EUCLIDES

750

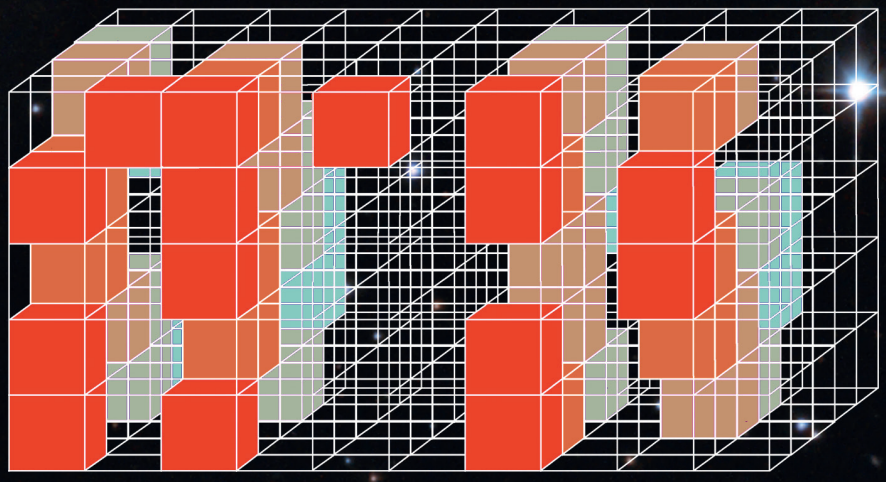
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Nationale Wetenschapsquiz: wiskundige aanpak bij contra-intuïtieve vraag

Euclides-archief: 95 jaar geschiedenis toegankelijk gemaakt

Onderzoekend wiskunde leren beklijft beter

Begin de les met een meetkundepuzzel



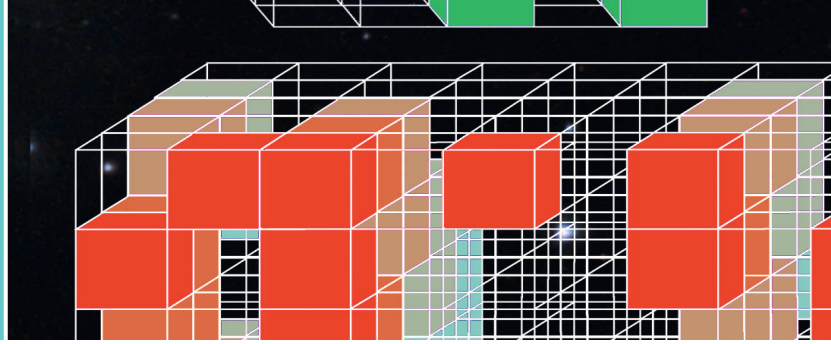
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

JAARGANG 95 - OKTOBER 2019

NR.2

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 95 NR2



IN DIT NUMMER

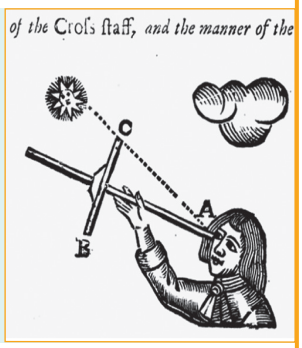
DROGREDENEN IN EEN KINEMATISCHE ANALYSE
Roland Siemons
Christiaan Boudri
4

HET *EUCLIDES*-ARCHIEF ONTSLOTEN EN BESCHIKBAAR
Harm Jan Smid
8

EXAMENS NAKIJKEN
Henry van Bergen
10

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?
DEEL 7 REKENEN-WISKUNDE IN DE CENTRALE EINDTOETS
Hendrik Straat
Iris Verbruggen
14

WORTELS VAN DE WISKUNDE
15: METEN
Jeanine Daems
18



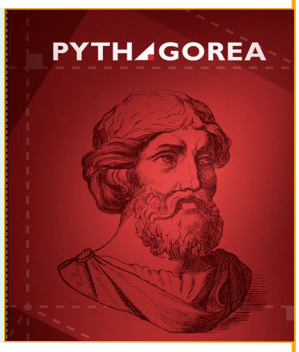
DE HOEKSTREEP
Jan Beuving
25

ONDERZOEKEND WISKUNDE LEREN
Rogier Bos
26

BOEKBESPREKING
DE TROPISCHE ALGEBRA ACHTER HET SPOOR
Alex van den Brandhof
29

HARMONISCH TOTAAL EN AANVERWANTEN II
Gerard Koolstra
31

#YOUTOO, GA ERVOOR!
Fred Muijrers
34



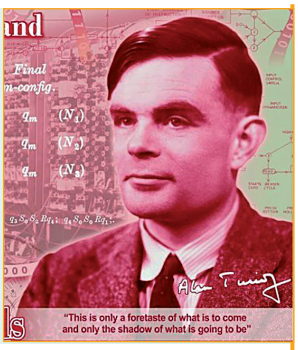
PUZZEL
Birgit van Dalen
Quintijn Puite
37

VIJF VRAGEN AAN ...
Sietske Tacoma
38

Ontwerp van het beeld met de kubussen
door Henk van der Vorst en Tom Goris
Sterrenfoto op de achtergrond: Jan Willem Spree
(Haren, Groningen)

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

WIS EN WAARACHTIG
40



ONMETELIJKE GANGEN NAAR DE WORKSHOPS VAN VERLANGEN...
NWD 25
Rob van Oord
42

VERENIGINGSNIEUWS
NOTULEN VAN DE NVvW-JAARVERGADERING 2018
44

SERVICEPAGINA
46

Over de foto op de voorkant:
Wat zie je als je aan het getal 750 denkt? Die vraag stelde Tom Goris aan Henk van der Vorst, die numeriek wiskundig is en zich bezighoudt met het ontwerpen van patronen en vouwkunst, zie *www.henkvandervorst.nl.* Dat leverde het beeld op dat op de omslag staat. Dit beeld is samen met Tom Goris uitgevoerd. Op de achtergrond zie je een sterrenfoto van Jan Willem Spree.
Wat het beeld voorstelt? Dat vertelt Tom tijdens de komende jaarvergadering van de NVvW.

Kort vooraf

De 750e *Euclides*! Dit gegeven heb ik toevallig ontdekt en het ligt er een beetje aan hoe je telt. In de loop der jaren zijn er 34 dubbelnummers verschenen, het eerste was nummer 5/6 in 1925, toen *Euclides* nog *Bijvoegsel van het nieuw tijdschrift voor wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen* heette en het laatste was nummer 8/9 in 1985. Die dubbelnummers tellen voor twee, wat de reden ook mag zijn om twee nummers in één kaftje te nieten. In jaargang 76 (2000-2001) was er een nummer 0, ter gelegenheid van het 75-jarig bestaan van de Vereniging. Die telt niet mee, net als de twee nummerloze specials (Getallen, 2012 en vmbo, 2017). En zo kom je op nummer 750 voor deze aflevering.
De redactie vindt dit een goede reden om de lezers te trakteren op een cadeautje: *Wiskunde 30 seconden*, een wiskundige versie van het spel *30 seconds*, zie pagina 7.
En wat is er in nummer 750 zoal te beleven? Een mooi toeval: er blijkt een heus *Euclides*-archief te bestaan met daarin de correspondentie tussen de redactie en de auteurs, verslagen van redactievergaderingen etc. Deze zomer was het ordenen van het archief gereed en zijn de 21 kartonnen dozen overgebracht naar het CWI in Amsterdam. Harm Jan Smid beschrijft dat proces en verhaalt kort de geschiedenis van *Euclides*. Speciale aandacht voor het openingsartikel van Roland Siemons en Christiaan Boudri. Het was even op de plank blijven liggen om het rond de start van de Nationale Wetenschapsquiz 2019 te plaatsen. Maar helaas, er komt geen volgende NWQ... Na 25 edities stopt deze mooie wintertraditie. Namens het Freudenthal Instituut zat Sietske Tacoma sinds 2013 in de redactie. Als afscheid beantwoordde zij 'Vijf vragen aan...'. De rubriek FIzier zal worden verzorgd door haar opvolger Rogier Bos. Op naar nummer 1000, en onderweg komen we dan ergens de 100e jaargang tegen...

Tom Goris

Roland Siemons - Christiaan Boudri

Drogredenen in een kinematische analyse

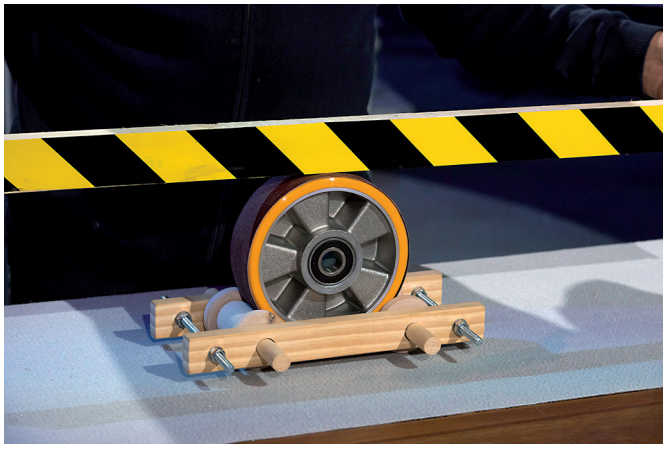
Een contra-intuïtieve vraag uit de Wetenschapsquiz: 60% van het publiek gaf het verkeerde antwoord. Maar het viel Roland Siemons en Christiaan Boudri vooral op dat de verklaring van het juiste antwoord de plank volledig missloeg. En dat een wiskundige aanpak in plaats van een intuïtieve wél tot de juiste verklaring leidt.

Inleiding

Met de vraag naar de beweging van een karretje (vraag 13) in de Nationale Wetenschapsquiz 2018 heeft NWO ons ten minste één intrigerende vraag voorgeschoteld. Het antwoord dat op televisie en op de website van NWO werd gepresenteerd gaf echter te denken. De conclusie is correct en in overeenstemming met de tijdens de tv-uitzending uitgevoerde metingen, maar de analyse is foutief. We laten zien waarom dit zo is en wat een goede analyse van het mechanisme aan interessante verschijnselen kan onthullen.

Karretje

Vraag 13 in de Nationale Wetenschapsquiz 2018 (NWQ) betreft het karretje van figuur 1.



figuur 1 Het karretje van vraag 13 (foto: © Robert Lagendijk | VPRO)[1]

De vraag luidde:
'Dit karretje staat op tafel, met een liniaal erbovenop. Je drukt de liniaal van boven op het grote wiel en beweegt hem naar rechts. Wat doet het karretje?' Rijdt het naar links, blijft het stilstaan of rijdt het naar rechts? De demonstratie tijdens de tv-uitzending op 28 december 2018 liet zien dat het karretje naar rechts bewoog. Ook als de liniaal stil werd gehouden en de tafel naar links werd getrokken, reed het karretje naar rechts. Volgens de NWQ was dat laatste makkelijk te begrijpen. Men beweerde dat als de tafel naar links wordt getrokken, de kleine wieltjes met de klok mee gaan draaien en het grote wiel tegen de klok in. En daaruit volgt, meent de NWQ, dat het karretje naar rechts rijdt, waarbij het grote wiel naar rechts langs de liniaal rolt. Aangezien het vanuit de karretje niet uitmaakt wat er beweegt: het tafelblad naar links of de liniaal naar rechts, zal het karretje dus ook naar rechts rijden als je de tafel stilhoudt en de liniaal naar rechts beweegt, aldus de uitleg tijdens de uitzending en op de website van NWQ. [2]

Cirkelredenering

De NWQ doet een beroep op een ruimtelijke intuïtie die aannemelijk lijkt. Maar dat die intuïtie wel foutief moet zijn blijkt uit het volgende. Aangezien de NWQ zelf stelt *'het maakt niet uit wat er beweegt: het tafelblad naar links, of de liniaal naar rechts'*, mogen we de redenering ook toepassen op de bewegende liniaal: *Als je de liniaal naar rechts beweegt, en het tafelblad stilhoudt, gaat het grote wiel met de klok mee draaien, en de kleine wielen tegen de klok in. En dus rijdt het karretje naar links.* Omdat dezelfde redenering tot tegengestelde conclusies leidt, moet ze wel foutief zijn. Het argument van de NWQ berust bij nader inzien op een cirkelredenering: men vooronderstelt datgene wat men wil bewijzen, nl. dat de kleine wielen met de klok meedraaien. Dat moet echter nog maar blijken! Ze gaan namelijk dan en alleen dan zo draaien indien het karretje ten opzichte van de tafel naar rechts beweegt (hetgeen eerst bewezen moet worden). En die noodzakelijke conditie wordt allerminst aangetoond door de toevoeging van de NWQ dat *'naar links rijden niet kan, omdat het grote wiel dan via de kleine wielen zijn eigen snelheid oneindig hoog zou moeten opvoeren.'* Mogelijk heeft de NWQ deze raadselachtige overweging als extra argument bedoeld, maar zonder verheldering kunnen wij hier niet op ingaan. Hoe het ook zij, naar links rijden kan wel degelijk, en de condities waaronder dat gebeurt laten wij zien in de kinematische analyse hieronder.

Het argument van de NWQ is ook als volgt te formuleren: *Als je de liniaal stilhoudt en het tafelblad naar links trekt, gaan de wielen die over het tafelblad (het bewegende vlak) rollen met de klok mee draaien, en het wiel dat over*

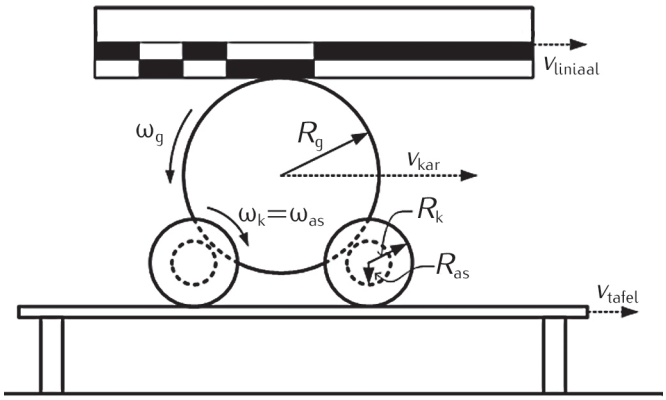
de liniaal (het stilstaande vlak) rolt tegen de klok in. En dus rijdt het karretje naar rechts. Roteer nu het karretje over 180° om een as evenwijdig aan de wielassen door een punt halverwege tafel en liniaal. Als resultaat bevindt de oorspronkelijk rechterkant van het karretje zich nu links en vice versa, en het karretje staat met de kleine wielen naar boven. Het gekantelde karretje zal nu naar links bewegen waar het originele karretje naar rechts bewoog en vice versa. We passen de redenering van de NWQ nu toe op het gekantelde karretje: *Als je de liniaal stilhoudt en het tafelblad naar links trekt, gaat het wiel dat over het tafelblad rolt met de klok mee draaien, en de wielen die over de liniaal rollen tegen de klok in.* En dus rijdt het karretje naar rechts. Het zou echter juist naar links moeten gaan, want het originele karretje ging in die situatie naar rechts. De analyse van de NWQ leidt dus tot een tegenstrijdigheid met zowel het eigen uitgangspunt als met de waarneming en is dus foutief.

Als extraatje is op de website van de VPRO nog vermeld:[3] *'Bovendien duw je naar rechts. Dus zou het raar zijn als het karretje naar links reed.'* Ja, dat zou raar zijn! Maar het gaat in deze opgave nu juist over een raar ding met onverwachte eigenschappen. De situatie is veel gecompliceerder dan die van een enkele kracht. Er ontstaan tegenkrachten in de vorm van wrijving, traagheidskrachten en reactiekrachten. En passen we het argument toe op de naar links bewogen tafel met de stilstaande liniaal, dan zou het karretje naar links moeten bewegen, wat het niet deed. Ook dit argument is dus foutief.

> "Het gaat in deze opgave nu juist over een raar ding met onverwachte eigenschappen."

Een kinematische analyse

Voor een goed inzicht is een kinematische analyse van de constructie nodig waarbij we ook naar het inwendige kijken en waarbij we meer wiskunde gebruiken. Figuur 2 is een schematische weergave van het karretje. De pijlen definiëren de positieve richting van de (omtrek-)snelheden. Als de tafel naar links wordt bewogen, is de snelheid van de tafel derhalve negatief. We veronderstellen (net als de NWQ) dat er geen slip optreedt tussen de verschillende bewegende onderdelen die elkaar raken.



figuur 2 Schematische weergave van het karretje

Het karretje heeft dezelfde snelheid als de as van het grote wiel. Deze snelheid is dan uit te drukken als:

$$v_{kar} = \omega_g \cdot R_g + v_{liniaal} \quad (1)$$

Omdat de snelheid van het karretje ook gelijk is aan de assen van de kleine wielen geldt, analoog:

$$v_{kar} = \omega_k \cdot R_k + v_{tafel} \quad (2)$$

De twee identieke assen van de kleine wielen koppelen het grote wiel aan de twee kleine wielen. De omwentelingssnelheid van de kleine wielen is gelijk aan die van de assen.

Er geldt dan:

$$\omega_k = \omega_g \cdot \frac{R_g}{R_{as}} \quad (3)$$

Uit de vergelijkingen 1, 2, en 3 volgt:

$$v_{kar} = \frac{v_{liniaal} - v_{tafel} \cdot \frac{R_{as}}{R_k}}{1 - \frac{R_{as}}{R_k}} \quad (4)$$

De vergelijking geldt voor alle denkbare waarden van R_{as}, R_k en R_g. R_{as} zou dus ook groter dan R_k kunnen zijn (niet getoond in de vraagstelling van de NWQ), als er ruimte wordt gegeven aan de dikke as, bijvoorbeeld door middel van een rails waarover de kleine wielen rijden.

Als de snelheid van de tafel gelijk is aan 0, volgt uit vergelijking 4:

$$v_{kar} = \frac{v_{liniaal}}{1 - \frac{R_{as}}{R_k}} \quad (5)$$

Omdat in de gestelde opgave de assen van de kleine wielen dunner zijn dan de kleine wielen zelf (dus $R_{as} < R_k$), geldt dat de noemer van vergelijking 5 kleiner is dan 1 maar groter dan 0. Dan geldt: als de liniaal naar rechts beweegt, gaat het karretje nog sneller naar rechts.>

En als de liniaal naar links beweegt, gaat het karretje nog sneller naar links. Als $R_k < R_{as}$ geldt echter dat het karretje tegengesteld beweegt aan de liniaal. Als de straal van de kleine wielen in de buurt komt van die van de as, dan wordt de noemer bijna gelijk aan 0, en zou de snelheid van het karretje heel erg groot worden. Dit verschijnsel zullen we dadelijk bespreken, maar we beschouwen eerst nog iets anders.

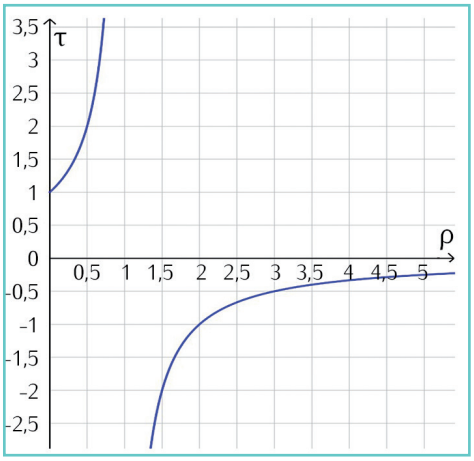
Als de liniaal stilstaat en de tafel beweegt, is $v_{liniaal} = 0$ en kunnen we vergelijking 4 herschrijven tot:

$$v_{kar} = \frac{-v_{tafel}}{\frac{R_k}{R_{as}} - 1} \qquad (6)$$

Als de as van de kleine wielen dunner is dan de kleine wielen zelf (dus $R_{as} < R_k$), is de noemer positief. Als de tafel dan naar links beweegt, gaat het karretje naar rechts. Omgekeerd gaat het karretje naar links als de tafel naar rechts beweegt. Meer algemeen is de snelheid van het karretje afhankelijk van de verhouding van de stralen van de kleine wielen en hun assen:

— $R_k > 2R_{as}$: het karretje beweegt langzamer dan de tafel, maar in tegengestelde richting.
— $R_k = 2R_{as}$: het karretje beweegt even snel als de tafel, maar in tegengestelde richting.
— $R_{as} < R_k < 2R_{as}$: het karretje beweegt sneller dan de tafel, in tegengestelde richting.
— $R_k < R_{as}$: het karretje beweegt in dezelfde richting als de tafel.

Deze functie is weergegeven in figuur 3.



figuur 3 Weergave van vergelijking (6), met $\tau = v_{kar}/v_{tafel}$ en $\rho = R_k/R_{as}$.

Eén situatie is nog niet besproken: wat gebeurt er als de wielmaat in de buurt komt van R_{as}? Dan komt de noemer van vergelijking 5 en 6 steeds dichter bij 0, en gaat het karretje dus steeds sneller. Maar je zult een kracht moeten uitoefenen op de liniaal, al is het maar om de wrijvingskrachten van het rollende karretje te overwinnen. Stel je nu voor: je begint met een klein wiel dat maar een fractie groter is dan zijn as, terwijl door snelle slijtage de wielmaat steeds dichter de asmaat benadert. We bewegen de liniaal met een constante snelheid, maar de snelheid van het karretje wordt steeds groter, zo blijkt uit vergelijking 5. Dus worden de wrijvingskrachten ook steeds groter. Om de liniaal een constante snelheid te blijven geven', zul je een steeds grotere kracht moeten uitoefenen. Dit heeft natuurlijk zijn beperkingen; uiteindelijk lukt het je niet meer of gaat de liniaal slippen en valt het karretje stil.

Ga je uit van een situatie waarbij de stralen van de as en de kleine wielen meteen al gelijk zijn, dan kun je de liniaal überhaupt niet in beweging krijgen ten opzichte van de tafel. Tafel en liniaal zijn in horizontale richting onderling vast verbonden door het karretje. Over de snelheid van het karretje is in deze situatie niets bepaald. Het karretje kan vrij bewegen!

Conclusie

De argumentatie van de NWQ is onjuist. Zij berust op een cirkelredenering, en bij strikte toepassing volgt een tegenstrijdigheid. Ook een tweede argument op de website van de VPRO leidt tot een tegenspraak. Een meer fundamentele analyse van het gestelde probleem is noodzakelijk. Met eenvoudige wiskunde kan het probleem worden opgelost en zijn bovendien enkele bijzondere fenomenen gevonden die op het eerste gezicht niet voor de hand liggen.
Mechanismes zoals die van het karretje tussen twee starre platen komen we tegen in alledaagse voorwerpen zoals de versnellingsbak van een auto, een versnellingsnaaf van een fiets en uurwerken. Maar dan in een rotatie-symmetrische vorm.[4] Het is daarom belangrijk dit soort mechanismen goed te begrijpen.

Misschien zouden de quizmasters er goed aan doen hun eigen analyse zoals weergegeven op de website van NWO en VPRO te rectificeren, en daarbij ook uit te leggen waarom die foutief is. Het is immers leerzaam niet alleen in te zien wat de juiste redenering is, maar ook waarom een onjuiste redenering onjuist is.

Op de website staat een langere versie van dit artikel waarin op een aantal details nog dieper wordt ingegaan.

vakbladeuclides.nl/952boudri >

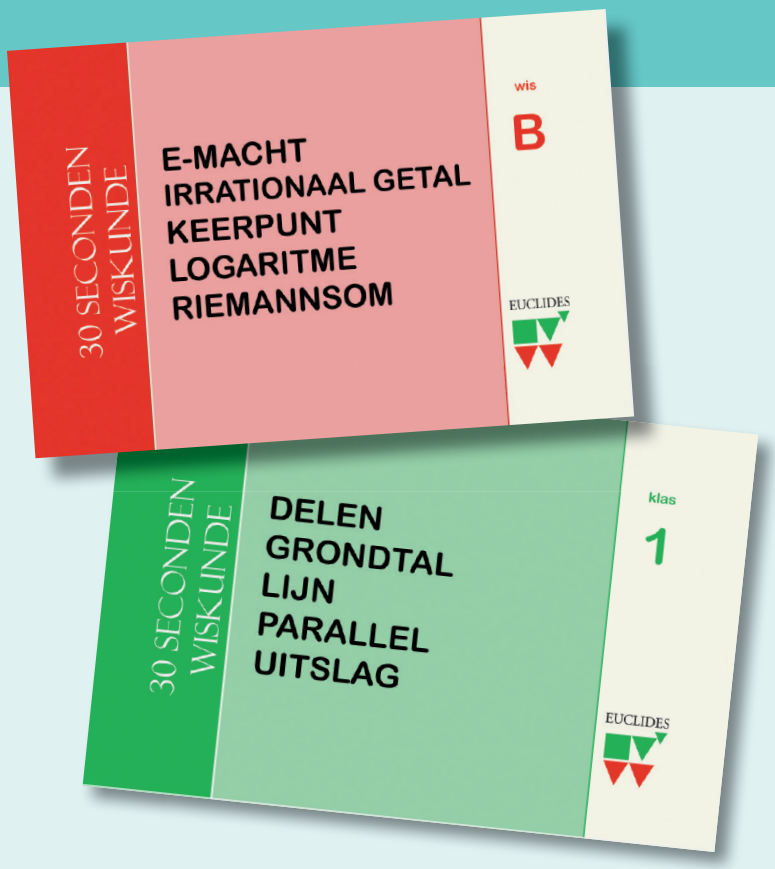
Noten

[1] Met dank aan Hansje Quartel (VPRO, eindredactrice NWQ) en Bert Bensink (VPRO, afdeling communicatie)
[2] *www.nwo.nl/actueel/evenementen/terugblik/de+nationale+wetenschapsquiz/2018*
[3] www.vpro.nl/programmas/nwq/lees/nieuws/2018/Vragen-2018.html
[4] Een website met veel voorbeelden: *https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Epicyclic_gears*

Over de auteurs

dr. ir. Roland V. Siemons *(siemons@cleanfuels.nl)* studeerde werktuigbouwkunde aan de Universiteit Twente en promoveerde in de economie en econometrie aan de Universiteit van Amsterdam. Roland ontwikkelt technologieën voor de productie van duurzame energiedragers uit biomassa bij de firma Clean Fuels. dr. ir. J. Christiaan Boudri *(Christiaan.Boudri@han.nl)* studeerde werktuigbouwkunde aan de Universiteit Twente en promoveerde in de wetenschapsgeschiedenis, eveneens aan de Universiteit Twente. Christiaan is docent Engineering aan de Faculteit Techniek van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen en voorzitter van de Werkgroep mbo-hbo wiskunde (NVvW).

Spel: Wiskunde 30 seconden



Euclides verschijnt al voor de 750ste keer. De jarige wil graag trakteren en heeft voor alle trouwe abonnees een cadeautje: het door de redactie ontworpen spel *Wiskunde 30 seconden*. Je leerlingen kennen de spelregels vast wel, want het is gebaseerd op het populaire spel *30 seconds*. Je speelt het spel in teams en in rondes. Elke ronde is één team aan de beurt. Eén teamlid omschrijft in 30 seconden zoveel mogelijke begrippen van een kaartje en de anderen raden. Een leuke manier om op een andere manier bezig te zijn met de wiskundestof.

Tijdens de studiedag op 2 november krijgen alle aanwezigen een spel mee naar huis. Iedereen die niet op de studiedag is, kan na 2 november een spel aanvragen. In *Euclides* 95-3 kun je lezen hoe je kunt bestellen en wat de prijs is.

Harm Jan Smid

Het *Euclides*-archief ontsloten en beschikbaar

Het archief van de redactie van *Euclides* is door Harm Jan Smid geordend en opgeslagen bij het CWI in Amsterdam. Hij beschrijft het proces en de inhoud.

Het archief bij het CWI

Geboortejaar: 1924

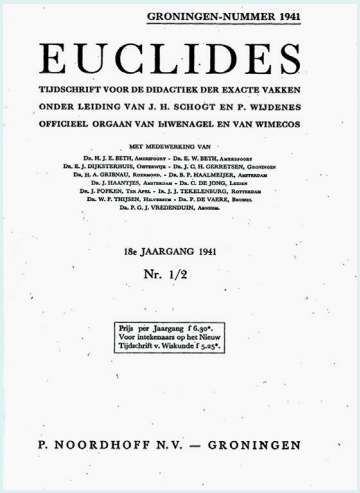
Het tijdschrift dat je nu leest bestaat al zo'n 95 jaar: het eerste nummer is van november 1924. Nu kun je over die ouderdom een beetje twisten. In de eerste jaren van zijn bestaan was het geen zelfstandig tijdschrift en heette het geen *Euclides*, maar was het een *Bijvoegsel* bij het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. Maar toen het in 1927 verzelfstandigd werd en de naam *Euclides* kreeg, werd op de voorpagina vermeld dat het om de vierde jaargang ging. Volgens de oprichters zelf was 1924 dus het geboortejaar van het tijdschrift, en daar houden we ons maar aan. *Euclides* heeft dus al een lange geschiedenis achter zich. Martinus van Hoorn, oud-hoofdredacteur, heeft daar in *Euclides* een aantal lezenswaardige artikelen over geschreven. Over een tijdschrift valt natuurlijk meer te vertellen dan over de inhoud alleen. Er is een redactie, die een bepaald beleid voert (of dat juist nalaat), die redactie is weer verantwoordelijk tegenover een eigenaar of vereniging die als uitgever optreedt, een tijdschrift heeft voldoende auteurs en lezers nodig, en er komt ook in praktisch opzicht heel wat bij kijken om iedere keer weer op tijd een goed uitziend nummer bij de abonnees te bezorgen.

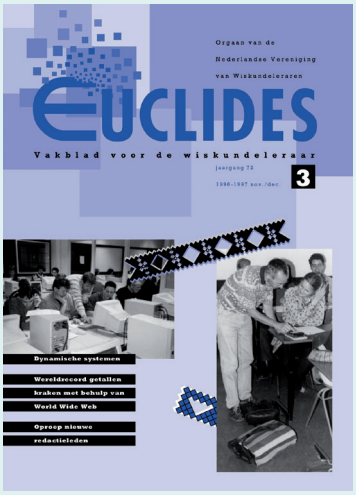
Als lezer merk je daar meestal niet zo veel van, en dat moet ook niet. Merk je er wel iets van, dan is dat meestal geen goed teken: het blad is in redactionele of financiële moeilijkheden, er zijn conflicten binnen de redactie of tussen de redactie en de uitgever, of minder ernstig maar wel vervelend; er zijn storingen in het productieproces waardoor het blad te laat of zelfs helemaal niet verschijnt. Dat laatste merk je natuurlijk wel, maar andere problemen houdt een redactie en/of uitgever liever zo lang mogelijk onder de pet.

> "Het resultaat is een archief van 1959 tot 2007, opgeslagen in 21 kartonnen archiefdozen en één usb-stick"

Verborgen geschiedenis

Natuurlijk is ook *Euclides* in die 95 jaar niet aan dat soort problemen ontkomen, maar problemen en conflicten zijn misschien wel de sappigste, maar toch niet de belangrijkste elementen uit de geschiedenis van een tijdschrift, zeker ook niet van *Euclides*. De verhouding tussen redactie en uitgever, het beleid omtrent de inhoudelijke koers van het tijdschrift, hoe de redactie omgaat met auteurs en lezers zijn belangrijker zaken, en die hoeven heus niet altijd op conflicten uit te lopen. Vaak gaat dat in goed overleg.





Alle jaargangen van *Euclides* staan dankzij het werk van Dick Klingens op de site van de vereniging, maar wie meer wil weten over de verborgen geschiedenis van ons blad, kan niet volstaan met het uitpluizen van oude jaargangen. Het is net als met de wiskunde zelf: wat gepubliceerd wordt is het eindresultaat, en natuurlijk is dat ook waar het uiteindelijk om gaat, maar het proces dat daaraan vooraf is gegaan blijft grotendeels onzichtbaar. Wie daarin is geïnteresseerd heeft andere bronnen nodig: brieven tussen auteurs en de redactie, tussen redactieleden onderling, tussen redactie en uitgever, verslagen van redactievergaderingen enzovoorts. Kortom: het archief van het tijdschrift.

Eenmansbedrijf

Van de eerste 35 jaren uit het bestaan van *Euclides* bestaat echter geen archief. Er was in de periode 1924-1950 in naam een tweehoofdige redactie met een groot aantal medewerkers, maar feitelijk was het blad het eenmansbedrijf van Piet Wijdenes. Natuurlijk moet hij brieven hebben gewisseld met de uitgever Noordhoff en met auteurs van artikelen, maar daar is geen archief van bewaard. Redactievergaderingen bestonden niet; Wijdenes regelde alles zelf.
Wijdenes verdween in 1950 van het toneel, maar het duurde tot 1959 voor de toen nieuw benoemde secretaris Albert Koldijk begon met het bijhouden van een archief. Hij bewaarde de in- en uitgaande correspondentie en maakte verslagen van de toen nog jaarlijkse redactievergadering. Wat Koldijk begon, werd door zijn opvolgers voortgezet en uitgebreid, en zo groeide langzamerhand een steeds omvangrijker archief. Delen van dat archief lagen opgeslagen bij verschillende oud-leden van de redactie en waren moeilijk toegankelijk. Schrijver dezes heeft die delen van het archief verzameld, samengevoegd, geordend en beschreven. Het resultaat is een archief van 1959 tot 2007, opgeslagen in 21 kartonnen archiefdozen en één usb-stick.

Digitaal archief

Dat laatste verdient misschien enige toelichting. Zo vanaf de jaren negentig wordt het papieren archief steeds dunner; correspondentie gaat dan immers steeds meer via e-mail met bijlagen. Dat is gelukkig ook allemaal bewaard, en in digitale vorm aan mij overgedragen. Het beheren en ontsluiten van digitale archieven is nog volop in ontwikkeling, en daarom is op dit moment volstaan met het opslaan van het digitaal archief op een usb-stick.
Overigens is ook vanaf 1959 het archief niet helemaal compleet. De belangrijkste lacune is het ontbreken van de redactieverslagen uit de periode 1977 - 1987. Gelukkig zijn de notulen uit de periode 1981 - 1993 aanwezig in het archief van de NNvW zelf, zodat alleen 77 - 81 echt ontbreekt. Wie weet komt dat nog eens boven water!
Het zou mooi zijn als het *Euclides*-archief nog eens wordt samengevoegd met het archief van de NVvW in het Noord-Hollands Archief in Haarlem, maar op dit moment kan dat nog niet. De dozen zijn daarom in overleg met Danny Beckers opgeslagen bij het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam. Daar liggen ze veilig en zijn ze voor geïnteresseerden goed toegankelijk. De beschrijving van het archief is ook op de NVvW-site te vinden, bij de gedigitaliseerde oude jaargangen. Wie het archief wil raadplegen kan het beste contact opnemen met Danny Beckers: *d.j.beckers@vu.nl*.

Over de auteur

Harm Jan Smid was leraar wiskunde en lerarenopleider. De geschiedenis van het wiskundeonderwijs heeft zijn speciale interesse.
E-mailadres: *harmjansmid45@gmail.com*

Henry van Bergen

Examens nakijken

Vorig jaar is de kwaliteit en de belasting van het correctiewerk van de examens onderzocht. Henry van Bergen geeft een verslag met een verwijzing naar een aantal nuttige sites om het een en ander tijdig goed te regelen voor de examens van 2020.

Inleiding

Half januari stuurde minister Slob de zogenaamde examenbrief[1] naar de Tweede Kamer. In de brief met de nodige bijlages zijn veel wetenswaardigheden voor het gesprek op school over de examencorrectie te vinden. Bijvoorbeeld het uitgebreide onderzoek onder 10.000 correctoren in 2018. Daarvan zijn er 8.630 meegenomen in de rapportage, namelijk diegenen die minimaal 90% van alle enquêtevragen hebben ingevuld.

Kwaliteit

Uit het onderzoek blijkt dat de kwaliteit van de correctie volgens zowel de eerste als tweede corrector doorgaans op orde is, zie tabel 1. De volledigheid van de tweede correctie is verbeterd ten opzichte van 2011, maar neemt ten opzichte van 2016 licht af.

Belasting

De helft van de correctoren ervaart de correctie als belastend tot zeer belastend. Daarbij bestaan wel grote verschillen tussen onderwijsniveaus en type examenvakken. Zo worden vmbo-examens veel minder vaak als (zeer) belastend ervaren dan havo- en vwo-examens, en ervaren correctoren van een alfa-vak de correctie minder vaak als (zeer) belastend dan correctoren van andere vakken.
Het rapport geeft geen gedetailleerd overzicht van de bestede correctietijd per vak per leerling. Die zijn later op ons verzoek wel verstrekt en zijn in de bijlage te vinden.[3] Dit overzicht leert dat de eerste corrector Engels gemiddeld 12 minuten per leerling besteedt, terwijl dat voor de corrector wiskunde C 86 minuten is. De gemiddelde correctietijd voor de eerste correctie is per leerling 46 minuten. In tabel 2 zie je de correctietijden van alle wiskundevarianten.

Kwaliteitsaspecten tweede correctie

Volledigheid (n = 8571)	Zeer volledig **48%**	Volledig **36%**	Min of meer volledig **9%**	Onvolledig **2%**	Zeer onvolledig **1%**	Kan niet overzien **4%**
Zorgvuldigheid (n = 8566)	Zeer zorgvuldig **40%**	Zorgvuldig **44%**	Min of meer zorgvuldig **9%**	Onzorgvuldig **2%**	Zeer onzorgvuldig **1%**	Kan niet overzien **4%**
Soepelheid (n = 8572)	Zeer soepel **1%**	Soepel **5%**	Noch te soepel, noch te streng **64%**	Streng **19%**	Te streng **8%**	Kan niet overzien **3%**

tabel 1[2] Volgens eerste correctoren is de kwaliteit van de tweede correctie doorgaans op orde

variant	vmbo		havo		vwo	
	1e correctie	2e correctie	1e correctie	2e correctie	1e correctie	2e correctie
wiskunde	29,13	19,03				
wiskunde A			42,99	24,26	47,71	27,44
wiskunde B			43,28	27,40	57,84	30,76
wiskunde C					85,71	34,96

Tabel 2 Gemiddelde correctietijd in minuten[2]

	Aardigheidje	(Financiële) compensatie voor (deel van) de bestede uren	Geen extra lessen in vrijgekomen lesuren	Niet / minder surveilleren tijdens CSE	Declareren gemaakte onkosten	Geen facilitering
Eerste correctoren	1%	9%	47%	2%	2%	48%
Tweede correctoren	2%	27%	33%	1%	33%	42%

tabel 3[2] Correctoren worden veelal gefaciliteerd door geen extra lessen te hoeven geven in de vrijgekomen uren van examenklassen

Scholen lijken wat te kunnen doen aan de belasting. De ervaren correctiebelasting hangt namelijk positief samen met een aantal aspecten van het correctieproces: de (tevredenheid met de) facilitering en het maken van afspraken over de organisatie van de correctie in schoolverband. Tabel 3 geeft een beeld van de faciliteiten.

Wanneer er binnen de school afspraken zijn gemaakt over de organisatie van de examencorrectie, dan valt de tevredenheid met de facilitering van zowel de eerste als de tweede correctie significant beter uit. Bij afspraken is 36 % van de eerste correctoren en 31 % van de tweede correctoren (zeer) tevreden over de facilitering. Wanneer er geen afspraken zijn gemaakt, is dat respectievelijk 25 en 21 %.

De conclusie uit de examenbrief is dat op scholen tijdig de nodige afspraken gemaakt moeten worden. Daarvoor zijn inmiddels instrumenten ontwikkeld, zoals de 'adviestabel'[4] voor het organiseren van de correctie en de 'checklist faciliteren correctie centraal examens'[5] voor schoolleiders.

Noten

[1] Zie: *https://www.tweedekamer.nl/kamerstukken/brieven_regering/detail?id=2019Z00367&did=2019D00846*
[2] Bron: Enquête correctiepraktijk CSE 2018, SEO Economisch Onderzoek (2018)
[3] Zie de website van *Euclides*
[4] *https://nvvw.nl/examens/adviestabel-opsturen-examenwerk/*
[5] *https://nvvw.nl/wp-content/uploads/2018/12/Tekst-voor-de-checklist-examen-correctie.pdf*

Over de auteur

Henry van Bergen onderhandelt in Zuid-Nederland namens de Federatie van Onderwijsvakorganisaties (waar de NVvW deel van uitmaakt) met werkgevers over cao's, sociale plannen e.d. Samen met de andere vakbonden, VO-raad en OC&W overlegt hij regelmatig over de examencorrectie.
E-mailadres: *henry.vanbergen@fvov.nl*

Aanbieding speciaal voor leraren!

Gratis licentie TI-Nspire™ CX Premium software

Met TI-Nspire™ CX Premium software maakt u lessen interactief en dynamisch. U kunt concepten en handelingen stap voor stap laten zien en leerlingen voor de klas laten presenteren vanaf hun eigen handheld.

GRATIS

Wilt u kennismaken met onze TI-Nspire™ technologie? Vraag dan nu een **licentie TI-Nspire™ CX Premium software** aan. Probeer de technologie op uw computer uit en benut de nieuwe functies die onderzoekend leren mogelijk maken!

education.ti.com/nl/gratislicentie

Kijk voor meer informatie op: **education.ti.com/nederland**

Texas Instruments

©2019 Texas Instruments

Matheonkalender 2019

Vanaf 1 november a.s. kun je je weer inschrijven als deelnemer aan de digitale adventskalender: de *Matheonkalender*. Tijdens de advent (1 december tot en met 24 december) verschijnt er dagelijks op *www.Mathekalender.de/index.php* een uitdagend wiskundevraagstuk. Hier vind je ook alle praktische informatie over deelname, manier van inzenden, te winnen prijzen et cetera. Om in de stemming te komen vast een voorbeeldopgave.

Artwork: Rike Hofmann

Sleeën

Als je het Zuidpool-spoor van Oost naar West oversteekt, passeer je de zes mijlpalen *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en F (in deze volgorde). De afstand van mijlpaal *A* tot *C* is 116 mijl, de afstand van *D* tot *E* is 126 mijl en de afstand van *E* tot *F* is 53 mijl. Vandaag hebben de kleine helpers van de Kerstman Yoda en Zeno hun nieuwe sleeën op het Zuidpool-circuit getest. Beide sleeën liepen de volledige afstand met constante snelheid en Yoda's slee was langzamer dan de slee van Zeno. Yoda reed in één keer van *A* naar *F* over het circuit. Zeno reed eerst van *F* naar *A* en keerde vervolgens terug van *A* naar *F* (zonder tijd te verliezen bij het draaien van de slee op *A*).
Yoda begon in *A* op precies hetzelfde moment als Zeno in *F* begon. Toen Yoda *B* bereikte, bereikte Zeno *E* op zijn weg van *F* naar *A*. Yoda en Zeno ontmoetten elkaar op *C*. Toen Zeno terugreed van *A* naar *F*, haalde hij Yoda in bij mijlpaal *D*.

Wat is de afstand tussen de twee mijlpalen *B* en *E*?

1 Ruwweg 351 mijl.
2 Ruwweg 352 mijl.
3 Ruwweg 353 mijl.
4 Ruwweg 354 mijl.
5 Ruwweg 355 mijl.
6 Ruwweg 356 mijl.
7 Ruwweg 357 mijl.
8 Ruwweg 358 mijl.
9 Ruwweg 359 mijl.
10 Ruwweg 360 mijl.

De oplossing kun je vinden op de website *https ://www.4tu.nl/ami/en/Mathekalender/*

Auteurs

Gerard Woeginger, Hennie ter Morsche
(TU Eindhoven)

Hendrik Straat - Iris Verbruggen

50 jaar Cito, een halve eeuw wiskunde-examens?

Deel 7 Rekenen-wiskunde in de centrale eindtoets

In september 2018 bestond Cito 50 jaar. In dit zevende en laatste artikel in de reeks bespreken Hendrik Straat en Iris Verbruggen de Centrale Eindtoets.

Inleiding

De 'Citotoets', wie kent 'm niet? Cito werd mede opgericht om met een toets aan het eind van de basisschool, leerkrachten een objectief gegeven te bieden voor doorverwijzing naar het vervolgonderwijs.
Hoewel het nog steeds een van Cito's bekendste toetsen is, zeker in het primair onderwijs, bestaat de 'Citotoets' sinds 2015 niet meer. Vanaf schooljaar 2014-2015 is namelijk de wijziging van de wet op het primair onderwijs van kracht waarin is vastgelegd dat voortaan alle leerlingen in groep 8 van het reguliere basisonderwijs verplicht zijn een eindtoets te maken. De overheid stelt daarvoor de Centrale Eindtoets[1] beschikbaar, waarvan de opgaven in constructiegroepen onder leiding van een toetsdeskundige van Cito worden ontwikkeld en die door de vaststellingscommissies van het College voor Toetsen en Examens (CvTE) worden vastgesteld. Naast de Centrale Eindtoets kunnen scholen ook kiezen voor een van de andere eindtoetsen die door marktpartijen worden aangeboden.
Het doel van de Centrale Eindtoets is nog steeds hetzelfde: een betrouwbaar en objectief gegeven bieden naast het schooladvies dat de leerkracht van groep 8 geeft voor het best passende vervolgonderwijs van de leerling. Dit gebeurt door middel van een standaardscore tussen de 501 en 550[1]. Deze score geeft een samenvatting van het prestatieniveau van de leerling op taal en rekenen, waarbij per onderdeel gecorrigeerd wordt voor de moeilijkheid. Voor deze scores is in het verleden gekozen om een associatie met bestaande scores zoals cijfers tussen 1 tot en met 10 of een IQ-score te vermijden.
Zoals in het voortgezet onderwijs een syllabus leidend is voor het ontwikkelen van een examen, zo is er voor een eindtoets een Toetswijzer.[1] In de Toetswijzer is beschreven aan welke (inhoudelijke) eisen een eindtoets moet voldoen. In dit artikel gaan we in op het onderdeel rekenen in de Centrale Eindtoets en op de manier waarop door middel van de Centrale Eindtoets een passend advies voor vervolgonderwijs voor leerlingen in groep 8 bepaald wordt. Daarbij gaan we in op de normeringsmethodiek en het gebruik van doorstroomonderzoek om de adviezen goed te laten aansluiten bij de praktijk.

Rekenen in de Centrale Eindtoets

Rekenen is een belangrijke voorspeller voor prestaties van leerlingen in het voortgezet onderwijs, waar het vak onder andere wordt toegepast bij wiskunde.
In de Centrale Eindtoets krijgen leerlingen zestig opgaven voorgelegd over rekenen-wiskunde zoals dat in het curriculum van het primair onderwijs is aangeboden. In 2018 was er keuze uit een digitale (adaptieve) en een papieren variant van de Centrale Eindtoets. Leerlingen mogen bij de opgaven kladpapier gebruiken. Een rekenmachine is niet toegestaan.
Door de Commissie Meijerink zijn vier domeinen gedefinieerd bij het vak rekenen-wiskunde, namelijk Getallen en bewerkingen, Verhoudingen, Meten en meetkunde en Verbanden. De relatieve verdeling van de opgaven over deze domeinen is vastgelegd in de Toetswijzer, vastgesteld door het College van Toetsen en Examens. Hierna beschrijven we globaal de inhoud van de rekendomeinen op basis van de informatie vanuit de Toetswijzer.[1] Tevens voegen we voorbeelden uit de papieren Centrale Eindtoets 2018 toe, met daarbij een indicatie van de moeilijkheid van de betreffende opgave uitgedrukt in de p-waarde.[2]

Domein Getallen

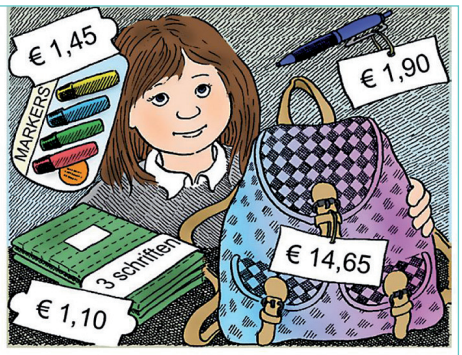
Het domein Getallen heeft betrekking op getallen, getalsrelaties en het uitvoeren van de elementaire bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en combinaties hiervan) met hele getallen, kommagetallen en breuken. Dit doen leerlingen zowel in opgaven met als zonder context. Opgaven waarbij standaardprocedures zoals onder elkaar zetten worden gebruikt en opgaven die met handig rekenen kunnen worden beantwoord, wisselen elkaar af. Ook schattend rekenen komt in dit domein aan de orde, zie figuur 1 en 2.

21 **543 : 6 =**

A 90,2 C 90,5
B 90,3 D 92

figuur 1 Voorbeeld uit domein Getallen, kaal, p = 0,63

1



Suzanne koopt deze schoolspullen.
Hoeveel euro moet zij in totaal betalen?

A € 18 C € 19
B € 18,10 D € 19,10

figuur 2 Voorbeeld uit domein Getallen, met context, p = 0,90

Domein Verhoudingen

In het basisonderwijs gaat het er in het domein Verhoudingen om dat leerlingen leren structuur en samenhang van verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en dat zij er in praktische situaties mee kunnen rekenen. Verhoudingen kunnen beschreven worden in verhoudingstaal, maar soms ook in breukentaal en met procenten. In de Centrale Eindtoets toetsen we in het domein Verhoudingen naast kennis en vaardigheden met betrekking tot verhoudingen, dus ook het kunnen rekenen met breuken en procenten. Rekenen met schaal valt ook onder dit onderdeel. Opgaven kunnen zowel met als zonder context gesteld zijn, zie figuur 3.

3

Hugo is 1,25 m lang. Hij laat een 3D-poppetje van zichzelf maken op schaal.
Hoeveel cm lang wordt het poppetje?

A 0,05 cm C 20 cm
B 5 cm D 25 cm

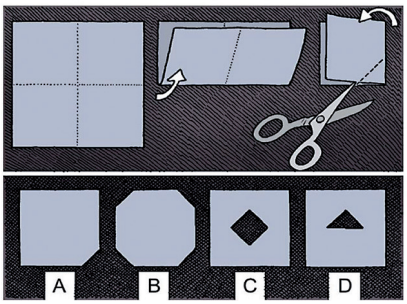
figuur 3 Voorbeeld uit domein Verhoudingen, p = 0,72

> "Voor de scores tussen 501 en 550 is gekozen om een associatie met bestaande scores zoals cijfers tussen 1 tot en met 10 of een IQ-score te vermijden."

Domein Meten en meetkunde

Bij het domein Meten krijgen leerlingen begrip van verschillende grootheden (lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht, tijd, snelheid en geld), leren ze meten met verschillende instrumenten en leren ze meetresultaten af te lezen en te interpreteren. Ook het omzetten van maateenheden en de opbouw en decimale structuur van het metrieke stelsel vallen hieronder. De Centrale Eindtoets bevat zowel opgaven waarbij leerlingen betekenis moeten geven aan maten, opgaven waarin ze maten moeten herleiden en opgaven waarbij leerlingen kennis over maten moeten toepassen door middel van een berekening in een context, zie figuur 4.
Bij meetkunde ligt de nadruk op het beschrijven van en het greep krijgen op ruimtelijke aspecten van de werkelijkheid. Meetkunde komt slechts beperkt aan de orde in het curriculum in het primair onderwijs en dus ook in de Centrale Eindtoets.

12 Li vouwt een vouwblaadje 2 keer dubbel. Daarna knipt hij een hoek eraf, zoals in het plaatje.
Hoe ziet het opengevouwen vouwblaadje er dan uit?

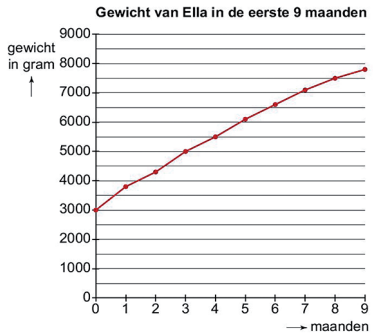


figuur 4 Voorbeeld uit domein Meten en meetkunde, p = 0,84

Domein Verbanden

In het domein Verbanden leren leerlingen tabellen, diagrammen en grafieken of een combinatie hiervan aflezen en interpreteren. Ook leren zij informatie weer te geven in een tabel, diagram of in een tabel, diagram of grafiek een onderliggend verband herkennen en >

23



In de eerste maand is baby Ella 800 gram zwaarder geworden.
Ongeveer hoeveel gram is Ella in de tweede maand zwaarder geworden?

A 500 gram
B 700 gram
C 1300 gram
D 4300 gram

figuur 5 Voorbeeld uit domein Verbanden, p = 0,61

beschrijven of hierbij voorspellingen te doen. Daarbij kunnen zij berekeningen uitvoeren met deze verschillende gegevens. In het domein Verbanden in de Centrale Eindtoets zijn opgaven opgenomen die deze vaardigheden toetsen, zie figuur 5.

Normering

Leerlingen maken rekenopgaven om inzicht te krijgen in hun rekenvaardigheid en om, gecombineerd met de prestatie op de taalopgaven, een advies te krijgen voor best passend vervolgonderwijs. Een belangrijk uitgangspunt is dat gelijke prestaties gelijk gewaardeerd moeten worden. De variant van de Centrale Eindtoets die een leerling maakt (bijvoorbeeld digitaal of papier, of de toets in 2018 of in 2019) mag niet van invloed zijn op de bevindingen over de prestaties van de leerlingen. Een belangrijk aandachtspunt is dat het onmogelijk is, en in het geval van adaptieve toetsen zelfs niet wenselijk is, om iedere toetsvariant exact even moeilijk te laten zijn. De oplossing daarvoor is om de toetsvarianten zo in te richten dat de verschillen in moeilijkheid kunnen worden bepaald, zodat daar rekening mee wordt gehouden in de normering. Een leerling zal bij moeilijke rekenopgaven immers minder opgaven goed beantwoorden dan bij makkelijke rekenopgaven.

Afnamedesign

Het afnamedesign is zo ingericht dat we de verschillen tussen toetsversies goed in beeld kunnen krijgen. In de papieren versie van de Centrale Eindtoets maakt een klein aantal scholen een aangepaste variant van de Centrale Eindtoets. Deze aangepaste variant bestaat uit een mix van reguliere opgaven en zogenaamde ankeropgaven. De ankeropgaven worden jaarlijks opnieuw gebruikt en samen met de reguliere opgaven van de nieuwe Centrale Eindtoets afgenomen. Om te voorkomen dat de leerlingen in volgende schooljaren met de ankeropgaven kunnen oefenen, worden de opgavenboekjes na afloop van de afname teruggestuurd door de scholen.
In bovenstaand voorbeeld gaat het over de vergelijking van Centrale Eindtoetsen in verschillende schooljaren. Voor andere situaties, o.a. bij digitale toetsen, gebruiken we soortgelijke oplossingen om verschillen in beeld te krijgen.

Door dit design is het mogelijk om te onderzoeken of de leerlingen in het ene schooljaar even goed presteren op de ankeropgaven als in het andere schooljaar. Als de leerlingen in verschillende schooljaren even goed presteren op de opgaven die hetzelfde zijn gebleven, dan kunnen we een verschil in het aantal goed gemaakte nieuwe opgaven toeschrijven aan een verschil in moeilijkheid. Als de leerlingen in het ene schooljaar beter presteren op dezelfde opgaven dan in het andere schooljaar, dan moet daarmee rekening worden gehouden bij het bepalen van de verschillen in moeilijkheid. Op basis van dergelijke constateringen equivaleren we de prestaties op verschillende toetsversies. Als bijvoorbeeld de rekenopgaven in de Centrale Eindtoets in 2019 iets makkelijker waren dan de rekenopgaven in de Centrale Eindtoets in 2018, dan kunnen we door de equivalering de volgende uitspraak doen: een leerling die 54 van de 85 opgaven goed (63,5% correct) heeft op de papieren Centrale Eindtoets in 2018, zou een verwacht aantal van 40 van de 60 opgaven goed (66,7% correct) hebben als de leerling de papieren Centrale Eindtoets in 2019[3] had gemaakt. Zo zorgen wij ervoor dat werkelijke stijgingen in het prestatieniveau van de leerlingpopulatie worden gehonoreerd en dat leerlingen geen nadeel ondervinden als zij toevallig een moeilijkere toetsversie hebben gemaakt.

Doorstroomonderzoek

De gegeven adviezen aan leerlingen voor best passend vervolgonderwijs worden jaarlijks gevalideerd in een zogenaamd doorstroomonderzoek. Daarin worden geanonimiseerde gegevens ter beschikking gesteld die informatie geven over het behaalde resultaat op de Centrale Eindtoets en het vervolgonderwijs van de leerlingen in de eerste drie jaar van het voortgezet onderwijs. We constateren dan bijvoorbeeld dat van alle leerlingen met een standaardscore van 539 op de Centrale Eindtoets in 2015 in leerjaar 3 van het voortgezet onderwijs 30% op het vmbo-gt is terechtgekomen, 50% op het havo en 20% op een ander schooltype. Daarom geven wij bij een standaardscore van 539 op de Centrale Eindtoets de leerling het advies voor vmbo-gt/havo, omdat deze leerlingen het meest waarschijnlijk in een van die twee schooltypen terecht zullen komen. Het doorstroomonderzoek is een empirische validatie van de

gegeven adviezen en door een goede equivalering kunnen we erop vertrouwen dat ook in opvolgende Centrale Eindtoetsen het advies vmbo-gt/havo een passend advies is voor leerlingen die een standaardscore van 539 gerapporteerd krijgen. Om de cirkel rond te maken, wordt deze bewering drie jaar later onderzocht. Voorbeelden van uitkomsten van doorstroomonderzoek zijn recent gepubliceerd door het CPB[4] en Lek en Van der Schoot[5].

Tot slot

Dit is het laatste artikel in de reeks over wiskunde-examens in Euclides. Met deze blik op de Centrale Eindtoets die in opdracht van het College voor Toetsen en Examens wordt gemaakt sluiten wij deze serie af. De werkwijzen en ontwikkelingen bij de centrale examens en Centrale Eindtoets kennen veel gelijkenissen. Dat is natuurlijk niet verrassend, aangezien deze producten tot stand komen op basis van kennis over toetsing en examinering die Cito in de laatste vijftig jaar heeft opgedaan in een steeds veranderend onderwijsveld. Het onderwijs blijft zich ontwikkelen en Cito kan daarbij niet achterblijven. Wij zijn voortdurend bezig met onderzoeken en ontwikkelingen om onze producten beter en toekomstbestendig te maken, zodat ook in de toekomst leerlingen in staat zijn om hun eigen potentieel te laten zien.

Noot van de redactie

In de examenspecial (*Euclides* 95-1) zijn bij een aantal examens afbeeldingen in kleur opgenomen, een eigen initiatief van onze beeldredactie. Cito-medewerkers merkten terecht op dat hiermee een verkeerd beeld wordt geschetst. De examens die naar de scholen gaan zijn nog steeds zwart-wit.

Noten

[1] *CvTE (2015). Toetswijzer bij de Centrale Eindtoets PO taal en rekenen. Zie https://www.cvte.nl/documenten/publicaties/2015/08/01/toetswijzer-bij-de-centrale-eindtoets-po-taal-en-rekenen*

[2] De gebruikte p-waarde betreft de geobserveerde waarde in de afname van de papieren Centrale Eindtoets 2018. Deze waarde geeft informatie over de moeilijkheid van deze opgave in het deel van de populatie groep 8 leerlingen die deze toets heeft gemaakt.

[3] In 2019 is de Centrale Eindtoets verkort. Daardoor zijn er 60 in plaats van 85 rekenopgaven afgenomen.

[4] Swart, L., Van den Berge, W. & Visser, D. (2019). De waarde van eindtoetsen in het primair onderwijs. Zie *https://www.cpb.nl/sites/default/files/omnidownload/CPB-policy-brief-2019-03-de-waarde-van-eindtoetsen.pdf*

[5] Lek, K. & Van der Schoot, R. (2019). Wie weet het beter, de docent of de centrale eindtoets? *De Psycholoog, 54*(4), 10-21.

Over de auteurs

De auteurs zijn beiden werkzaam bij Cito. Hendrik Straat is wetenschappelijk onderzoeker en Iris Verbruggen is toetsdeskundige. E-mailadressen: *Hendrik.straat@cito.nl* en *Iris.verbruggen@cito.nl*

Mededeling

Pythagoras zoekt nieuwe redacteuren!

PYTHAGORAS
Wiskundetijdschrift voor jongeren

Al bijna 60 jaar is *Pythagoras* het tijdschrift dat jongeren laat zien hoe mooi en divers wiskunde kan zijn. Wil je leerlingen graag laten zien dat er méér is dan de wiskunde die ze kennen van school? Vind je het leuk om na te denken over hoe je wiskunde uitdagend en begrijpelijk kunt presenteren? Kun je enthousiast schrijven over wiskundige stellingen, afleidingen en toepassingen? Ontwikkel je graag wiskundige puzzels, breinbrekers en vraagstukken?

Minstens één keer ja geantwoord? Help ons mee de wiskunde te promoten en kom in de redactie van *Pythagoras*!
Neem contact op met Roosmarij Vanhommerig (*hoofdredacteur@pyth.eu*).

Jeanine Daems

Wortels van de wiskunde

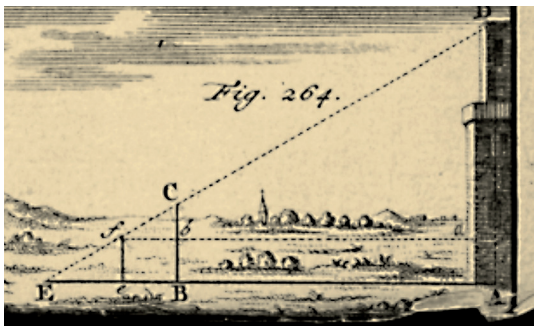
15: Meten

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek[1], de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: hoogtes en afstanden meten met behulp van gelijkvormigheid.

Meten

Een van de oudste toepassingen van de wiskunde is het meten. In alle oude culturen vinden we meetinstrumenten en methodes. Van Thales van Milete (rond 600 v. Chr.), een grote naam uit de Griekse beschaving, wordt bijvoorbeeld gezegd dat hij in Egypte de hoogtes van de piramides heeft bepaald door hun schaduw te meten op het moment dat zijn eigen schaduw even lang was als hijzelf.
In de zeventiende eeuw ontstond er in Nederland meer behoefte aan wiskundige rekenmethodes, aan betere instrumenten en aan betrouwbare kaarten, bijvoorbeeld vanwege troepenverplaatsingen in de Tachtigjarige Oorlog. Vanaf 1600 verschenen er dan ook diverse landmeetboeken in het Nederlands[5]. Hieronder bespreken we kleine stukjes uit twee boeken uit de zeventiende en achttiende eeuw.

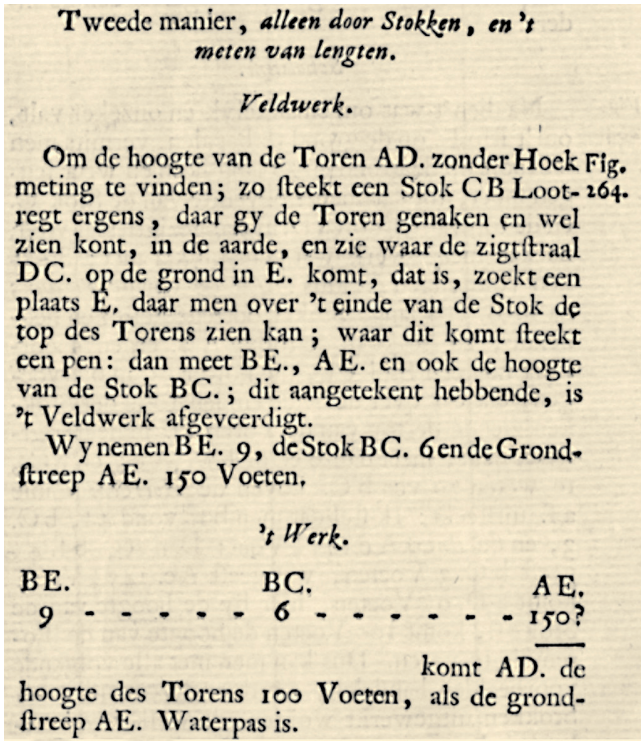
De hoogte van een hoog gebouw



figuur 1

Hoe meet je de hoogte van een hoog gebouw? Dat kan tamelijk eenvoudig met een stok en een meetlint, mits je naar het gebouw kunt toelopen. Je zet de stok rechtop in de grond. Daarna zoek je het punt op de grond waar je je oog moet leggen om op één lijn het bovenpunt van de stok en het hoogste punt van het gebouw te kunnen zien. Vervolgens meet je de afstand van het oog naar de onderkant van de stok en de afstand van het oog naar het gebouw. Met gelijkvormige driehoeken kun je dan de hoogte van het gebouw bepalen. In figuur 1 zie je het gebeuren, waarbij de stok in *BC* staat en het oog in *E*.

Deze afbeelding staat in een herdruk uit 1744 van een boek van Johannes Morgenster uit het begin van de achttiende eeuw: *Werkdadige meetkonst, tonende klaar en beknopt hoe dat al 't gene een ingenieur en landmeter te meten voorvallen kan, wiskonstig met en zonder hoekmeting*[2]. Morgenster legt in figuur 2 precies uit wat er gebeurt.



Tweede manier, *alleen door Stokken, en 't meten van lengten.*

Veldwerk.

Om de hoogte van de Toren AD. zonder Hoek meting te vinden; zo ſteekt een Stok CB Loot-regt ergens, daar gy de Toren genaken en wel zien kont, in de aarde, en zie waar de zigtſtraal DC. op de grond in E. komt, dat is, zoekt een plaats E, daar men over 't einde van de Stok de top des Torens zien kan; waar dit komt ſteekt een pen: dan meet BE., AE. en ook de hoogte van de Stok BC.; dit aangetekent hebbende, is 't Veldwerk afgeveerdigt. Fig. 264.

Wy nemen BE. 9, de Stok BC. 6 en de Grondſtreep AE. 150 Voeten.

't Werk.

BE.	BC.	AE.
9	6	150?

komt AD. de hoogte des Torens 100 Voeten, als de grondſtreep AE. Waterpas is.

figuur 2

Ook in de tekst staan interessante dingen waar je het met leerlingen over zou kunnen hebben: wat zijn voeten? (Over oude maten kun je meer lezen in schets 6 van *Wortels van de wiskunde*[1]). Wat betekent waterpas? Waarom moet de stok loodrecht in de grond staan? Hoe komt hij aan die 100 voeten als eindantwoord?
Deze afbeelding (waarbij de punten *e* en *f* dus nog niet nodig zijn) en deze aanpak geven een echte toepassing van gelijkvormige driehoeken, zeer geschikt voor in de onderbouw. Je kunt met dit idee leerlingen het schoolplein op sturen met een stok en een meetlint en ze vragen te bepalen hoe hoog het schoolgebouw is. Dat is leuk, haalbaar, buiten en actief, en het geeft echt betekenis aan het begrip gelijkvormigheid.
In de afbeelding van Morgenster zie je wel meteen al een complicerende factor: je moet de afstand tot het punt recht onder het hoogste punt kunnen bepalen, in het plaatje is dat punt *A*, en soms zal dat punt binnen het gebouw liggen. Soms ook kun je er helemaal niet naartoe lopen, bijvoorbeeld omdat er een moeras of gracht in de weg ligt. Op dat probleem komen we verderop terug. Bij een modern schoolgebouw zul je dat probleem meestal niet tegenkomen.
Waarom staan de punten *e* en *f* nog in dit plaatje? Dat blijkt uit de tekst een klein stukje verderop, zie figuur 3.

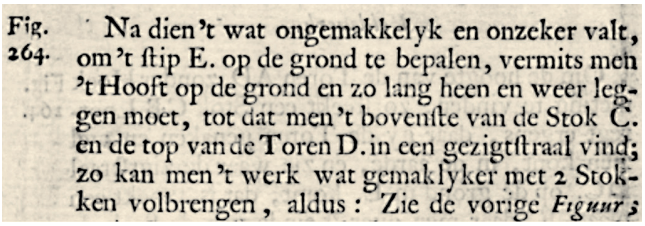


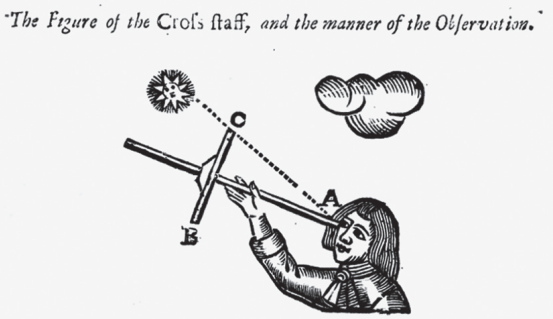
Fig. 264. Na dien't wat ongemakkelyk en onzeker valt, om't ſtip E. op de grond te bepalen, vermits men 't Hooft op de grond en zo lang heen en weer leggen moet, tot dat men't bovenſte van de Stok C. en de top van de Toren D. in een gezigtſtraal vind; zo kan men't werk wat gemaklyker met 2 Stokken volbrengen, aldus: Zie de vorige Figuur;

figuur 3

Oftewel: als je het wat onhandig vindt om net zo lang met je hoofd over de grond te bewegen tot je punt *E* gevonden hebt, kun je ook een tweede, kortere stok erbij gebruiken. Die plaats je dan zoals in de afbeelding te zien is bij *ef*: de kijklijn *CD* moet door *f* gaan, je kunt *bC* en *fb* = *eB* meten en *eA* ook, en dan gebruik je dat driehoeken *fbC* en *faD* gelijkvormig zijn, waardoor *Da* en dus ook *DA* te berekenen zijn.

De jakobsstaf

Een beroemd instrument om hoeken mee te meten is de jakobsstaf, het stamt uit de veertiende eeuw. De jakobsstaf werd vooral veel gebruikt om de hoogte van een ster te meten ten opzichte van de horizon, dan meet je dus de hoek. De jakobsstaf bestaat uit een langere stok die je voor je oog houdt, en een dwarslat (de vaan) die daar loodrecht op staat en die je over de langere stok op en neer kunt schuiven. Door de vaan zo te houden dat je langs de onderkant precies de horizon ziet en langs de bovenkant de ster in kwestie, kun je de hoogte van de ster op de schaalverdeling van de meetlat aflezen. Tot ver in de achttiende eeuw werd de jakobsstaf gebruikt.
De jakobsstaf kan ook gebruikt worden om de hoogte van een gebouw te meten als je weet hoe ver je er vandaan bent: als je de hoek weet en de afstand tot het gebouw, dan is die hoogte eenvoudig uit te rekenen. Dan werkt de jakobsstaf dus ongeveer hetzelfde als die stok van zojuist: via gelijkvormigheid.

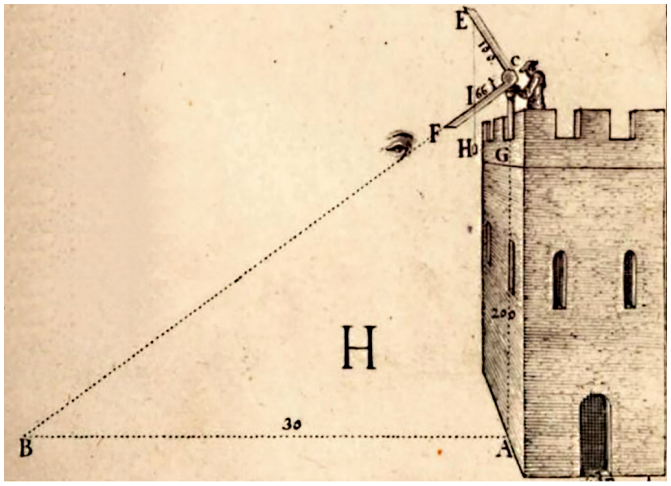


figuur 4[3]

In een van de cursussen 'Geschiedenis van de wiskunde' waar ik bij betrokken ben laten we studenten zelf een jakobsstaf bouwen en daarmee de hoogte van de Domtoren bepalen. Dat is een opdracht die de praktische kant van de wiskunde laat ervaren en die studenten vaak noemen als een van de leukste onderdelen van de cursus. Een van de deelnemers vertelde laatst dat je er wel rekening mee moet houden dat je op zo'n locatie de helft van de tijd aan omstanders moet uitleggen wat je aan het doen bent...

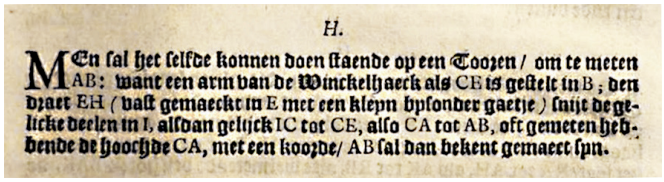
De afstand tot een hoog gebouw

Soms wil je niet weten hoe hoog een gebouw is, maar bijvoorbeeld hoe ver weg iets is wat je kunt zien als je op een hoog gebouw staat. Liefst zonder er eerst heen te moeten gaan, denk aan een naderende vijand.
Een mooi voorbeeld van hoe gelijkvormige driehoeken gebruikt kunnen worden om dergelijke afstanden te meten zien we in een boek van Samuel Marolois (1572 - 1627). Hij was een Nederlandse wiskundige en ingenieur. Hij publiceerde rond 1613 een Franstalig boek over meetkunde en fortificatie, dat later gebundeld werd met een ander werk. In 1628 verscheen een versie in het Nederlands: *Opera mathematica ofte wis-konstige wercken: handelende van de geometrie, perspective, architecture en fortificatie*[4]. >



figuur 5

Bovenop de toren staat een mannetje met een meetinstrument. Er staan ook getallen bij de figuur en in de figuur staat een oog getekend. De tekst die bij deze figuur hoort is deze, zie figuur 6.



H.

Men sal het selfde konnen doen staende op een Toozen / om te meten AB: want een arm van de Winckelhaeck als CB is gestelt in B; den draet EH (vast gemaeckt in E met een kleyn bysonder gaetje) snijt de gelicke deelen in I, alsdan gelijck IC tot CE, also CA tot AB, oft gemeten hebbende de hoochde CA, met een koozde/ AB sal dan bekent gemaect syn.

figuur 6

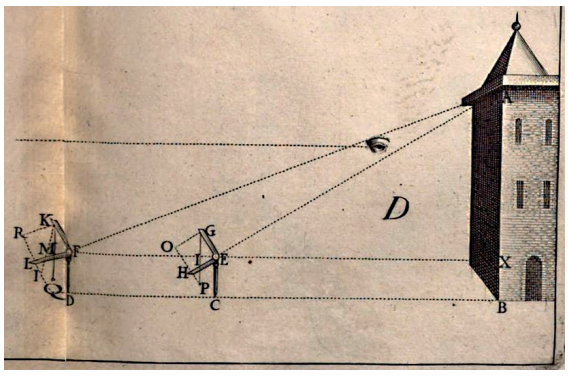
Dit is misschien wat lastig te lezen, er staat: 'Men zal het selfde konnen doen staende op een Tooren / om te meten AB: want een arm van de Winckelhaeck als CB is gestelt in B; den draet EH (vast gemaeckt in E met een kleyn bysonder gaetje) snijt de gelicke deelen in I, alsdan gelijck IC tot CE, also CA tot AB, oft gemeten hebbende de hooghde CA, met een koorde / AB sal dan bekent gemaect zijn.'

Ook in deze tekst kun je al genoeg vinden om het over te hebben: wat is een 'winckelhaeck'? Wat moet er blijkbaar bepaald worden? Wat kunnen we meten en wat wil het mannetje op de toren graag weten, denk je? Op welk principe is dit meetinstrument gebaseerd?
Als je naar het plaatje kijkt, zie je dat de genoemde winkelhaak het instrument is dat bovenaan de toren staat. Hoek *FCE* is dus recht. Vanuit *E* hangt een touwtje recht omlaag (letterlijk loodrecht, door het gewichtje dat er aanhangt). Hierdoor ontstaan er gelijkvormige driehoeken: driehoeken *ECI* en *BAC* hebben de overstaande en de rechte hoek gemeen. In de winkelhaak zijn de lengtes *CE* en *CI* uiteraard te meten, als je dan ook de hoogte van de toren al weet (en hoe je die kunt meten hebben we net gezien), dan kun je afstand *AB* bepalen. De afmetingen die in de afbeelding van Marolois gebruikt zijn, zijn $CI = 66\frac{2}{3}$ deelen, $CE = 100$ deelen, $AC = 20$ voeten en $AB = 30$ voeten. (Let op: in de afbeelding staat er naast de 20 nog een rondje, maar dat is geen nul.) Je kunt controleren dat in dit geval de vijand in punt *B* de toren inderdaad op een afstand van 30 voeten genaderd is! Merk ook op dat de eenheid die voor de zijden van driehoek *ECI* gebruikt wordt niet dezelfde hoeft te zijn als die in driehoek *BAC*, omdat het alleen over de verhoudingen gaat.

> "Deze twee bronnen laten het nut van gelijkvormige driehoeken goed zien"

Een hoog gebouw waar je niet bij kunt komen

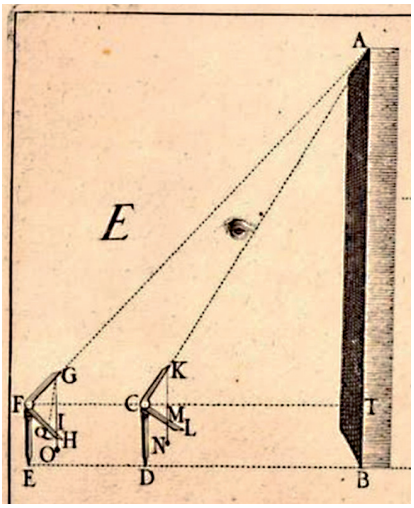
Een stukje verderop bespreekt Marolois het volgende probleem: het bepalen van de hoogte van een gebouw waar je niet bij kunt komen. Of, zoals hij zelf schrijft: '*Soo B onbeganckelijck ende onzichtbaer is*'. Deze bron is meer geschikt voor de bovenbouw, voornamelijk omdat het net wat meer algebraïsch gereken met verhoudingen vergt. Bij die situatie horen de volgende afbeeldingen. De instrumenten die je ziet in figuur 7 en figuur 8, zijn dezelfde winkelhaak als uit het vorige probleem.



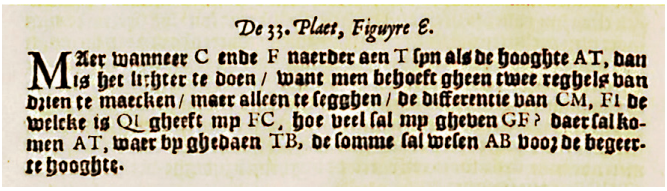
figuur 7

De eerste interessante vraag is natuurlijk: waarom zijn er twee afbeeldingen nodig? En waarom staan de instrumenten in figuur 7 andersom ten opzichte van die in figuur 8? Als je goed kijkt kun je daar wel achter komen: van die winkelhaak zijn de benen even lang, dus als het

instrument te ver van de toren af staat, valt het koordje met het gewichtje eraan niet meer langs het been van de winkelhaak maar daarbuiten. Dan kun je de lengte dus niet meer meten.



figuur 8


De 33. Plaet, Figuyre E.

Maer wanneer C ende F naerder aen T syn als de hooghte AT, dan is het lichter te doen / want men behoeft gheen twee reghels van drien te maecken / maer alleen te segghen / de differentie van CM, FI de welcke is QI gheeft my FC, hoe veel sal my gheven GF? daersal komen AT, waer by ghedaen TB, de somme sal wesen AB voor de begeerte hooghte.

figuur 9

De tekst van figuur 9 zegt:
'Maer wanneer C ende F naerder aen T syn alsde hooghte AT, dan is het lichter te doen / want men behoeft gheen twee reghels van drien te maecken / maer alleen te segghen/ de differentie van CM, FI de welcke is QI gheeft my FC, hoe veel zal my gheven GF? daersal komen AT, waer by ghedaen TB, de somme sal wesen AB voor de begeerte hooghte.'

De regel van drie is een oude manier om als twee paren van grootheden een bepaalde verhouding hebben en er zijn drie gegevens bekend, het vierde uit te rekenen. Bijvoorbeeld: 300 gram kaas kost 4,50 euro, hoeveel kost 500 gram? Nu zouden we een dergelijke berekening bijvoorbeeld met een verhoudingstabel doen.
We gaan nu onderzoeken waarom de bewering van Marolois hier klopt. Zijn bewering zegt iets over een verband tussen de 'differentie van *CM*, *FI*' en *FC*, en iets over *FG*, waarna *AT* blijkbaar bepaald kan worden.
Een mogelijke opdracht voor leerlingen zou hier kunnen zijn: leg uit waarom *CM*, *FI*, *FC* en *FG* allemaal bekend zijn. Probeer met gelijkvormigheid een relatie te vinden tussen *CM* en *AT* en ook tussen *FI* en *AT*. Leg met behulp van berekeningen uit wat het verschil van *CM* en *FI* te maken heeft met *FC* en waarom je hiermee inderdaad de hoogte van *AT* kunt bepalen.
Hier krijgen we het algebraïsche werk met verhoudingen. De gelijkvormige driehoeken zijn nog wel eenvoudig te vinden, als je F-hoeken kent tenminste: $\angle CKM = \angle CAT$ omdat het touwtje evenwijdig loopt aan *AT*. Bovendien hebben de driehoeken ook weer een rechte hoek gemeen, dus ΔCKM is gelijkvormig met ΔTAC.
Dus geldt dat $CM/CK = TC/TA$. Uit het analoge argument bij de linker winkelhaak volgt dat $FI/FG = TF/TA$. Merk op dat ook geldt dat $CK = FG$, dat is namelijk de lengte van het been van de winkelhaak. Kortom:
$CM/FG - FI/FG = TC/TA - TF/TA$, dus
$(CM - FI)/FG = FC/TA$.
In deze uitdrukking is alles te meten, behalve *TA*, dus *TA* kan nu inderdaad berekend worden. En de hoogte *TB* is hetzelfde als de hoogte van de stok waar het instrument op staat, dus als we die bij *TA* optellen is *TB* bepaald.

Conclusie

Deze bronnen over praktische wiskunde geven mooie voorbeelden van hoe wiskunde in het landmeten gebruikt kan worden. Wat ik persoonlijk heel leuk vind aan juist deze twee bronnen is dat ze het nut van gelijkvormige driehoeken zo goed laten zien. Ook overstaande hoeken en F-hoeken komen langs. De bronnen zijn eigenlijk direct geschikt als basis van een praktische opdracht. En het is ook best verrassend dat je met zulke eenvoudige middelen de hoogte kunt bepalen van een gebouw, zelfs als je daar niet eens bij kunt komen!

Voor wie meer wil lezen: in het proefschrift van Iris van Gulik-Gulikers[5] wordt uitgebreid een onderzoek beschreven naar het gebruiken van het 17e-eeuwse landmeten in de onderwijspraktijk. Ook is daarin een overzicht te vinden van de literatuur over het gebruik en de waarde van het inzetten van geschiedenis bij het leren van meetkunde. >

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *jeanine.daems@hu.nl*

THE FUTURE IS HERE

HP Prime

Grafische Rekenmachine

Voordelen van de HP Prime

- Touchscreen; nooit meer gedoe met het instellen van de window
- Supersnelle processor; nooit meer wachten tot een grafiek getekend is
- Ingebouwde handleiding; je kunt direct aan de slag!

En de prijs?
Die is hetzelfde als die van de concurrent!

Kom langs bij onze stand tijdens de **jaarvergadering van de NVvW** en maak kans op mooie prijzen!

www.hp-prime.nl

Noten

[1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.Q. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon.

[2] Johannes Morgenster (1744). *Werkdadige meetkonst, tonende klaar en beknopt hoe dat al 't gene een ingenieur en landmeter te meten voorvallen kan, wiskonstig met en zonder hoekmeting*. Herdruk bewerkt door Johann Hermann Knoop. Leeuwarden: Abraham Ferwerda.
Te vinden via Google Books: *https://books.google.nl/books?id=c4k1AAAAMAAJ*

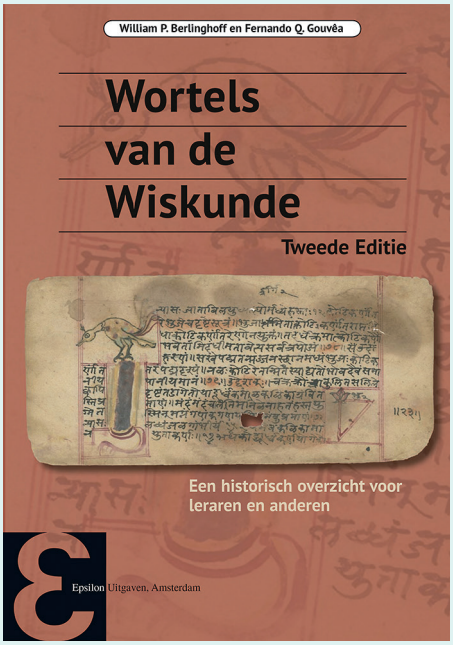
[3] Seller, J. (1730). *Practical Navigation*. Londen: Thomas Page and William Mount, p. 135. Te vinden via Google Books: *https://books.google.nl/books?id=EUBKY5HHGRcC*

[4] Marolois, S. (1628). *Opera mathematica ofte wis-konstige wercken: handelende van de geometrie, perspective, architecture en fortificatie*. Bewerkt door Albert Girard. Amsterdam: Johannes Janssonius. Te vinden via Google Books: *https://books.google.nl/books?id=OJKeUG88E5UC*

[5] Iris van Gulik-Gulikers (2005). *Meetkunde opnieuw uitgevonden*. Proefschrift.

Verschenen

Nieuwe editie van *Wortels van de wiskunde*



Er is een nieuwe editie van *Wortels van de wiskunde* verschenen bij Epsilon Uitgaven. Het origineel, *Math through the ages* van W. Berlinghoff en F. Gouvêa, is namelijk uitgebreid met vijf extra hoofdstukken ('schetsen') over respectievelijk tangens, logaritmen, kegelsneden, irrationale getallen en de afgeleide. Daarnaast zijn er in de rest van het boek op diverse plaatsen aanpassingen en aanvullingen gedaan, op basis van nieuwe kennis over de geschiedenis van de wiskunde. Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems hebben hun eerder verschenen vertaling aangepast aan deze nieuwe editie. Voor de herkenbaarheid is het boek voorzien van een nieuwe kaft, met daarop een fragment uit de *Lilavati* (een tekst over wiskunde uit de twaalfde eeuw).

Gedifferentieerd lesgeven

met bettermarks wiskunde

Haal het beste uit elke leerling en kies voor gedifferentieerd lesgeven met bettermarks. De methode combineert de voordelen van digitaal met het werken op papier. Door het individuele leerproces van de leerling centraal te stellen, worden hiaten in voorkennis zichtbaar en ontvangt de leerling gerichte feedback bij elke opgave. De differentiatiemogelijkheden in vraagstelling, niveau en leerjaar in combinatie met gamification maken bettermarks boeiend en leuk!

- Hiatenanalyse
- Differentiatie
- Inzicht

Meer weten?

Benieuwd wat bettermarks voor uw wiskunde - of rekenlessen kan betekenen? Vraag vrijblijvend een presentatie aan via support@bettermarks.nl of **www.bettermarks.nl**

Wiskunde VMBO leerjaar 1 - 4 | HAVO/VWO leerjaar 1 - 3 | Rekenen 1F, 2F en 3F

Jan Beuving

De Hoekstreep

Foutmarges

Mensen vragen mij vaak wat een wiskundige kenmerkt. Volgens mij is een wiskundige iemand die dingen wil begrijpen. Zo wil ik bijvoorbeeld ook snappen hoe fouten worden gemaakt. Een verklaring van een fout kan namelijk zo logisch zijn, dat die logica weer bevredigend is.
Mijn vorige *Euclides*-column bijvoorbeeld had in de laatste alinea de volgende zin: 'Ik had alleen maar postzegels, die per stuk meer als drie keer zo duur zijn dan een sigaret.' Dat is twee keer fout: het had moeten zijn: 'meer *dan* drie keer zo duur zijn *als* een sigaret'. (Het was geen poging om het adagium 'min en min is plus' in de praktijk te brengen. Bovendien klopt dat adagium niet, het moet natuurlijk zijn: 'min keer min is plus'. Behalve dan in de zin 'een zeemeermin zwom voorbij een andere zeemeer**min en min**derde vaart, zodat ze met z'n tweeën waren', daar leidt min en min tot plus.)
Aan de sigaretten(on)zin lag een vrolijk misverstand ten grondslag. Die laatste zin (de goede versie) stond in de ingeleverde column, maar iemand ter redactie had van de 'als' een 'dan' gemaakt: drie keer zo duur dan een sigaret. Geen gekke gedachte. De regel is dat na een vergrotende trap 'dan' volgt: deze fout is curieuzer *dan* die. Is een sigaret drie keer zo duur dan is die sigaret dus duurder, en hier hebben we en passant een zin waarin 'drie keer zo duur dan' gewoon kan.
Ik mailde toen ik de drukproef zag dat die 'dan' in de laatste alinea in 'als' veranderd moest worden, en toen heeft iemand – strikt genomen daarbij de opdracht uitvoerend – de *eerste* dan in die alinea in als veranderd. Het resultaat was het gewraakte zinsdeel. Maar: als je onderweg naar het vliegveld nog even bij de benzinepomp stopt om een sigaret te roken en een broodje te eten, waarna je in een net ontstane file terechtkomt, je vlucht mist, en voor veel geld een overboeking moet doen, kun je de situatie krijgen dat je verzucht: Het voelt niet alsof ik één keer spijt heb van die tussenstop. **Meer als drie keer. Zo duur zijn dan een sigaret** en een broodje. Zo zie je maar: het zinsdeel klopte wel, maar stond in het verkeerde stukje.

Op deze manier speur ik voortdurend naar de verklaring voor afwijkingen. In mijn woonplaats hangt bijvoorbeeld de verkeersbordencombinatie in figuur 1. Wonderlijk gebruik van de aanhalingstekens! Maar dat komt natuurlijk door deze mailwisseling:

- 'Zouden jullie op de Van Reenenweg een verboden-te-parkerenbord kunnen hangen aan de rechterkant? En dan daaronder graag zo'n bordje met "uitgezonderd parkeervakken".'
- 'Komt voor elkaar!'

Figuur 1

Evenzo kreeg ik laatst een bericht waar het woord 'woonkMer' stond. Logisch te verklaren: iemand die bij het typen op een smartphone of tablet de shift in plaats van de a heeft geraakt. (Het is goed dat Annie M.G. Schmidt *Pluk van de Petteflet* niet op een tablet schreef, want van kakkerlak Zaza was hoogstens de helft overgebleven.) Een soortgelijk voorval maakte ik mee toen vroeger in onze kerk in de liturgie een afgedrukte versregel eindigde op 'zon en maandag' in plaats van 'zon en maan'. Hier had Microsoft Word zich overijverig getoond toen na 'maan' op enter was gedrukt. Ik begreep het meteen, maar mevrouw De Nooijer van 84 schudde haar hoofd om zoveel onzorgvuldigheid. Conclusie: dan je een fout snapt, als kun je er toch mee leven. En kun je – net als cardiologen soms – uitroepen: het klopt verkeerd!

OVER DE AUTEUR

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier.
Hij toert vanaf september weer door het land met zijn nieuwe voorstelling Rotatie. Kijk voor de speellijst op www.janbeuving.nl. E-mailadres: *janbeuving@gmail.com*

Rogier Bos

Onderzoekend wiskunde leren

Afgelopen drie jaar liep het MERIA-project over onderzoekend wiskunde leren, een door de EU gefinancierde samenwerking van onderzoekers en docenten uit Denemarken, Kroatië, Slovenië en Nederland. Carolien Boss-Reus van het Utrechts Stedelijk Gymnasium en Margot Rijnierse van Cartesius 2 namen deel aan het project en werden geïnterviewd. Rogier Bos bespreekt de uitkomsten van het project.

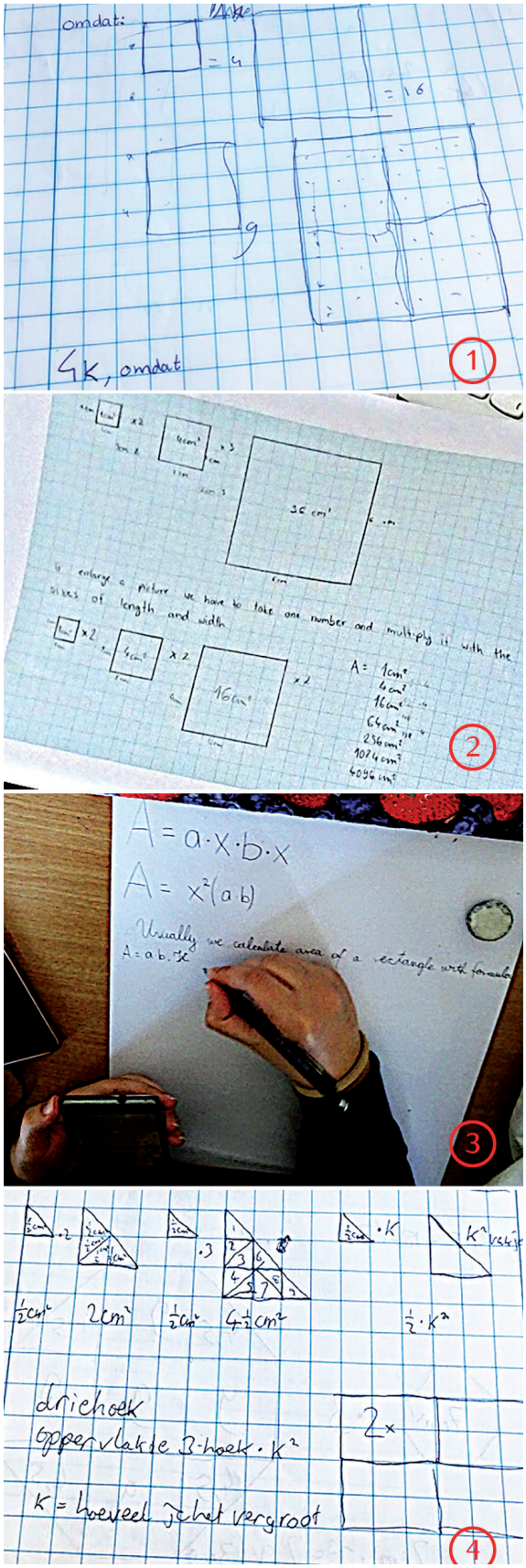
Inleiding

Wiskundeonderzoek begin je meestal vanuit een probleem of onderzoekssituatie, of soms slechts vanuit observaties waaruit je een probleem of interessante situatie probeert af te leiden. Vervolgens zijn er talloze vaardigheden nodig om het probleem aan te pakken, zoals vereenvoudigen, ordenen en structureren, visualiseren, redeneren en experimenteren. Tot slot deel je je bevindingen met anderen. Je kunt je afvragen waar het goed voor is deze processen een rol te geven in het wiskundeonderwijs.
Carolien: 'Ik denk dat je een betere probleemoplosser wordt als je onderzoekend leert. Uiteindelijk ga je de wereld in waar ook niet alles voorgekauwd en gestructureerd is. Maar nog niet alle leerlingen realiseren zich dit.' Sommige docenten vinden het belangrijk dat leerlingen leren onderzoeken en kennismaken met bovengenoemde vaardigheden. Anderen zien dat je bovendien beter leert door onderzoekend te leren.
Een voorbeeld: één van de lessen die we getest hebben gaat over vergroting bij meetkunde. Het probleem dat de tweedeklassers werd voorgelegd was: als ik een vlakke figuur k keer zo groot maak, hoeveel groter wordt dan het oppervlak? Normaal leggen we leerlingen zeer didactisch en met geduld uit dat de evenredigheidsfactor k^2 is. Nu moesten de leerlingen het doen met een opfrisser over vergroting en dan: aan de slag. Werkt dat? Het antwoord is: niet zomaar. In het MERIA-project besteedden we veel aandacht aan de opbouw van de les en de keuze van probleemsituatie. Beide factoren blijken van cruciaal belang te zijn voor een geslaagde onderzoekend-leren-les.

Opbouw van een onderzoekend-leren-les

Meestal hebben leerlingen en docenten de onuitgesproken afspraak dat de docent uitleg geeft, zodra dat nodig is. Een grote uitdaging bij onderzoekend leren is dit ongeschreven contract te doorbreken. Dit is in de jaren '70 en '80 van de vorige eeuw beschreven door wiskundeonderwijsonderzoeker Guy Brousseau in zijn theorie van didactische situaties. Hij benadrukte dat als leerlingen aan het werk gaan, de docent de gelegenheid moet gebruiken om leerlingen te observeren, in plaats van hulp en hints aan te bieden. Deze zogeheten *a-didactische* houding van de docent geeft leerlingen de ruimte om met een aanpak te komen die voor hen betekenisvol is.
Margot: 'Dat je stil bent als de leerlingen aan het werk gaan is misschien een klein ding, maar het heeft mij heel erg geholpen.'
Een andere grote uitdaging is om de verschillende benaderingen door leerlingen te waarderen en te laten bijdragen aan het leerresultaat van de les. In navolging van Brousseau reserveerden we hier in de lesplannen van het project veel tijd voor, in drie achtereenvolgende fasen. Eerst presenteert een aantal groepjes hun resultaten. Het selecteren van uitwerkingen voor de klassikale presentaties is een belangrijke taak voor de docent tijdens de a-didactische fase. De gekozen uitwerkingen hoeven absoluut niet correct of volledig te zijn.
Na de presentaties volgt een discussie met de groep over de toepasbaarheid en de juistheid. Eventueel worden de aanpakken onderling vergeleken, bijvoorbeeld op efficiëntie en duidelijkheid. Uiteindelijk pakt de docent de didactische rol weer op. De docent legt uit hoe de resultaten van de leerlingen en de aansluitende discussie gerelateerd zijn aan het leerdoel. Daarbij probeert hij de informele benaderingen van de leerlingen te verbinden met de meer formele wiskunde uit het lesboek.

> "Ik denk dat je een betere probleemoplosser wordt als je onderzoekend leert."



figuur 1 Verschillende benaderingen van het vergrotingsprobleem door leerlingen uit 2 vwo

> "Onderzoekend leren begint met een context, een goed probleem."

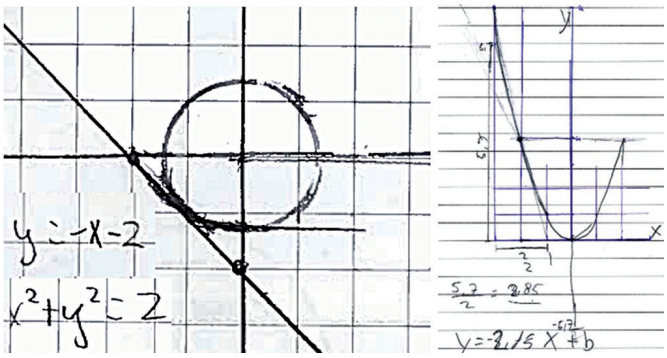
Ontdekkingen van leerlingen

Even terug naar de vergrotingsopdracht. In figuur 1 zie je vier uitwerkingen van leerlingen. Het bovenste resultaat ① (antwoord: $4k$) zou een docent in eerste instantie misschien gauw opzijschuiven, maar toch hebben leerlingen ontdekt dat als je de zijde verdubbelt, de oppervlakte met een factor 4 groter wordt. Bovendien tonen ze zich verward over de rol van de variabele k. Daarin zullen ze niet de eersten en ook niet de laatsten zijn. Een klassikale presentatie van dit werk geeft een goede gelegenheid om dit aan de orde te laten komen. De groep daaronder ② heeft enkele voorbeelden en een soort tabel: zeker een goed beginpunt voor een discussie over de regelmaat. De groep daaronder ③ heeft een algebraïsch bewijs voor rechthoeken. Goede kwestie voor de groep: voor welke andere vlakke figuren werkt deze aanpak? Het onderste resultaat ④ kan daar mooi een antwoord op geven, want zij hebben een idee over hoe het werkt bij halve vierkanten.
Je ziet dat leerlingen best ver kunnen komen, zeker als een klas de krachten bundelt. Vanuit het werk van de leerlingen komt de juiste hypothese naar voren (kortgezegd: k^2) en een bewijs voor een specifiek geval. Voor deze onderzoeksles rest de docent de taak het resultaat duidelijk te organiseren en te bekrachtigen als het leerdoel.

Carolien zegt over het hele proces:
'Het is belangrijk dat je een goede vraag of probleem hebt, want leerlingen hebben richting nodig. Je moet leerlingen de ruimte geven. Er kan dan van alles uitkomen, wat leerlingen in hun eigen taal gaan formuleren. Soms ontdekken ze het concept dat je wilt en soms niet. De rol van de docent daarin kan zijn om alles waarde te geven, maar ook uiteindelijk de weg te laten zien die de wiskunde heeft genomen. Maar onderzoekend leren begint met een context, een goed probleem. Als ze dan iets onderzocht hebben, dan heb ik het idee dat zo'n concept beter blijft hangen, omdat het echt van hen is. Het kost alleen ook wel heel veel tijd. Dus in mijn beleving kun je ze niet de hele wiskunde op deze manier laten ontdekken. Ik zie het nu als iets wat je af en toe doet... je zou wel bij elk onderwerp iets uit de kast willen kunnen trekken.' >

Realistische contexten

Een goede manier om te voorkomen dat leerlingen niet weten hoe ze moeten beginnen, is een (probleem) situatie te kiezen waarin leerlingen zich goed thuis voelen, die betekenisvol voor ze is. Freudenthal noemde dat 'realistisch' in de jaren '80. Dat zie je goed bij het vergrotingsprobleem: oppervlakte van vlakke figuren is een wiskundeonderwerp waarmee leerlingen al sinds vroeg op de basisschool ervaring hebben. Carolien: 'dat "realistisch" in Realistisch Wiskunde Onderwijs gewoon "betekenisvol" is en dat contexten niet per sé uit de werkelijkheid (dat het bijvoorbeeld over een fiets moet gaan), maar ook uit de wiskunde zelf kunnen komen is een mooi inzicht.'



figuur 2 Een glijbaanontwerp met een cirkel en een rakende lijn en een ontwerp op basis van het aflezen van de richtingscoëfficiënt

Ontwerpen van een glijbaan

Een ander MERIA-scenario is wel gebaseerd op een situatie uit de werkelijkheid. Vierdeklassers wordt gevraagd een glijbaan (of skischans) te ontwerpen, bestaande uit een recht deel en een gekromd deel die elkaar glad raken. Voor beide delen moet een vergelijking worden gemaakt. We noemen drie aspecten die deze taak tot zo'n uitstekende inleiding op de afgeleide maakt. Ten eerste is de algebra van vergelijkingen voor lijnen en krommen een betekenisvol onderwerp voor havo- en vwo-leerlingen: ze zijn er de hele onderbouw mee bezig geweest. Ten tweede is ook de context realistisch: die doet een beroep op informele kennis van leerlingen over steilheid en gladheid; noties die nu gemathematiseerd moeten worden. Ten derde dringt de taak door tot de essentie van de wiskundige notie van helling. Dit wordt mooi geïllustreerd door de volgende opmerking van een leerling uit een groepje dat zojuist een oplossing met de raaklijn aan een cirkel had geproduceerd, zie figuur 2 links. De docent daagde hen uit ook een ontwerp met een parabool te maken, waarop de leerling zei: 'maar in dat geval hebben we geen manier om de steilheid in een punt te berekenen'. Precies! Gelukkig had een ander groepje in de klas ideeën hoe je dit kon doen door eerst een raaklijn aan de parabool te tekenen en daar dan een vergelijking voor op te stellen door punten af te lezen, zie figuur 2 rechts. Een getalenteerd ander groepje vond de steilheid a door met behulp van algebra vast te stellen wanneer de lijn $y = ax - 1$ en de parabool $y = x^2$ precies één snijpunt hebben. Weer een ander groepje ging met GeoGebra te werk en probeerde eindeloos in te zoomen om vast te stellen of de lijn wel raakte aan hun kromme. Al met al leverde dit genoeg aanknopingspunten voor de docent om aan het eind van de les het concept helling van een kromme te introduceren als helling van de raaklijn aan de kromme en enkele technieken te bespreken om die helling te berekenen.

> "Investeren in het zelf ontdekken van een begrip of resultaat betaalt zich terug, omdat het beter binnenkomt en beter beklijft."

Implementatie

Als het gaat om het implementeren van nieuwe lesideeën denken we vaak aan hoeveel tijd dat gaat kosten. Carolien: 'De werkdruk is hoog en dit kost tijd. Als er meer tijd en geld zou zijn, dan zijn er natuurlijk meer prioriteiten, maar ik vind dit wel belangrijk.' Binnen het MERIA-project zijn lessen ontwikkeld op basis van het curriculum. Het doel was aan te tonen dat je onderzoekend onderwijs kunt inpassen in het reguliere lesprogramma. Investeren in het zelf ontdekken van een begrip of resultaat betaalt zich terug, omdat het beter binnenkomt en beter beklijft. Als docent kun je ertegen opzien van je programma af te wijken, maar, zoals Carolien zegt: 'De leerlingen vonden het prima. Die staan er niet van te kijken. We doen al wiskundige denkactiviteiten. De leerlingen vinden het wel leuk als het een keer zonder boek is.' En Margot: 'Die glijbaan staat gewoon in mijn lesprogramma.'

Lesson study als afsluiting

Een grote conferentie met alle betrokken docenten en onderzoekers vormde de afsluiting van het project. Carolien: 'Het was heel inspirerend om met een groep docenten bij elkaar te zitten die allemaal wat meer met hun lessen willen doen.' De conferentie werd afgesloten met een publieke les in de traditie van Lesson Study. Met alle honderd aanwezigen observeerden we een les op basis van een MERIA-lesplan, gevolgd door een nabespreking. Carolien: 'De Lesson Study met zijn

honderden was briljant. Na drie minuten nabespreken van de publieke les dacht ik dat alles wel gezegd was, en toen kwam er nog veel meer interessants. Als je met meer mensen langer de tijd neemt, dan komt er steeds meer uit een nabespreking!"

Zin om mee te doen?

In december 2019 gaat een vervolg-EU Erasmus$^+$-project van start. Het doel is dat docenten zelf lesplannen voor onderzoekend leren ontwikkelen in een Lesson Study traject. Typisch voor Lesson Study zijn: samenwerking met collega's, test- en verbeterfases en observatie met meerdere collega's van een testles. Dat laatste zal eerder met vier of vijf collega's plaatsvinden dan met honderd, zoals hierboven beschreven. Mocht je met een groep collega's interesse hebben om deel te nemen aan dit project, stuur dan een mail naar *r.d.bos@uu.nl*.

Als je meer met onderzoekend leren in je lessen wilt doen zijn lesplannen en ondersteunend materiaal beschikbaar op *https://meria-project.eu/* of:

vakbladeuclides.nl/952bos

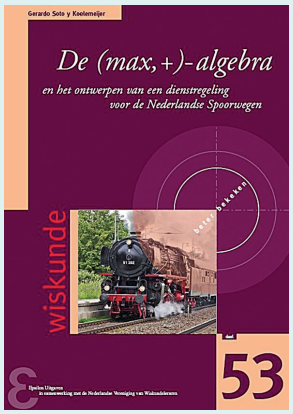
Over de auteur

Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Ook maakt hij sinds kort deel uit van de redactie van de *Euclides*. E-mailadres: *r.d.bos@uu.nl*

Boekbespreking

Alex van den Brandhof

Tropische algebra achter het spoor



Titel: De (max, +)–algebra
Ondertitel: en het ontwerpen van een dienstregeling voor de Nederlandse Spoorwegen
Auteur: Gerardo Soto y Koelemeijer
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2018)
ISBN: 978-90-5041-172-1, 68 pagina's (softcover)
Prijs: € 10,00

Gerardo Soto y Koelemeijer is een veelzijdig iemand. Hij is wiskundeleraar op het Stedelijk Gymnasium Leiden, postdoc op het ICLON (Interfacultair Centrum voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Nascholing) van de Universiteit Leiden, is bezig met zijn derde roman, geeft lezingen, laat van zich horen op Twitter. In 2018 verscheen zijn essaybundel *Wie is er bang voor Wiskunde?* en kort daarna het Zebraboekje *De (max, +)-algebra*.

Dienstregeling

Sinds eind jaren tachtig van de vorige eeuw is er om het jaar een conferentie, steeds op wisselende locaties, over nieuwe ontwikkelingen op het gebied van spoorwegen. In 2000 vond COMPRAIL, zoals die conferentie heet, plaats in het Italiaanse Bologna. Een van de bijdragen werd toen verzorgd door Soto y Koelemeijer, die in die tijd promovendus was aan de Technische Universiteit Delft, en drie van zijn collega's. Hun bijdrage, getiteld *PETER, a performance evaluator for railway timetables*, ging over >

de toepassing van de zogeheten *(max, +)-algebra* om een dienstregeling voor de spoorwegen te ontwerpen.
In zijn nieuwe Zebraboekje laat Soto y Koelemeijer leerlingen hiermee kennismaken. Het aardige van het boekje is dat de gebruikte wiskunde abstract is, zonder dat het al te moeilijk wordt – een combinatie die niet vaak voorkomt. Soto y Koelemeijer introduceert twee nieuwe operatoren, die hij noteert als $\oplus$ en $\otimes$. Met $a \oplus b$ wordt het maximum van a en b bedoeld, met $a \otimes b$ de som van a en b (gewoon optellen dus). Tot ongeveer 1990 werd de algebra die van deze operatoren gebruikmaakt '(max, +)-algebra' genoemd – tegenwoordig spreken wiskundigen van 'tropische algebra', zie het kader.

> "Het boekje maakt duidelijk dat abstracte algebra geen *Spielerei* is, maar kan worden toegepast in de dagelijkse werkelijkheid..."

Mee op reis

Na een paar instapoefeningen om je vertrouwd te maken met de operatoren van de (max, +)-algebra neemt Soto y Koelemeijer je mee op reis: stap voor stap laat hij zien hoe je een dienstregeling kunt ontwerpen, op basis van vertrektijden, reistijden en aansluitingen. Grafen en matrices waren ooit vaste onderwerpen in het programma van wiskunde A. Dat is nu niet meer het geval, maar ook zonder voorkennis kun je dankzij de heldere opbouw van het boekje een heel eind komen. Om toch ook een minpuntje te noemen: de handgetekende grafen ogen wat knullig.
Begrippen als 'irreducibel', 'eigenvector' en 'eigenwaarde' schrikken misschien in eerste instantie af, maar wie doorzet, kan aan het eind een dienstregeling van een kleinschalig treinennetwerk ontwerpen, rekening houdend met overstaptijden en eventuele vertragingen. In werkelijkheid spelen ook nog andere factoren een rol; denk bijvoorbeeld aan het aantal overstappen, de personeelsroosters, de bedrijfswinst en de materieelomloop. Een systeem dat ál die aspecten tegen elkaar afweegt om zo tot een optimale dienstregeling te komen, is zelfs voor de Nederlandse Spoorwegen nog een paar stations te ver – laat staan voor een Zebraboekje. Dat neemt niet weg dat het boekje leerlingen duidelijk maakt dat abstracte algebra geen *Spielerei* is, maar kan worden toegepast in de dagelijkse werkelijkheid. Ook voor veel leraren zal de (max, +)-algebra nieuwe stof zijn. Dat hoeft echter helemaal geen probleem te zijn. De Zebra van Soto y Koelemeijer biedt de leerling én zijn leraar de gelegenheid om kennis te maken met een wiskundige activiteit die relevant is in de moderne maatschappij.

Tropische meetkunde is een jonge tak van de wiskunde. Deze tak is ontstaan toen wiskundigen bepaalde eigenschappen van polynomiale vergelijkingen gingen onderzoeken, bijvoorbeeld $3xy^3 + 2x^2y - 4x + 1 = 0$. Hierbij zijn x en y complexwaardige variabelen – getallen dus van de vorm $a + bi$. Wiskundigen ontdekten dat het makkelijker is om, in plaats van de oplossingen (x, y) te bestuderen, de punten $({}^g\log|x|, {}^g\log|y|)$ te bestuderen.
De logaritme zet een product om in een som: ${}^g\log(pq) = {}^g\log(p) + {}^g\log(q)$. Een som wordt door de logaritme niet eenvoudig omgezet, maar als het grondtal g van de logaritme erg groot is, geldt ${}^g\log(p + q) \approx \max\{{}^g\log(p), {}^g\log(q)\}$.
De operatoren $\times$ en $+$ worden door de logaritme dus omgezet in de operatoren '+' en 'max'. Zo ontstaat een nieuwe algebra, waarvan de operatoren genoteerd worden met de symbolen $\otimes$ en $\oplus$. Deze nieuwe algebra bleek erg handig bij het onderzoek naar polynomiale vergelijkingen.
Tot aan het eind van de jaren tachtig van de vorige eeuw sprak men van '(max, +)-algebra'. In de jaren negentig kwam de naam 'tropische algebra' in zwang. Die naam werd bedacht door een groep wiskundigen uit Parijs, die hun uit Brazilië afkomstige collega Imre Simon – pionier op dit gebied – wilden eren.

Over de auteur

Alex van den Brandhof (*www.alexvandenbrandhof.nl*) combineert zijn baan als wiskundeleraar op het Gymnasium Muttenz (Zwitserland) met wetenschapsjournalistiek. Hij schrijft onder meer over wiskunde voor *NRC*.
E-mailadres: *brandhof@gmail.com*

Gerard Koolstra

Harmonisch totaal en aanverwanten II

In *Euclides* 94-5 heeft Gerard Koolstra aandacht besteed aan het harmonisch totaal, een begrip dat verwant is aan het harmonisch gemiddelde. In dit artikel gaat hij wat algemener in op dit soort totalen, waarbij we enkele bekende en wellicht minder bekende formules zullen tegenkomen.

Voorbeelden van harmonische totalen

Het harmonisch gemiddelde is een van de vele gemiddelden die gevangen kunnen worden met de formule:

$$M_p(x_1,\cdots,x_n)=\left(\frac{x_1^{\,p}+\cdots+x_n^{\,p}}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \neq 0)$$

met de bijbehorende totalen die gedefinieerd worden door:

$$T_p(x_1,\cdots,x_n)=(x_1^{\,p}+\cdots+x_n^{\,p})^{\frac{1}{p}} \quad (p \neq 0) \qquad (1a)$$

In plaats van formule 1a kunnen we natuurlijk ook schrijven:

$$T_p^{\,p}=x_1^{\,p}+\cdots+x_n^{\,p} \qquad (1b)$$

Om complicaties te voorkomen gaan we uit van positieve argumenten x_1, ..., x_n. Voor $a > 0$ geldt dat $a^p > 0$. Bovendien geldt dan $(a^p)^{\frac{1}{p}} = a$ en is $a^p = b^p$ gelijkwaardig met $a = b$.

Als we voor p de waarde -1 nemen krijgen we $(x_1^{-1}+\cdots+x_n^{-1})^{-1}$ en dat is natuurlijk niets anders dan het harmonisch totaal. Dus $H(x_1, ..., x_n) = T_{-1}(x_1, ..., x_n)$

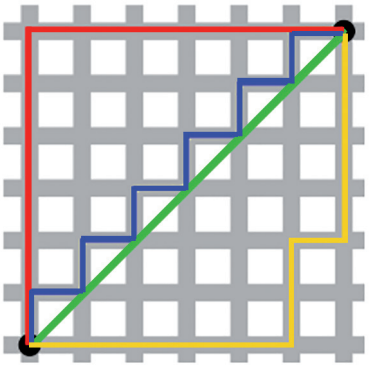
Voor $p = 1$ geldt dat $T_1 = x_1 + ... + x_n$, de gewone som, die we uiteraard ook met bijvoorbeeld d's kunnen noteren in plaats van met x-en: $T_1 = d_1 + ... + d_n$. Wanneer we in een rechthoekig assenstelsel XOY afspreken dat $d_1 = |x_1 - x_2|$ en $d_2 = |y_1 - y_2|$, dan geeft $T_1(d_1, d_2)$ [$= d_1 + d_2$] wel iets interessants: de zo genoemde 'taxi-afstand' (of Manhattan-afstand) tussen twee punten (x_1, y_2) en (x_2, y_2).

In figuur 1 illustreren de rode, blauwe en gele routes deze afstand. In het meerdimensionale geval is de Hamming-afstand een bekende toepassing.

Voor $p = 2$ krijgen we een goede bekende:

$$T_2(x_1,\cdots,x_n)=(x_1^{\,2}+\cdots+x_n^{\,2})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_1^{\,2}+\cdots+x_n^{\,2}}\,,$$

de lengte van de vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, die gebruikt wordt voor het bepalen van de euclidische afstand tussen twee punten. Figuur 1 illustreert dat de euclidische afstand - met groen aangeduid - doorgaans kleiner is dan de Manhattan-afstand. Ook $p = -2$ kan leiden tot herkenbare verbanden. De afstand van de oorsprong tot een vlak met vergelijking $x/a + y/b + z/c = 1$ kan berekend worden met



figuur 1 De taxi-afstand of Manhattan-afstand (rood, geel en blauw) en de euclidische afstand (groen)

$$d=\frac{1}{\sqrt{(1/a)^2+(1/b)^2+(1/c)^2}}=(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Dus $d = T_{-2}(a, b, c)$. Vaak wordt dit verband geschreven als : $\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

In het tweedimensionale geval gaat het (bijvoorbeeld) om de afstand tussen het snijpunt van de rechthoekszijden en de tegenoverliggende hypotenusa in een rechthoekige driehoek. Deze interpretatie geeft ons de mogelijkheid ook deze T_p in beeld te brengen.

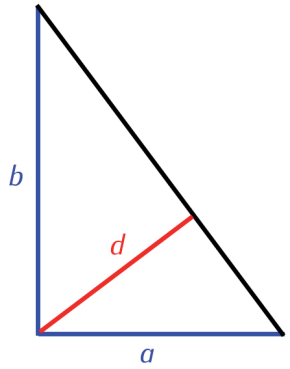
In figuur 2 geldt $a \cdot b = \sqrt{a^2+b^2} \cdot d$ en dus $d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

>

Kwadrateren geeft: $d^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ en 'omkeren' vervolgens:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

We weten dus $d = T_{-2}(a, b)$.

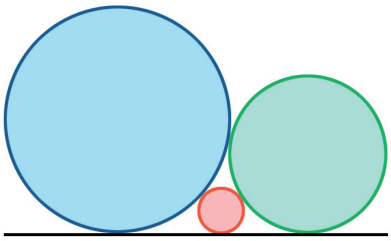


figuur 2

Er zijn meer waarden van p waarbij T_p gebruikt kan worden om een verband kort te formuleren. Zo is het verband tussen de stralen van drie rakende cirkels met de configuratie zoals in figuur 3 te schrijven als

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$ (met r_3 de straal van de kleinste cirkel).

Dit kan ook geschreven worden als $r_3^{-\frac{1}{2}} = r_1^{-\frac{1}{2}} + r_2^{-\frac{1}{2}}$ of als: $r_3 = (r_1^{-\frac{1}{2}} + r_2^{-\frac{1}{2}})^{-2}$. In dit geval geldt: $r_3 = T_{-\frac{1}{2}}(r_1, r_2)$ en zien we een toepassing voor $p = -\frac{1}{2}$.



figuur 3

Eigenschappen van functie T_p

$T_p(x_1, ..., x_n)$ duikt dus in allerlei gedaantes op. Het is de moeite waard om eens na te gaan welke eigenschappen deze functie heeft, en wat daarvan de gevolgen zijn voor de diverse toepassingen. Zoals gezegd beperken we ons gemakshalve tot positieve argumenten.
Uiteraard is de volgorde van de argumenten niet van belang, en ook hier geldt dat de berekening stapsgewijs kan plaatsvinden. Zo geldt:
$T_p(x_1, ..., x_n) = T_p(T_p(x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$.
Immers:
$T_p^p(T_p(x_1, ..., x_{n-1}), x_n) = T_p^p((x_1^p, ..., x_{n-1}^p)^{1/p}, x_n) =$
$((x_1^p, ..., x_{n-1}^p)^{1/p})^p + x_n^p = (x_1^p, ..., x_{n-1}^p) + x_n^p =$
$T_p^p(x_1, ..., x_n)$.
En vanwege de positieve (tussen)uitkomsten geldt nu ook:
$T_p(x_1, ..., x_n) = T_p(T_p(x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$.
Voor p = 2 en n = 3 bijvoorbeeld:

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = T_2(T_2(x_1, x_2), x_3)) =$$
$$T_2((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3)) = (((x_1^2 + x_2^2)^{1/2})^2 + x_3^2)^{1/2} =$$
$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$$

Dit is in overeenstemming met de wetenschap dat de lichaamsdiagonaal van een balk met gegeven afmetingen zowel direct als via een van de (drie) zijvlaksdiagonalen berekend kan worden.
Als we voor $p \neq 0$ definiëren: $a \sum^p b = c \leftrightarrow T_p(a,b) = c$, blijkt $\sum^p$ een bewerking die zowel commutatief als associatief is.[1]
Van groot belang is dat $T_p(x_1, ..., x_n)$ voor alle waarden van p ($p \neq 0$) een homogene functie is:
$T_p(kx_1, ..., kx_n) = kT_p(x_1, ..., x_n)$ $(k > 0)$.
Deze eigenschap maakt het bijvoorbeeld mogelijk om hem te gebruiken om een lengte op basis van gegeven lengtes te berekenen. Wanneer de eenheid wordt gewijzigd (van meter in millimeter bijvoorbeeld) is het resultaat eenvoudig aan te passen. Wanneer alle argumenten gelijk zijn ($x_1 = x_2 = ... = x_n = a$) geldt:
$T_p(a, ..., a) = (na^p)^{1/p} = n^{1/p} \cdot a$

We gaan uit van $n > 1$. Nu wordt de waarde van p van belang.
Voor $p < 0$ geldt:
$0 < n^{1/p} < 1$ en dus $T_p(a, ..., a) < a$
voor $0 < p < 1$ geldt:
$n^{1/p} > n$ en dus $T_p(a, ..., a) > n \cdot a$ en
voor $p > 1$ geldt:
$1 < n^{1/p} < n$ en dus $a < T_p(a, ..., a) < n \cdot a$.

Meer algemeen (voor positieve argumenten):
Voor $p < 0$ geldt:
$T_p(x_1, ..., x_n) < \min(x_1, ..., x_n)$ (2a)

voor $0 < p < 1$ geldt:
$T_p(x_1, ..., x_n) > x_1 + ... + x_n$ (2b)
voor $p > 1$ geldt:
$\max(x_1, ..., x_n) < T_p(x_1, ..., x_n) < x_1 + ... + x_n$ (2c)

Voor het bewijs van (2a) kijken we, net als eerder bij het harmonisch totaal, naar het effect van toevoeging van een (positief) argument aan $T_p^p = x_1^p + ... + x_n^p$.
Uiteraard wordt T_p^p altijd groter. Maar wat betekent dat voor T_p $(= (T_p^p)^{1/p})$?

Voor $p < 0$ geldt:
T_p wordt *kleiner* als we een argument toevoegen,
$x \to x^{1/p}$ is dan een dalende functie (3a)
Voor $p > 0$ geldt:
T_p wordt *groter* als we een argument toevoegen,
$x \to x^{1/p}$ is dan een stijgende functie (3b)

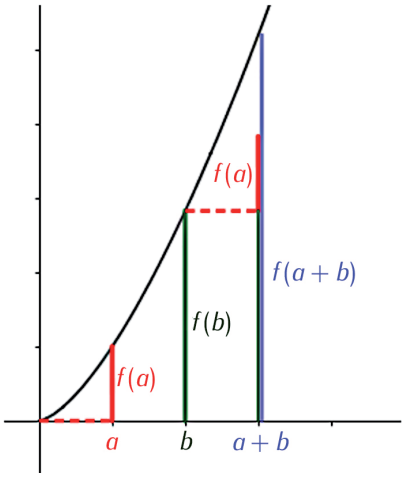
We ordenen nu de argumenten van klein naar groot.
Nu geldt volgens (3a):
$\min(x_1, ..., x_n) = x_1 = T_p(x_1) < T_p(x_1, x_2) < ... < T_p(x_1, ..., x_n)$

Voor het bewijs van (2b) en (2c) is de tweede afgeleide van $x \to x^{1/p}$ van belang.

$f(x)=x^{1/p}$ geeft $f'(x)=\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}=\frac{1}{p}x^{\frac{1-p}{p}}$ en $f''(x)=\frac{1-p}{p}x^{\frac{1-2p}{p}}$.

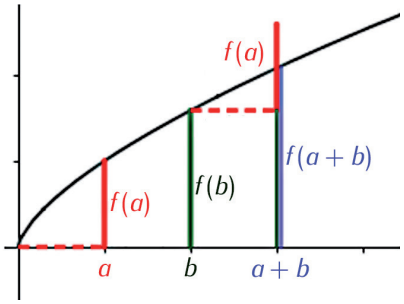
Uiteraard geldt voor $p > 0$ dat $f'(x) > 0$. We hebben dus te maken met een stijgende functie. Het teken van $f''(x)$

wordt (voor $x > 0$) bepaald door $\frac{1-p}{p}$. Voor $p > 1$ is dit negatief en voor $0 < p < 1$ positief.
Voor $0 < p < 1$ is $f(x)=x^{1/p}$ een steeds sneller stijgende functie. Voor zo'n functie geldt: $f(a + b) > f(a) + f(b)$, zie figuur 4, en meer algemeen:
$f(a_1 + ... + a_n) > f(a_1) + ... + f(a_n)$.
Dus ook
$(x_1^p + ... + x_n^p)^{1/p} > (x_1^p)^{1/p} + ... + (x_n^p)^{1/p} = x_1 + ... + x_n$.



figuur 4

Voor $p > 1$ is $f(x)=x^{1/p}$ een steeds langzamer stijgende functie. Dan geldt $f(a + b) < f(a) + f(b)$, zie figuur 5, en dus $f(a_1 + ... + a_n) < f(a_1) + ... + f(a_n)$. Dus ook
$(x_1^p + ... + x_n^p)^{1/p} < (x_1^p)^{1/p} + ... + (x_n^p)^{1/p} = x_1 + ... + x_n$.
Om het linkerdeel van (2c) te bewijzen gebruiken we (3b). We ordenen nu de argumenten van groot naar klein. Nu geldt:
$\max(x_1, ..., x_n) = x_1 = T_p(x_1) < T_p(x_1, x_2) < ... < T_p(x_1, ..., x_n)$.
Voor $p \geq 1$ is T_p nauw verwant met de p-norm van een vector. De p-norm van de vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ is



figuur 5

gedefinieerd door: $\|\boldsymbol{x}\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ $(p \geq 1)$ en deze bepaalt weer de zogenaamde Minkowski-afstand tussen twee punten: $(p \geq 1)$. Blijft de vraag nog: is er een interpretatie toe te kennen aan M_0 en T_0? Dat levert een verrassend resultaat op: M_0 is op te vatten als het meetkundig gemiddelde! Op de website is de afleiding daarvan te zien.

Toepassingen?

Wat is de relevantie van bovenstaande voor de dagelijkse onderwijspraktijk? Ik denk dat het laten zien dat ogenschijnlijke uiteenlopende verbanden, formules en stellingen behoren tot één familie een belangrijke taak van het wiskundeonderwijs is. Het benadrukken van de overeenkomsten tussen bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras en de lenzenformule kan al op een zeer eenvoudige wijze. Bij opgaven n.a.v. de stelling van Pythagoras wordt op het vo al enkele tientallen jaren gewerkt met een tabel, zie tabel 1. Van belang is dat de lengte van de schuine (en dus langste) zijde in het vakje linksonder komt, en de lengte van de rechthoekzijden daarboven. Ervaringen wijzen erop dat met een dergelijke tabel minder fouten gemaakt worden bij toepassingen van de stelling van Pythagoras. In feite gaat het hier om T_2 met doorgaans twee argumenten.

	z	z^2	
rhz	4	16	
rhz	?		+
sz	9	81	

tabel 1

Het is misschien de moeite waard deze aanpak ook eens uit te proberen bij andere berekeningen rond T_p zoals de lenzenformule en vervangingsweerstanden.
Met behulp van dergelijke tabellen kan formule 1b $T_p^{\,p} = x_1^{\,p} + \cdots + x_n^{\,p}$ als het ware geconcretiseerd worden. Een aanpak die mijns inziens het inzicht in dit type formules kan bevorderen. Een uitwerking van een opgave waarbij gegeven is dat de brandpuntafstand 9 cm is, de voorwerpsafstand 27 cm en de beeldafstand moet worden >

	cm	cm^{-1}
v	27	1/27
b	?	
f	9	1/9

tabel 2

berekend zou er zo uit kunnen uitzien, zie tabel 2. Vanwege het belang van de (juiste) eenheden zijn die uitdrukkelijk vermeld in de kolomkoppen. Bij Pythagoras worden soms de bewerkingen 'kwadrateren' en 'wortel nemen' aan het schema toegevoegd. Als het gaat om de lenzenformule (of vervangingsweerstand) werkt 'het omgekeerde nemen' beide richtingen op, immers: $(x^{-1})^{-1} = x$.

vakbladeuclides.nl/952koolstra

Noten

[1] Een veel gebruikte niet commutatieve en niet associatieve bewering is tot de macht. Zo geldt $(10^3)^2 = 10^6$ maar $10^{(3^2)} = 10^9$. Daarom is a^{b^c} alleen gedefinieerd wanneer de conventie wordt geaccepteerd dat daarmee $a^{(b^c)}$ wordt bedoeld.

Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de *WiskundE-brief*.
E-mailadres: *gerardk@xs4all/.nl*

Fred Muijrers

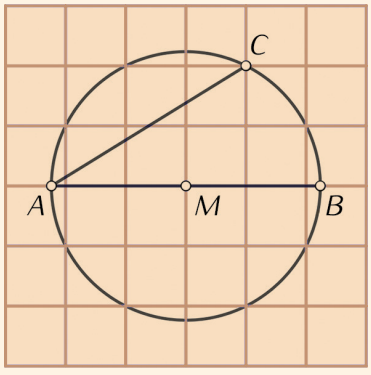
#Youtoo, ga ervoor!

Begin de les nu eens niet met het bespreken van huiswerk, maar met een speels meetkundeprobleem uit de app *Pythagorea*.

figuur 1 De app Pythagorea

Inleiding

Wiskundige activiteiten die je uitdagen tot niet-triviale, niet voor de hand liggende bewijzen, constructies, redeneringen zijn inspirerend voor leerling en leraar. Met de prachtige online-game *Pythagorea*[1] heb je voor meetkunde een voorraad aan voorbeelden. We starten met figuur 2.

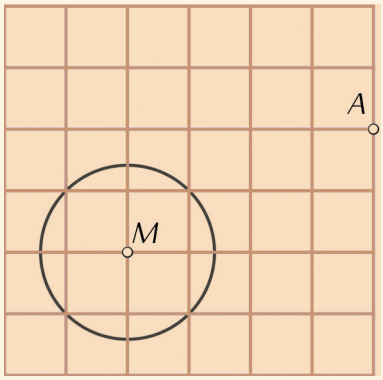


figuur 2

Gevraagd is de bissectrice van hoek *BAC*. Eerst voor de lezer om te proberen maar let op de spelregels:

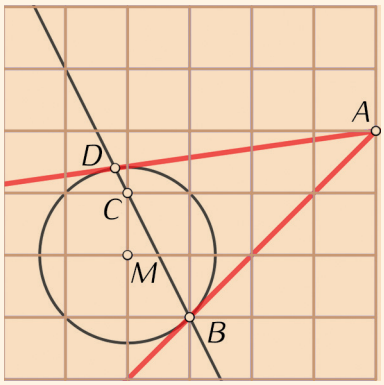
1 Alleen binnen dit rooster mag getekend worden.
2 Punten worden geconstrueerd door lijnen te snijden. Roosterpunten zijn gegeven.
3 Lijnen worden geconstrueerd door punten te verbinden. Roosterlijnen zijn gegeven.
4 Cirkels doen niet mee tenzij gegeven. De passer is dus taboe!

De voorbeelden gaan van zeer simpel ('wijs twee lijnen aan die...') tot erg niet-triviaal en dan kan analytische meetkunde helpen. In het volgende voorbeeld wordt gevraagd beide raaklijnen te construeren vanuit *A* aan de gegeven cirkel, zie figuur 3.



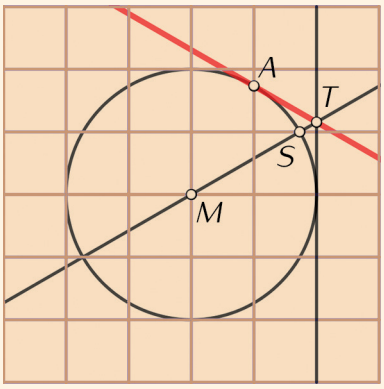
figuur 3

Hier is één raaklijn gemakkelijk te vinden omdat een raakpunt (*B*) zo aan te wijzen is. *MB* staat loodrecht op *AB*. Via lijn *MA* met richtingscoëfficiënt = 0,5 en poollijn met richtingscoëfficiënt = -2 door *B* en *C* vind je het andere raakpunt (*D*). Nodige kennis: *MA* staat loodrecht op de poollijn, zie figuur 4.



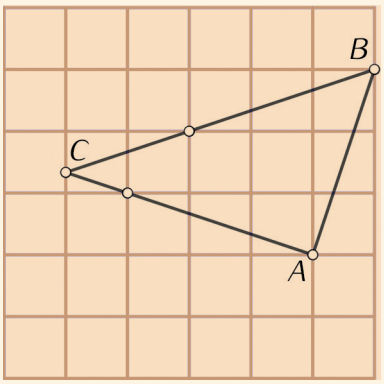
figuur 4

Sommige voorbeelden vragen nogal wat van leerlingen maar ze hoeven echt geen finalisten van de Olympiade te zijn om het op te lossen, zie figuur 5. Gevraagd was de raaklijn in *A* aan de gegeven cirkel.



figuur 5

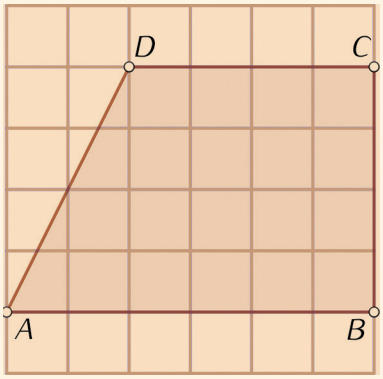
Met behulp van analytische meetkunde kun je bewijzen, met *M*(0,0), dat de raaklijn door *T*(2, 2/√3) gaat en lijn *MT* door *S*(√3,1) op de cirkel. Maar sommige leerlingen zien dat zo.
Prachtig lesmateriaal om bijvoorbeeld een les te beginnen. Mijn bewering is dat een aantal lessen beginnen met zo'n inspirerend probleem dat oogt als een spel, leerlingen meer bij de lessen betrekt dan beginnen met een huiswerkbespreking...
Zwaartelijnen, bissectrices, hoogtelijnen, verhoudingen, oppervlaktes, Pythagoras: het komt allemaal aan bod, zie figuur 6. Hier wordt gevraagd het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC te construeren.



figuur 6

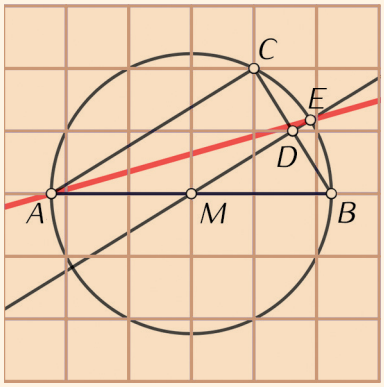
>

Ooit schreef Martin Kindt[2] een artikel over zwaartepunten van driehoeken en vierhoeken. Die kennis is goed te gebruiken om het zwaartepunt van trapezium *ABCD* te vinden, zie figuur 7. Opdelen in driehoek en rechthoek of driehoek en parallellogram kan ook.



figuur 7

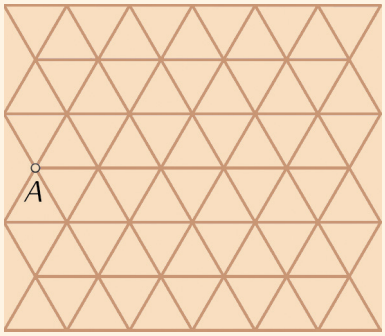
Terug naar het eerste voorbeeld, zie figuur 8. Via *D*, het midden van *BC*, lijn *MD* en *E* vind je de bissectrice *AE*. Slechts kennis van de omtrekshoekenstelling is nodig. Overigens is deze aanpak ook bij figuur 4 te gebruiken: in de vlieger die ontstaat, is *MT* ook een bissectrice.



figuur 8

Bij een lezing daagde ik studenten van de lerarenopleiding uit een *#youtoo*-beweging op hun school te beginnen: start de les met boeiende wiskundefiguren zoals hierboven of gebruik *sangaku's*. Er is materiaal[3] genoeg en het scherpt de geest voor de meetkundeleerstof. Wiskundige denkactiviteiten gaan zo vanzelf. Just do it!

Uitsmijter uit de *Pythagorea60*-serie, zie figuur 9: Construeer een gelijkzijdige driehoek *ABC* met als hoekpunten roosterpunten (*A* is gegeven) en zijden van lengte √19.



figuur 9

Noten

[1] Zoek *Pythagorea* in de App Store of op Google Play. In Wiskunde-digitaal, *Euclides* 91-4, stond een recensie over *Euclidea*. Ook een mooi programma maar daar worden lijn én cirkel gebruikt. Beschikbaar voor Windows.

[2] Zie het artikel 'Wat te bewijzen is (44)' in de *Nieuwe Wiskrant* 28-3 (2009).

[3] *Pythagorea* kent ook een 60-graden variant: geen orthogonaal stelsel roosterlijnen maar de lijnen in het rooster snijden elkaar onder hoeken van 60 graden.

Over de auteur

Fred Muijrers was tot zijn pensioen docent aan de lerarenopleiding en coördinator van de masteropleiding tot eerstegraads leraar wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.
E-mail: *fmuijrers@yahoo.com*

Olympiadepuzzel 95-2

Bijzondere driehoek

Birgit van Dalen
Quintijn Puite

PZZL

In deze jaargang vind je in nummers 2, 4, en 6 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Probeer de puzzel eens met je klas!

Driehoek ABC is gelijkbenig met top C. Punt D ligt op zijde BC zodat AD loodrecht op BC staat. Punt E ligt op zijde AC zodat DE loodrecht op AC staat. Punt F ligt op AC zodat DF de bissectrice van $\angle ADE$ is. Nu blijkt driehoek BDF gelijkbenig met top D te zijn. Bereken hoe groot hoek C is. (Geef alle mogelijke waarden.)

Stuur je oplossingen uiterlijk 22 november naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel 94-7

Ondanks, of misschien juist dankzij het begin van de zomer ontvingen we voor de puzzel *Delen met rest* veel inzendingen. In veel van de inzendingen wordt opgemerkt dat Jans getal plus twee deelbaar moet zijn door het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 20, 18, 16, 14, 12 en 10, namelijk 5040. Bij de volgende stap is er een duidelijke splitsing in twee verschillende methodes. Bij de eerste methode wordt voor elk veelvoud van 5040 tussen de 10.000 en 99.999 gekeken of dit getal min twee deelbaar is door 22. Bij de tweede methode wordt ingezien dat $5040k - 2 = 5040(k - 1) + 5038$ deelbaar moet zijn door 22 en, aangezien 5038 deelbaar is door 22 en 5040 even is, maar niet deelbaar door 11, dat $k - 1$ deelbaar door 11 moet zijn. Een derde, niet veel gebruikte, maar noemenswaardige methode is door te zien dat 5038 voldoet aan alle eisen behalve de lengte van het getal. Een ander getal dat voldoet aan deze eisen kan nu gevonden worden door een getal op te tellen dat deelbaar is door 22, 20, 18, 16, 14, 12 en 10 zodat de resten van de delingen onveranderd blijven. Door het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van deze getallen een geschikt aantal keren bij 5038 op te tellen, kan nu het getal van Jan ook worden gevonden. (Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Esther Steenkamer voor het nakijken van de inzendingen.)

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de veertien inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Gert Hoogeboom.

vakbladeuclides.nl/952olympiadepuzzel

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op *www.wiskundeolympiade.nl*.

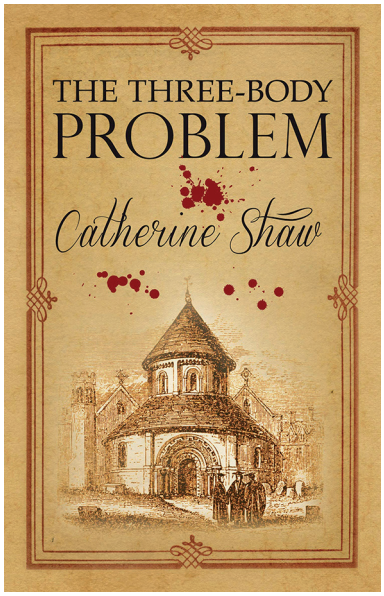
Sietske Tacoma

Vijf vragen aan...

In de rubriek Vijf vragen aan ... leren we docenten wiskunde beter kennen. Deze keer vijf vragen aan Sietske Tacoma, scheidend redactielid van de *Euclides*.

1 Wie heeft of hebben de meeste invloed gehad op jouw keuze van een loopbaan in het wiskundeonderwijs?

Omdat ik me op de basisschool wat verveelde in de klas, gaf mijn meester me een (oud) wiskundeboek. Hij was een goede meester, maar van wiskunde wist hij weinig en in mijn eentje kwam ik er ook niet echt uit. Daarom was ik niet van plan wiskunde leuk te gaan vinden. Gelukkig veranderde dat op de middelbare school vrij snel. Maar de grootste invloed op mijn keuze voor een loopbaan in het wiskundeonderwijs komt uit de hoek van de Wiskunde Olympiade. In de selectietraining voor de Internationale Wiskunde Olympiade maakte ik pas echt kennis met het plezier van het oplossen van een wiskundeprobleem waar je in eerste instantie helemaal niets mee weet te beginnen. De training werd in die tijd verzorgd door Jan Donkers, Johan Bosman, Fokko van de Bult, Birgit van Dalen en Arjen Stolk. En minstens zo belangrijk voor het ontwikkelen van mijn enthousiasme voor wiskunde waren mijn medeleerlingen in deze olympiadetrainingsgroep.



The Three body problem

2 Welk verhalend boek over wiskunde zou jij je collega's aanraden te lezen?

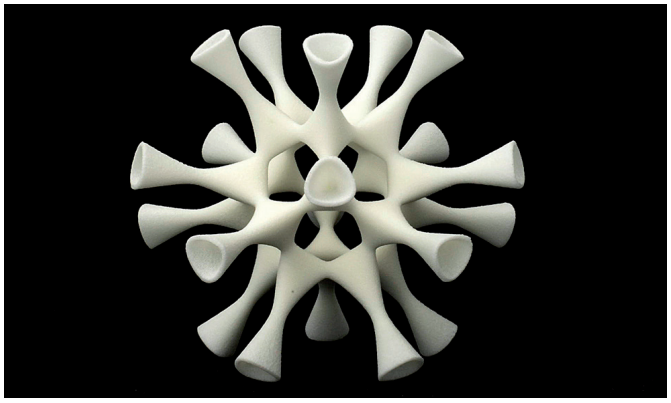
Ik heb laatst *The three body problem* van Catherine Shaw uitgelezen, een leuke detective over drie vermoorde wiskundigen in Cambridge, eind 19e eeuw. Naast de hoofdrol die wiskunde erin speelt, is deze roman ook een aanrader vanwege het mooie tijdsbeeld. Hoewel er nog veel werk te verzetten is voor het verbeteren van de gendergelijkheid anno 2019, doet deze roman je (weer eens) beseffen dat het er in 1888 nog veel beroerder voor stond.

3 Welke meetkundige stelling heeft voor jou schoonheid en verrassing?

In de training voor de Wiskunde Olympiade heb ik als deelnemer en als trainer heel wat meetkundige stellingen voorbij zien komen: Ceva, Menelaos, Pascal, Desargues en Simson, om er een paar te noemen.
Maar de grootste verrassing en vooral het grootste plezier zit voor mij in een veel eenvoudigere stelling, de omtrekshoekstelling: vier punten A, B, C en D liggen in deze volgorde op een cirkel dan en slechts dan als $\angle ABD = \angle ACD$. Door zijn eenvoud en door het feit dat hij overal opduikt, heeft deze stelling iets magisch. Ook als een meetkundeopgave alleen maar over driehoeken en lijnen lijkt te gaan, komt er met de omtrekshoekstelling vaak toch een cirkel om de hoek kijken. En bijna altijd blijkt die cirkel een belangrijke stap in de richting van de oplossing.

4 Welk kunstwerk moet volgens jou door elke wiskundeleraar gezien worden?

Omdat ik ervan uitga dat elke wiskundeleraar de



Wiskundige objecten van Oliver Labs

Prentententoonstelling van Escher, inclusief invulling van het ontbrekende deel door Hendrik Lenstra, Bart de Smit en collega's, al heeft gezien, wil ik hier wat minder bekend werk noemen. Oliver Labs maakt prachtige wiskundige objecten op basis van algebraïsche vergelijkingen. Deze figuren worden geprint met een 3D-printer, of, als ze te veel singulariteiten bevatten, gebrand in glas.
(Zie *blog.mo-labs.com*)

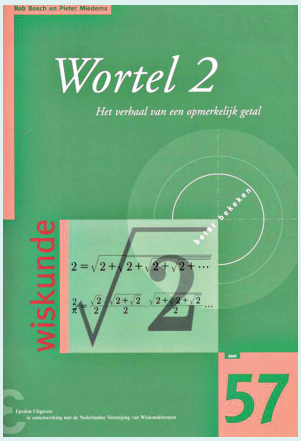
? 5 Welk advies geef jij je collega's?
Wiskunde leer je het best door het zelf te doen, dus grijp alle mogelijkheden aan om je leerlingen op creatieve manieren zelf aan het werk te zetten. Ict kan helpen met simulaties, spelletjes en intelligente feedback. Over dat laatste gaat mijn promotieonderzoek. Maar ook zonder ict is er veel mogelijk, zoals het spel *Wiskunde 30 seconden.*

Over de auteur

Sietske Tacoma is promovenda aan het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Ze doet onderzoek naar het ontwerp en de effecten van geautomatiseerde feedback in universitair statistiekonderwijs. De afgelopen zes jaar zat ze namens het Freudenthal Instituut in de redactie van *Euclides*.

Verschenen

Wortel 2



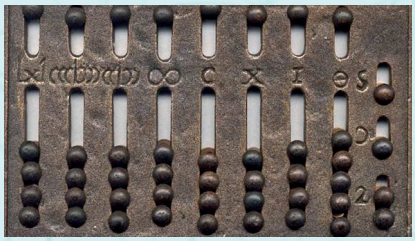
Titel: Wortel 2
Ondertitel:
Het verhaal van een opmerkelijk getal,
Zebra reeks deel 57
Auteur: Rob Bosch en Pieter Miedema
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam
ISBN: 978-90-5041-178-3
Prijs: € 10,00 (68 pagina's; paperback)

De schok was groot toen men in die tijd ontdekte dat er getallen bestaan die niet de verhouding zijn van twee natuurlijke getallen. Dergelijke getallen noemen we irrationale getallen. Dit boekje gaat over een van de bekendste irrationale getallen: $\sqrt{2}$. Het getal $\sqrt{2}$ komen we in de wiskunde op diverse plaatsen tegen zoals in de goniometrie. De tekst bevat naast een aantal opgaven ook suggesties voor eigen onderzoek

Wis en Waarachtig

Romeinen: geen grote wiskundigen

De oude Romeinen ontwikkelden vele nieuwe technieken in bouw en architectuur. In het oude Rome had men fonteinen, centrale verwarming, ondergronds riool en openbare toiletten. Maar als je denkt dat daarvoor de nodige wiskunde werd ontwikkeld, dan heb je het mis. De Romeinen maakten veelal gebruik van eenvoudige toegepaste wiskunde om praktische problemen op te lossen. Ook elementaire rekenkunde werd gebruikt in de handel, maar men was tevreden met vuistregels. Interesse in het waarom hadden de Romeinen niet of nauwelijks. Merkwaardig genoeg hadden de Romeinen weinig interesse in de Griekse trigonometrie, die van grote waarde had kunnen zijn, bijvoorbeeld in de bouwkunde en de astronomie.



Romeinse abacus

En de Juliaanse kalender dan? Deze bevatte de schrikkeljaren met een extra dag en maakte gebruik van wat complexere wiskunde. De kalender werd ontwikkeld door Sosigenes van Alexandrië, een Griekse astronoom... Boethius, wijsgeer en staatsman, die leefde tegen het einde van het keizerrijk, wordt soms wel eens een van de meest vooraanstaande wiskundigen van het oude Rome genoemd. Hij schreef boeken over meetkunde, rekenkunde, astronomie en muziek. Zijn boek over meetkunde bevat alleen maar de eenvoudiger stellingen uit de *Elementen* van Euclides, maar zonder bewijs. De andere boeken waren van hetzelfde laken een pak, maar toch hebben zijn boeken de nodige invloed gehad: ze werden uitgebreid gebruikt in de middeleeuwse kloosterscholen.
In de tweede Punische oorlog werd Syracuse belegerd door de Romeinen. Hierbij werd Archimedes vermoord. Misschien was deze moord wel de grootste bijdrage van de Romeinen in de geschiedenis van de wiskunde.

Bron: https://www.irishtimes.com
Aangedragen door Dick Klingens

6174 mysterieus?

Neem een getal van vier cijfers, niet allemaal gelijk. Zet de cijfers van groot naar klein. Draai dit getal om en trek het af van het eerste getal. Herhaal deze procedure.

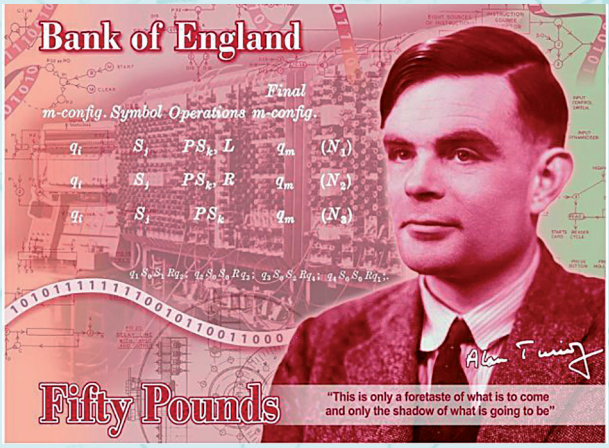
Voorbeeld:
5200 – 0025 = 5175
7551 – 1557 = 5994
9954 – 4599 = 5355
5553 – 3555 = 1998
9981 – 1899 = 8082
8820 – 0288 = 8532
8532 – 2358 = 6174
7641 – 1467 = 6174
Je ziet dat je vanaf nu altijd op 6174 uitkomt!
In 1949 werd dit ontdekt door de Indiase wiskundige Kaprekar. Het blijkt dat je voor elk viercijferig getal op 6174 uitkomt, mits het startgetal niet bestaat uit vier gelijke cijfers. Het gaat ook nog eens redelijk snel, nooit meer dan zeven stappen:
Wellicht kende je deze procedure voor getallen van drie cijfers met als eindgetal 495. Bij andere getallen tot en met tien cijfers geeft de procedure geen of minstens twee eindgetallen:

aantal stappen	aantal start-getallen
0	1
1	356
2	519
3	2124
4	1124
5	1379
6	1508
7	1980

aantal cijfers	eindgetallen
2	geen
3	495
4	6174
5	geen
6	549945, 631764
7	geen
8	63317664, 97508421
9	554999445, 864197532
10	6333176664, 9753086421, 9975084201

Meer lezen? Zie de bron: *https://plus.maths.org*

Turing op bankbiljet



Concept van het nieuwe 50-pond-biljet

Alan Turing, de briljante wiskundige die wordt gezien als de grondlegger van de informatica en kunstmatige intelligentie en die tijdens de Tweede Wereldoorlog de Enigma-code van de Duitsers ontcijferde, komt op het nieuwe Britse bankbiljet van 50 pond te staan. 'Het werk van Turing heeft een enorme invloed gehad op hoe we vandaag leven', zei Mark Carney van de Bank of England. 'Turing is een reus op wiens schouders velen staan.'
Tijdens de Tweede Wereldoorlog werkte Turing voor de Britse buitenlandse inlichtingendienst. In het diepste geheim kraakte hij met zijn team de Enigma-code van

> "Turing is een reus op wiens schouders velen staan."

de Duitsers, waardoor de geallieerden versleutelde berichten van de nazi's konden ontcijferen. De oorlog zou hierdoor zeker twee jaar korter hebben geduurd. Daarnaast was Turing een pionier bij de ontwikkeling van de elektronische rekenmachine en computers. In 1950 beschreef hij een experiment dat nu bekend staat als de Turingtest, waarbij hij onderzocht of een machine menselijk kon lijken.

Toch was het decennialang ondenkbaar dat het portret van Turing ooit op een bankbiljet zou prijken: zeven jaar na het einde van de Tweede Wereldoorlog werd de wiskundige veroordeeld omdat hij een homoseksuele relatie had – iets wat op dat moment in Groot-Brittannië was verboden. Als straf werd hij chemisch gecastreerd door middel van een experimentele hormoonkuur.
Turing mocht bovendien niet meer werken voor de veiligheidsdiensten, omdat homoseksuelen geen toegang kregen tot vertrouwelijke informatie.
Een jaar later, in 1954, kwam Turing om het leven door een cyanidevergiftiging. Na onderzoek vele jaren later bleek dat hij zelfmoord had gepleegd. Pas in 2013 kwam er eerherstel en kreeg hij postuum gratie van koningin Elizabeth. In 2015 kwam er een film uit over het leven van Turing, *The Imitation Game*, met Benedict Cumberbatch in de hoofdrol. In 2017 volgde de 'Alan Turing Wet', waardoor alle homoseksuelen die waren veroordeeld voor 'misdaden' die nu legaal zijn, een pardon kregen.
De Bank of England maakte eerder bekend dat zij een wetenschapper op het nieuwe biljet wilde afbeelden en vroeg het publiek mee te denken over wie dat zou kunnen zijn. Er kwamen 227.299 reacties en er werd een shortlist samengesteld van twaalf Britten, onder wie Charles Babbage, die in 1822 de eerste computer bouwde; Rosalind Franklin die het dna ontdekte; en de natuurkundige Stephen Hawking.

Het nieuwe biljet komt in 2021 in omloop. Het briefje van 50 pond wordt in het dagelijkse leven weinig gebruikt, ook al zijn er op dit moment zo'n 344 miljoen exemplaren in roulatie. Behalve het portret van Turing komt er ook een uitspraak van de wetenschapper op te staan: 'Dit is slechts een voorproefje van wat gaat komen en slechts de schaduw van wat er zal zijn.'

Bron: *de Volkskrant* 16 juli 2019

© Tekening achtergrond: Sanne Kuiper

Rob van Oord

Onmetelijke gangen naar de workshops van verlangen

NWD 25

Op 1 en 2 februari 2019 vonden de 25e Nationale Wiskunde Dagen plaats, eenmalig in de Koningshof te Veldhoven in plaats van het vertrouwde Noordwijkerhout. Rob van Oord geeft een impressie van de plenaire lezingen.

Plaatsbepaling

De start van deze NWD werd verzorgd door de oprichter van de NWD, Jan de Lange. Op de voor hem typerende manier, vol anekdotes en verrassende kwinkslagen werd duidelijk waarom deze NWD in Veldhoven plaatsvonden en niet in Noordwijk. Wie naar het noorden zoekt met zijn IPhone, krijgt een andere richting dan wie zoals een echte padvinder een kompas gebruikt. Het magnetische noorden heeft te maken met een voortdurend bewegende declinatie t.o.v. het geografische noorden. Dit jaar is die van 1° 34' in 1994 naar 1° 09', dus 25 minuten, opgeschoven.
Dus is het logisch dat we nu na 25 jaar in Veldhoven terecht zijn gekomen.

> "Uit een chaos aan data kun je met wiskundige analyse van dynamische systemen toch iets zinvols halen."

Analyse van dynamische data

Vervolgens kregen we een betoog van Sjoerd Verduyn Lunel over zijn onderzoek naar het vaststellen of een patiënt lijdt aan astma of aan COPD. Hierbij wordt een (vrij nieuwe) techniek van wiskundige analyse van dynamische data gebruikt. Het gaat hierbij niet om het oplossen van een vergelijking, maar om het stellen van de juiste vraag. Longartsen hebben door metingen van trillingen in de longen veel data gegenereerd.

Het blijkt dat het gebruik van gemiddelden geen verschil laat zien tussen beide soorten patiënten. Maar als je groepjes data bij elkaar neemt dan kun je via een plaatje van een kansverdeling een attractor zoeken. Die blijkt verschillend bij beide longaandoeningen. Er verschenen bekende plaatjes met bifurcaties op het scherm zoals die van de Lorenz-attractor, die voldoet aan de logistische vergelijking $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ met $0 < x < 1$ en $2{,}4 < r < 4{,}0$. Kortom uit een chaos aan data kun je met wiskundige analyse van dynamische systemen toch iets zinvols halen.

Avonduren

De avond begon traditioneel met een optreden. Dit keer mochten er vliegtuigjes met vragen en woorden op het toneel gegooid worden. Hoogleraar wetenschapscommunicatie Ionica Smeets, cabaretier en

V.l.n.r: Ionica, Jan en Tom

wiskundige Jan Beuving en pianist Tom Dicke wisten die op hilarische wijze af te handelen. Met af en toe een lied. Het lied over de sinus en de cosinus die een kwart periode achter elkaar lopen (en ook zo gezongen werd) vroeg weer de nodige concentratie. Ook de breeklijnen van de chocoladerepen van Tony's Chocolonely werden kritisch ontleed.

Elke deelnemer kreeg als cadeau een speciaal voor de NWD deelnemers ontworpen spel mee naar huis. 'Resolf' is (zelfcorrigerend) leermateriaal waarin leerlingen door creatief en probleemoplossend te denken, de reken-wiskunde puzzel (willen) oplossen. Het boekje met opgaven om mee te beginnen kun je vinden op de NWD site[1].
Zaterdagochtend was een voor ons onbekend parcours uitgezet voor de Funrun. Iets korter dan voorheen, omdat 'er in de Koningshof al heel veel meters gelopen zijn' door de onmetelijke gangen....

Tot slot

Na de workshopronde zagen we hoe je wiskunde kunt gebruiken om een choreografie voor een dans te definiëren. Tom Verhoeff onderzoekt hoe je alle permutaties van n dingen (zeg de getallen van 1 t/m n) kunt krijgen door enkel verwisselingen van twee naasten. Dit zijn de zogenaamde sporen van Lehmer. Het 'spoor' van 1 blauw 2 groen en 2 rood werd in beeld gebracht door de dansgroep van Roos van Berkel[3]. De dansers hadden kleding in die kleuren aan en voerden al dansend de wisselingen van twee naasten uit naar telkens een andere permutatie van deze vijf. Op het grote scherm kon je de dans volgen door gelijktijdige wisselingen van gekleurde blokjes.

All parts are working....

Met Matt Parker is weer een inspirerende Brit (geboren in Australië) gestrikt voor de slotlezing. Hij is een stand-up mathematician die op de BBC en op scholen optreedt met op wiskunde stoelende grappigheden. Voorspellen van het laatste getal van een barcode, tegenwerkende tandwielen op posters, zie de afbeelding op deze pagina, het maken van een spreadsheet van een digitale foto (je krijgt een veld vol blauwe, groene en rode pixels, alle met een intensiteit van 0 (= zwart) tot 255). En ja hoor bij het inzoomen zie je zijn olijke hoofd opdagen. Op YouTube promoot hij zijn boek *Humble Pi* over fouten die met wiskunde gemaakt zijn.

Op de site vind je het volledige artikel van Rob waarin hij ook verschillende workshops bespreekt, waaronder de workshop 'Wiskunde daar zit wat in' die hij gaf met Marjan Botke. Ook staat daar een hand-out waarmee je zelf aan de slag kunt gaan.
Zie ook Robs artikel in *Nieuw Archief voor wiskunde: http://www.nieuwarchief.nl/series5/pdf/naw5-2018-19-2-093.pdf*

vakbladeuclides.nl/952oord

Noten

[1] *https://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen/resolf-cadeau-25-jaar-nwd*
[2] *https://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen/handouts-presentaties-en-fotos-2019*
[3] *https://www.cursor.tue.nl/nieuws/2019/februari/week-1/stelling-van-lehmer-in-beweging/*

Over de auteur

Rob van Oord is docent wiskunde, van augustus 1974 tot augustus 2014 op het Coenecoop College in Waddinxveen, daarna als invaller op scholen in de regio. Hij is voorzitter van de NVvW werkgroep havo-vwo en redactielid van de Zebra-reeks.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Notulen

NVvW-Jaarvergadering 2018

zaterdag 3 november 2018, Veenendaal

Opening

De voorzitter, Ebrina Smallegange, heet iedereen van harte welkom en opent de vergadering. Van de bestuursleden zijn Erik van der Hout en Hester Vogels verhinderd. De ereleden Joop van Dormolen, Hans van Lint en Jan Maassen hebben de secretaris bericht dat zij verhinderd zijn. Afgevaardigden van het Platform VVVO en de FvOv worden welkom geheten, evenals een afgevaardigde van de Vlaamse vereniging voor wiskundeleraren.

Jaarrede

In de jaarrede stipt de voorzitter diverse ontwikkelingen aan, gekoppeld aan de thema's: de wiskunde die we aan onze leerlingen willen leren, de mensen die wiskunde geven, hoe we wiskunde geven en hoe we ons onderwijs toetsen. Vernieuwde elementen in het havo-vwo curriculum worden vermeld, evenals de wens om het vmbo curriculum te vernieuwen. Het proces curriculum.nu is nog in volle gang en kan rekenen op een constructieve, maar kritische inzet van bestuur en werkgroepen van de vereniging. Ook de trage ontwikkeling m.b.t. rekenonderwijs wordt vermeld. Het bestuur is bezorgd over het lerarentekort voor wiskunde. Oplossingen om dit tekort terug te dringen mogen niet ten koste gaan van de vakdidactische en vakinhoudelijke kwaliteiten van de docenten. Om de kwaliteit van de docent op peil te houden, biedt de vereniging conferenties, symposia en trainingen voor examenvoorbereiding aan. En natuurlijk het vakblad *Euclides* en de facebookgroep. Het jaarlijkse overleg met CvTE geeft ons de mogelijkheid om buiten de hectiek rond examens mee te denken over verbeteringen van de examens. De voorzitter besluit met de oproep aan de leden om zich vooral te laten horen en het bestuur te voeden met hun vragen en opmerkingen.

Wereldwiskunde Fonds 25 jaar

Evert van de Vrie, voorzitter van het WwF, kijkt terug op 25 jaar WwF. Veel leden dragen via de contributie bij aan dit fonds. Daarnaast worden via veilingen van wiskundeboeken en donaties fondsen geworven, die het WwF in staat stellen om veel kleinschalige projecten

te steunen met materiaal om wiskunde te kunnen leren en door studenten en docenten beter toe te rusten om dit vak te kunnen geven. In het boekje *Wereldwiskunde Fonds: 25 jaar. Verbeteren van wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden* staan diverse projecten beschreven. Het eerste exemplaar van dit boekje (bekostigd uit sponsorgelden) wordt aangeboden aan een van de leden die precies vandaag 25 jaar lid is van de NVvW.

Notulen van de jaarvergadering van 4 november 2017

De notulen worden goedgekeurd, met dankzegging aan de secretaris.

Jaarverslagen 2017/2018

Het jaarverslag van de NVvW en het jaarverslag van *Euclides* worden goedgekeurd.

Financiën

In zijn toelichting op de balans benadrukt de penningmeester het beleid om spaarpotjes te maken voor uitgaven voor bijvoorbeeld een *Euclides*-special en het 100-jarig jubileum. Uit de toelichting op de exploitatierekening valt op dat de contributie-inning voorspoedig verloopt. De bijdragen uit de verkoop van Zebraboekjes zijn welkome inkomsten. De detacheringskosten van db-leden en van hoofd- en eindredacteur van *Euclides* en de vergoeding voor de beleidsmedewerkster zijn bij elkaar aanzienlijk, maar verantwoord, gezien het werk dat voor de vereniging verricht moet worden en de uitstraling die de vereniging als gevolg van die inspanning heeft. De penningmeester ziet geen aanleiding de contributie te verhogen en dankt ten slotte Peter en Heleen van der Ree voor hun zorgvuldige financiële administratie.
De kascommissie, bestaande uit de heren Kop en Van Barneveld hebben de jaarrekening over het boekjaar 2017-2018 gecontroleerd en geconstateerd dat het geheel op de juiste wijze is verantwoord. Zij stellen voor de penningmeester te dechargeren voor het gevoerde financiële beleid. Hiermee wordt met applaus ingestemd. De nieuwe kascontrolecommissie bestaat uit de heer Kop en mevrouw Van Vliet.

Bestuursverkiezing

Gert de Kleuver, Lidy Wesker, Gert Treurniet, Tanja Groenendaal, Michiel Doorman en Wim Caspers zijn aftredend. Ze stellen zich herkiesbaar voor een nieuwe termijn. [red: Op 16 januari 2019 kreeg het bestuur het verdrietige nieuws dat Gert Treurniet is overleden. In *Euclides* 95-5 is een in memoriam te lezen.]
Er hebben zich geen tegenkandidaten gemeld. De vergadering steunt met applaus hun herverkiezing voor een volgende termijn.

Rondvraag en sluiting

Bij het bestuur is het verzoek binnengekomen om voor de volgende jaarvergadering voorzieningen te scheppen zodat het voor leden mogelijk is om contact met elkaar te zoeken om samen naar de jaarvergadering te komen. Dit gaat het bestuur uiteraard doen.

De voorzitter sluit de jaarvergadering en wenst de aanwezigen een prettige studiedag toe.

Jaarverslagen NVvW en *Euclides*

Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 2 november 2019** staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van *Euclides* jaargang 95 nummer 2.

vakbladeuclides.nl/952nvvw

vakbladeuclides.nl/952euclides

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2019

za 2/11 — Veenendaal
Jaarvergadering/studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

vr 8/11 — Utrecht
Bespreking Alympiade-opdracht en
Wiskunde B-dag-opdracht met docenten
Organisatie: Freudenthal Instituut.

vr 22/11 — LANDELIJK
Alympiade en Wiskunde B-dag
Organisatie: Freudenthal Instituut.

2020

ma 20/01 do 30/01 — LANDELIJK
Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vr 31/01 za 01/02 — NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

wo 12/2 — LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 95

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	17 december 2019	14 oktober 2019
4	28 januari 2020	18 november 2019
5	17 maart 2020	06 januari 2020
6	05 mei 2020	02 maart 2020
7	23 juni 2020	27 april 2020

CASIO

Casio fx-CG50

Voor uw onderwijsbehoeften, nu en in de toekomst!

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

De emulator software werkt ook in combinatie met laptop of digitaal schoolbord.

De perfecte rekenmachine met emulator!

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

Kom ook naar het Noordhoff Wiskundecongres!

21 november 2019
Gooiland Events in Hilversum

Op donderdag 21 november organiseert Noordhoff het Wiskundecongres, hét vakcongres voor wiskundedocenten. Laat je tijdens deze dag meenemen, inspireren en vermaken op de toplocatie van deze editie; Gooiland Events in Hilversum. Met o.a. René Kneyber als openingsspreker en workshops over formatief toetsen, curriculum.nu en gepersonaliseerd leren.

Voeg je deelname aan het Wiskundecongres ook toe aan jouw lerarenportfolio.nl!

Kijk voor meer informatie op www.wiskundecongres.nl

MODERNE WISKUNDE

& GETAL RUIMTE

Noordhoff

Brengt je verder