 91.9% van de leerlingen zou graag maandelijks zo'n les hebbben.

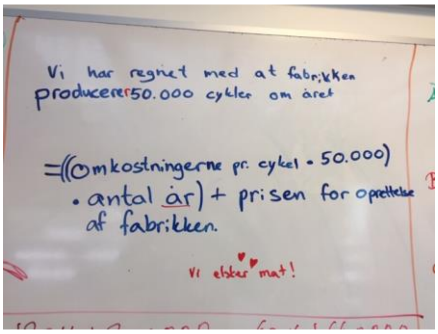



*Oplossingen van groepen leerlingen op het bord (Nederland)*




Voorbeeld van een geschreven presentatie uit Denemarken. De leerlingen hebben de vier locaties apart behandeld. Ze hadden "de kosten voor het maken van één fiets" verward met "de winst per fiets". Voor elke locatie is f(x) de winst die gemaakt wordt bij een productie van x fietsen. Ze hebben voor elke locatie berekend hoeveel fietsen er gemaakt meten worden om de kosten van het bouwen van de fabriek te betalen, door het nulpunt van f(x) te vinden.

Voor elk gebied schrijven ze letterlijk "Men zou … fietsen moeten maken en het kost … jaar om … € terug te winnen", en de genoemde functies. Het aantal jaar komt van de wat arbitraire aanname zoals "ze maken minstens 2.5 fietsen per dag". Het is onduidelijk hoe ze op het aantal jaar voor elke geval zijn gekomen, behalve voor A, welke 2.5 fietsen per dag kon maken.

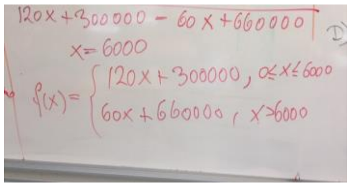



De oplossing van een andere groep uit dezelfde Deense klas: Ze namen aan dat de fabriek 50000 fietsen per jaar produceert. De formule zegt:

((kosten per fiets · 50000)· aantal jaar) + kosten van het bouwen van de fabriek

(en aan het einde: "wij houden van wiskunde"). Ze hebben verder geen andere conclusies getrokken tijdens de formulering, maar het toepassen ervan zal zeker tot een antwoord leiden (gebruik locatie C).

Uit de institutionalisering van een leerkracht, over de oplossing van de kritieke vergelijkingen van het probleem, en over stapsgewijze lineaire functies met de bijbehorende notatie. In de klas heeft slechts de helft van de groepen de "juiste" functies gevonden die hier gebruikt zijn.




## Evaluatie instrumenten

Aan het einde van de les, of kort daarna, kunnen de volgende opdrachten gebruikt worden als snelle test van de kennis die leerlingen hebben opgedaan tijdens het scenario:

1. Je vriend zegt: "Een grafiek met de kleinste helling en de kleinste constante correspondeert met de goedkoopste locatie". Wat denk jij?
   *Antwoord: Dat klopt, maar men heeft niet altijd zo'n grafiek, zoals hier het geval is.*

2. Je vriend zegt: "De grafiek met de grootste helling en grootste constante is het duurste". Wat denk jij?
   *Antwoord: Dat klopt, maar wederom is er niet zo'n locatie.*

3. Je heb een simpele situatie met data gegeven in de onderstaande tabel. Je hebt een contract getekend voor de productie van 50000 fietsen. Welke locatie kies je?

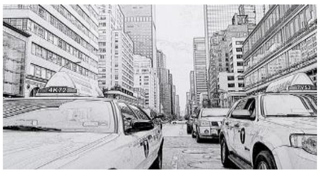
| Locaties | Kosten van het bouwen van de fabriek in € | Kosten van het produceren van één fiets in de fabriek in € |
|---|---|---|
| G | 0 | 200 |
| H | 300 000 | 100 |

   *Antwoord: H is goedkoper wanneer je meer dan 3000 fietsen maakt.*

4. Mogelijk huiswerk: schrijf een verslag waarin je de directeur van het bedrijf adviseert over de locatie van zijn fabriek.

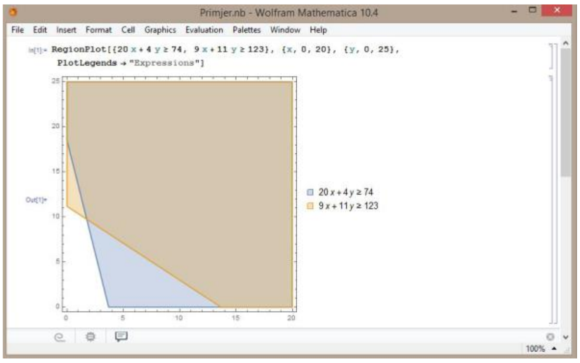
## Suggesties voor verdere problemen over lineair modeleren

Betrek andere contexten (bijvoorbeeld taxi snelheid ...) om het leerdoel toe te passen in andere situaties (voor verdere institutionalisering van het leerdoel en bijbehorende methodes en ideeën).



1. Taxibedrijf AA heeft een start prijs van €15 en elke kilometer kost €5. Taxibedrijf BB start met een prijs van 20 € en elke kilometer kost €4. Je bent van plan om 8 kilometer met de taxi te reizen.
   Welk taxibedrijf kies je?

2. Benzine kost €0.5 per $m^3$ voor de eerste 10 $m^3$, daarna verlaagt de prijs voor grotere hoeveelheden. Voor de volgende 20 $m^3$ kost het €0.4 per $m^3$, daarna verlaagt de prijs tot €0.3 per $m^3$.
   Vind de kostenfunctie.



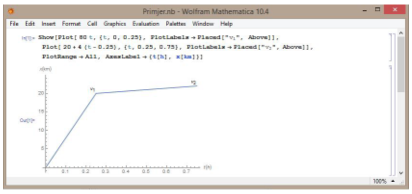

3. Een atleet zou elke dag 74 mg aan vitamine B moeten nemen en tenminste 123 mg aan vitamine C. De multivitamine MM bevat 20 mg aan vitamine B en 9 mg aan vitamine C in 1 g. Multivitamine NN bevat 4 mg aan vitamine B en 11 mg aan vitamine C in 1 g.
   Wat is de minimale dosis aan multivitamine MM en NN waarmee de atleet aan zijn dagelijkse behoefte voldoet. Het is niet gevaarlijk om meer dan de dagelijkse dosis in te nemen.

4. Ivana wil een ruime waar 17 gasten in passen huren voor haar verjaardagsfeest. De prijs van kamer RR is €100 voor de kamer en €10 extra voor elke gast. De prijs van kamer PP is €80 voor de kamer en €12 extra voor elke gast. Welke kamer zou Ivana moeten kiezen?

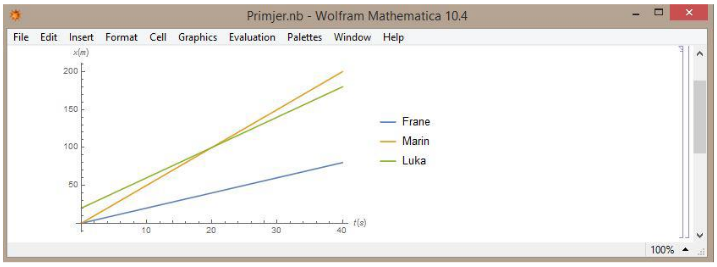
5. De prijs van een paar sneakers is €70. Een bedrijf welke de sneakers maakt heeft een investering gehad van €10000 om de productie te beginnen. De productie van een paar kost €15. Vind de winst van het bedrijf als ze 1000 paar sneakers maken.

6. Een bank biedt meerdere rentepercentages, afhankelijk van hoeveel je stort. Als je minder dan €5000 stort krijg je 2% rente per jaar, tussen de €5000 en €20000 krijg je 2.2% en boven de €20000 2.5. Vind het totale spaarbedrag na een jaar als functie van hoeveel je stort.

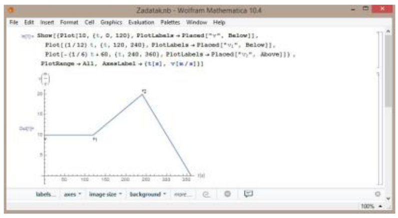
7. Anna rijdt met de auto naar Zagreb met een constante snelheid van 80 km/u. Na 20 km is haar benzine op en moet ze naar een benzinestation lopen op 2 km afstand. Ze heeft er 30 minuten voor nodig om het station te bereiken. Vind de grafiek waar in afstand is uitgezet tegen de tijd.



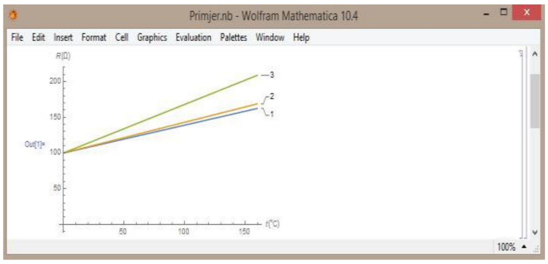
8. Marin en Franck gingen op een fietstocht. Luka wilde niet op ze wachten dus vertrok eerder. Zie de grafiek hiernaast waar verplaatsing is uitgezet tegen de tijd. Wie is de snellere fietser? Wie is het langzaamste? Waar ontmoet Marin Luka?




9. Peter reed op een motor. Eerst had hij 2 minuten lang een constante snelheid van 10 m/s, daarna versnelde constant hij gedurende 2 minuten naar 20 m/s. Teken de grafiek waar snelheid is uitgezet tegen tijd.



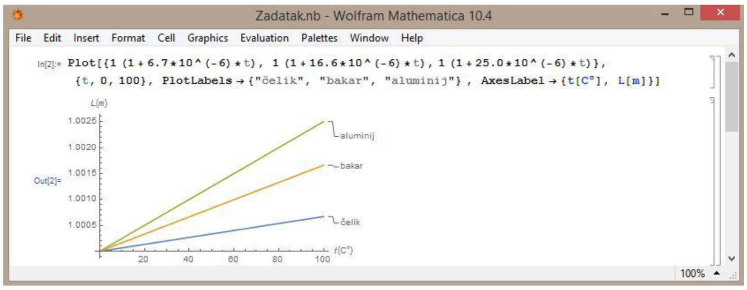
10. -De weerstand van een draad verandert met temperatuur: $R(t) = R_0(1+\alpha t)$ waar $R_0$ de weerstand is bij 0 ºC, α de temperatuur coëfficiënt van de weerstand, en $t$ de temperatuur is in ºC. De weerstand van drie specifieke materiaal bij 0 ºC is 100 Ω.
Vind de temperatuur coëfficiënten als de weerstanden bij 100 ºC 139 Ω (materiaal 1), 143 Ω (materiaal 2) en 168 Ω (materiaal 3) zijn.
Vind de tabel met de temperatuur coëfficiënt en weerstand op het internet welke je kan vertellen wat de materialen 1, 2 en 3 zijn!




11. Stangen worden gemaakt van verschillende metalen, maar allemaal hebben ze een lengte van 1 m bij 0 ºC. Lengte verandert met temperatuur: $L(t) = L_0(1+\alpha t)$, waar $L_0$ de lengte bij 0 ºC is, α de coëfficiënt van lineaire thermische expansie, en $t$ de temperatuur in ºC. Coëfficiënten van lineaire thermische expansie zijn:

Staal $6.7 \cdot 10^{-6}$ / ºC,
Koper $16.6 \cdot 10^{-6}$ / ºC,
Aluminium $25.0 \cdot 10^{-6}$ / ºC.

Vind de functie die lengte beschrijft afhankelijk van temperatuur voor staal, koper en aluminium.




## Logica achter en RWO perspectieven op het scenario

De rol van contexten in het bieden van mogelijkheden voor leerlingen om (voorlopige) wiskundige ideeën te ontwikkelen is een van de uitgangspunten binnen het RWO. In dit scenario is de fabriekscontext bedoeld om leerlingen uit te nodigen om formules en grafieken te maken, en te redeneren met stukken van grafieken. Dit redeneren anticipeert de introductie van stuksgewijs gedefinieerde functies. Men kan andere contexten (zoals taxi, snelheid, verjaardagsfeestje, een ruimte huren …) toevoegen om het leerdoel in een andere situatie toe te passen (voor verdere institutionalisering). Het leren van wiskunde in toepassingen zorgt er naar verwachting voor dat leerlingen flexibele en toepasbare wiskundige vaardigheden zullen ontwikkelen.

### Relevantie en toepasbaarheid

We beschouwen de volgende perspectieven:

- *Het echte leven en economie*: Deze kennis is verwant aan:
  - Lineaire verschijnselen (taxikosten, telefoon en internet kosten, snelheid, verjaardagsfeestje, een ruimte huren, …)
  - Financieel modeleren (financiële modellen kunnen lineair en non-lineair zijn, bijvoorbeeld inkomsten, winst, gemiddelde kosten, inflatie, …)
  - Introductie van optimalisatie
- *Verdere studie*: De kennis en vaardigheden behorend bij dit onderwerp zijn relevant in vele disciplines:
  - Lineaire verschijnselen zit overal in de wetenschap. Daarbij is het lineariseren van niet lineaire problemen een veel voorkomende manier om ze op te lossen, indien mogelijk. Vaak rekenen we lineaire regressie en correlatiecoëfficiënten uit om een lineair model te maken en de lineariteit van een dataset te testen, zelfs als het onbekend is of er sprake is van een lineair verband.
  - Iedereen moet in het dagelijks leven een budget kunnen maken door besluitvorming en plannen met behulp van tabellen van het geld dat je verdient en uitgeeft. Daarnaast is het onmogelijk om zaken te doen zonder financieel modeleren.
  - Bedrijfsmanagement gebruikt regelmatig proces optimalisatie. Lineair programmeren, ook lineaire optimalisatie genoemd, is een methode om de beste uitkomst te behalen (zoals maximale winst, of minimale kosten tijdens het plannen, produceren, transporteren) binnen een wiskundig model waarvan de voorwaarden beschreven worden door lineaire verbanden.

- Men kan een algoritme en computerprogramma maken om het probleem vaneen scenario (of een algemener probleem) op de lossen.

### Onderzoeksvaardigheden

In dit scenario ervaren leerlingen het belang van een aantal onderzoeksvaardigheden betrokken bij wiskundig modeleren, data uit het echte leven transformeren naar wiskundige taal, data organiseren, data weergeven, een optimum vinden, een voorstel formuleren, samenwerken en communiceren. In hoeverre deze vaardigheden behandeld worden is voornamelijk afhankelijk van de manier waarop de leerkracht de leerlingen betrekt in feedback op de methodes tijdens de validatie fases wanneer de groepen presenteren. Daarnaast die vaardigheden onderdeel zijn van de daaropvolgende formulering fase. In dat geval raden we de leerkracht aan om de manier waarop de onderzoeksvaardigheden expliciet gemaakt kunnen worden te noteren en feedback te leveren zodat erop teruggekomen kan worden tijdens vervolglessen.

### Potentie voor een reeks aan lessen

Dit scenario kan onderdeel zijn van een langere reeks aan lessen over lineaire verschijnselen, financieel modeleren en lineaire optimalisatie.

- *Voorkennis*: Voor zo'n reeks verwachten we dat leerlingen bekend zijn met lineaire functies en vergelijkingen.
- *Een introductie*: Een context met een rijk open probleem, zoals hier voorgesteld is. De hierboven beschreven variaties van de aanvullende problemen kunnen gebruikt worden in aansluitende lessen.

### Logica achter het scenario

- *Horizontaal mathematiseren:* een tabel met de kosten wordt geïntroduceerd om de situatie te bespreken. De leerlingen vormen een eerste informeel model zoals
  *((kosten per fiets · 50000) · aantal jaar) + kosten voor de bouw van de fabriek*,
  En beginnen met het gebruik van taal die wiskundige optimalisatie methodes anticipeert zoals "kosten per fiets" en "benodigde tijd om een investering terug te verdienen". Deze mathematisering van de fabriekscontext naar de wereld van wiskunde biedt veel mogelijkheden om het leerdoel verder te ontwikkelen en institutionaliseren, bouwend op bijdragen van de leerlingen. Leerlingen proberen in groepsverband een oplossing te vinden en bereiden een presentatie van hun vondsten voor. De leerkracht leidt de bespreking over gelijkheden en verschillen tussen deze vondsten om tot een conclusie te komen.
- *Verticaal mathematiseren*: de wiskunde betrokken bij dit probleem is verder ontwikkeld. Stel een algemene hypothese op of maak een algoritme voor het vinden van de optimale kosten voor een gegeven tabel aan data. Daarbij wordt het model abstracter gemaakt of meer gegeneraliseerd, zie boven voor verder studie.

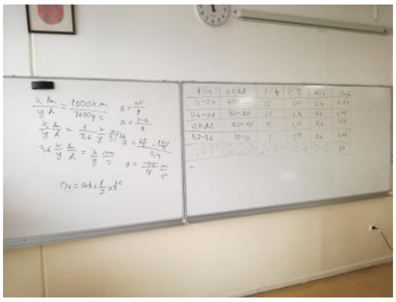
### ***Conclusie, reflectie en suggesties voor verdere studie***

De leerkracht reflecteert, integreert ideeën, en maakt concepten en vaardigheden expliciet. De leerkracht benadrukt de belangrijkste leerdoelen.
Een vervolg les kan verder onderzoeken wat de conclusie(s) van het scenario ons vertellen over de initiële vondsten binnen de groepen: wat waren behulpzame ideeën? Welke zouden verbeterd kunnen worden? Hoe kunnen we een algemene hypothese formuleren of algoritme maken waarmee de optimale kosten bij een gegeven tabel met data gevonden kan worden? Wat waren de strategieën of manieren van werken die hielpen om tot je resultaten komen?

# MERIA Module “Remweg“

**Kwadratisch verband**

## Het scenario

<table>
<tr><td>Leerdoel</td><td>De remweg heeft een kwadratisch verband met de beginsnelheid.</td></tr>
<tr><td>Bredere leerdoelen</td><td><br>Presentatie over deze situatie, in Kroatië.<br>Kwadratische functies en hun karakteristieken als een constante tweede afgeleide (tweede verschil voor kwadratische rijen), en een constant stijgende of dalende afgeleide (verschil voor kwadratische rijden). Berekeningen doen met verschillende meeteenheden. Data organiseren. Functionele verbanden formuleren. Grafieken van (kwadratische) functies tekenen op papier of met ICT.<br>Onderzoeksvaardigheden: data analyseren en het zoeken naar patronen in tabellen, resultaten verantwoorden tijdens presentaties (de berekeningen domineren het proces en leerlingen moeten hun aanpak kunnen samenvatten).<br>Interdisciplinaire vaardigheden: leerlingen moeten werken met variabelen uit de natuurkunde en de situatie leren begrijpen (door de werelden van notatie en procedure samen te brengen). Professionele communicatievaardigheden worden benadrukt door het schrijven van een verslag. Leerlingen bespreken ook de verantwoordelijkheid van bestuurders en verkeersveiligheid.</td></tr>
<tr><td>Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden</td><td>Basale kennis over functies, het verband tussen constante snelheid en afstand, gemiddelde snelheid, km/u omrekenen naar m/s (en vice versa).</td></tr>
<tr><td>Leerjaar</td><td>Jaar 4, leerlingen met een leeftijd van 15-16 (wanneer kwadratische functies zijn behandeld)</td></tr>
<tr><td>Tijd</td><td>90 minuten, twee lessen</td></tr>
<tr><td>Benodigd materiaal</td><td>Werkbladen met in te vullen tabellen, rekenmachine, computer, ruitjespapier.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><br><br>Probleem: In een stedelijk gebied met veel basisscholen klagen ouders over de huidige snelheidslimiet, omdat ze die ontoereikend vinden voor een gebied waar veel kinderen naar school gaan. Een groep roekeloze bestuurders zegt dat ze zich geen zorgen hoeven te maken omdat ze op tijd remmen. Nu worden jullie (de leerlingen) gevraagd om te onderzoeken hoe de remweg afhankelijk is van de snelheid vlak voor het remmen. Adviseer de burgemeester over de gevolgen van het veranderen van de snelheidslimiet. Onderbouw je advies met representaties zoals tabellen en grafieken.</td></tr>
</table>

| |
|---|
| Beschouw een auto die zó remt dat de snelheid elke 0,4 seconden met 10 km/u vermindert. Je kan de tabellen hieronder gebruiken om je berekeningen te organiseren, observeren, en vervolgens je antwoord zo goed mogelijk te onderbouwen. |

| **Fase** | **Acties van de leerkracht incl. uitleg** | **Acties en reacties van de leerlingen** |
|---|---|---|
| Devolutie, overdracht (didactisch)<br><br>10 minuten | De leerkracht deelt de klas op in groepen van drie of vier.<br>De leerkracht introduceert het probleem aan de leerlingen. Hij/zij zorgt ervoor dat de leerlingen de aanname van een constant afnemende snelheid tijdens het remmen begrijpen en bespreekt het idee van kleine tijdsintervallen waar de beweging kan worden benaderd door een beweging met constante (gemiddelde) snelheid.<br><br>De leerkracht controleert dat de leerlingen de termen in de tabellen, het basale verband tussen snelheid tijd en afstand, het omrekenen van km/u naar m/s en het idee dat 40 km/u vervangen kan worden met andere getallen begrijpen.<br><br>De leerkracht merkt naar de leerlingen op dat ze de vrijheid hebben om hun eigen en andere strategieën te gebruiken. Ze hebben de vrijheid om elke vorm van technologie te gebruiken. | Leerlingen luisteren, praten over hun ideeën en beantwoorden de vraag. |
| Actie (a-didactisch)<br><br>20 minuten | De leerkracht loopt rond en observeert de leerlingen zonder in te grijpen.<br><br>In het geval dat veel groepen met een nieuwe tabel beginnen voor elke nieuwe beginsnelheid, kan de leerkracht klassikaal behandelen hoe de groepen daar mee omgaan. Waarschijnlijk zal ten minste één van de groepen zich realiseren dat ze de vorige berekeningen | Leerlingen bespreken strategieën binnen hun groep.<br><br>Ze maken tabellen af met rekenmachine of met ICT om punten grafisch te weergeven.<br><br>Ze hebben het over precisie en kiezen daarvoor verschillende startsnelheden. |

| | | |
|---|---|---|
| | kunnen hergebruiken bij het bepalen van remwegen voor andere beginsnelheden. Dit kan als feedback voor alle andere groepen gebruikt worden. | Groepsleden hebben verschillende ideeën en ontwikkelen die individueel.<br><br>Leerlingen gebruiken eventueel berekeningen, grafieken of natuurkundige wetten om tot conclusies te komen:<br>- Verandering van remweg is niet constant,<br>- Het verband tussen startsnelheid en afstand is niet lineair,<br>- Wanneer de startsnelheid verhoogt, wordt de remweg langer, maar niet proportioneel.<br><br>Sommige leerlingen zal het opvallen dat de tweede verschillen (ongeveer) constant zijn en passen een recursieve methode toe voor berekeningen. |
| Formulering (didactisch)<br><br>10 minuten | De leerkracht gaat langs bij elke groep en vraagt of ze kort kunnen presenteren wat ze hebben gevonden. Zij/hij zou vragen kunnen stellen en hun ideeën bespreken, vooral wanneer ze niet verder komen.<br>De leerkracht vraagt de groepen met meerdere strategieën om zich op één strategie te richten die ze zullen gebruiken om hun ideeën te presenteren (in verband met tijdsgebrek).<br><br>De leerkracht herinnert de leerlingen eraan dat het doel van activiteit is om erachter te komen hoe de remweg zich verhoudt tot de snelheid vlak voor het remmen om voorspellingen te kunnen maken en goed advies te kunnen geven aan de burgemeester. | Leerlingen geven een korte presentatie van hun werk en stellen vragen. |
| Actie en formulering (a-didactisch) | De leerkracht observeert. | Leerlingen proberen hun berekeningen en observaties te generaliseren. |

| | | |
|---|---|---|
| 20 minutes | | Sommige zullen hun strategie voor het generaliseren of aanpak van het probleem kunnen veranderen.<br><br>Leerlingen bereiden zich voor om advies te geven aan de burgemeester |
| Validatie (didactisch)<br><br>25 minuten | De leerkracht vraagt de leerlingen om hun strategieën te presenteren en vergelijken. | Leerlingen presenteren hun werk, luisteren, stellen vragen en bespreken andere strategieën en oplossingen. |
| Institutionalisering (didactisch)<br><br>5 minuten | De leerkracht benadrukt de wiskundige verschillen en gelijkheden tussen de strategieën van de leerlingen, legt uit waarom sommige strategieën geen bewijs leveren maar wel overtuigend kunnen zijn met een grafiek en formule die eventueel met technologie zijn gemaakt. Ook legt die uit dat het verband kwadratisch is.<br>De leerkracht introduceert kwadratische functies. | Leerlingen luisteren en verbinden hun oplossingen met een algemene kwadratische functie. |

| | |
|---|---|
| Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen | Leerlingen krijgen de tabel met data ($v$, $d$). |

| | **Tijd (seconden)** | **Snelheidsverandering tijdens het remmen (km/u)** | **Gemiddelde snelheid (km/u)** | **Gemiddelde snelheid (m/s)** | **Tijdsinterval $\Delta t$** | **Afgelegde afstand $\Delta d$ (m)** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t$ = 0 tot $t$ = 0.4 | $v$ = 40 tot $v$ = 30 | 35 | $\frac{175}{18}$ | 0.4 | $\frac{35}{9}$ |
| | $t$ = 0.4 tot $t$ = 0.8 | $v$ = 30 tot $v$ = 20 | 25 | $\frac{125}{18}$ | 0.4 | $\frac{25}{9}$ |
| | $t$ = 0.8 tot $t$ = 1.2 | $v$ = 20 tot $v$ = 10 | 15 | $\frac{25}{6}$ | 0.4 | $\frac{15}{9}$ |
| | $t$ = 1.2 tot $t$ = 1.6 | $v$ = 10 tot $v$ = 0 | 5 | $\frac{25}{18}$ | 0.4 | $\frac{5}{9}$ |
| Afgelegde afstand na het remmen (m) | | | | | | $\frac{80}{9}$ |

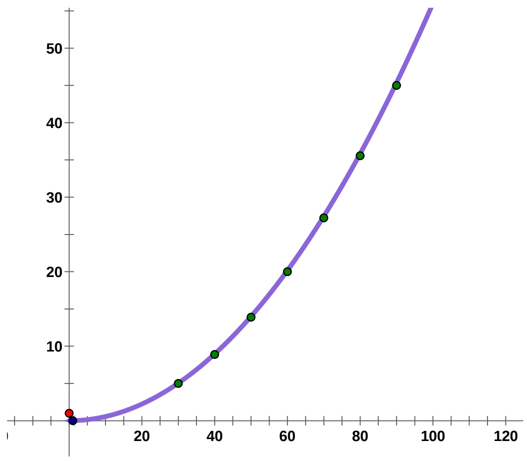
| Snelheid vlak voor het remmen (km/u) | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Remweg (m) | 5 | $\frac{80}{9}$ | $\frac{125}{9}$ | 20 | $\frac{245}{9}$ | $\frac{320}{9}$ | 45 | $\frac{500}{9}$ | $\frac{605}{9}$ |

Of met kommagetallen bijvoorbeeld:

| Snelheid vlak voor het remmen (km/u) | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Remweg (m) | 5 | 8.89 | 13.89 | 20 | 27.22 | 35.56 | 45 | 55.56 |

Door naar de data te kijken kunnen ze concluderen:

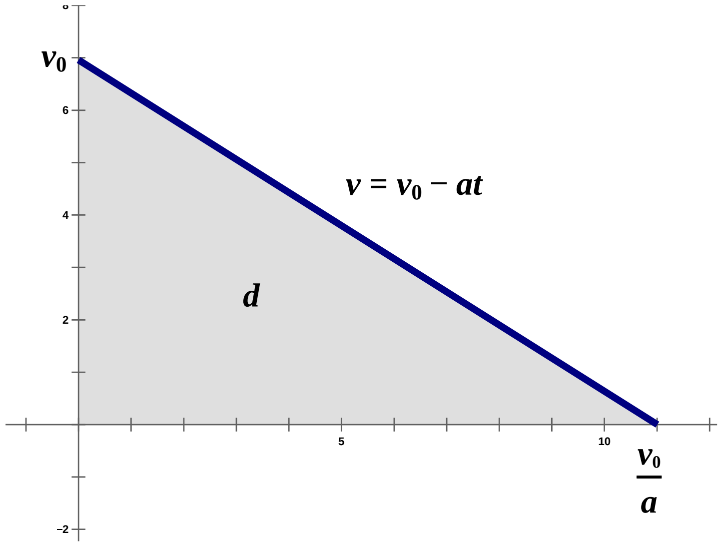
- De remweg is langer wanneer de snelheid hoger is.
- Het verband tussen snelheid en remweg is niet lineair $\left(\frac{\Delta d}{\Delta v}\right.$ is niet constant$\left.\right)$.
- Als de snelheid verdubbeld, verviervoudigd de afstand zich. Wanneer de snelheid verdrievoudigd, wordt de afstand negen keer zo groot.
- Leerlingen kunnen de punten $(v, d)$ tekenen en concluderen dat het verband misschien kwadratisch is. Ze kunnen de kwadratische functie
$$d = av^2 + bv + c$$
opschrijven en de onbekende coëfficiënten $a, b, c$ bepalen door data in te vullen en het systeem aan lineaire vergelijkingen op te lossen. Ze zullen een benadering krijgen. Deze strategie zal geen bewijs leveren voor een kwadratisch verband.




- Na de conclusie dat het verband mogelijk kwadratisch is kunnen de leerlingen ICT gebruiken om kwadratische regressie te vinden. Ze zullen een benadering krijgen. Deze strategie zal geen bewijs leveren voor een kwadratisch verband.
- Met de data in de tabellen kunnen leerlingen generaliseren:

$$d_{40} = 5 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 15 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 25 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 35 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$
$$d_{40} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7) = \frac{5}{9} \cdot 16 = \frac{80}{9} \approx 8.89$$
$$d_{50} = d_{40} + 45 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

| | |
|---|---|
| | $d_{50} = \frac{5}{9}(1+3+5+7+9) = \frac{5}{9} \cdot 25 = \frac{125}{9} \approx 13.89$<br>$d_{60} = d_{50} + 55 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$<br>$d_{60} = \frac{5}{9}(1+3+5+7+9+11) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 20$<br><br>$d_{v_0} = \frac{5}{9}\big(1+3+\cdots+(2n-1)\big) = \frac{5}{9} \cdot n^2$<br>Een belangrijke conclusie is dat wanneer we de remweg observeren, we zoeken naar het moment dat de snelheid gelijk aan nul is; zoveel keer zullen we tien aftrekken van $v_0$ tot dat we nul krijgen:<br>$$v_0 - 10n = 0 \Longrightarrow n = \frac{v_0}{10}$$<br>$$d_{v_0} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{180} {v_0}^2 \approx 0.0056\, {v_0}^2$$<br>In deze formule is $v_0$ in km/u en krijgen we de afstand in meters.<br><br>• Leerlingen kunnen rekenmachines gebruiken en de data met kommagetallen in de tabellen opschrijven. De resultaten zullen niet exact zijn en zo is het niet makkelijk om patronen te herkennen.<br><br>• Leerlingen kunnen de informatie gebruiken dat de snelheid elke 0.4 seconden met 10 km/u vermindert. Ze kunnen berekenen dat de snelheid elke seconde met 25 km/u vermindert, of met 6.94 m/s, wat betekent dat de versnelling $a = 6.94\ \mathrm{m/s^2}$ is. Dan gebruiken ze formules uit de natuurkunde:<br>$$v = v_0 - at,\ d = v_0 t - \frac{a}{2} t^2 .$$<br>Ze komen tot een belangrijke conclusie: wanneer we de remweg observeren zoeken we voor het moment dat de snelheid gelijk is aan nul. Uit de eerste formule ($v = 0$) berekenen ze de tijd $t = \frac{v_0}{a}$ en substitueren ze dat in de tweede om te krijgen dat:<br>$$d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{9v_0^2}{125} = \frac{v_0^2}{13.8} = 0.072 v_0^2.$$<br>In deze formule is $v_0$ in m/s en krijgen we de afstand in meters.<br>• Als studenten de versnelling berekenen in km/u² krijgen ze: $a = 90000\ \mathrm{km/u^2}$, substitueer $v_0$ in km/u en krijg de afstand in kilometers.<br>$$d = \frac{v_0^2}{180000},\ \text{of in meters}\ d = \frac{v_0^2}{180}.$$<br>• Leerlingen kunnen een $v$-$t$ grafiek tekenen en de afstand bepalen door de oppervlakte onder de grafiek uit te rekenen:<br>$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{a} \cdot v_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 0.072 v_0^2.$$ |

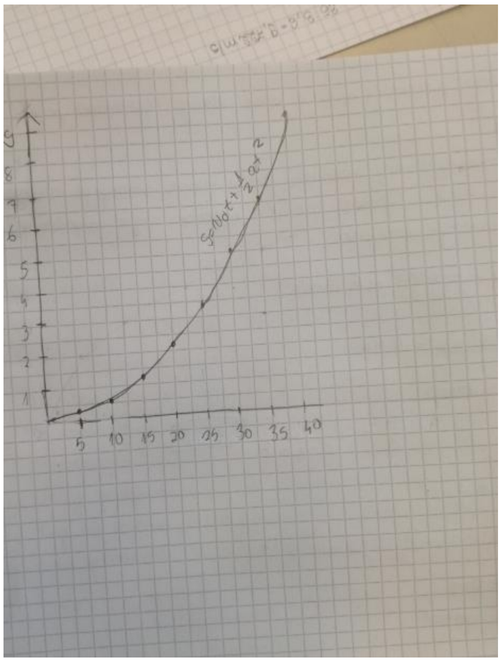
| | |
|---|---|
| | In deze formule is $v_0$ in m/s.   |

| | **Tijd (seconden)** | **Snelheidsverandering tijdens het remmen (km/u)** | **Gemiddelde snelheid (km/u)** | **Gemiddelde snelheid (m/s)** | **Tijdsinterval $\Delta t$ (s)** | **Afgelegde afstand $\Delta d$ (m)** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t$ = 0 tot $t$ = 0.4 | $v$ = 40 tot $v$ = 30 | 35 | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| Afgelegde afstand na het remmen (m) | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Snelheid vlak voor het remmen (km/u) | 40 | | | | | | | |
| Remweg (m) | | | | | | | | |

## Uitleg van het materiaal

In het begin krijgen de leerlingen de tabellen die ze moeten invullen. Het doel is om ze aan te moedigen 0.4 seconde intervallen, de gemiddelde snelheid in die intervallen (in km/u en m/s) en de afgelegde afstand te observeren. Ze zullen besluiten om te tellen hoeveel intervallen er zijn voordat de snelheid nul is. Het aantal rijen van de tabel zal daardoor variabel zijn, de leerlingen zullen moeten besluiten hoeveel ze er nodig hebben. In de tweede tabel zullen ze naast 40 km/u ook andere snelheden moeten kiezen om zelf te observeren. De leerlingen zullen de tabellen gebruiken tijdens de actiefase. Wanneer het afmaken van de tabel met verschillende snelheden te lang duurt, is het een goed idee om het werk te delen. Leerlingen zullen zich moeten realiseren dat ze berekeningen kunnen hergebruiken om remwegen voor nieuwe startsnelheden af te leiden. In het geval dat veel groepen een nieuwe tabel maken voor elke nieuwe startsnelheid tijdens de 20 minuten durende a-didactische fase, kan de leerkracht kort klassikaal behandelen hoe alle groepen met dat probleem omgaan. Waarschijnlijk is er minstens één groep met een oplossing die gebruikt kan worden als feedback voor de rest.




Om grafieken te tekenen kunnen de leerlingen gebruik maken van millimeterpapier, ruitjespapier, of een computer. Leerlingen die de som van $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ vinden kunnen kubussen aangeboden krijgen als visueel hulpmiddel voor een bewijs zonder woorden.

## Variaties gebaseerd op didactische variabelen

In de implementatie van het scenario moeten de beoogde didactische en a-didactische fases behouden worden en moet de actie fase a-didactisch gedaan worden. Het is belangrijk om een validatie fase te houden waar de leerlingen de gepresenteerde oplossingen evalueren. Sommige onderdelen van het scenario kunnen worden veranderd. In deze sectie behandelen we de didactische variabelen of onderdelen van het scenario die veranderd kunnen worden samen met ingrepen van de leerkracht die nodig zijn in bepaalde situaties.

*Didactische omgeving*: Het probleem kan op twee manieren worden gepresenteerd. De leerkracht kan praten over de inhoud van het probleem, een presentatie houden, of een video laten zien. De snelheid van 40 km/u is arbitrair gekozen en kan vervangen worden. Vanwege het belang om de regelmatigheid op te laten vallen adviseren we om een veelvoud van tien te nemen. De snelheidsvermindering van 10 km/u elke 0.4 seconden is gekozen omdat dat realistisch is en de studenten de regelmatigheid laat zien, het moet dus niet aangepast worden. Tabellen worden aangeleverd om te helpen met het organiseren van data, maar moeten niet als benodigdheden worden gezien omdat de leerlingen tot de juiste conclusie kunnen komen zonder de remweg voor verschillende snelheden uit te rekenen. De tabellen zijn gedeeltelijk ingevuld zodat de leerlingen zelf moeten bepalen hoeveel rijen nodig zijn in de eerste tabel, en welke snelheden gekozen moeten worden in de tweede.

De leerkracht moet vermijden om precieze tabellen aan te leveren, zodat leerlingen hun onderzoeksvaardigheden kunnen ontwikkelen. Leerlingen kunnen worden aangemoedigd om ICT te gebruiken voor grafieken, data weergave, en berekeningen. Het scenario kan echter volledig zonder ICT worden geïmplementeerd. De leerkracht kan materiaal maken voor het gebruik van ICT. Bij het maken van zulk materiaal moet er rekening mee worden gehouden dat ICT alleen helpt met het maken van berekeningen en het weergeven van resultaten. Het zal geen conclusies leveren.

*De lengte van individuele fases* kan worden aan gepast aan de leerlingen, maar zonder al te grote afwijkingen.

Als de groepen tijdens de *a-didactische fase* geen algemene formule hebben gevonden die een verband legt tussen de remweg en startsnelheid, kan de leerkracht de volgende vragen stellen:

- Kan je enige regelmaat ontdekken tussen de verkregen remwegen?
- Kunnen de verkregen resultaten grafisch worden weergegeven? Kan je een verband leggen tussen de grafische en een algebraïsche weergave?
- Wat is de snelheid van het voertuig wanneer het stopt?
- Als je de remweg hebt uitgerekend voor verschillende snelheden, kan je dan hetzelfde doen met een algemene snelheid $v$ in plaats van een specifieke?
- Welke natuurkundige formules kunnen nuttig zijn?
- Hoe kan je technologie gebruiken om formules en verbanden te vinden?

De leerkracht hoeft niet elke groep apart les te geven. Daarbij is het niet nodig om bij een groep te blijven tot ze een gestelde vraag hebben beantwoord. Bekijk deze vragen als een kleine *devolutie* van een gelimiteerd probleem en laat de studenten a-didactisch doorgaan met de *actie fase* en *formulering*. De leerkracht moet geen verdere bespreking ondersteunen, noch moet ze suggesties geven voor antwoorden.

Tegen groepen die moeite hebben met het vinden van de formule $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ kan de leerkracht zeggen:

- Geef elk getal in de som met stippen weer en observeer;
- Markeer de som met S en schrijf hem twee keer op, maar met een andere volgorde: van de eerste tot de laatste term en van de laatste tot de eerste term.

Het is niet nodig dat de leerlingen de formule bewijzen in de a-didactische fase. Het is wel waardevol om te zien dat de som gelijk is aan $n^2$ om vervolgens het bewijs didactisch te leveren tijdens de validatie fase.

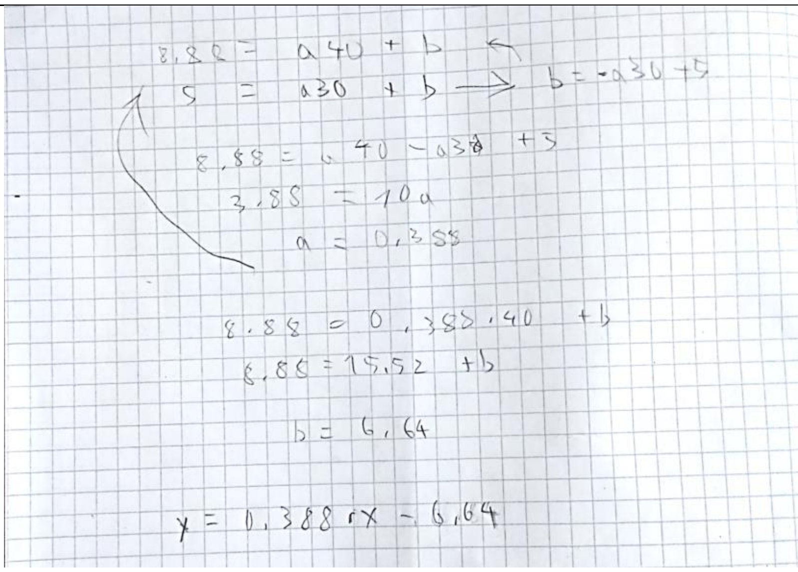
De leerlingen kiezen zelf de startsnelheden. Waarschijnlijk kiezen ze 50, 40, 70 … km/u. Als ze snelheden kiezen die geen veelvoud zijn van tien, kunnen ze in de problemen komen bij het bepalen wanneer de snelheid nul wordt. In dit geval zal het moeilijker zijn om de regelmatigheid te bepalen. De gekozen snelheden kunnen worden besproken tijdens de validatie fase.

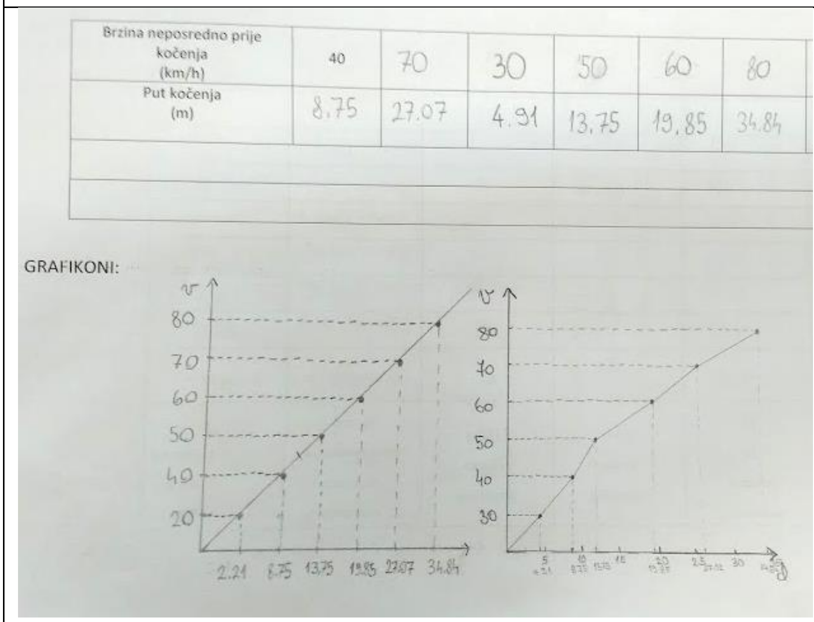
Leerlingen kunnen de remsnelheid weergeven als breuk of kommagetal. Kommagetallen zullen slechts een benadering zijn, waardoor regelmatigheden niet goed opvallen. Het verschil tussen weergaven de twee kan ook besproken worden tijdens de validatie fase.

Het is belangrijk om tijdens de *institutionalisering fase* alle voorgekomen strategieën te bespreken en met elkaar te verbinden.

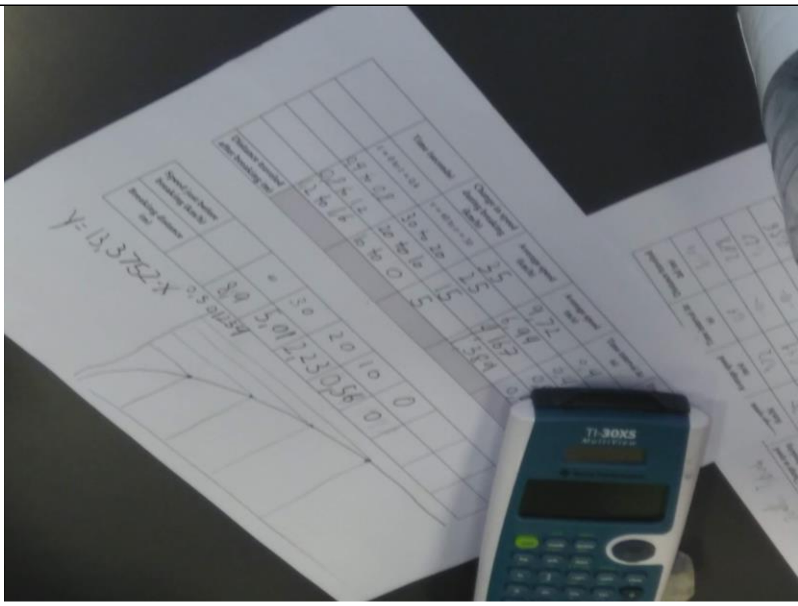
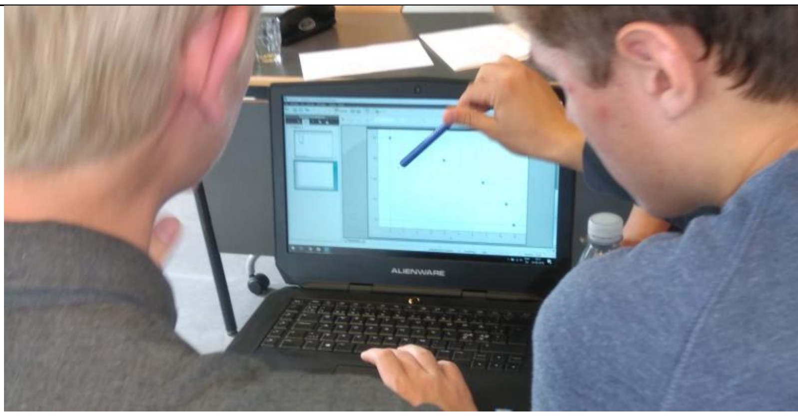
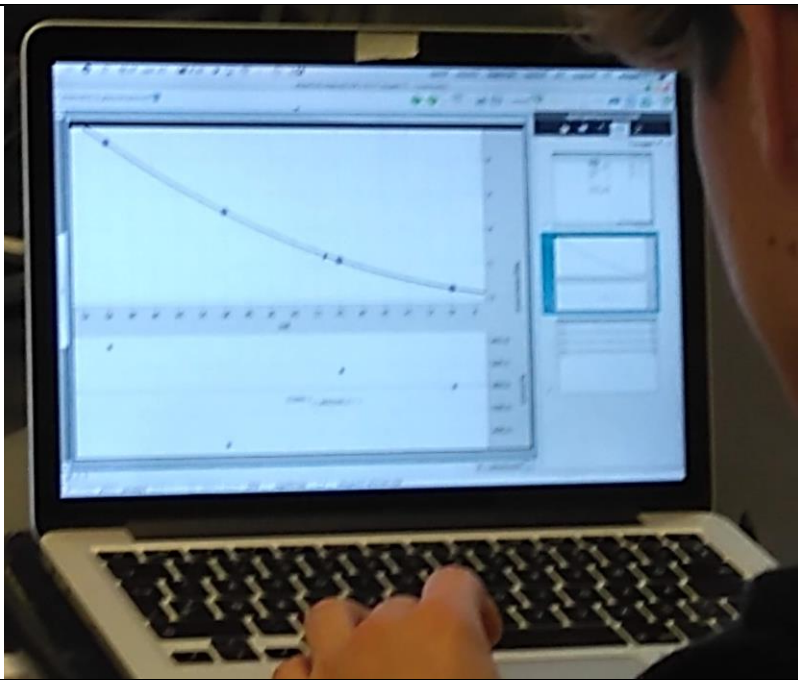
## Observaties uit de praktijk

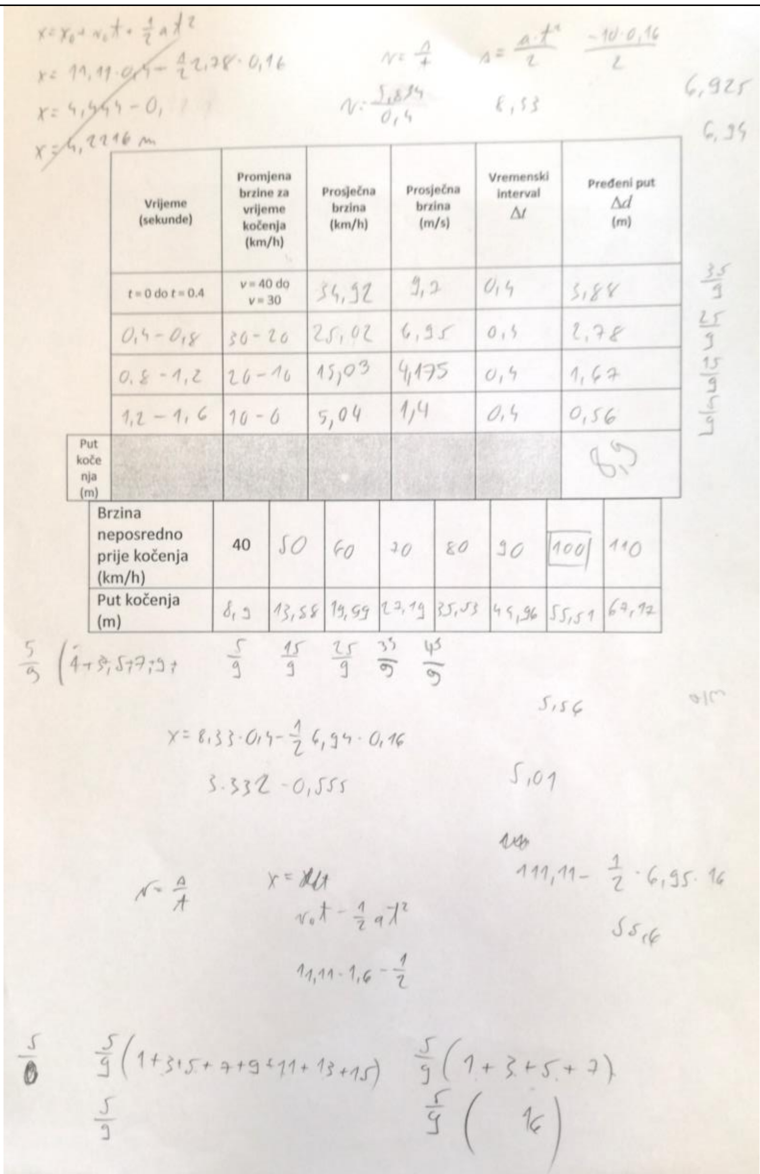
In sommige groepen maakten leerlingen kleine rekenfouten waardoor ze de verkeerde remweg kregen voor een aantal startsnelheden. In de eerste formulering fase kan de leerkracht leerlingen uit verschillende groepen vragen om hun resultaten met elkaar te vergelijken en fouten te corrigeren.

<table>
<tr>
<td>


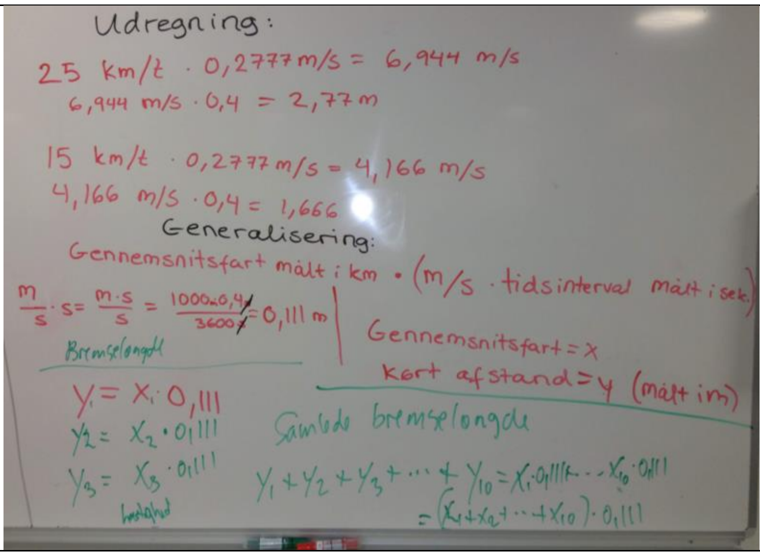
</td>
<td>Sommige leerlingen gingen ervan uit dat het verband tussen snelheid en remweg lineair is. Ze gebruikten data uit de tabellen om de lineaire functie te bepalen.</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>In sommige groepen probeerden de leerlingen datapunten zó te tekenen dat ze op één lijn of op een stuksgewijze lineaire functie lagen. In dat geval kan de leerkracht aan de leerlingen vragen waarom ze denken dat het verband lineair is. Kennen ze eigenschappen van de lineaire functie en kunnen ze die in de data vinden? Leerlingen zullen moeten realiseren dat het verband niet lineair is omdat het differentiequotiënt niet constant is.</td>
</tr>
</table>

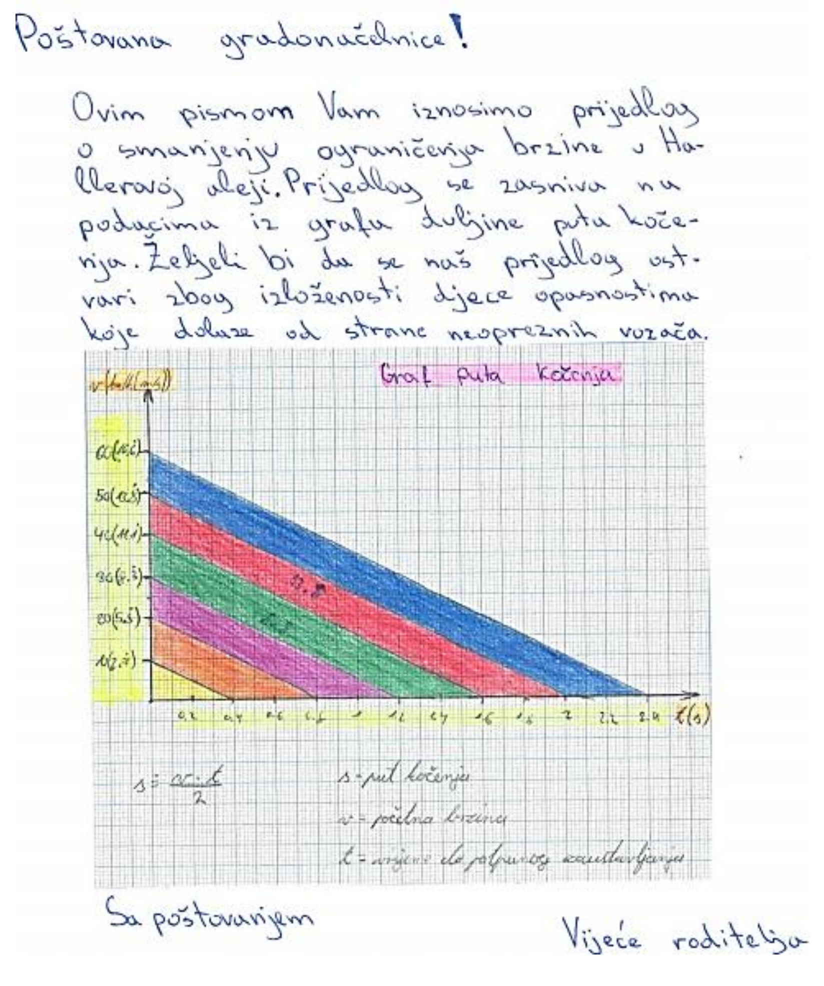
| | |
|---|---|
|  | *In sommige groepen plaatsten de studenten afstand op de horizontale as.* |
|  | *Sommige studenten maakten gebruik van ICT.* |
|  | *Na geconcludeerd te hebben dat het verband mogelijk kwadratisch is, vonden de leerlingen de kwadratische regressie.* |



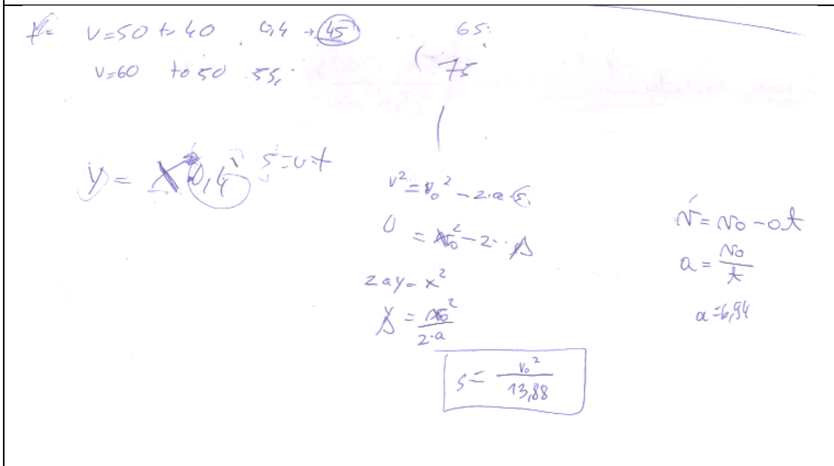

*In sommige groepen gebruikten de leerlingen breuken en kwamen ze tot een som van opeenvolgende oneven getallen.*



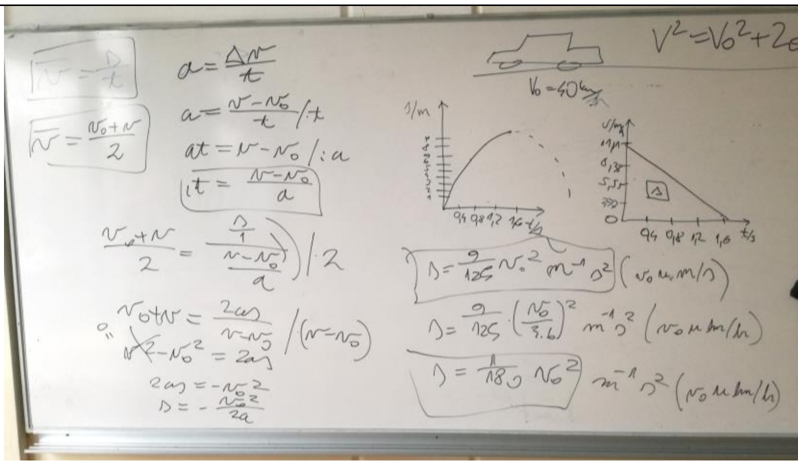

*Leerlingen kwamen tot de sommen van andere rijen. In dit geval zal de leraar hun werk af moeten maken tijdens de institutionalisering fase.*




*Sommige leerlingen tekenen v-t grafieken voor verschillende startsnelheden en berekenen de remwegen door de oppervlakte onder de grafiek te nemen. In dit geval zou de leerkracht het idee moeten voortzetten tijdens de institutionalisering fase en de v-t grafiek voor algemene snelheid v tekenen.*



*Sommige leerlingen combineren de formules $a = \frac{\Delta v}{t}$, $\bar{v} = \frac{s}{t}$ en $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$, en krijgen de formule $v^2 - v_0^2 = 2as$ (1). Omdat de snelheid v bij de remweg gelijk is aan nul, volgt daaruit dat $s = -\frac{v_0^2}{2a}$ waar de versnelling a negatief is.*



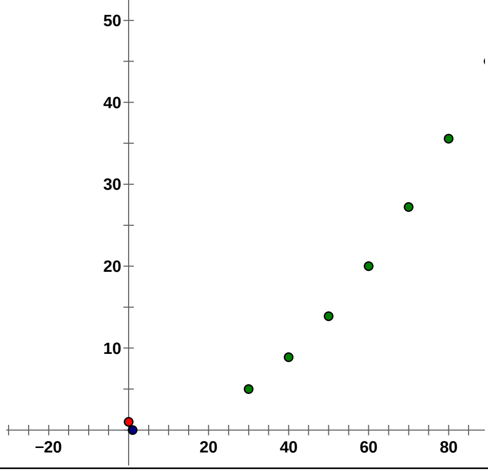
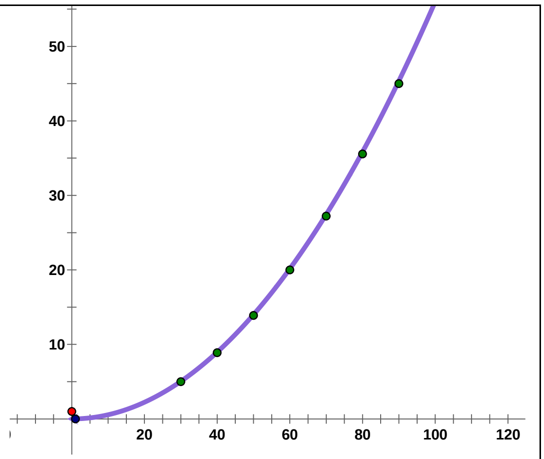
*Formule (1) kan verkregen worden door tijd in de formules* $v = v_0 + at$ *en* $s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$ *te elimineren, of de leerlingen kennen het al van natuurkunde .*

Door formule (1) te gebruiken zullen leerlingen het kwadratische verband tussen remweg en startsnelheid van de auto krijgen zonder specifieke waardes te berekenen. De groepen die het probleem op deze manier aanpakken zullen waarschijnlijk sneller zijn dan de andere groepen. Daarom kan het ze aangeboden worden om alsnog gebruik te maken van de tabellen en te letten op de daarvoor benodigde data (waarom is de gemiddelde snelheid bijvoorbeeld van belang?), het verband tussen remweg en startsnelheid grafisch te weergeven, een uitleg voor te bereiden over het belang van de snelheidslimiet in de buurt van scholen, of het verband tussen stopafstand (niet te verwarren met remweg) en startsnelheid te onderzoeken (suggestie voor verdere problemen 1).

**Conclusie:**

We kunnen zien dat sommige leerlingen hun conclusie halen uit het kijken naar de getallen, terwijl anderen proberen om te beschrijven hoe de remweg afhankelijk is van startsnelheid. Zie de tabel hieronder.

<table>
<tr><th>Getallen</th><th>Verbanden</th></tr>
<tr><td>Leerlingen berekenen de remweg voor een aantal snelheden, bijvoorbeeld 40 km/u en 70 km/u, en concluderen dat de remweg te lang is wanneer de auto 70 km/u rijdt dus raden ze een snelheidslimiet van 40 km/u aan.</td><td>Leerlingen concluderen, door naar de getallen te kijken, dat het verband niet lineair is (wanneer de snelheid hoger is, is de remweg nog veel langer).</td></tr>
<tr><td>Leerlingen vullen de tabel in met meer data. Bijvoorbeeld:
<table>
<tr><td>Snelheid (km/h)</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Remweg (m)</td><td>5</td><td>8.89</td><td>13.89</td><td>20</td><td>27.22</td><td>35.56</td><td>45</td></tr>
</table>
Dan geven ze advies op basis van de getallen.</td><td>Leerlingen kijken naar de getallen in de tabel en concluderen dat het verband mogelijk kwadratisch is, omdat bij het verdubbelen van de snelheid de remweg verviervoudigd (kijken naar 30 km/u en 60 km/u).</td></tr>
<tr><td>Leerlingen maken een grafiek van de berekende punten en geven advies door daarnaar te kijken.</td><td>Leerlingen tekenen de punten in een assenstelsel en concluderen dat het verband mogelijk kwadratisch is, waarna ze de grafiek tekenen.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
|  |  |
| | Leerlingen concluderen dat het verband kwadratisch is en gebruiken technologie om de kwadratische regressie te vinden. |
| | Leerlingen concluderen dat het verband kwadratisch is en gebruiken de waardes uit de tabellen om de coëfficiënten van de kwadratische functie te vinden. |
| | Leerlingen gebruiken redenaties om te bewijzen dat het verband kwadratisch is (*zie mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen*). |

Alhoewel het doen van berekeningen en verzamelen van data belangrijk is voor dit scenario, moeten leerlingen wel de behoefte voelen om de onderliggende verbanden te vinden. Als alle leerlingen tevreden zijn met de antwoorden die ze verkregen hebben uit alleen het observeren van de getallen, kan de leerkracht tijdens de institutionalisering fase bespreken wat "de afhankelijkheid bepalen" betekent.

## Evaluatie instrumenten

Aan het einde van de opdracht, of tijdens de start van de volgende, kunnen de leerlingen verscheidene opdrachten gegeven worden:

1. Twee auto's rijden langs elkaar op de weg. De snelheid van eentje is drie keer die van de andere. Zal de remweg van de snellere auto ook drie keer zo groot zijn? Leg je antwoord uit.
   *Antwoord: Nee. De remweg is kwadratisch afhankelijk van de snelheid voor het remmen. Dat is waarom de remweg van het snellere voertuig negen keer zo groot zal zijn.*
2. Een voertuig beweegt met een snelheid van 80 k/u. Naar welke snelheid moet worden afgeremd om de remweg te halveren?
   *Antwoord: Vanwege het kwadratisch verband is de snelheid* $v = \frac{80}{\sqrt{2}} \approx 57\ km/u$.

3. De remweg wordt beïnvloed door zowel de startsnelheid als het weer. Op een dag kwam uit een meting dat een voertuig met snelheid 40 k/u tot stilstand kwam na 10 m. Na hoeveel meter zal dat voertuig, onder dezelfde omstandigheden, stoppen als die een snelheid heeft van 70 km/u?
*Antwoord: De remweg heeft een kwadratisch verband met de startsnelheid, dus kunnen we aannemen dat het verband geschreven kan worden als* $d(v_0) = k \cdot v_0^2$. *In dit geval hebben we dat* $d(40) = 10$ *dus* $k = \frac{d}{v_0^2} = \frac{1}{160}$. *Een voertuig met snelheid 70 k/u zal stoppen na* $d(70) = \frac{70^2}{160} = 30.625 \approx 30.6\, m$.

## Suggesties voor verdere problemen

1. De stopafstand van een voertuig bestaat uit twee delen: de reactie afstand en de remweg.
De afstand die het voertuig aflegt vanaf het moment dat de bestuurder iets ziet waar die voor moet remmen tot het moment er op het rempedaal wordt gedrukt heet de reactie afstand. De reactietijd van een bestuurder is 1 s en kan langer zijn door zaken als ziekte, drugs en alcohol moeheid. De reactietijd van een bestuurder onder de invloed van alcohol (0.5 g/l alcohol in het bloed) is 1.5 s. We gaan er van uit dat het voertuig met een constante snelheid rijdt gedurende de reactietijd.
De afstand die een voertuig aflegt vanaf het moment dat de bestuurder begint met remmen totdat het stilstaat heet de remweg. De remweg hangt voornamelijk af van de snelheid vlak voor het remmen (de zogenoemde startsnelheid), de staat van de weg, en mogelijk ook de staat van het voertuig zelf. Wanneer we de staat van het voertuig niet meenemen kan de remweg berekend worden met de formule $s = \frac{v^2}{254\mu}$ waar $v$ de snelheid is in kilometer per uur en μ de wrijvingscoëfficiënt is, welke afhankelijk is van de staat van de weg:

| **Wrijvingscoëfficiënt $\mu$** | **Droge weg** | **Natte Weg** |
|---|---|---|
| Asfalt nieuw | 0.7 – 0.8 | 0.5 – 0.6 |
| Asfalt oud, vies | 0.6 – 0.7 | 0.25 – 0.45 |
| Grind, kleine steentjes | 0.6 – 0.7 | 0.3 – 0.5 |
| Sneeuw | 0.2 – 0.4 | |
| Ijs | 0.05 – 0.1 | |

   a) Zoek uit hoe de reactie afstand afhangt van de snelheid voor het remmen voor de bestuurder met een reactietijd van 1 s en 1.5 s.
   b) Zoek uit hoe de remweg afhangt van de snelheid voor het remmen voor droog, nat en ondergesneeuwd asfalt.
   c) Zoek uit hoe de stopafstand afhangt van de snelheid voor het remmen voor verschillende reactiesnelheden en staten van de weg.

2. Hoeveel diagonalen heeft een vierhoek, vijfhoek, zeshoek, en $\boldsymbol{n}$-hoek?

3. Hoeveel stuken pizza krijg je wanneer je het in twee, drie, vier, $n$ keer snijdt?

4. Een gelijkzijdige driehoek met zijdes van lengte $n$ cm wordt verdeeld in gelijkzijdige driehoeken met zijdes van 1 cm, hoeveel zijn er daarvan?

5. Beschrijf het wiskundige pad van een basketbal tijdens een vrije worp.

## Logica achter en RWO perspectieven op het scenario

### Relevantie en toepasbaarheid

Deze kennis komt je in het dagelijks leven tegen bij bewegende voertuigen en remmen. Leerlingen worden zich ervan bewust dat de snelheid vlak voor het remmen de remweg beïnvloed. Kennis en vaardigheden die te maken hebben met kwadratische afhankelijkheden komen veel voor in andere situaties.

### Onderzoeksvaardigheden

Onderzoek is aanwezig in alle fases. Leerlingen horen gewend te zijn aan onderzoeken en vaker in situaties geplaatst te worden waar ze zo te werk gaan. Dus, tijdens het werken aan hun wiskundige bekwaamheid, ontwikkelen ze ook hun onderzoeksvaardigheden. Gedurende de implementatie van het scenario zullen studenten systematisch experimenteren, data organiseren, besluiten vormen, samenwerken en communiceren. Onderzoeksvaardigheden moeten opgenomen worden in de institutionalisering, vooral het organiseren, structuren en samenvatten van data.

### Potentie voor een reeks aan lessen

Het scenario kan onderdeel zijn van een langere reeks aan lessen over kwadratische afhankelijkheden en de eigenschappen van kwadratische rijen en functies.

- *Voorkennis*: Voor het hoofdstuk over kwadratische afhankelijkheden verwachten we dat leerlingen het concept van een functie (in het specifiek de lineaire functie) kennen en bekend zijn met het concept van rekenkundige rijen en hun eigenschappen.
- *Introductie*: Een context van een remmende auto kan gebruikt worden als een wijd-open probleem die met de module gepaard gaat.

### Logica achter het scenario

- *Horizontaal mathematiseren:* De wiskundige taal wordt geïntroduceerd om de situatie te bespreken. De leerlingen maken het eerste informele model van de situatie – het scenario van de remweg, kwadratische afhankelijkheid wordt geïntroduceerd.
- *Verticaal mathematiseren:* Wiskunde die bij het probleem is betrokken wordt verder ontwikkeld. Het model wordt compacter en algemener. Leerlingen onderzoeken patronen in de getallen en hun sommen.
  Leerlingen bestuderen kwadratische rijen en de kenmerken daarvan: De eerste verschillen zijn lineair, en de tweede verschillen constant. Verder zijn sommen van termen uit een lineaire (rekenkundige) rij kwadratisch. Generalisatie – voor een kwadratische functie is de eerste afgeleide lineair en de tweede is constant. Daarbij is de integraal van een lineaire functie kwadratisch.

# MERIA Module “Conflictlijnen – introductie”

## Het segmenteren van een vlak met middelloodlijnen

## Het scenario

| | |
|---|---|
| Leerdoel | Een gebied met punten kun je verdelen in deelgebieden met middelloodlijnen van paren punten. |
| Bredere leerdoelen | Constructie van een middelloodlijn. Het begrip dat een middelloodlijn de verzameling punten is die even ver van twee gegeven punten afliggen. Eigenschappen van middelloodlijnen en hun snijpunten bij driehoeken en vierhoeken, en de eigenschappen van punten in gebieden die vastgelegd zijn door middelloodlijnen. Kunnen werken met de notatie $d(P,X) < d(P,Y)$.<br>Onderzoeksvaardigheden: experimenteren, netjes en systematisch tekenen van grensgebieden of deelgebieden die vastgelegd zijn door (afstanden tot) gegeven punten. Bevindingen duidelijk presenteren door te besluiten op welk deel van de getekende middelloodlijnen ook grenslijn zijn. Deze grenslijn noemen we conflictlijn. De kaart met deelgebieden heet ook wel een Voronoi-diagram.<br>Interdisciplinaire vaardigheden: leerlingen kunnen een territoriaal probleem of geografisch conflict (aardrijkskunde) verbinden met meetkundige redeneringen. Andere vakgebieden kunnen ook aan de orde komen, bijvoorbeeld de navigatie van een robot. |
| Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden | Pythagoras en driehoeksongelijkheid (vooral vanwege het bewijs dat de middelloodlijn een conflictlijn is). |
| Leerjaar | Leerjaar 4-5, leeftijd 15-16 jaar (wanneer de middelloodlijn wordt geïntroduceerd). |
| Tijd | 40 minuten, met gebruik van applet 70 minuten. |
| Benodigd materiaal | Werkbladen, papier, ICT en MERIA applet in GeoGebra:<br>https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html<br>Alternatieve sites:<br>http://alexbeutel.com/webgl/voronoi.html<br>https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4 |

**Probleem**:

Gegeven is een kaart van een woestijn met waterbronnen. Leerlingen worden gevraagd om gebieden in de woestijn zó te kleuren dat voor elk mogelijk punt in een gekleurd gebied, de bijbehorende bron de dichtstbijzijnde is. [2]

[2] Het probleem en de kaart van de woestijn worden geïntroduceerd in het boek 'Geometry with Applications and Proofs, Voronoi Diagrams' door A. Goddijn, M. Kindt, W. Reuter

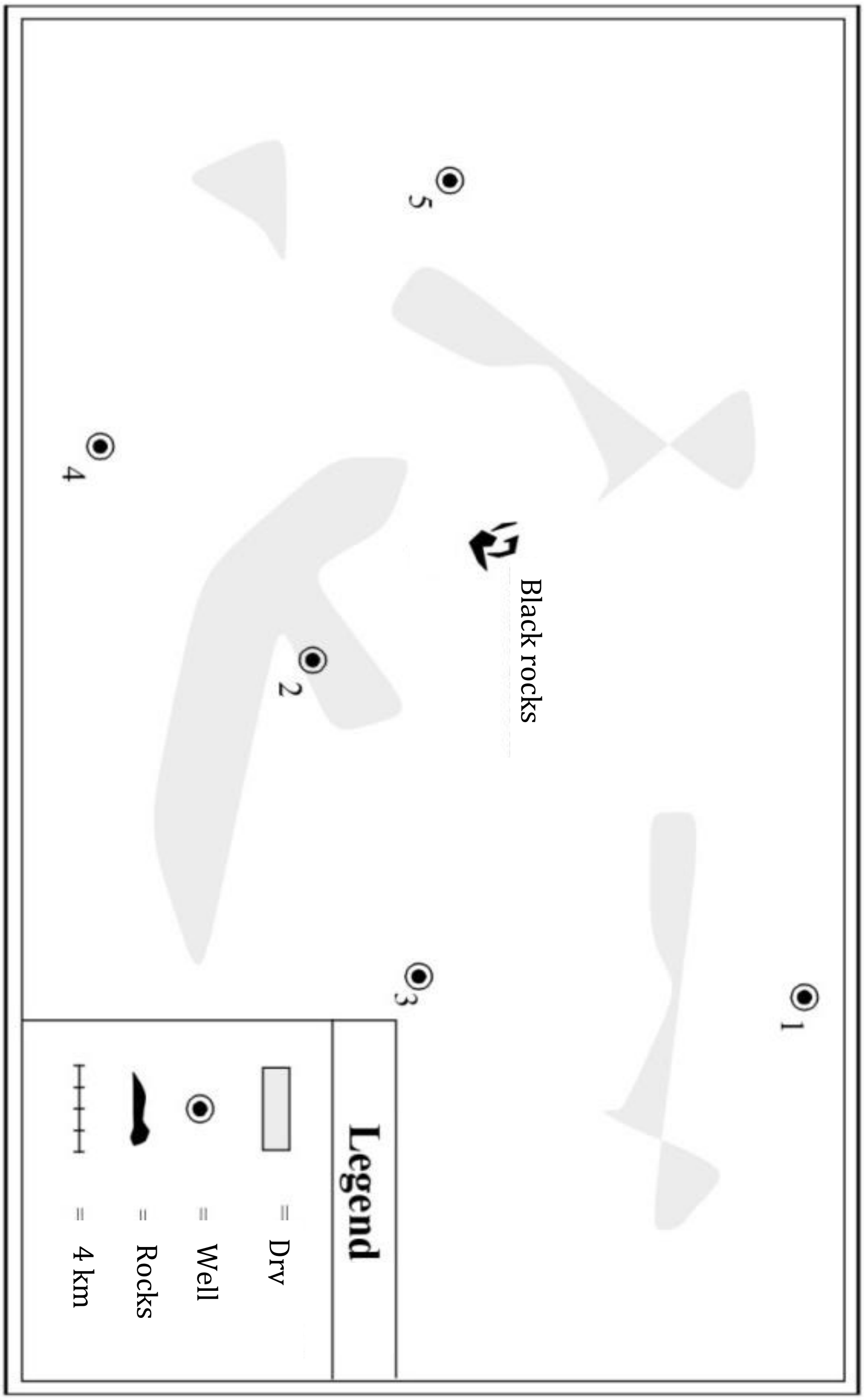
| Fase | Acties van de leerkracht incl. uitleg | Acties en reacties van de leerlingen |
|---|---|---|
| Devolutie 1 (didactisch)<br><br>5 minuten | Introduceer het begrip conflictlijn klassikaal: Stel dat twee leerlingen (X en Y) wat snoepjes hebben en aan jou wordt gevraagd om een snoepje te halen bij de dichtstbijzijnde. De leerkracht kiest twee leerlingen uit en vraag: wie is dichter bij leerling X en wie bij leerling Y. Tenslotte laat de leerkracht leerlingen hun hand opsteken als ze moeite hebben met beslissen. | Leerlingen doen mee door hun handen op te steken en te beslissen bij wie ze het dichtstbij zitten. Daarbij zien ze de beslissingen van hun klasgenoten. |
| Institutionalisering (didactisch)<br><br>2 minuten | De leerkracht vat de belangrijkste bevinding samen: Het probleem is om punten met 'dezelfde afstand' te vinden, de uitdaging ligt bij het vinden van een soort procedure waarmee je precies en met zekerheid de verzameling van zulke punten kunt vinden. De notatie (bijv. d(A,C)<d(B,C) wanneer C dichter bij A dan B ligt) wordt geïntroduceerd. Hier wordt bij de volgende stap verder op in gegaan (leerlingen krijgen de mogelijkheid om te werken met notatie en afstands-gerelateerd beredeneren). | Leerlingen luisteren en kunnen de geïnstitutionaliseerde redenaties en notatie verbinden met hun eigen werk. |
| Devolutie 2 (didactisch)<br><br>3 minuten | De leerkracht legt een nieuw probleem voor: Zet jezelf ergens in de woestijn (voorzie de leerlingen van een werkblad). Vind de bron die het dichtste bij je ligt. Vind alle plekken vanaf waar je ook naar die bron zou gaan. Verdeel uiteindelijk de kaart in gebieden zodat alle punten in een gebied het dichtste bij de bijbehorende bron liggen. | Leerlingen luisteren en maken een begin aan het werken op de kaart van de woestijn. |
| Actie (a-didactisch)<br><br>15 minuten | De leerkracht loopt rond in de klas. | Na de bron die het dichtste bij hun ligt gevonden te hebben, beginnen groepen met het construeren van een gebied met alle van zulke punten – de dichtstbijzijnde bron gepaard met punten, die een voor |

| | | |
|---|---|---|
| | | een gevonden worden. De leerlingen ontdekken dat, om uiteindelijk tot gebieden te komen, ze een soort strategie (bewijs) nodig zullen hebben omdat het te ingewikkeld wordt wanneer ze meer punten toevoegen. |
| Formulering (a-didactisch)<br><br>5 minuten | De leerkracht loopt rond in de klas om verschillende ideeën die de leerlingen opperen en gebruiken vast te stellen en kondigt presentaties aan. | Leerlingen bespreken in groepsverband wat ze hebben gedaan, en schrijven op wat de verzameling aan punten met de gevraagde eigenschap volgens hun is. |
| Validatie (didactisch en a-didactisch)<br><br>5 minuten | De leerkracht vraagt wat groepen om te presenteren wat ze tot nu toe hebben gedaan (als het mogelijk is ten minste een groep die cirkels gebruikt en een groep die met middelloodlijnen is begonnen) | Leerlingen presenteren. |
| Institutionalisering (didactisch)<br><br>5 minuten | De leerkracht laat de onderliggende stelling van wat er tot nu toe is gedaan zien: d(A,P) = d(B,P) dan en slechts dan als P op de middelloodlijn ligt. Voronoi diagrammen worden gemaakt met middelloodlijnen, dus liggen die aan de basis voor de algoritmes die zulke diagrammen maken. Daarbij kunnen de definities van middelloodlijnen besproken worden: "de verzameling aan punten met gelijke afstand tot punten A en B", en "de lijn door het middelpunt van en loodrecht op lijnstuk AB. Een optioneel onderdeel van het scenario: Kan je de stelling bewijzen? (Niet alle leerlingen hebben daar de behoefte toe) | Leerlingen begrijpen de geïntroduceerde notatie omdat dat te maken heeft met hun activiteit. Zo definieert d(A,P)=d(B,P) een lijn van punten P (de 'conflictlijn' van punten A en B). d(A,P)<d(B,P) definieert een gebied (zogeheten 'veilig gebied'). Daarnaast begrijpen ze het wiskundige probleem, aangezien dat ook naar boven kwam in hun activiteit. |
| Devolutie 3 (optioneel)<br><br>5 minuten | ICT kan gebruikt worden om Voronoi diagrammen te maken.<br>De leerkracht demonstreert wat een ICT programma kan doen (na twee punten toegevoegd te | Leerlingen luisteren en aanschouwen hoe de software automatisch Voronoi diagrammen tekent. Ze raken erin geïnteresseerd en uitgedaagd om |

| | | |
|---|---|---|
| | hebben). Herinner je/herontdek dat er een lijn is met punten van gelijke afstand, en dat het vlak opgedeeld is in twee gebieden. Ga daarna door met drie punten, en ontdekt dat er een punt met gelijke afstand tot alle drie is. Gebruik bijvoorbeeld: [https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html](https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html). Kom terug op je originele probleemstelling en onderzoek wat er gebeurt in specifieke gevallen. Speel er een beetje mee tot je bijvoorbeeld een mooi en verassend patroon met een verzameling van gestructureerde punten vindt. Ook kan je de patronen uitzoeken die je krijgt met het plaatsen van vier punten. | de software zelf te gebruiken. Ze willen onderzoeken wat er gebeurt door er een beetje mee te spelen. |
| Actie (a-didactisch)<br><br>10 minuten | De leerkracht loopt rond in de klas, daagt studenten uit om systematisch te experimenteren en helpt alleen met softwarematige problemen. Als veel leerlingen hetzelfde probleem hebben, behandeld dat dan klassikaal. | Leerlingen construeren een zelfbedacht probleem in de software, vinden de oplossing en vergelijken dat met het originele figuur. Ze onderzoeken ook wat er gebeurt in andere gevallen met regelmatig en/on onregelmatig verdeelde punten. |
| Formulering (a-didactisch)<br><br>5 minuten | De leerkracht vraagt aan de leerlingen om een presentatie voor te bereiden over hun (meest verrassende) bevindingen en daagt ze uit om specifieke patronen uit te leggen (bijv. wanneer heeft een 4-punt Voronoi diagram vier gebieden?). | Leerlingen bereiden twee screenshots voor: een van de oplossing van hun zelfbedachte probleem en de ander van een mooi patroon (en hoe ze die geconstrueerd hebben). Ze proberen hun bevindingen te beargumenteren met de cirkel-tool, formele afstands-notatie, en stellingen zoals Thales, Pythagoras … |
| Validatie (didactisch en a-didactisch)<br><br>5 minuten | De presentaties helpen met de validatie van wat er gaande is in deze diagrammen, het bekend raken met de formele notatie en het gebruik van geometrische redenaties in verschillende segmentatie situaties. | Leerlingen zien het verband tussen de validatie en de formuleringen van hun bevindingen. |

| | | |
|---|---|---|
| Institutionalisering (didactisch)<br><br>5 minuten | Algemene conclusies over het concept van Voronoi diagrammen bestaan uit middelloodlijnen en een aantal illustrerende gevallen en patronen in deze diagrammen. | Leerlingen realiseren zich hoe de geïnstitutionaliseerde leerdoelen verbonden zijn met hun initiële onderzoek binnen de woestijn-context en hebben die leerdoelen behaald. |

| | |
|---|---|
| Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen | • Sommige leerlingen zullen beginnen met het schetsen van lijnen tussen de gegeven punten met min of meer gekromde delen en geen duidelijk snijpunt waar drie (of vier) lijnen elkaar ontmoeten.<br><br>• Sommige leerlingen zullen cirkels tekenen of de gebieden verdelen met gekromde lijnen. Deze leerlingen zullen zich moeten realiseren dat gekromde lijnen onmogelijk zijn en dat het tekenen van cirkels behulpzaam is voor het vinden van punten met dezelfde afstand tot een bron of middelpunt, maar niet voor het vinden van grenzen (alhoewel het wel daarvoor gebruikt kán worden).<br><br>• Sommige leerlingen zullen meteen weten wat ze moten doen en beginnen met het tekenen van middelloodlijnen. Voor hen is het cruciaal om te bespreken wat er gebeurt in de gebieden waar middelloodlijnen elkaar ontmoeten. Komen ze samen in één punt? |

| Werkblad |  |
| --- | --- |

## Uitleg van het materiaal

Een kaart van een woestijn met bronnen wordt verstrekt. Van de leerkracht wordt verwacht dat die de woestijnkaart voor alle groepen voorbereidt. Sommige van de grafische elementen op de kaart, zoals de zwarte rotsen, laten zien dat een deel van de mathematisering van een echte woestijn naar een kaart al is gedaan, maar nog niet volledig. Als je de leerlingen niet wilt opzadelen met die elementen kan je ze weglaten of laten negeren. Een applet is beschikbaar voor het onderzoeken van verscheidene situaties. Controleer van tevoren of de applet werkt, hoe je het kan gebruiken als instrument voor demonstraties, en besluit hoe en wanneer het te gebruiken samen met een taak/vraag voor de leerlingen.

## Variaties gebaseerd op didactische variabelen

*Starter:* Ga na hoe je het inleidende probleem organiseert. Wanneer je uitdeelt, creëer kritieke situaties waar sommige leerlingen zullen moeten twijfelen… Na devolutie 1 kan de leerkracht besluiten om een formele notatie voor afstand te introduceren, of niet, afhankelijk van de voorkennis waar de leerlingen over beschikken.

*Milieu:* We creëren een probleemsituatie met de woestijn en bronnen. Je kan een alternatieve situatie creëren door een andere context te gebruiken of een verschillend aantal punten op verschillende posities. Een andere manier om het probleem te formuleren: beschrijf een strategie waarmee je voor zoveel mogelijk punten in de woestijn kan besluiten naar welke bron je gaat. Het milieu bevat de criteria voor het valideren van het werk van de leerlingen. De winnende strategie, een kaart waarmee je voor elk punt kunt besluiten waar heen te gaan, behalve diegene op de conflictlijnen, kun je maken als je het leerdoel bereikt hebt.


*De kaart zo verdelen dat voor elk punt in Slovenië kan worden bepaald welk helikopterdek het dichtst bij is. (Nadja Marušić,*

*De lengte van de fases* kan aangepast worden aan studenten hun werk.

*Tijdens een eerste actie fase:*
In het geval dat bijna alle leerlingen middelloodlijnen gebruiken en de actie fase snel voorbij is, leg dan meer nadruk op actie-elementen in bewijs of onderzoek met de applet:

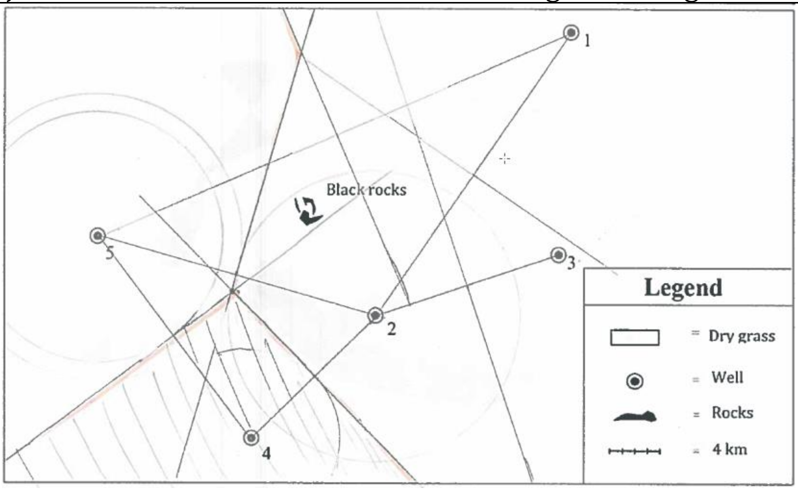
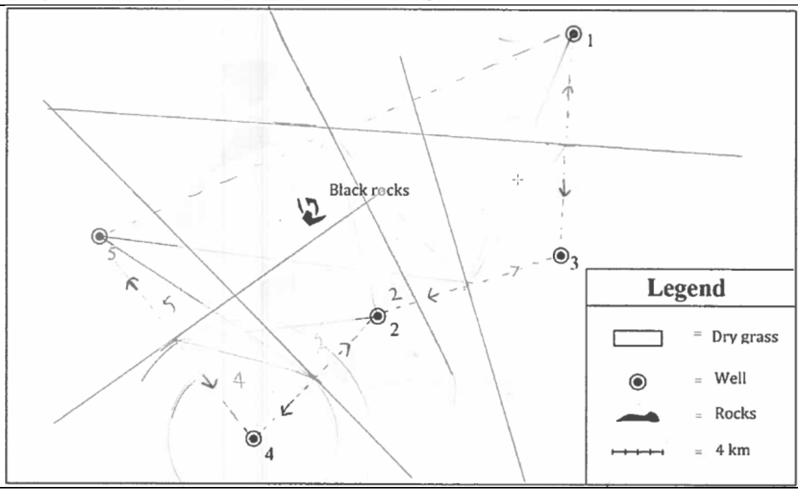
- Voor het bewijs kan je de leerlingen vragen om de middelloodlijn stelling en/of de gelijkheid tussen een punt op een Voronoi rand en een punt op een middelloodlijn te bewijzen.
- Met de applet kan je ze een variëteit aan interessante patronen laten tekenen, maar dit kan leiden tot enige moeite met validatie en institutionalisering van sommige wiskundige ideeën en bevindingen. Wij suggereren in dat geval om leerlingen duidelijke vragen te stellen als: Onderzoek mogelijke situaties met vier punten

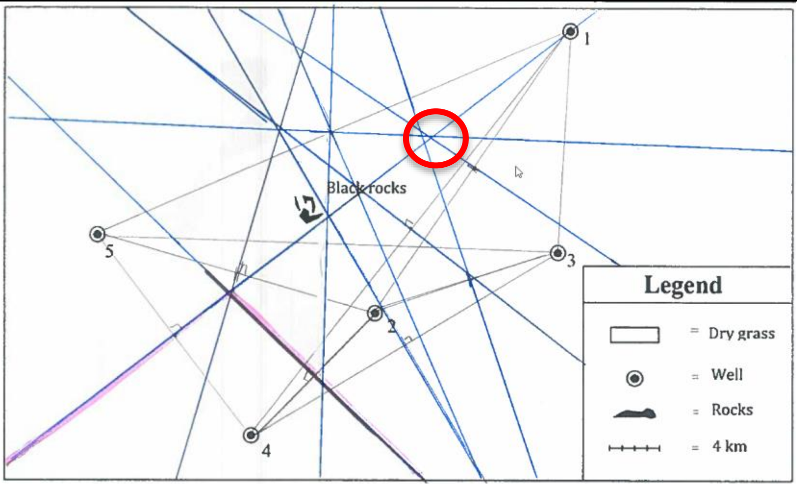
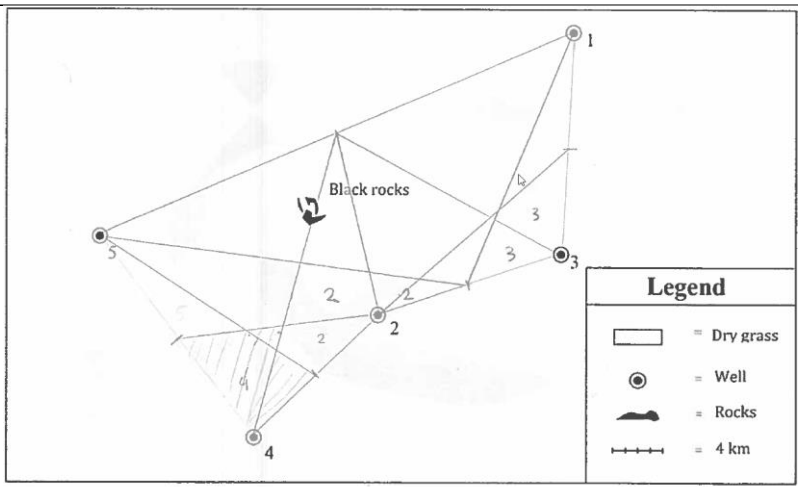
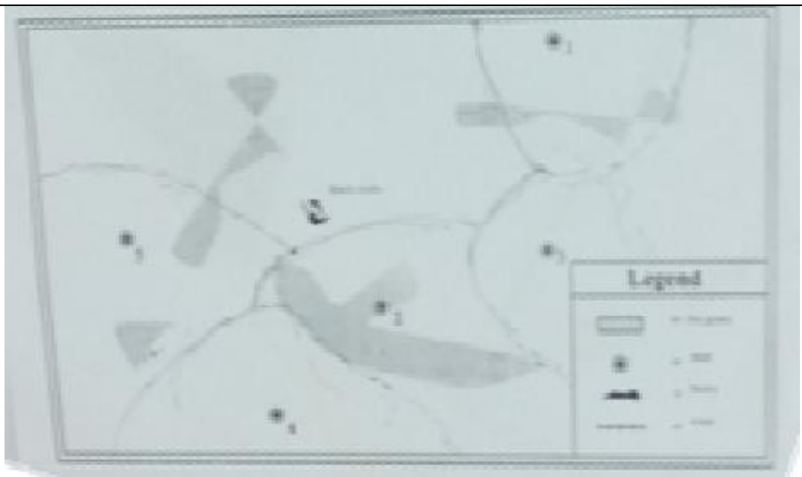
(hoeveel verschillende patronen kan je vinden? Wanneer komen alle middelloodlijnen samen? …). Daag ze uit om criteria en/of bewijzen te leveren.

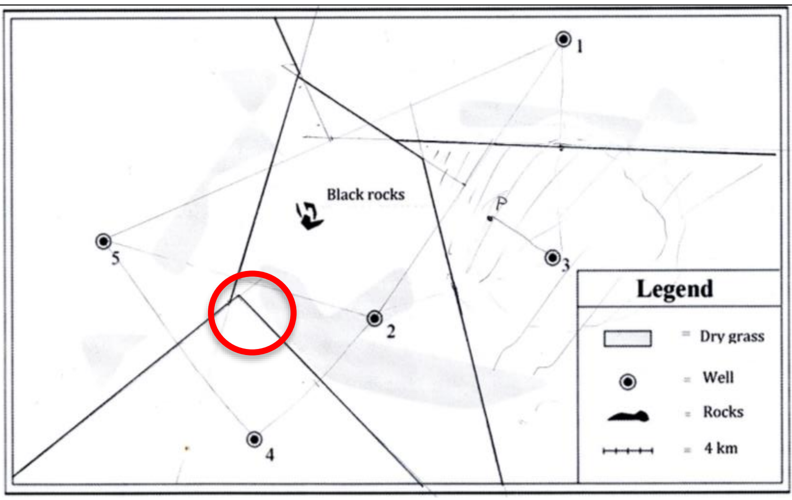
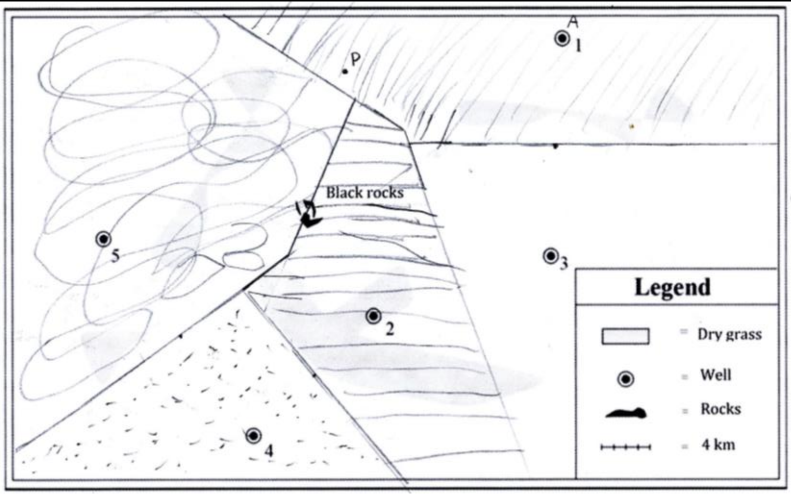
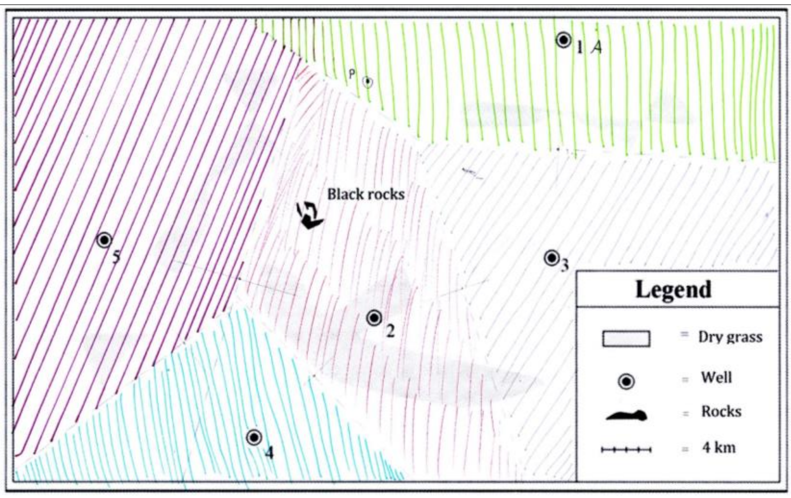
Als sommige leerlingen niet voldoende voorkennis hebben om verder te komen, kan de leerkracht vragen stellen als: Hoe is dit probleem verbonden aan de inleiding (devolutie 1)? At heeft het probleem opdelen in twee punten te maken met de inleiding? Hoe kan je besluiten tussen twee gegeven punten? Waarom? De voorgestelde vragen zullen alleen gesteld moeten worden aan groepen of individuen als de meeste andere studenten de benodigde kennis wel lijken te hebben. De leerkracht zal niet elke groep apart les moeten geven. Daarnaast is het *niet nodig* om bij de groep te blijven tot ze een antwoord hebben op zo'n vraag. Zie het als een kleine devolutie van een gelimiteerd probleem en laat de leerlingen handelen, formuleren en valideren. Geef geen hulp door middel van verdere vragen of hints. Als de meerderheid van de klas zulke vragen nodig heeft, zal de fase ingekort moeten worden om de vragen klassikaal te stellen. Als dit nodig is, is dat vaak een teken dat het initiële probleem te moeilijk is of niet duidelijk voorgelegd was.
In het geval dat bijna geen enkele groep middelloodlijnen gebruikt, bespreek dan de bovenstaande vragen klassikaal.

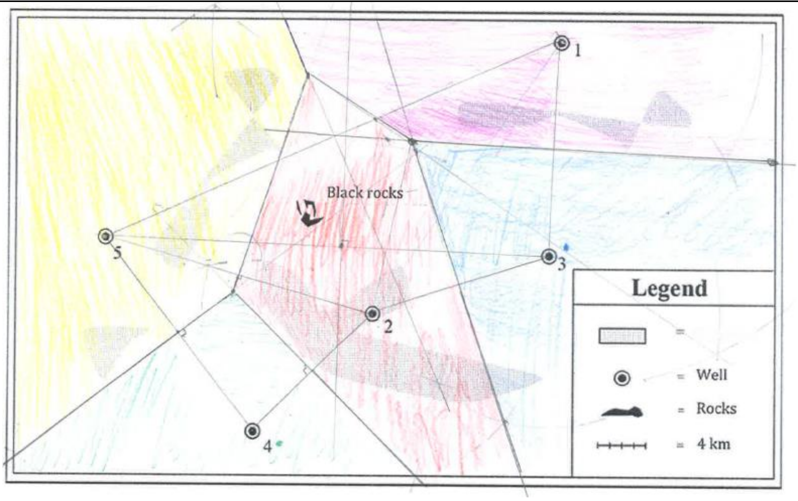
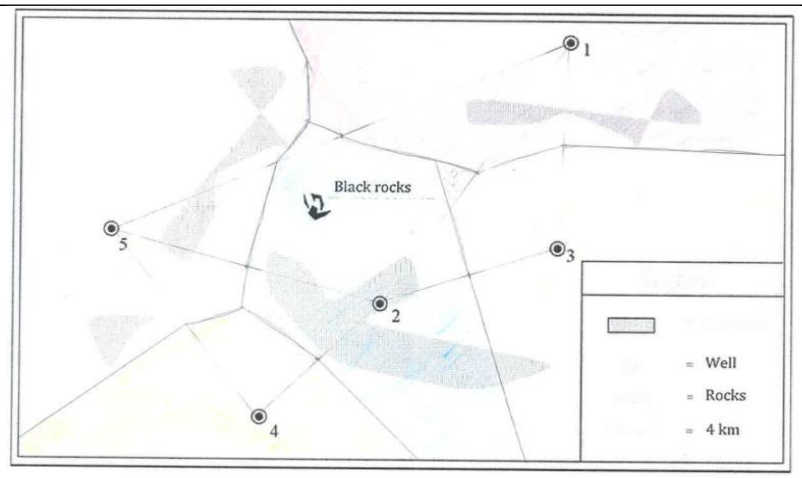
## Observaties uit de praktijk

Tijdens de actie fase formuleerden leerlingen de volgende aanpakken:

| | |
|---|---|
|   | *Leerlingen beginnen met het tekenen van cirkels om de bronnen. Daarna verbinden ze punten en gaan ze door met middelloodlijnen. Het is moeilijk om te zien welke regio's bij bronnen horen en het is niet helemaal duidelijk wat er gebeurt waar middelloodlijnen (ogenschijnlijk) samenkomen.* |
|   | *Deze leerlingen beginnen ook met cirkels, tekenen gestipte lijnen en vinden middelpunten. Ze lijken door te gaan met cirkels die middelpunten raken, en ze tekenen (een paar) middelloodlijnen.* |

| | |
|---|---|
|  | *Leerlingen tekenen verbindende lijnen en gaan door met alle middelloodlijnen. Het is moeilijk om regio's die bij bronnen horen te zien, en het is niet duidelijk wat er gebeurt waar middelloodlijnen samenkomen (bijv. wat gebeurt er in de rode cirkel).* |
|  | *Leerlingen tekenen verbindende lijnen en middelpunten. Daarna proberen ze middelpunten te verbinden en regio's toe te wijzen. De regio's zijn bijna allemaal correct, maar niet alles kan besloten worden. Geen middelloodlijnen!* |
|  | *Leerlingen tekenen regio's met gekromde lijnen zonder wiskundige strategieën te gebruiken.* |

| | |
|---|---|
|  | *Leerlingen beginnen weer met het verbinden van punten en tekenen middelloodlijnen om de regio's te vinden. Vanwege onzorgvuldig tekenen komen de middelloodlijnen (per drie) niet samen op één punt. De vraag die daaruit naar bovenkomt is wat je doet in het resulterende gebied/driehoek.* |
|  | *Leerlingen lijken soort van middelloodlijnen getekend te hebben, maar hebben die niet precies geconstrueerd (zo is bijv. de middelloodlijn tussen 2 en 5 te dicht bij punt 2).* |
|  | *Dit lijkt een perfecte oplossing te zijn. De strategie is niet zichtbaar/duidelijk.* |

| | |
|---|---|
|   | *Een duidelijke oplossing met sporen van gebruikte strategie.* |
|   | *Leerlingen tekenen stuksgewijze rechte lijnen met vuistregels. Ze erkennen dat ze voor sommige gebieden geen besluit konden vormen (zie hun vraagteken).* |

Uit observaties herkennen we vier niveaus van prestatie:

1. Het (willekeurig) schetsen van (gekromde) grenslijnen.
2. Een wiskundige redenering gebruiken (bijv. met cirkels) die niet leidt tot een strategie voor het gehele gebied.
3. Middelloodlijnen gebruiken zonder zorgvuldige constructie, of niet alle middelloodlijnen tekenen. Dit leidt tot onnauwkeurigheden.
4. Een constructie realiseren met alle relevante middelloodlijnen en correct alle gebieden die bij een bron horen vaststellen.

De leerkracht zal gebaseerd op de aanwezige strategieën moeten besluiten wat voor alle leerlingen gevalideerd en geïnstitutionaliseerd kan worden. Het is belangrijk dat de institutionalisering gebaseerd is op het werk en gedeelde kennis van de leerlingen. In elk geval zal de leerkracht de leerlingen moeten uitdagen om manieren te vinden waarop de minder efficiënte strategieën verbeterd kunnen worden. De leerkracht vraagt de leerlingen met verschillende strategieën/resultaten om hun werk te presenteren, en stelt een de vraag voor de gehele klas: wat zijn gelijkheden en verschillen? Hoe kan er verbeterd worden en kan je zeker zijn? Kunnen we een algemene strategie beschrijven waar iedereen het mee eens is?

Mogelijke wiskundige ideeën om te institutionaliseren:

- Een conflictlijn tussen twee punten is de middelloodlijn tussen die twee punten.
- De middelloodlijnen van drie punten komen samen in één punt (tenzij de punten op een lijn liggen).

## Evaluatie instrumenten

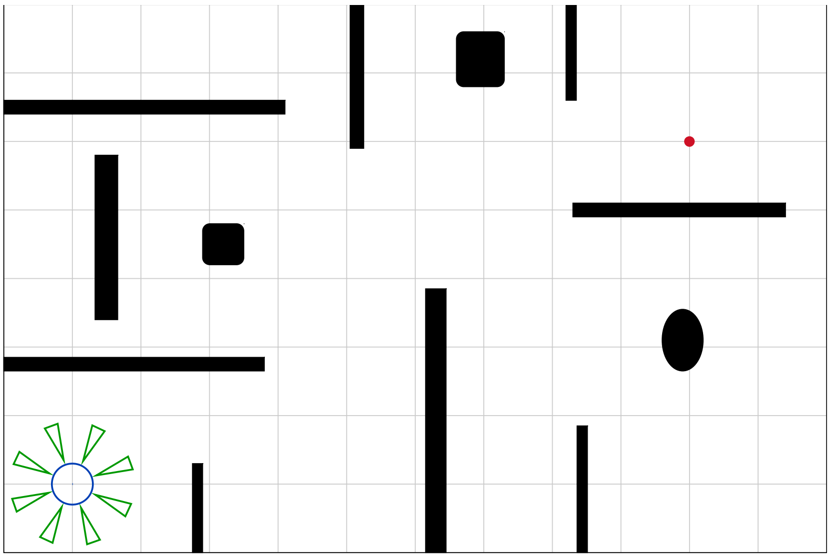
Aan het einde van de les, of snel daarna, kunnen de volgende vragen gesteld worden op de opgedane kennis snel te testen:

1. Geef een situatie met drie punten en conflictlijnen en een nieuw vierde punt, en vraag de leerlingen om de segmenteren van het vlak de reconstrueren.
2. Geef een situatie met drie punten en conflictlijnen, en vraag ze om een situatie te creëren met een vierde punt zó dat er niet een of twee geïsoleerde gebieden ontstaan. Als dit niet mogelijk is, vraag dan om een beredenering
3. Laat ze beschrijven en illustreren hoe je een segmentering construeert van een vlak met gegeven punten.
4. Vraag ze om Voronoi diagrammen met drie punten te onderzoeken in de applet, en laat ze uitleggen waarom ze (bijna) altijd 'drielandenpunten' zien.

## Suggesties voor verdere problemen over conflictlijnen

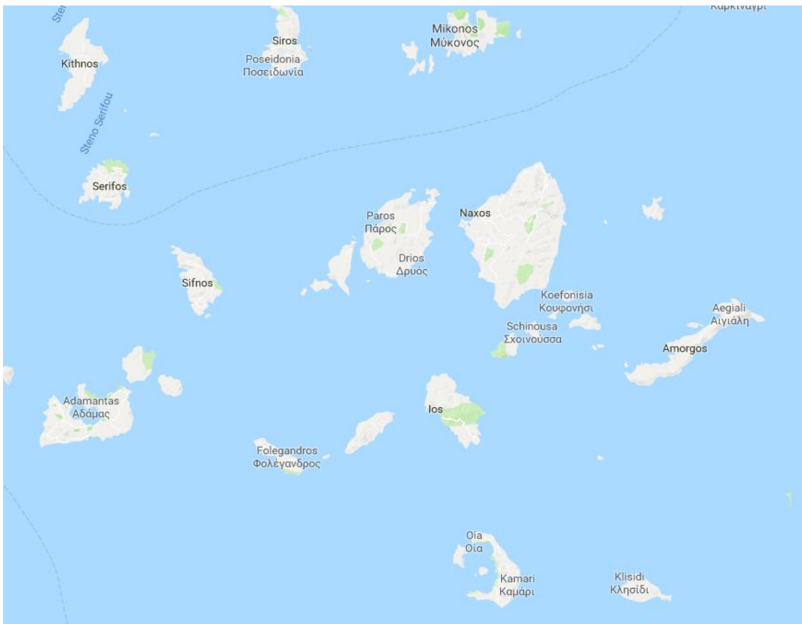
Enkele onderzoeken waar (gelijke) afstanden tot objecten een rol speelt zijn een territoriale verdeling op zee, waar je bijvoorbeeld bij het navigeren radar of afweergeschut moet omzeilen, en robot navigatie, voor het vinden van een optimaal traject voor een robot om veilig te kunnen bewegen.

1. Een robot moet door een appartement navigeren. Wat is het optimale pad? Hoe kan de robot een optimaal pad door het appartement vaststellen?



2. In de Chinese zee kan je vrij veel eilanden vinden. Deze eilanden zijn verwikkeld in territoriale conflicten: hoe trek je grenzen op zee die laten zien welk deel van de zee bij welk land hoort? (ook relevant vanwege grondstoffen die gewonnen kunnen worden)


3. De Cycladen zijn een eilandengroep in de Egeïsche Zee. Het territorium is verdeeld in negen regio's van de Zuid-Egeïsche regio door de grootste eilanden Andros, Kea-Kythnos, Milos, Mykonos, Naxos, Paros, Thira, Syros en Tinos. Hoe zou je de zee verdelen met de eilanden in het plaatje hieronder?



4. Hieronder zie je een territoriale verdeling van de Noordzee. Beschrijf hoe je een mogelijke verdeling van de zee tussen de omliggende landen zou onderbouwen.


## Logica achter en RWO perspectieven op het scenario

### Relevantie en toepasbaarheid

We beschouwen de volgende perspectieven:

- *Het echte leven:* deze context brengt leerlingen hun ervaring met grenzen die een gebied opdelen in regio's in verband met het begrip van het dichtste bij zijn. Het concept van Voronoi diagrammen wordt gebruikt in veel verschillende contexten die in de buurt liggen van leerlingen hun interesses, zoals American football:

- *Binnen beroepspraktijken:* Voronoi diagrammen zijn een essentieel concept binnen veel disciplines, bijvoorbeeld: biologie (celstructuren modeleren), hydrologie (regenval in gebieden berekenen), ecologie (groeipatronen van bossen), scheikunde (posities van kernen in moleculen), en informatica (ruimtelijk plannen en robot controle).
- *Verdere studie:* Een natuurlijke uitbreiding van dit scenario is het beschouwen van het bewijs dat een punt op de middelloodlijn van een segment AB ligt dan en slechts dan als dat punt even ver van A en B ligt (en dus op een Voronoi rand ligt). De leerlingen kunnen eventueel ook verscheidene problemen over het segmenteren van een geografische kaart of het achterhalen van de optimale route voor robot navigatie. Een andere richting is het bestuderen van koordenvierhoeken en andere geometrische stellingen en eigenschappen gebaseerd op middelloodlijnen (bijv. kan je een driehoek reconstrueren als er drie snijdende middelloodlijnen zijn gegeven?). Nog een andere richting is om het scenario Conflictlijnen – parabool te volgen.

### Onderzoeksvaardigheden

Leerlingen onderzoeken situaties uit het echte leven door het proberen van verschillende strategieën. De oplossing bouwt op visualisatie en het opnieuw uitvinden van middelloodlijnen. Om de winnende strategie te ontwikkelen zullen leerlingen de context moeten snappen en gebruik maken van geometrische taal en notatie.
De leerlingen worden uitgedaagd om kritisch te kijken naar de posities van de punten en hun beredenering over situaties waar drie of meer lijnen lijken samen te komen te verdedigen. Aan het einde moeten leerlingen hun resultaat op een duidelijke manier presenteren en communiceren over hun strategieën.

### Potentie voor een reeks aan lessen

Dit scenario is een natuurlijke introductie van conflictlijnen in verschillende geometrische situaties. Ook is het een goede introductie van meer traditionele onderwerpen binnen de geometrie gerelateerd aan middelloodlijnen, driehoeken, koordenvierhoeken, etc.

- *Voorkennis:* Om te kunnen beginnen met het onderzoeken van de situatie en een segmentatie te maken zullen leerlingen enige bekendheid moeten hebben met het maken van geometrische constructies met behulp van kompas en liniaal. Om bezig te kunnen met het bewijs is er kennis nodig van de driehoeksongelijkheid voor afstand. Het bewijzen en vergelijken van verschillende strategieën vereist abstract denkvermogen van de leerlingen.

### Logica achter het scenario

- *Horizontaal mathematiseren:* Het scenario nodigt de leerlingen uit om het contextuele probleem te organiseren en modeleren met wiskunde. Bij het oplossen van het probleem zullen leerlingen zich moeten realiseren welke data van belang is (bijv. dat de zwarte stenen, het droge gras, en de daadwerkelijke afstanden uitmaken) en vervolgens het probleem modeleren met gebruik van geometrische begrippen: punten, lijnen, afstanden, verder weg en dichterbij, middelloodlijnen, en het segmenteren van het vlak. Deze modeleringsactiviteit brengt de leerlingen naar de wereld van wiskunde waar nieuwe problemen en vragen kunnen ontstaan.

- *Verticaal mathematiseren:* Het initiële werk van leerlingen geeft startpunten voor verder wiskundig onderzoek en veralgemenisering. Afhankelijk van het niveau en de interesse van de leerlingen, kan er bewezen worden dat de punten die even ver van twee vaste punten afliggen op de middelloodlijn liggen. Daarnaast wordt er de behoefte gecreëerd om patronen die ontstaan met drie punten te onderzoeken. Met vier punten worden er andere patronen zichtbaar. Vanuit deze problemen kan de leerkracht overgaan in stof uit lesboeken over de middelloodlijn stelling voor driehoeken, en verdere geometrische onderzoeken zoals de omschreven cirkel en het middelpunt daarvan. Een andere mogelijkheid voor een vervolg les is om conflictlijnen te gebruiken voor het onderzoeken van definities en eigenschappen van parabolen (zie het MERIA scenario Conflictlijnen – parabool).

***Conclusie***

Dit scenario illustreert hoe het probleem in de woestijn context, welke rijk en toegankelijk is voor alle leerlingen, gebruikt kan worden om initiële oplos strategieën en representaties als concentrische cirkels, middelpunten en verdelende lijnen met taal zoals "het dichtste bij zijn" uit te lokken. Deze elementen kunnen gebruikt worden om te bouwen op de wiskunde van middelloodlijnen en het segmenteren van een vlak doormiddel van horizontale en verticale mathematiseringsprocessen. Door deze begrippen te leren uit toepassingen, zullen leerlingen de potentie voor het gebruik daarvan in andere situaties makkelijker kunnen inzien.

# MERIA Module "Vacature"

## Centrummaten

### The teaching scenario

| | |
|---|---|
| Leerdoel | Het herkennen van, verschil zien tussen en beslissingen nemen over centrummaten (rekenkundig gemiddelde, modus, mediaan). |
| Bredere leerdoelen | Het analyseren van data. Histogrammen maken en andere grafische representaties van data, evenals het berekenen van statistische maten met de hand of met ICT. Begrip over problemen en misconcepties binnen de statistiek.<br>Onderzoeks-vaardigheden: beslissingen nemen en evalueren gebaseerd op argumenten, verschillende manieren van redeneren vergelijken, data interpreteren en conclusies formuleren.<br>Interdisciplinaire vaardigheden: leerlingen kunnen statistische problemen verbinden met alledaagse en economische situaties. Ze leren het gebruik van wiskundig redeneren bij besluitvorming te waarderen. |
| Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden | Het rekenkundig gemiddelde berekenen. Bekendheid met begrip gemiddelde. Basale vaardigheden in het gebruik van ICT: Excel spreadsheets gebruiken (of een alternatief als Google Sheets of OpenOffice), basale commando's kennen waar sommen en gemiddeldes mee berekend kunnen worden, data grafisch weergeven (histogrammen, spreidingsdiagrammen, boxplots) |
| Leerjaar | Leeftijd van 15-18, leerjaar 3-6 (wanneer het rekenkundig gemiddelde behandeld wordt) |
| Tijd | 45 minuten (kan uitgebreid worden naar 90 minuten) |
| Benodigd materiaal | Computer, geschikte software (Excel, Google Sheets, OpenOffice, GeoGebra ...). Data set, vanaf nu verwezen naar als 'loonlijst'. De data set is toegevoegd als bijlage voor het scenario met Job_advertisement_data.xlsx als bestandsnaam. |

**Probleem:**

Drie bedrijven zoeken naar nieuwe werkkrachten. Om toekomstige sollicitanten een idee te geven van het mogelijke salaris bij hun bedrijf, staat er in de vacature wat het gemiddelde maandloon is. Het materiaal van deze module bevat de loonlijst van deze drie bedrijven.


Bij welk bedrijf zou jij solliciteren? Leg uit en geef een wiskundig onderbouwde reden voor je besluit.

Denk aan het volgende: Welk salaris verdeelt de werknemers in twee groepen van dezelfde grootte? Welk salaris is het meest representatief voor de loonlijst?

| **Fase** | **Acties van de leerkracht incl. uitleg** | **Acties en reacties van de leerlingen** |
|---|---|---|
| Devolutie, overdracht (didactisch)<br><br>vijf minuten | De leerkracht legt het probleem aan de leerlingen voor en geeft ze een link naar een *Excel* sheet met data (drie loonlijsten). Hij/zij suggereert het gebruik van technologie (data-analyse en instrumenten voor grafische weergave) als hulpmiddel om tot een antwoord te komen.<br>De leerkracht verdeelt de klas in groepen van twee of drie. | Leerlingen luisteren en stellen vragen. |
| Actie (a-didactisch)<br><br>20 minuten | De leerkracht loopt rond en observeert, en helpt alleen met technische problemen (niet met het gebruik van het programma). Hij/zij noteert de verschillende strategieën van de leerlingen. | Leerlingen overleggen om een keuze te vormen over welke technologie en wiskunde ze gaan gebruiken, en hoe ze hun werk zullen organiseren. |
| Formulering (a-didactisch)<br><br>vijf minuten | De leerkracht vraagt de leerlingen om hun proces te organiseren en hun besluiten te formuleren. | Leerlingen organiseren hun werk en vatten het samen. |
| Validatie (didactisch/a-didactisch)<br><br>Tien minuten | De leerkracht kiest een aantal leerlingen uit die hun oplossingen en besluiten presenteren. Groepen met verschillende strategieën moeten worden gekozen. | Leerlingen geven een korte uitleg van waar ze mee bezig zijn. Andere leerlingen luisteren en bespreken de stof. |
| Institutionalisering (didactisch)<br><br>Vijf minuten | Vat het werk van de leerlingen samen en generaliseer: Hoe kies je het getal dat de dataset het beste representeert? De leerkracht definieert centrummaten – het rekenkundig gemiddelde, de mediaan, en de modus – en hoe ze bepaald kunnen worden. Zij/hij vat het effect van de data op de centrummaten samen, en geeft de voor- en nadelen van elke maat. Wees er duidelijk over dat deze situatie niet één antwoord heeft, maar dat het er om gaat dat elke maat een andere soort informatie geeft. | Leerlingen luisteren en stellen vragen. |

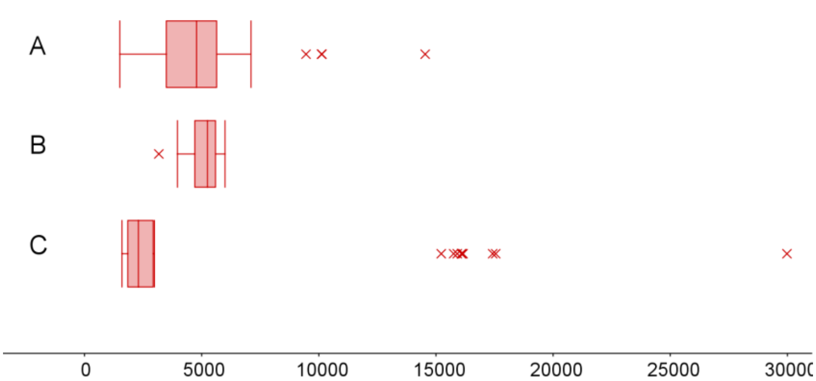
Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen

- Rekenkundig gemiddelde en mediaan:
    - Sommige leerlingen zullen meteen weten wat ze moeten doen. Ze beginnen met het grafisch weergeven van de data, en gebruiken instrumenten voor data-analyse om het rekenkundige gemiddelde en de mediaan te berekenen. Ze vergelijken de lijsten en merken op hoe de uitschieters het gemiddelde beïnvloeden, om vervolgens tot een besluit te komen over werk bedrijf het beste loon zal geven.

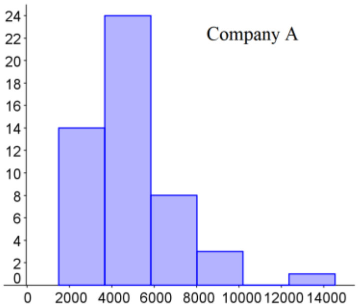
| | *Bedrijf A* | *Bedrijf B* | *Bedrijf C* |
|---|---:|---:|---:|
| Gemiddelde | 4939,98 | 5138,04 | 4992,6 |
| Mediaan | 4774,5 | 5241 | 2293,5 |
| Bereik | 13038 | 2826 | 28394 |
| Minimum | 1500 | 3165 | 1593 |
| Maximum | 14538 | 5991 | 29987 |

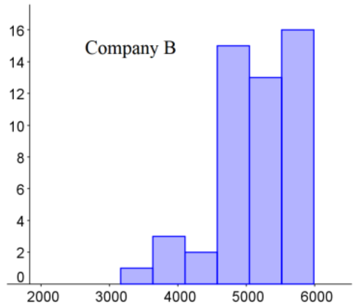
    - Sommige leerlingen zullen de tabellen bekijken, de data sorteren en ontdekken hoe ze zelf het middelste datapunt (de mediaan) kunnen vinden. Het zal ze opvallen dat in de gesorteerde data uitschieters te zien zijn, vooral bij bedrijf C. Dit kan ertoe leiden dat ze uit zoeken wat het effect van die uitschieters is op het rekenkundige gemiddelde en de mediaan. Hierdoor zullen ze achter de voor- en nadelen van beide maten kunnen komen.

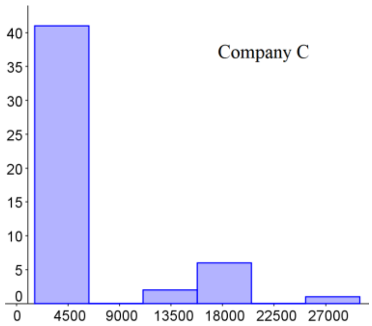
    - Sommige leerlingen zullen de data alleen grafisch weergeven, om conclusies te kunnen trekken uit grafieken. Mogelijk gebruiken ze boxplots wanneer dat kan, waaruit ze alle benodigde informatie kunnen aflezen (rekenkundig gemiddelde en mediaan) en een besluit door kunnen nemen. Daarbij zijn de uitschieters makkelijk te zien in boxplots, waardoor de leerlingen kunnen concluderen wat het effect daarvan is op het rekenkundig gemiddelde en de mediaan.



- Sommige leerlingen zullen een histogram maken en daar de uitschieters uit opmaken. Door de histogrammen zullen ze de invloed van de uitschieters op het gemiddelde kunnen zien.




- Om de studenten de modus te kunnen laten bepalen, kunnen ze door de leerkracht aangemoedigd worden om de data af te ronden of in klassen te groeperen. Dan kunnen ze die nieuwe data grafisch weergeven op een manier die frequentieklassen laat zien (histogram). Daarna kan de modus voor elke loonlijst berekend of afgelezen worden. Dit zal hun vorige besluit verbeteren, onafhankelijk van welke methode ze gebruikt hebben om het rekenkundige gemiddelde en de mediaan te berekenen.

## Uitleg van het materiaal

Leerlingen krijgen een data set (“loonlijsten”) met drie lijsten die de maandelijkse lonen voor 50 werknemers en het gemiddelde salaris bevatten. De data is niet gesorteerd. Het wordt van de leerlingen verwacht om zelf met het idee te komen om de data te sorteren en een aantal diagrammen te maken.

Om het geheel wat aantrekkelijker te maken kunnen de bedrijven aantrekkelijke namen gegeven worden, of het kan in de vorm van een vacature in de krant van de drie bedrijven worden getoond.

## Variaties gebaseerd op didactische variabelen

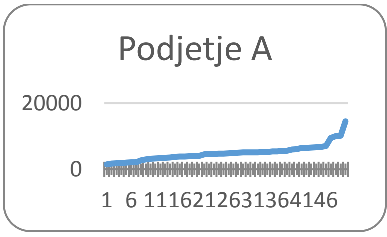
De data set kan in digitale vorm aangeleverd worden, of in zowel digitale als papieren vorm. De papieren vorm kan gebruikt worden voor de introductie van het probleem en eerste brainstormsessie, maar het gebruik van technologie is verplicht bij dit scenario.
Variaties kunnen gedaan worden bij het *organiseren van het klaswerk:* duo's of groepen van drie. Grotere groepen worden afgeraden vanwege het werken met technologie.
Een kleine variatie in *tijd* is mogelijk gedurende de actie en formuleringfase.
Om het leerdoel te behouden wordt het afgeraden om de dataset aan te passen.
In het geval dat de leerlingen moeite hebben met het gebruik van Excel of soortgelijke technologie voor het sorteren en manipuleren van de data, kunnen de datasets van tevoren worden gesorteerd. Een andere optie is om een korte inleiding van Excel te geven voordat er aan deze activiteit wordt begonnen.

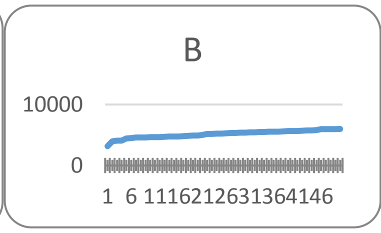
Als leerlingen al bekend zijn met centrummaten, zijn er de volgende mogelijke uitbreidingen van het leerdoel:

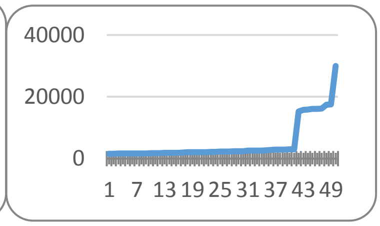
- Maten van spreiding (variantie)
- Kwantielen opgenomen in maten van spreiding
- Grafische weergaven (boxplot)

## Observaties uit de praktijk

Leerlingen sorteren de data en weergeven het grafisch als volgt:

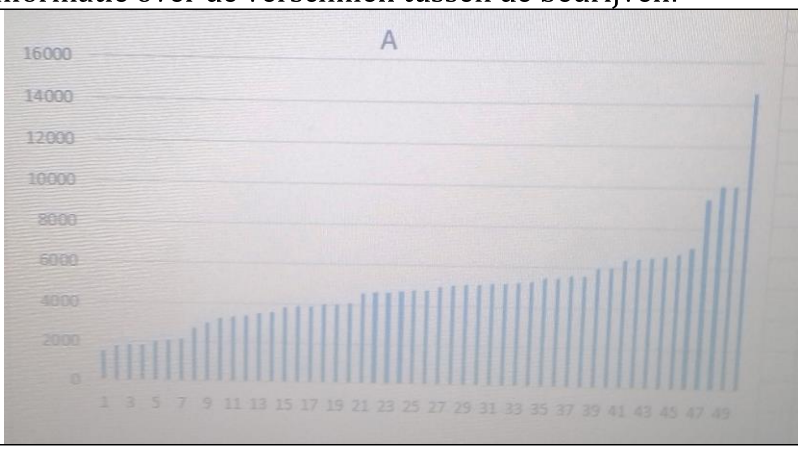


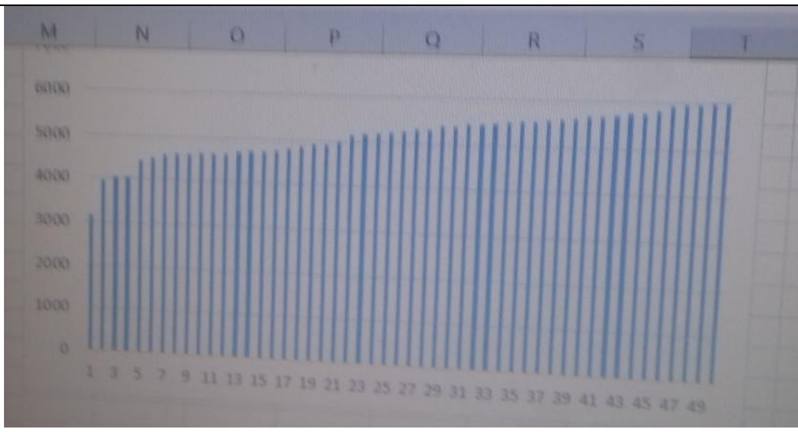
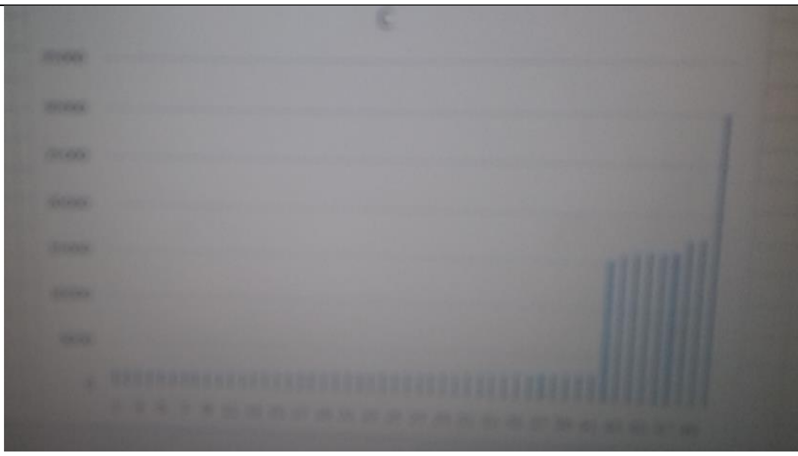
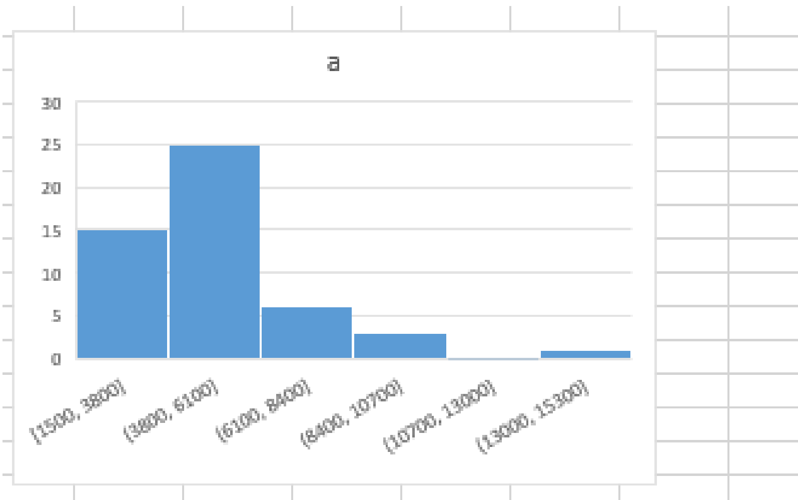


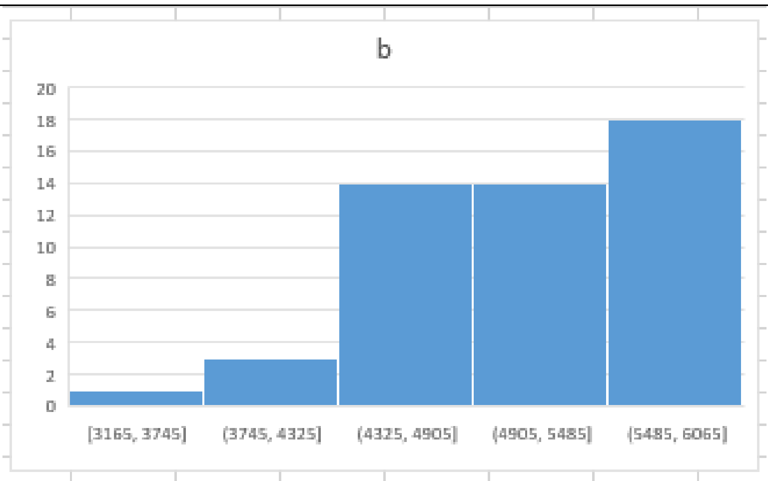


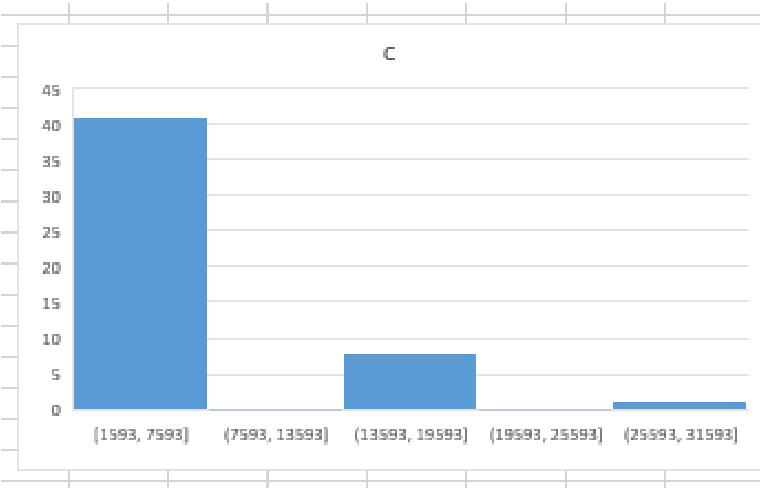

De x-as laat de werknemers zien en de y-as het salaris.

Andere grafische weergaven van de data hebben de werknemers op de horizontale as en het salaris op de verticale as. Dit is wat Excel voorstelt als grafiek, en het geeft ook informatie over de verschillen tussen de bedrijven:

| | |
|---|---|
|  | *Een grafiek van de salarissen bij bedrijf A welke duidelijk een extreme waarde laat zien.* |

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Een soortgelijke grafiek van bedrijf B welke een meer constante spreiding laat zien met minder lage salarissen. Een van de leerlingen gaf direct dit bedrijf zijn of haar voorkeur, omdat je direct vrij veel geld zal verdienen.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>De grafiek van bedrijf C heeft veel lage salarissen, een paar hogere en een extreem hoge. Een ambitieuze leerling zei dat die dit bedrijf zou kiezen.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>De leerling had enige voorkennis in het analyseren van data. Ze groepeerde de salarissen van elk bedrijf en gebruikte een histogram om dat te weergeven. Daarnaast heeft ze een “kader-met-staaf-diagram” gebruikt om de data te weergeven en tot een besluit te komen.</td>
</tr>
</table>


b
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
[3165, 3745]
(3745, 4325]
(4325, 4905]
(4905, 5485]
(5485, 6065]


c
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
[1593, 7593]
(7593, 13593]
(13593, 19593]
(19593, 25593]
(25593, 31593]

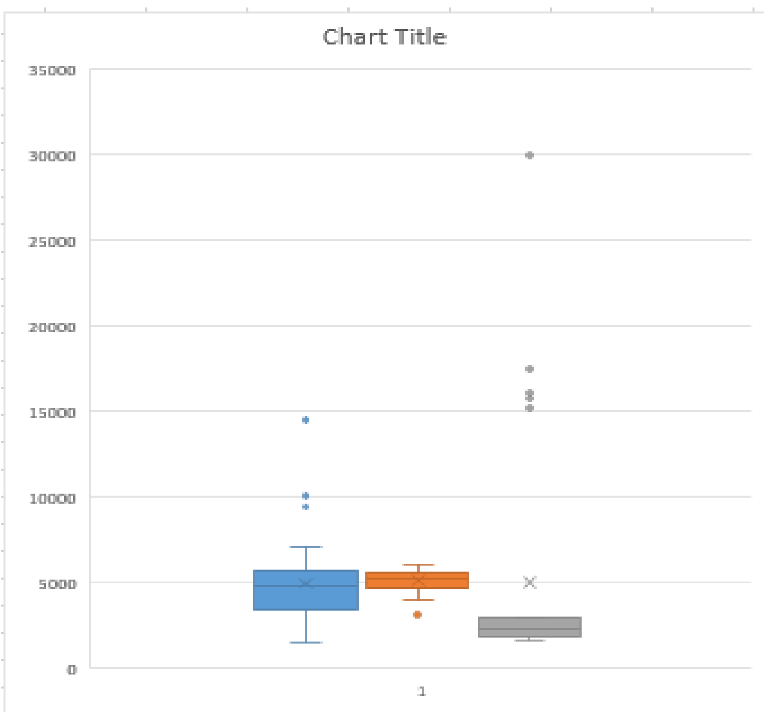


Chart Title
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
1

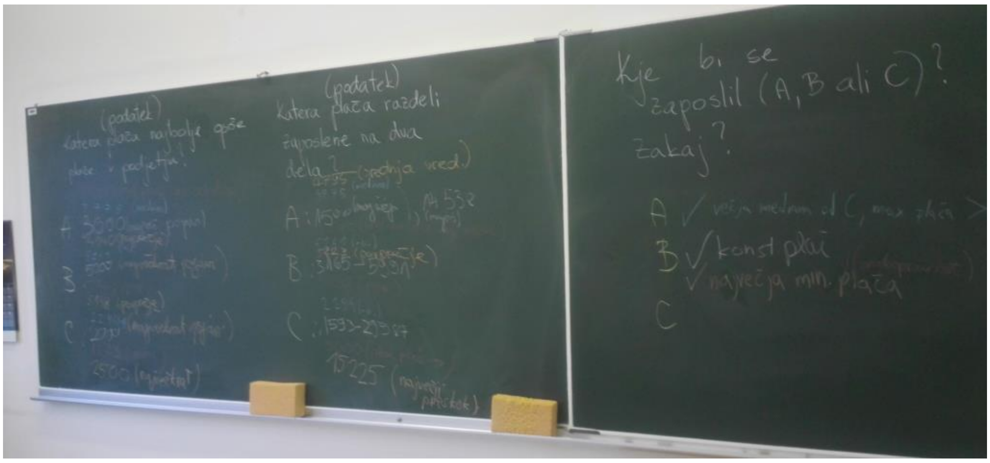
Wanneer leerlingen gevraagd werd om de resultaten van hun berekeningen van centrummaten te formuleren, kregen ze verschillende getallen:

| | |
|---|---|
| Odločili smo se za B, ker je najmanjša plača 3165.<br><br>Najbližja povprečni plači:<br>– A: 5064 → A: najbolj opredeli<br>– B: 5160 B:<br>– C: 2979 C: | *De leerlingen zochten naar het salaris in de dataset dat het dichtste bij de gegeven gemiddeldes lag als beste keus voor het weergeven van de dataset. Hun beste keuze is B, omdat het laagste salaris daar het hoogste is.* |
| Povprečna plača:<br>PODJETJE A: 4940 €<br>PODJETJE B: 5138 €<br>PODJETJE C: 4992 €<br><br>Kje bi se zaposlil?<br>V podjetju B<br><br>Zakaj?<br>Ker je manj odstopanja od povprečne plače. | *Leerlingen herinneren zich de gegeven gemiddeldes en kiezen B omdat de salarissen bij dat bedrijf het minst verschillen van het gemiddelde.* |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 31 | 4563 | | | 13 | 4998 | | | 3 | 2115 |
| 26 | 18 | 4632 | | | 6 | 5160 | | | 9 | 2115 |
| 27 | 11 | 4635 | | | 29 | 5172 | | | 12 | 2205 |
| 28 | 21 | 4698 | | | 38 | 5208 | | | 38 | 2238 |
| 29 | 15 | 4755 | | | 39 | 5223 | | | 24 | 2271 |
| 30 | 4 | 4794 | | | 14 | 5259 | | | 23 | 2316 |
| 31 | 44 | 4953 | | | 17 | 5310 | | | 14 | 2343 |
| 32 | 34 | 5064 | | | 19 | 5331 | | | 36 | 2349 |
| 33 | 28 | 5094 | | | 23 | 5406 | | | 17 | 2355 |
| 34 | 36 | 5118 | | | 24 | 5406 | | | 37 | 2367 |
| 35 | 24 | 5133 | | | 43 | 5445 | | | 7 | 2595 |
| 36 | 8 | 5166 | | | 44 | 5451 | | | 15 | 2631 |
| 37 | 1 | 5211 | | | 31 | 5487 | | | 1 | 2646 |
| 38 | 13 | 5265 | | | 22 | 5511 | | | 29 | 2646 |
| 39 | 35 | 5454 | | | 33 | 5538 | | | 46 | 2757 |
| 40 | 39 | 5457 | | | 27 | 5550 | | | 27 | 2799 |
| 41 | 37 | 5580 | | | 16 | 5568 | | | 34 | 2871 |
| 42 | 9 | 5634 | | | 9 | 5586 | | | 31 | 2925 |
| 43 | 41 | 5991 | | | 20 | 5637 | | | 6 | 2940 |
| 44 | 17 | 6063 | | | 28 | 5670 | | | 21 | 2973 |
| 45 | 12 | 6459 | | | 30 | 5673 | | | 30 | 2979 |
| 46 | 49 | 6531 | | | 47 | 5700 | | | 39 | 15225 |
| 47 | 25 | 6585 | | | 18 | 5766 | | | 16 | 15753 |
| 48 | 22 | 6660 | | | 3 | 5778 | | | 22 | 15909 |
| 49 | 47 | 6759 | | | 32 | 5826 | | | 48 | 16086 |
| 50 | 45 | 7101 | | | 41 | 5943 | | | 8 | 16104 |
| 51 | 42 | 9450 | | | 11 | 5967 | | | 47 | 16158 |
| 52 | 43 | 10113 | | | 36 | 5976 | | | 25 | 17421 |
| 53 | 14 | 10131 | | | 4 | 5979 | | | 13 | 17550 |
| 54 | 19 | 14538 | | | 15 | 5991 | | | 33 | 29987 |
| 55 | **median** | **4775** | | | **median** | **5241** | | | **median** | **2294** |

*De leerlingen markeerden salarissen welke de lijst in twee even grote delen verdelen en vond de mediaan met Excel. Ze kozen bedrijf B omdat het zowel het hoogste gemiddelde salaris en de hoogste mediaan heeft.*

De leerkracht gebruikte deze verschillende berekeningen ter vergelijking en bespreking door ze op het bord te delen:




## Evaluatie instrumenten

1. Bepaal het gemiddelde, de mediaan en de modus voor de volgende datasets:
   a) 4, 4, 4, 5, 6, 6, 20 b) 4, 4, 4, 5, 6, 19
   *Antwoord:*
   *a) Gemiddelde = 7, Mediaan = 5, Modus = 4*
   *b) Gemiddelde = 7, Mediaan = 4.5, Modus = 4*

2. In een bedrijf hebben bijna alle werknemers hetzelfde salaris, behalve de manager die tien keer zoveel verdient. Wat is een goede centrummaat? Leg je antwoord uit.
   *Antwoord: Mediaan omdat de uitschieter (het hoge salaris van de manager) een grote invloed heeft op het gemiddelde.*

3. Hieronder staan de cijfers (op schaal van 0 t/m 100) van 45 leerlingen.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | 32 | 81 | 70 | 71 | 72 | 83 | 92 | 95 |
| 61 | 69 | 59 | 91 | 84 | 73 | 74 | 66 | 77 |
| 70 | 67 | 65 | 58 | 59 | 78 | 93 | 95 | 50 |
| 62 | 67 | 92 | 65 | 54 | 90 | 92 | 79 | 62 |
| 75 | 83 | 98 | 71 | 83 | 67 | 59 | 46 | 64 |

a) Vind het gemiddelde, de mediaan en de modus van deze metingen.
b) Denk je dat de mediaan de data goed weergeeft? Leg uit.
c) Jouw cijfer is 58. Welke maat gebruik je ter vergelijking om het aan je ouders te laten zien?

*Antwoord:*
*a) Modus: 59, Mediaan: 71, Gemiddelde: 72.3*
*b) Een betere maat is de mediaan als we daarbij vermelden dat 32 een uitschieter is.*
*c) De modus is het beste als je niet veel wilt afwijken van de centrummaat.*

4. Voor de zomervakantie moet je een locatie uitkiezen. De enige data die je hebt zijn een aantal centrummaten voor de dagtemperatuur gedurende 90 zomerdagen, gemeten in graden Celsius om 12 uur in de middag:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Gemiddelde | 32.5 | 32 | 33 |
| Mediaan | 26 | 32 | 26 |
| Modus | 20 | 31 | 26 |

Wat vertellen deze getallen je over het klimaat van de locaties?

## Suggesties voor verdere problemen

Een mogelijk volgend probleem kan een soortgelijke activiteit in een andere context zijn: Gegeven een lijst van cijfers. Welke centrummaat vat dan hun resultaten het beste samen? Een andere activiteit zou meer gericht kunnen zijn op het gebruik van grafische weergaven zoals grafieken, boxplots en histogrammen. Ook kan daarbij het begrip van spreiding worden behandeld, bijvoorbeeld door grafieken met de salarissen aan te leveren in plaats van tabellen met de ruwe data, en ze vervolgens dezelfde taak uit te laten voeren als in dit scenario. De studenten kunnen ook gevraagd worden om situaties te vinden waar het gemiddelde, de mediaan of de modus de centrale tendens het beste weergeeft.

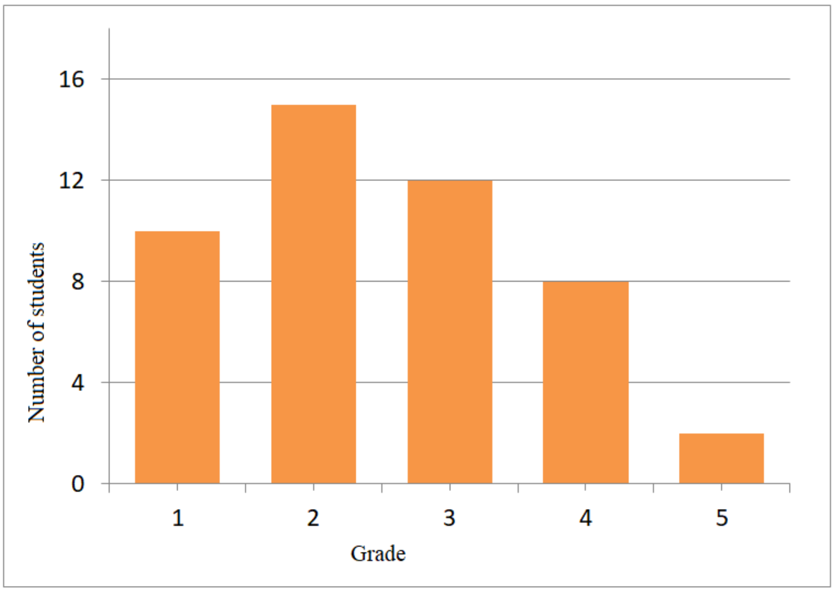
Voorbeelden:

1. Je moet een besluit nemen over hoe je naar school gaat: met de bus, trein, of fiets. Je heb wat data gevonden over het lokale openbare vervoer. Sommige data over reistijden in minuten, afgerond op gehele minuten, van je huis naar school zijn gegeven op basis van dagelijkse ervaring. Je hebt geluk omdat je huis en school beide dichtbij een trein- en busstation liggen. Data is gebaseerd op metingen die genomen zijn gedurende 12 maanden. Naast deze data mag je ook andere variabelen overwegen. Maak een besluit over je transportkeuze en geef uitleg.

| | | Bus | Trein | Fiets |
|---|---|---|---|---|
| **Maandag** | gemiddelde | 20 | 12 | 19 |
| | mediaan | 14 | 13 | 19 |
| | modus | 15 | 12 | 19 |
| **Dinsdag** | gemiddelde | 19 | 18 | 19 |
| | mediaan | 13 | 12 | 18 |
| | modus | 14 | 13 | 18 |
| **Woensdag** | gemiddelde | 18 | 12 | 18 |
| | mediaan | 12 | 13 | 17 |
| | modus | 14 | 12 | 18 |
| **Donderdag** | gemiddelde | 19 | 14 | 18 |
| | mediaan | 12 | 12 | 18 |
| | modus | 15 | 13 | 18 |
| **Vrijdag** | gemiddelde | 24 | 19 | 20 |
| | mediaan | 20 | 14 | 19 |
| | modus | 19 | 15 | 20 |

Leerlingen moeten de situatie bespreken vanuit hun eigen perspectief. Ze kunnen bijvoorbeeld zeggen dat ze met de bus gaan behalve op vrijdag, of dat het afhangt van het seizoen. Daarbij mogen ze verwachten dat de bus vaker gaat dan de trein, en dat je bij fietsen geen wachttijd hebt. Ook kunnen ze de kosten in acht nemen.

2. De volgende grafiek laat het aantal leerlingen zien dat een bepaald cijfer haalt.




a) Welke centrummaat vind je gemakkelijk door alleen naar de grafiek te kijken?
b) Bepaal alle centrummaten en laat zien hoe je er aan komt.
c) Beschrijf de toets resultaten met behulp van de centrummaten.

## Logica achter en RWO-perspectieven op het scenario

In dit scenario doen centrummaten zich voor tijdens het uitzoeken en structureren van experimentele data over loonlijsten.
Door te leren van toepassingen kunnen leerlingen beter inzicht krijgen in hoe ze hun statistische kennis en vaardigheden kunnen toepassen. Dit scenario draagt bij aan vaardigheden als het redeneren met statistische resultaten en het zorgvuldig interpreteren daarvan.
Vervolglessen kunnen voortborduren op centrummaten in andere contexten, met daarbij maten voor spreiding en grafische weergaven als boxplots en histogrammen in meegenomen.

### Relevantie en toepasbaarheid

Leren hoe en wanneer statistiek toe te passen is erg belangrijk omdat het in veel verschillende disciplines gebruikt wordt (bijvoorbeeld experimentele natuurkunde, sociale wetenschappen, scheikunde, psychologie, geneeskunde ...). Daarnaast kom je in het dagelijkse leven ook veel statistische resultaten tegen (bijvoorbeeld in kranten, cijfers op school).

### Onderzoeksvaardigheden

*Het onderzoek* is aanwezig in alle fases. Leerlingen dienen te wennen aan onderzoeken en vaker in situaties geplaatst te worden waar ze zo te werk gaan. Dus, tijdens het werken aan hun wiskundige bekwaamheid, ontwikkelen ze ook hun onderzoeksvaardigheden. Gedurende de implementatie van het scenario zullen studenten systematisch experimenteren, data organiseren, besluiten vormen, samenwerken en communiceren. Onderzoeksvaardigheden moeten opgenomen worden in de institutionalisering, vooral het organiseren, structuren en samenvatten van data.

### Potentieel voor een reeks aan lessen

Het scenario kan onderdeel zijn van een langere reeks aan lessen over statistiek en het grafisch weergeven van data.

- *Voorkennis:* Leerlingen moeten met Excel kunnen omgaan voor eenvoudige data manipulatie zoals sorteren en het uitvoeren van berekeningen. Verder beginnen we met het rekenkundig gemiddelde als voorkennis voor de leerlingen.
- *Introductie:* Het probleem kan geïntroduceerd worden door een persoon die net klaar is met de universiteit en een baan zoekt voor te stellen. Ze leest een krant met vacatures voor drie verschillende bedrijven die interessant klinken. Ze zoekt de loonlijst informatie op en vergelijkt de opties bij de drie bedrijven. Hoe maak je een beslissing?

### Logica achter het scenario

- *Horizontaal mathematiseren*: De context ondersteund de leerlingen in het gebruik van hun initiële taal om eigenschappen van de data te beschrijven voor het mathematiseren van het probleem. Gebruikte woorden zijn: extremen, volgorde, bereik, veel bijna hetzelfde, veel verschillen. De leerlingen hebben de neiging om de data in een grafiek te zien of het in intervallen te organiseren, omdat de grote dataset lastig is om te overzien of te analyseren. Deze taal en representaties helpen de leerlingen om de wereld van de statistiek te betreden en dat te verbinden met een realistische situatie.

- *Verticaal mathematiseren:* De verwachte verscheidenheid in de redenaties van de leerlingen kan gebruikt worden in de validatie en institutionalisering fases om de formele statistische centrummaten te ontwikkelen, samen met hoe je die berekend en gebruikt. Verdere studie kan gericht worden op relaties tussen grafieken van data en maten van spreiding in connectie met de centrummaten, en ook op hoe technologie effectief te gebruiken is voor statistiek. Op een meta-niveau is het ook belangrijk om leerlingen te betrekken in het gebruik van statistiek om data samen te vatten en besluiten en voorspellingen te maken over de wereld om ons heen.

# MERIA Module “Glijbaan”

## Introductie van de afgeleide

### Het scenario

| | |
|---|---|
| Leerdoel | Conceptueel begrip dat de helling van een kromme gelijk is aan de helling van de raaklijn. |
| Bredere leerdoelen | Het wiskundig modeleren van een glijbaan met grafieken en functies. De helling berekenen (afgeleide van de functie) met de hand of ICT. Een betekenisvolle introductie van calculus.<br>Onderzoeksvaardigheden: experimenteren met verschillende grafieken of functies op papier en met ICT, een iteratief proces om de oplossing te verbeteren, verschillende strategieën vergelijken, de eigenschappen van de gevonden oplossing verantwoorden.<br>Interdisciplinaire vaardigheden: leerlingen kunnen hun ervaring met gladheid van een object verbinden aan de wiskundige begrippen van de raaklijn aan een kromme en de afgeleide van een functie. De wiskundige modellen kunnen gebruikt worden om 3D objecten te printen met een 3D printer (ICT vaardigheden) of door het zelf te maken met ander materiaal (handvaardigheid). |
| Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden | Grafieken, de vergelijkingen van een lijn en sommige niet-lineaire krommen (cirkel, parabool, of de grafiek van een exponentiële functie). |
| Leerjaar | Klas 4-6, van 16-18 jaar (wanneer de afgeleide wordt geïntroduceerd) |
| Tijd | 60 - 90 minuten, twee lessen |
| Benodigd materiaal | Papier, pen, ICT-instrument voor het maken van grafieken zoals GeoGebra (het gebruik van ICT is technisch gezien niet nodig, maar het kan de ervaring van de leerlingen flink verbeteren). |

**Probleem**:
Kijk naar de foto’s van een skischans en de glijbaan. Beide hebben een gekromd deel aan de onder- en/of bovenkant, met een recht stuk in het midden. Maak gebruik van wiskunde om zo’n vorm te ontwerpen. Focus op slechts één van de gekromde delen en het rechte stuk in het midden. Denk eraan dat het niet fijn is om een hobbelige rit te hebben.

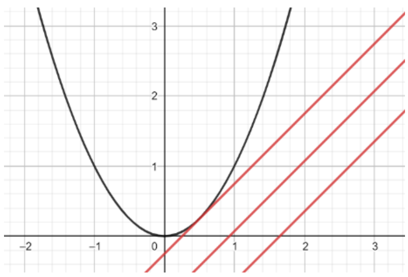
*De Holmenkollen skischans in Oslo, Noorwegen. Foto genomen door Mathias Stang. Een kinder-glijbaan.*

Introduceer een coördinatensysteem en vindt de vergelijkingen voor één gekromd deel en de rechte lijn.
*Opmerking:* Laat voor een langere les, met meer modeleer activiteit, de laatste zin van de taakbeschrijving weg (zie de module voor extra les fases).

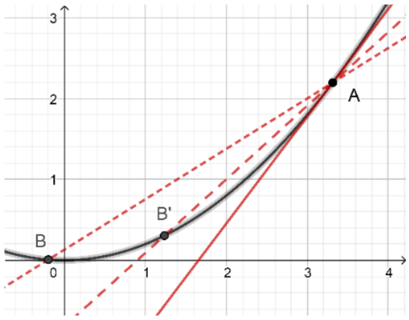
| Fase | Actie van de leerkracht incl. uitleg | Acties en reacties van de leerlingen |
|---|---|---|
| Devolutie (didactisch)<br><br>5 min | De leerkracht legt het probleem voor.<br><br>De leerkracht wijst erop dat de leerlingen een glijbaan moeten ontwerpen met een soepele rit.<br><br>De leerkracht zorgt ervoor dat leerlingen zich richten op slechts een van de gekromde delen en het rechte (lineaire) stuk in het midden. | Leerlingen gaan zitten in groepen van twee of drie.<br><br>Leerlingen raken enthousiast! |
| Actie (a-didactisch)<br><br>20 min | De leerkracht registreert de ideeën, strategieën en bevindingen van de leerlingen.<br><br>Als leerlingen niet goed doorhebben dat de twee delen vloeiend moeten aansluiten, moet de leerkracht dat duidelijk maken.<br><br>Als er na tien minuten absoluut geen ideeën zijn voor de keuze van het gekromde stuk, herinnert de leerkracht de leerlingen eraan hoe de grafieken van $y = x^2$ en/of $y = \cos x$ eruitzien (niet de cirkel) tijdens een klassikale (didactische) onderbreking.<br><br>Als studenten met de cirkel oplossing komen is een van de daaropvolgende problemen “wat als je de hoek verandert, of het punt waar de lijn en cirkel in elkaar overgaan? Hoe veranderd dan de vergelijking van de lijn?”. Daarna vraagt de leerkracht de groep om zich te richten op wat anders dan een cirkel. | Leerlingen maken een schets en introduceren een coördinatensysteem.<br><br>De aanpak van leerlingen kan vaak beschreven worden met een van de volgende categorieën:<br><br>1. Grenslijn aanpak: ze kiezen een vrije lijn die ze vervolgens bewegen (transleren en roteren) tot dat er maar één snijpunt is in het gewenste gebied.<br>2. Snijlijnen aanpak: ze kiezen een punt op de kromme: het bestemde punt om te raken. Daarna kiezen ze een ander punt op de kromme om een lijn te maken. Dat punt dichterbij het eerste punt zetten geeft een betere aansluiting.<br>3. Lineaire benadering aanpak: Leerlingen kiezen een punt op de kromme, tekenen een lijn en proberende helling aan te passen zodat die zo goed mogelijk aansluit op de kromme.<br><br>Sommige gebruiken mogelijk een cirkel als kromme en het feit dat |

| | | |
|---|---|---|
| | | de raaklijn altijd loodrecht op de straal staat. We noemen dit de *cirkel oplossing*.<br><br>Zie hieronder voor details over deze aanpakken in de sectie *Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen*. |
| Formulering (a-didactisch)<br><br>15 min | De leerkracht vraagt de leerlingen om hun resultaten te formuleren. Terwijl ze daaraan werken kiest de leerkracht groepen met verschillende aanpakken die hun bevindingen moeten presenteren. | Leerlingen formuleren hun resultaten binnen de groep. Sommige groepen presenteren hun bevindingen. |
| Validatie (didactisch)<br><br>10 min | De leerkracht vraagt: "Wanneer weten we of de oplossing goed is?" en "Is er een beste oplossing?".<br><br>Als leerlingen alleen visuele validatie hebben gebruikt, kan de leerkracht algebraïsche of numerieke aanpakken voorstellen voor validatie. | Ze leggen uit waarom een oplossing goed is, en de een mogelijk beter is dan de ander.<br>• Visuele validatie: Sommigen zullen uit gaan van hun visuele evaluatie van het ontwerp: als het er goed uit ziet, dan is het goed. Mogelijk zoomen ze in op de kromme.<br>• Algebraïsche validatie: De leerlingen rekenen snijpunten algebraïsch uit en zien mogelijk dat het lokaal uniek is.<br>• Numerieke validatie: leerlingen kunnen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uitrekenen voor een paar punten op de kromme om te zien of het ongeveer klopt met de helling van de lijn.<br><br>Als de leerlingen gewerkt hebben aan een cirkel-oplossing en de raaklijn hebben uitgerekend, moeten ze er zeker van zijn dat ze een raaklijn hebben en uitleggen waarom (meetkundig en/of algebraïsch bewijs). |
| Institutionalisering (didactisch) | De leerkracht bespreekt het idee van een raaklijn op een manier die | Sommigen zullen iets zeggen over de helling. |

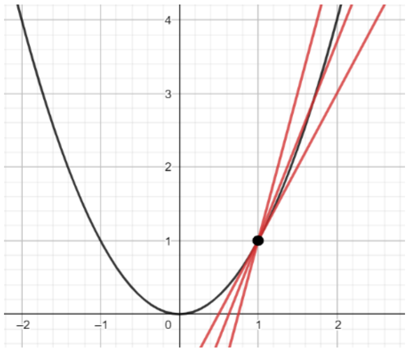
| | | |
|---|---|---|
| 10 min | strookt met de ideeën waar de leerlingen zelf op zijn gekomen.<br><br>De leerkracht belicht een *of meer* van de volgende perspectieven op de helling van een kromme in een punt:<br>a) Beste lokale benadering. Volgt visuele validatie.<br>b) Lokale unieke grenslijn – een snijpunt. Volgt algebraïsche validatie.<br>c) Klassieke definitie met gebruik van een snijlijn en limieten van verschil quotiënten. Volgt numerieke validatie.<br><br>Als een cirkel oplossing naar boven komt, bespreek dan een raaklijn aan de cirkel en een raaklijn aan andere krommes. De leerkracht brengt aan de aandacht dat de beste oplossing voor een cirkel de raaklijn is en dat de leerlingen eigenlijk de raaklijn voor andere krommen hebben benaderd. | Sommigen zullen het woord “raaklijn” gebruiken of de knop in GeoGebra.<br><br>Leerlingen luisteren en raken geïnteresseerd in het berekenen van de beste oplossing voor het probleem voor willekeurige vormen en krommen. |

| | |
|---|---|
| Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen | Er zijn verschillende opties voor wat de leerlingen kunnen doen, bijvoorbeeld:<br>1. Grenslijn aanpak:<br>Leerlingen kiezen bijvoorbeeld voor $y = x^2$.<br>Algebraïsche validatie: overweeg vanaf hier de familie aan lijnen<br>$y = x + b$.<br>De grenslijn wordt gevonden door $y$-eliminatie:<br>$x^2 = x + b$.<br>Deze vergelijking heeft een unieke oplossing als de determinant nul is:<br>$1 + 4b = 0$.<br>Dus $b = -\frac{1}{4}$ geeft een gladde glijbaan.<br> |

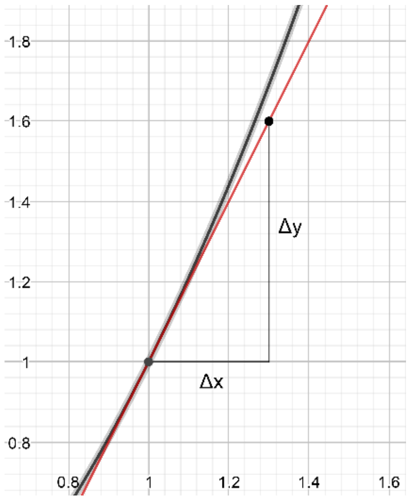
2. Snijlijn aanpak:
   Leerlingen kiezen een vast punt op de kromme, het punt waarop aangesloten moet worden. Daarna kiezen ze een ander punt op de kromme en trekken ze een lijn tussen de twee punten. Door het tweede punt richting het eerste punt te bewegen krijg je een steeds betere benadering van de helling in dat eerste punt. Deze aanpak werkt het beste met ICT.




3. Lineaire benadering aanpak: Leerlingen werken bijvoorbeeld met $y = x^2$ en het punt (1,1) waar de kromming eindigt en de lijn y = ax + b begint. Daarna gokken ze mogelijk dat $a > 1$ en proberen ze meerdere waardes (waarvan $a = 2$ juist is). Proberen betekent een grafiek maken.
   Door de lijn te beschrijven als $y = ax + b$, leiden ze af dat $a + b = 1$.
   Dus voor elke helling $a$, kunnen ze $b$ uitrekenen.



   Sommige zullen een benadering van $a$ bepalen door twee punten op de getekende lijn te kiezen en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ toe te passen.




   Numeriek voorbeeld: Leerlingen vinden mogelijk dat $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.6}{0.3} = 2$. Uit $a + b = 1$ volgt $b = -1$.
   Validatie wordt waarschijnlijk visueel gedaan, maar kan ook numeriek worden gedaan, mogelijk voor te stellen door de leraar, omdat die methode vergelijkbaar is. Kies nu twee punten op de parabool en bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; bijvoorbeeld (1,1) en (1.1 , 1.21). Daarna geeft $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$. Best dichtbij!

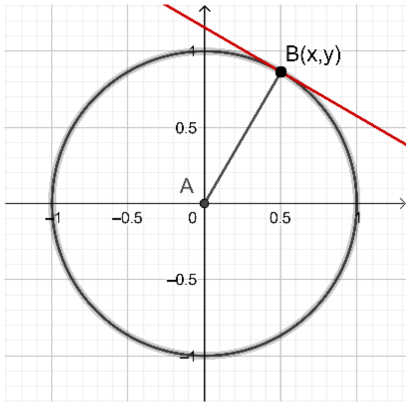
   Leerlingen kunnen ook valideren door snijpunten van de lijn en parabool te berekenen (algebraïsche validatie). Als leerlingen bekend zijn met kwadratische vergelijkingen en de discriminant kunnen ze verder gaan en het systeem aan vergelijkingen oplossen:

$$y = x^2, y = ax + 1 - a,$$

En $x^2 - ax + a - 1 = 0$ krijgen.
De vergelijking zal exact één oplossing hebben als de discriminant gelijk is aan nul:

$$a^2 - 4(a-1) = 0 \;\Rightarrow\; a = 2.$$

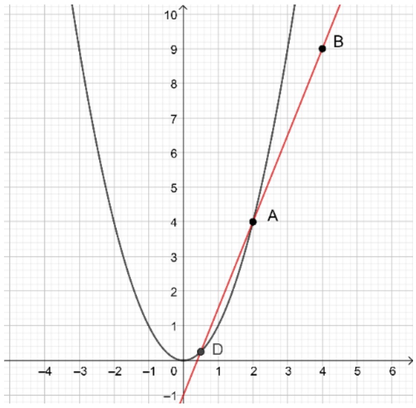
4. Cirkel oplossing: leerlingen kiezen een cirkel.
   Als de leerlingen een cirkel hebben gekozen, kan dat bijvoorbeeld $x^2 + y^2 = 1$ zijn met het punt $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ als aansluiting, wat overeenkomt met de hoek $\frac{\pi}{4}$. Als ze weten dat de raaklijn van een cirkel loodrecht op de straal staat, kunnen ze bepalen dat $a = -1$. Daarna kunnen ze de vergelijking van de raaklijn opstellen.
   Als de leerkracht ze vraagt om een ander punt $(x, y)$ te kiezen, kunnen ze de helling $a$ van de raaklijn door $(x, y)$ bepalen uit de helling van de radiale lijn door $(x, y)$, welke $\frac{y}{x}$ is. Dus $a = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (in het algemeen), maar waarschijnlijk doen leerlingen dit voor een concreet punt.

   Deze overweging kan wat simpeler worden als leerlingen bekend zijn met en gebruik kunnen maken van vectoren.

5. Met ICT (GeoGebra of soortgelijk)
   Als leerlingen GeoGebgra (of andere ICT) gebruiken, volgen ze waarschijnlijk dezelfde stappen en redenaties als zonder. Het verschil is dat de ICT de vergelijking van de lijn sneller berekent en een nauwkeurigere representatie van de kromme(n) weergeeft. Met ICT kunnen de leerlingen meer opties proberen in minder tijd en daardoor meer ontdekken dan wanneer ze met pen en papier werken. Bijvoorbeeld:
   - Sommigen vinden en gebruiken de knop voor de raaklijn.
   - Ze tekenen mogelijk een kromme en een arbitraire "goede" lijn door een punt op die kromme en een ander punt. Dan zoomen ze in en controleren ze of het er goed genoeg uitziet. Ze kunnen het tweede punt verplaatsen om een betere overgang te krijgen. Als ze hun beste lijn hebben gevonden kunnen ze met een meetinstrument de vergelijking van de lijn aflezen.
   - Sommige leerlingen beginnen met het inzoomen op een punt totdat de grafiek recht lijkt te zijn. Dan kunnen ze twee punten op de kromme kiezen en de vergelijking van de lijn daardoor berekenen (of tenminste een soort raaklijn tekenen).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>




- Mogelijk proberen ze te kijken of hun lijn snijpunten heeft met de kromme (in dit geval maakt het uit of ze een lijnstuk of lijn hebben getekend). Sommige zullen zelfs GeoGebra de snijpunten van de lijn en kromme laten zien, waardoor het ze kan opvallen dat bij het aanpassen van de helling van de lijn waar één snijpunt van vaststaat, de locatie van het andere snijpunt verandert (zoals uitgelicht in de institutionalisering stap). Omdat ze dan meteen het resultaat zien, kunnen ze de hypothese vormen dat de beste oplossing is wanneer punten $A$ en $D$ samenkomen (zie het plaatje).

</td>
</tr>
</table>

## Uitleg van het materiaal

Het idee van het ontwerpen van een bekende vorm zou de leerlingen moeten enthousiasmeren tijdens de devolutie fase. Daarnaast introduceert het een context uit de echte wereld waar gladheid op een intuïtieve manier van belang is. Als sommige leerlingen niet comfortabel zijn met een skischans of glijbaan, kan de leerkracht ze vertellen dat dezelfde principes toegepast worden bij het bouwen van treinsporen, achtbanen, etc. (focus op het verbinden van een gekromd deel met een lineair deel). Dit brengt ook over dat het probleem realistisch is.

## Variaties gebaseerd op didactische variabelen

Sommige veranderingen die gemaakt kunnen worden in het scenario (zonder de doelen te veranderen) zijn:

*Het milieu*: de foto's kunnen anders gekozen worden, maar moeten zeker een gekromd en recht deel bevatten. Het te ontwerpen object moet daar ook aan voldoen. Daarnaast moet het zo bekend mogelijk zijn bij de leerlingen.

In sommige gevallen zullen de leerlingen snel vastlopen tijdens de eerste actie fase. De leerkracht kan dan het werk als volgt onderbreken: De leerkracht kan een intermezzo invoegen tijdens de actie fase om de eerste bevindingen van de leerlingen te bespreken, met de focus op de betekenis van een "gladde" aansluiting tussen het gekromde en rechte deel.

Als de leerkracht ervoor kiest om de zin "Introduceer een coördinatensysteem en vind vergelijkingen voor *één* gekromd deel en de lijn." weg te laten uit de devolutie, kan hij/zij een intermezzo invoegen om de noodzaak daarvan voor het mathematiseren van het probleem te bespreken. Aan het einde van dit intermezzo zullen de leerlingen moeten begrijpen dat ze met een coördinatensysteem dienen te werken en concrete functies/vergelijkingen moeten hanteren voor het gekromde deel en de lijn. Vóór door te gaan controleert de leerkracht of de leerlingen een idee hebben over wat een goede en slechte aansluiting meetkundig gezien zijn (de oplossing vraagt niet alleen om een continue, maar ook een "gladde" kromme). Na dit intermezzo kunnen de leerlingen weer door met de actie fase zoals in het scenario is beschreven.

De leerlingen kunnen geometrische software als GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Desmos, Wolfram Alpha (of Mathematica), Maple, MATLAB, Octave etc. gebruiken. Een alternatief is om een grafische rekenmachine of telefoon met geometrische software te gebruiken. We raden het aan om de leerlingen deze optie te geven, maar de keuze moet bij henzelf liggen.

*De lengte van de fases* kan aangepast worden aan het werk van de leerlingen, maar moet niet te veel worden veranderd.
In de *actie fase* zullen de leerlingen zelf een vergelijking voor het gekromde deel moeten vinden. Alleen als sommige groepen (of de hele klas) na tien minuten geen idee hebben, kan de leerkracht die groepen (of de hele klas) op sommige opties wijzen zoals $\cos x$, $\frac{1}{x}$ of $x^2$ (maar niet de cirkel). Nadat de leerlingen een functie hebben gekozen voor het gekromde deel kan de actie fase doorgaan.

Als er maar een paar leerlingen zijn die de cirkel-oplossing vinden, kan de leerkracht de daarvoor in het scenario beschreven vragen aan de enkele groep(en) stellen om zo niet het proces van de andere leerlingen te onderbreken. Als niemand de cirkel oplossing heeft, kan de leerkracht het noemen tijdens de validatie of institutionalisering fase, maar niet daarvoor.

## Observaties uit de praktijk

Wat algemene observaties:

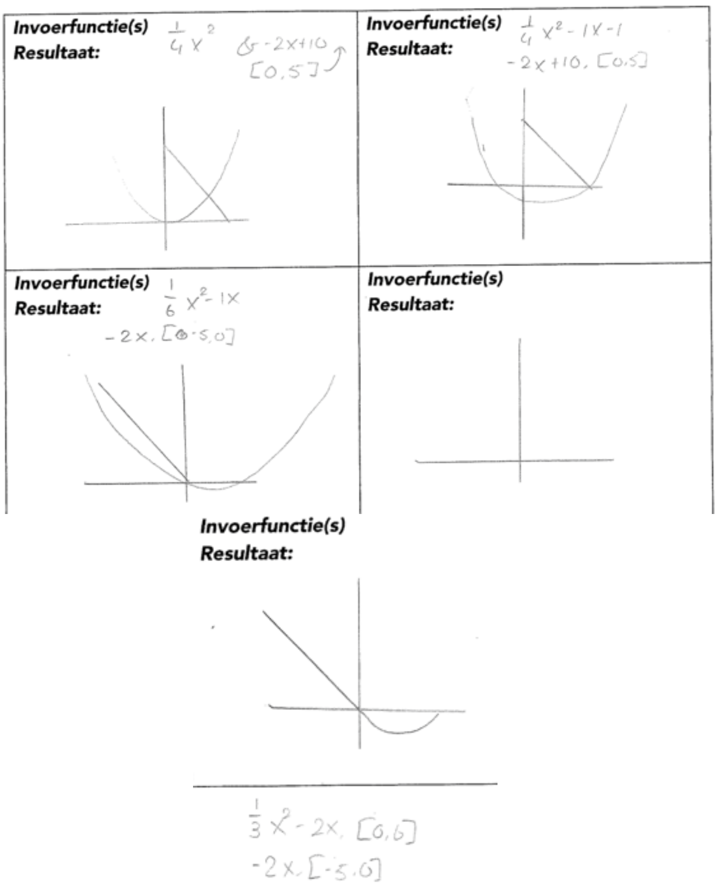
- Leerkrachten en leerlingen vonden deze les over het algemeen leuk.
- Soms waren leerlingen te gefocust op de vorm van het gekromde deel, waardoor de leerkracht ze eraan moest herinneren dat het ontwerp ook een lijnstuk moet hebben welke aansluit op het gekromde deel.
- Sommige leerlingen houden zich meer bezig met hoe praktisch de glijbaan is, in plaats van de gladheid ervan. Dan zou de leerkracht moeten controleren of de leerlingen enig idee hebben over wat een goede en slechte aansluiting van de twee lijnstukken geometrisch betekent.
- Sommige leerkrachten en leerlingen zullen ICT zoals GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Desmos graph mobiele app, of een grafische rekenmachine gebruiken. De groepen die ICT gebruikten hadden meer ideeën uitgezocht. Sommige leerlingen beginnen op papier en controleren met ICT. Sommige werken juist andersom.
- Sommige leerlingen hadden al kennis over afgeleiden, hierdoor realiseerden de meesten daarvan zich dat ze de raaklijn nodig hadden voor de oplossing.
- Sommige leerlingen hadden een discussie over wat ze moesten aanpassen: de parabool, de helling van de lijn, of het snijpunt van de lijn.

- Sommige realiseerden zich niet dat ze ergens een parameter konden introduceren zoals $a$ of $b$ in $y = ax + b$ of $a$, $b$ or $c$ in $y = ax^2 + bx + c$, of zelfs $\Delta x$ als een parameter.

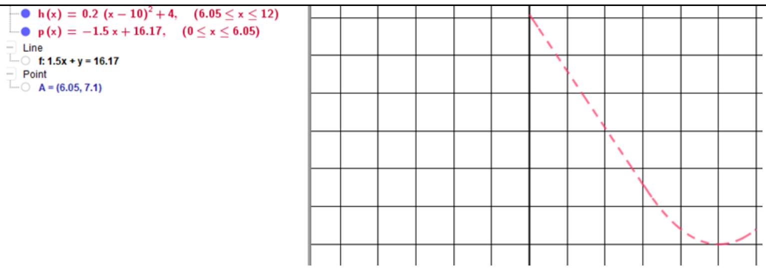
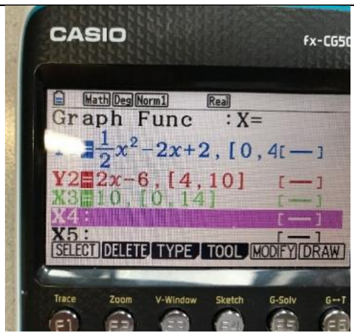
De ontwerp aanpak van de studenten is gerelateerd aan hun begrip van de verschillende aspecten van een raaklijn.

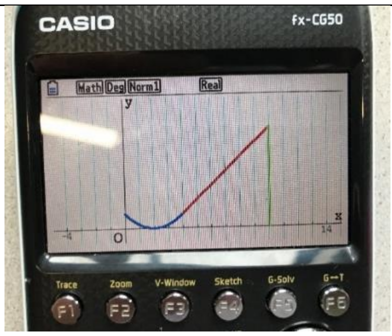
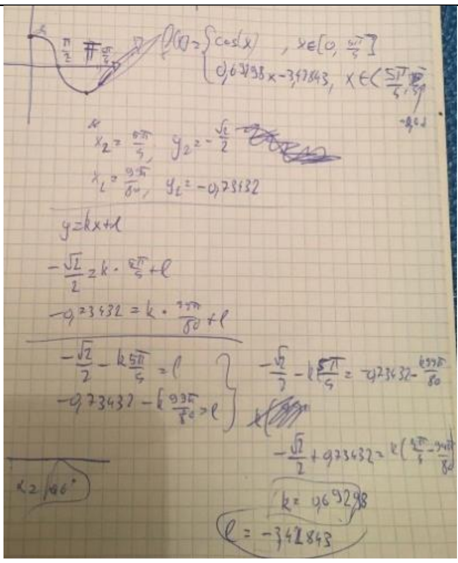
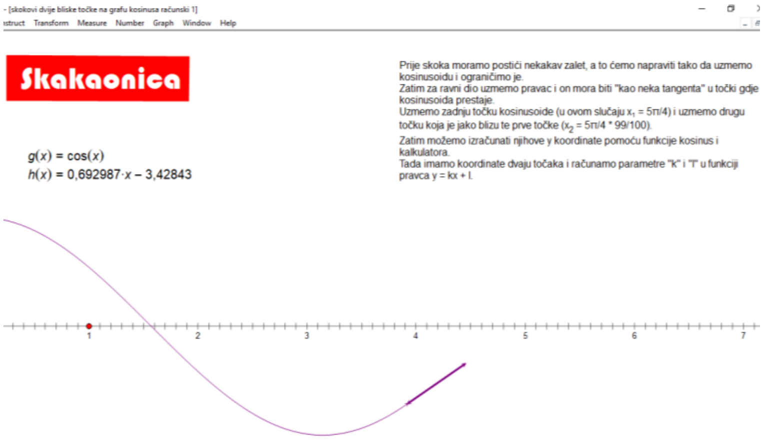
1. Grenslijn aanpak: Ze kiezen een vrije lijn en bewegen die (transleren en roteren) totdat er, op het oog, slechts één snijpunt is met het gewenste gebied.
2. Snijlijn aanpak: ze kiezen een punt op de kromme: het punt waar de raaklijn moet komen. Daarna kiezen ze een ander punt op de kromme en trekken ze een lijn tussen de punten. Door vervolgens dat tweede punt dichter naar het eerste punt te bewegen wordt de lijn, bij benadering, de raaklijn.
3. Lineaire benadering aanpak: Leerlingen kiezen een punt op de kromme en trekken daar een lijn door. Daarna passen ze de helling aan totdat de lijn goed lijkt aan te sluiten op de kromme.

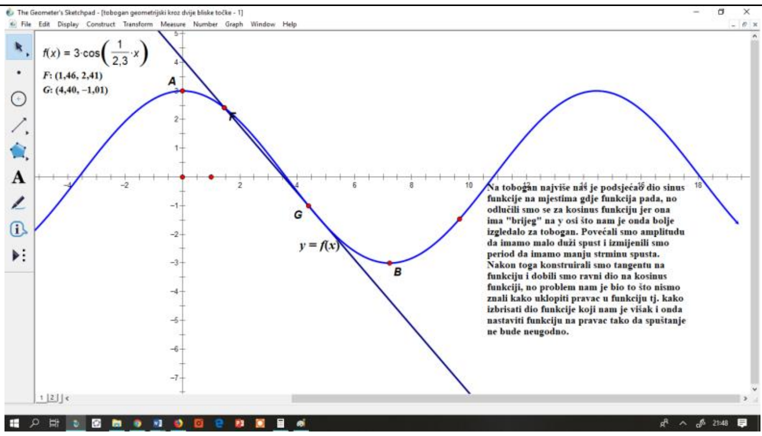
Sommige gebruikten de cirkel als gekromd deel samen met het feit dat de raaklijn loodrecht staat op de straal. We noemen dit de *cirkel oplossing*.

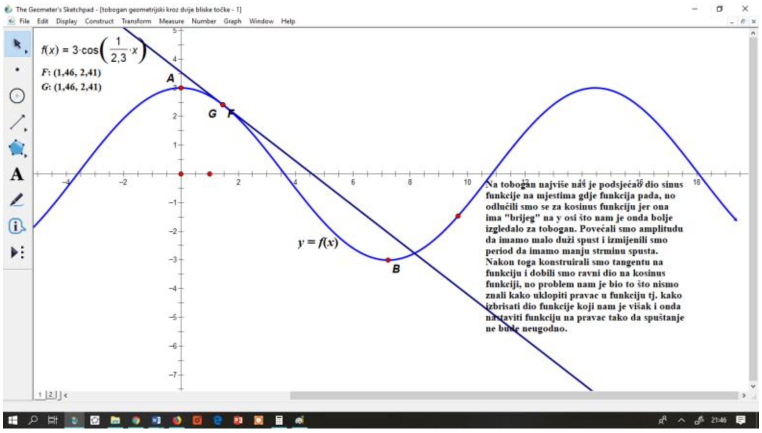


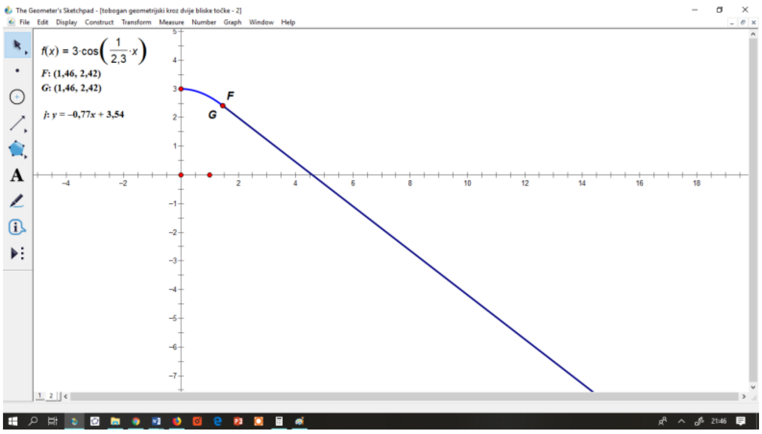

*Leerlingen passen de parameters van de parabool en lijn aan. Uiteindelijk vinden ze een goede oplossing. Ze lijken zich te focussen op snijpunten en evalueren het visueel.*

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Deze groep varieert de b in $y = ax + b$ en benaderd daarmee de oplossing.</td>
</tr>
<tr>
<td>

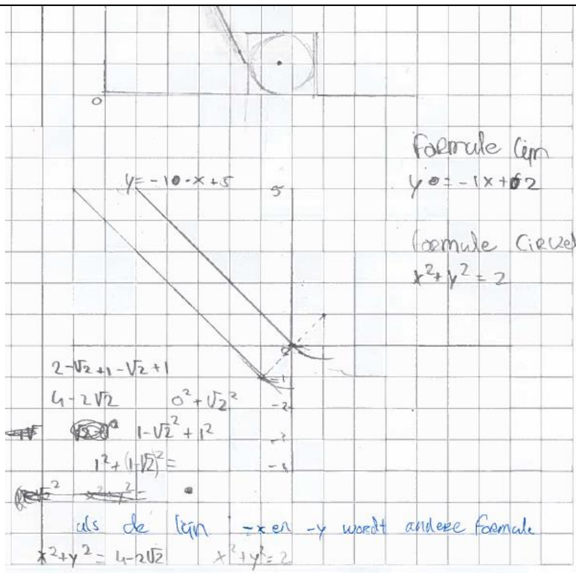
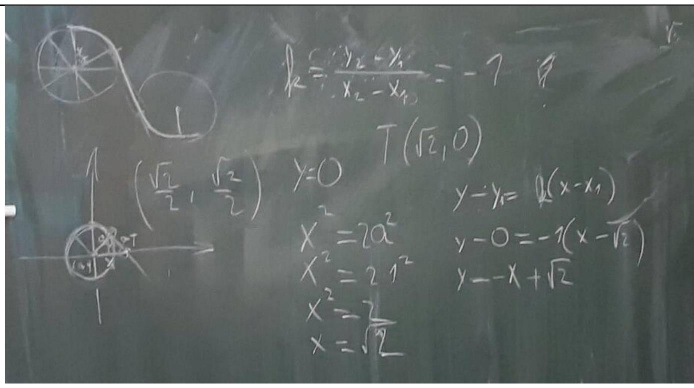
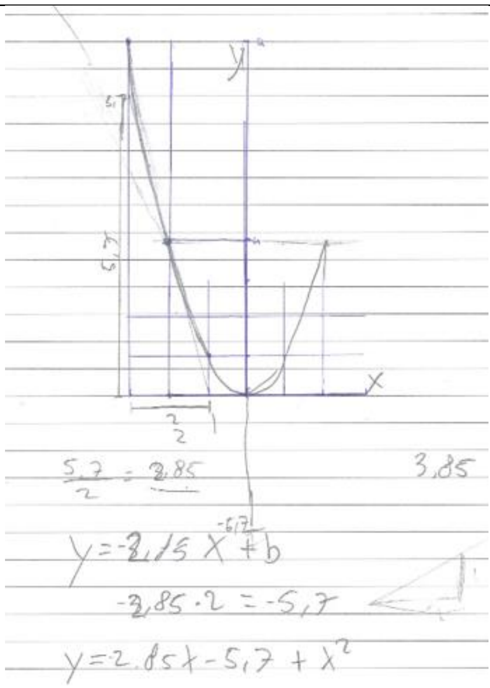

</td>
<td>Een oplossing wordt weergeven op een grafische rekenmachine.</td>
</tr>
<tr>
<td>

</td>
<td>Deze groep gebruikt de snijlijn aanpak (2): een lijn trekken door twee nabijgelegen punten op het gekromde deel ter benadering van het lineaire deel. Ze gebruiken numerieke methodes om een vergelijking voor de lijn te krijgen: ze schrijven dat ze een punt kiezen waar de cosinus ophoudt ($x = 5\pi/4$) en een punt vlak daarvoor ($x = \frac{99}{100} \cdot 5\pi/4$).</td>
</tr>
</table>

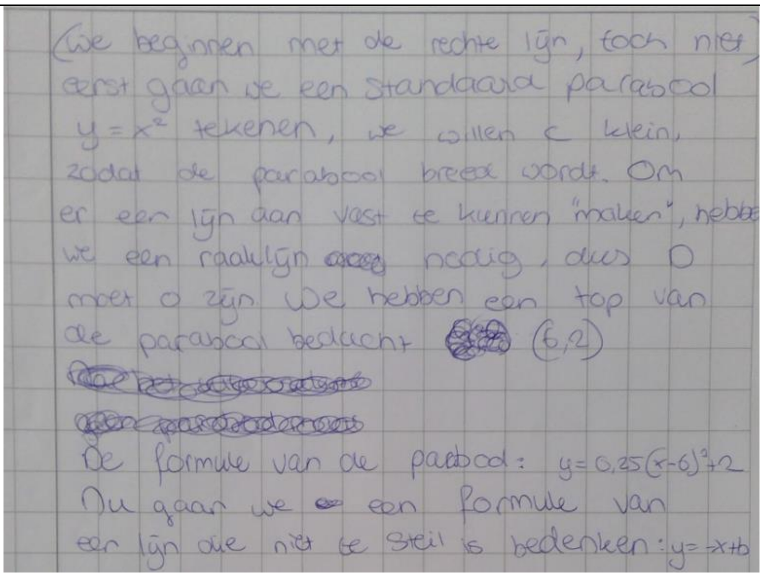



*Deze groep gebruikte ook de snijlijn aanpak (2). Ze lezen de vergelijking af van het scherm.*

| | |
|---|---|
|  | *Deze groep probeerde de cirkel oplossing. Ze wisten dat de raaklijn loodrecht op de straal staat (dus is de validatie geometrisch: ze gebruiken een theorie uit de vlakke meetkunde). Echter hadden ze moeite met de cirkel en lijn aan te laten sluiten door middel van verticale translatie.* |
|  | *Deze groep heeft ook een cirkel oplossin. Ze kenden het punt* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *op de eenheidscirkel en construeerden een lijn met helling -1 door dat punt.* |
|  | *Deze groep tekent de grafiek van de parabool* $y = x^2$*. Daarna proberen ze om een raaklijn te vinden in een punt op een manier die lijkt op de lineaire benadering aanpak 3. Ze bepalen de helling door* $\Delta x$ *en* $\Delta y$ *te meten en het quotiënt te nemen. De validatie is visueel.* |

| | |
|---|---|
| <br>(We beginnen met de rechte lijn, toch niet eerst gaan we een standaard parabool $y = x^2$ tekenen, we willen c klein, zodat de parabool breed wordt. Om er een lijn aan vast te kunnen "maken", hebben we een raaklijn nodig, dus D moet 0 zijn. We hebben een top van de parabool bedacht (6,2)<br>De formule van de parabool: $y = 0{,}25(x-6)^2+2$<br>Nu gaan we een formule van een lijn die niet te steil is bedenken: $y = -x+b$ | *Een groep gebruikte de discriminant om te bepalen of er een snijpunt tussen hun kandidaat raaklijn en de parabool was. Ze hadden de parabool* $y = 0{,}25\,(x-6)^2+2$ *met top* $(6,2)$ *vastgezet, en probeerden de waarde voor parameter b in de vergelijking voor de raaklijn* $y = -x + b$ *te vinden door gebruik te maken van de discriminant.* |

## Evaluatie-instrumenten

De volgende vragen kunnen gesteld worden om de opgedane kennis te testen:

1. De leerkracht tekent een arbitraire kromme en een lijn die duidelijk geen raaklijn is. Zij/hij vraagt aan de leerlingen of ze denken dat de vorm geschikt is voor een treinspoor. De leerlingen leggen uit waarom niet.
2. Construeer een vergelijking voor de raaklijn aan de eenheidscirkel door $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Benader de helling van de parabool $x^2$ in het punt (2,4).

## Suggesties voor gerelateerde onderwerpen

1. Het idee van de *grenslijn* en het verschil met de raaklijn.
2. De raaklijn volgens Euclides – een lijn zó dat er geen enkele andere rechte lijn tussen die lijn en de kromme kan zitten.
3. Na geleerd te hebben dat de limiet van het verschil quotiënt $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ gelijk is aan de afgeleide, kunnen leerlingen de afgeleide van een simpele functie berekenen zoals $f(x) = x^2, f'(x) = 2x$. De klas kan bespreken wat dat betekent voor de raaklijnen van die functie.

## Logica achter en RWO perspectieven op het scenario

### Relevantie en toepasbaarheid

- Het echte leven: het probleem is gerelateerd aan alledaagse ervaringen van de leerlingen. De objecten welke ze moeten ontwerpen zijn bekend met ze en ze weten waar een verschil in de vorm in zal resulteren. De taak maakt gebruik van hun voorkennis over wat het betekent voor iets om glad te zijn: namelijk hun ervaring met het naar beneden glijden op een gladde glijbaan.

- De werkvloer: De leerlingen leren het ontwerpen en mathematiseren van vormen die ze in het echt tegenkomen. Ze leren het object te verbinden met de wiskundige representatie. Deze vaardigheden zijn belangrijk voor ontwerpen (bijvoorbeeld architectuur) en modeleren in een professionele context.
- Verdere studie: Het scenario is een introductie van afgeleiden en calculus.

### Onderzoeksvaardigheden

De leerlingen leren om problemen te versimpelen en wiskunde toe te passen voor het beschrijven van het deel waar ze mee bezig zijn. Ze stellen hypotheses op en testen die. Ze maken voorbeelden en vergelijken verschillende oplossingen. Ze maken beslissingen over welke oplossing beter is. Ze kunnen bepleiten welke oplossing beter is en hun argumentatie communiceren naar anderen. Ze kunnen extrapoleren en hun resultaten generaliseren.

### Potentie voor een reeks aan lessen

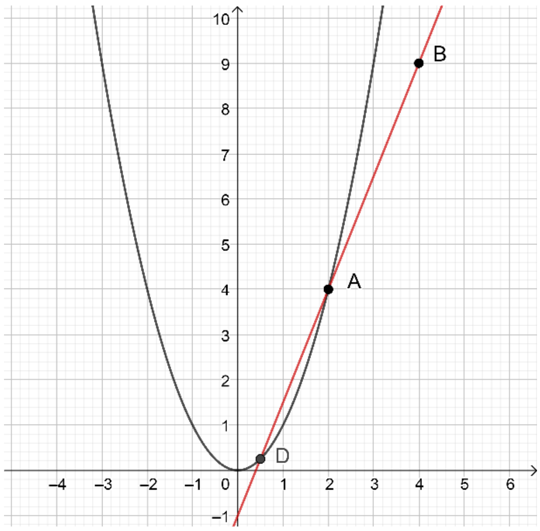
Dit scenario kan onderdeel zijn van een reeks aan lessen over afgeleiden. De benodigde voorkennis betreft: grafieken maken van functies, lineaire functies en lijnen, voorbeelden van niet-lineaire functies.

Verderop in de reeks aan lessen kan het glijbaan probleem meer formeel worden behandeld met bijvoorbeeld limieten en afgeleiden. Als impliciete afleiding wordt geïntroduceerd kan de verbinding met de cirkel oplossing worden vastgesteld. Pas impliciete afleiding toe op de cirkel en vergelijk dat met de intuïtieve geometrische oplossing uit het huidige scenario en het resultaat behaald door expliciete afleiding. Op deze manier wordt kennis gevalideerd door verschillende, door de leerlingen behaalde, resultaten met elkaar te vergelijken.

### Logica achter het scenario

- *Horizontaal mathematiseren:* Het probleem is geplaatst in een rijke context welke echt is voor de leerling: ze weten allemaal wat het betekend voor een glijbaan om glad te zijn of niet. Leerlingen worden uitgenodigd om wiskundige taal te gebruiken voor het opstellen van een model van de situatie: een coördinatensysteem opstellen, de driedimensionale vorm interpreteren als een tweedimensionale kromme, de kromme representeren met vergelijkingen.
- *Verticaal mathematiseren:* In sommige gevallen ontwikkelen leerlingen deze ideeën door het introduceren van parameters, en bespreken ze wat ze willen parametriseren. Sommige passen andere wiskundige modellen toe: zoals algebra (de discriminant) of verschil quotiënten (helling van lijnen). Vanaf hier is er veel potentie voor verdere mathematisering. Als studenten de snijlijn aanpak hebben toegepast, is er een natuurlijke overgang naar het introduceren van de limiet van het verschil quotiënt voor het bepalen de helling van een kromme. Als ze algebraïsche methodes hebben gebruikt en gefocust zijn op het berekenen van snijpunten, is er een mogelijkheid om te bespreken waarom en maar één snijpunt zal moeten zijn (lokaal) en eventueel om te kijken naar de hoeveelheid snijpunten als eerste stap naar het berekenen van de helling van de kromme.

  Informele modellen van de leerlingen kunnen erg divers zijn. De leerkracht moet de ene aanpak met de andere kunnen verbinden (actie/validatie) om uiteindelijk tot een gezamenlijke institutionalisering te komen. De *institutionalisering* zal gefundeerd moeten zijn op de ideeën waar de leerlingen mee komen. Zo kunnen leerlingen bijvoorbeeld geëxperimenteerd hebben met de situatie in GeoGebra:




Hier hebben ze het punt $B$ gevarieerd. De leerkracht merkt op dat dit correspondeert met het variëren van snijpunt $D$. Dit kan een verbinding zijn naar het bespreken van verschil quotiënten en limieten (op een informele wijze), en mogelijk het geven van de definitie van een afgeleide op basis daarvan.