Deze keer gebruiken wij, uiteraard in overleg met Harm, als uitwerking van puzzel 94-6 de mooie inzending van Harm Bakker. Behalve de antwoorden op de gestelde vragen stelt hij nog een aantal interessante zaken aan de orde. Wij hebben voor de overzichtelijkheid de delen waar de antwoorden op de vragen staan voorzien van een blauwe ondergrond.
Lieke en Wobien

Gekletter van Cevianen*

Harm Bakker

15 juni 2019

Inhoudsopgave

1 Inleiding **2**

2 Opgave 1 .... **3**
- 2.1 *BE* is een zwaartelijn 3
- 2.2 *AD* is bissectrice en *BE* is zwaartelijn 4
- 2.3 *BE* is zwaartelijn en *CF* is hoogtelijn 5
- 2.4 Het hele plaatje 6

3 Opgave 2: construeren **7**
- 3.1 Constructie bij gegeven hoek en lijnstuk 7
- 3.2 Nog niet beantwoord 7

4 **Opgave 3: relatie tussen zijden** **8**
- 4.1 Construeerbaarheid 10

5 **Relaties tussen de hoeken** **12**
- 5.1 Versie 1 12
- 5.2 Versie 2 14

6 **Opgave 4a** **15**

7 **Opgave 4b** **16**

8 **Opgave 5** **17**

9 **Vadertrots** **18**

A **Stelling van Ceva** **19**

B **Bissectricestelling** **20**

*Noot van Lieke en Wobien: Deze leuke titel wordt nader verklaard in hoofdstuk 9 op blz. 18

1 Inleiding

Deze opdracht gaat over driehoeken en over cevianen in zo'n driehoek. Onder een ceviaan verstaan we een lijn(-stuk) dat een hoekpunt van de driehoek verbindt met een punt op de overstaande zijde. Bekende cevianen zijn bissectrices, zwaartelijnen en hoogtelijnen. Van deze bijzondere cevianen kennen we eigenschappen:

- de drie bissectrices van de hoeken van een driehoek zijn concurrent (gaan door één punt)
- de drie zwaartelijnen in een driehoek zijn concurrent.
- de drie hoogtelijnen in een driehoek zijn concurrent.

De stelling van Ceva formuleert een aardige eigenschap in het geval drie cevianen in een driehoek concurrent zijn. Zie bijlage A voor de stelling en een bewijs.
In bijlage B wordt de zogenaamde bissectricestelling (met bewijs) gepresenteerd.

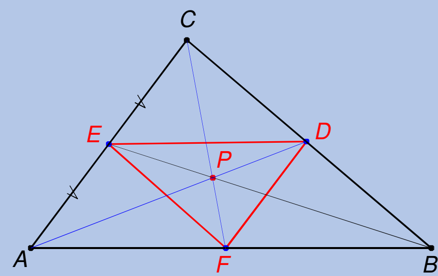
In plaats van drie bissectrices, drie zwaartelijnen of drie hoogtelijnen in een driehoek te bekijken, gaan we in deze opdracht situaties onderzoeken waarbij een bissectrice, een zwaartelijn en een hoogtelijn concurrent zijn. Dat blijkt een bijzondere configuratie te zijn, waaraan van alles valt te ontdekken en te rekenen.

2 Opgave 1

In alle gevallen die we in deze paragraaf gaan bekijken, gaan we uit van de situatie dat de drie cevianen AD, BE en CF concurrent zijn. We noemen zo'n driehoek voorlopig maar een Ceva-driehoek. Door extra voorwaarden aan de cevianen te stellen, komen we bijzondere eigenschappen op het spoor.

2.1 *BE* is een zwaartelijn

We bekijken de situatie waarin de ceviaan BE de zwaartelijn uit hoek B is: zie figuur 1



Figuur 1: Evenwijdige lijnstukken

Stelling 1 *In de situatie van figuur 1 is lijnstuk FD evenwijdig aan zijde AC.*

Bewijs: De lijnstukken AD, BE en CF zijn concurrent. De stelling van Ceva geeft dan dat geldt

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1 \tag{1}$$

Het punt E is het midden van AC en dus is $CE = EA$. Dit toevoegen aan de gelijkheid (1) geeft

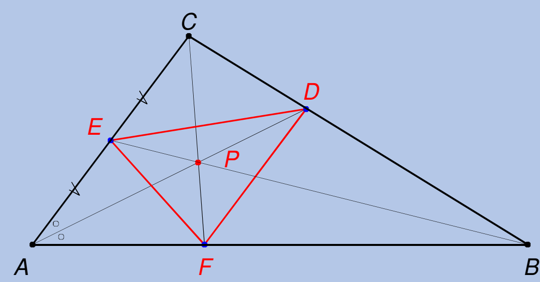
$$\frac{BD}{DC} = \frac{FB}{AF} \tag{2}$$

maar dan ook

$$\frac{BD}{BC} = \frac{FB}{BA} \tag{3}$$

Maar dat betekent dat ΔBAC een vergroting is van ΔBFD, waaruit volgt dat FD en AC evenwijdig zijn.

2.2 *AD* is bissectrice en *BE* is zwaartelijn



Figuur 2: Gelijkbenige driehoeken

In de situatie van figuur 1, waarin we weten dat FD evenwijdig is aan AC, weten we ook dat $\angle FDA = \angle DAC$ (Z-hoeken). Is de ceviaan AD de bissectrice van hoek A (figuur 2), dan is dus ook $\angle DAC = \angle DAB$. Ofwel: $\angle FDA = \angle FAD$. Maar dat betekent dat driehoek FAD gelijkbenig is.

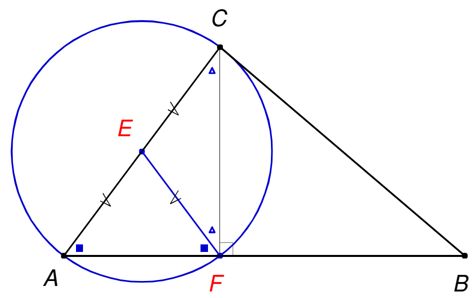
Er is in deze situatie nog iets aardigs te zien. De bissectricestelling geeft

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \tag{4}$$

Dit combineren met (2) geeft

$$\frac{FB}{FA} = \frac{AB}{AC} \tag{5}$$

2.3 BE is zwaartelijn en CF is hoogtelijn

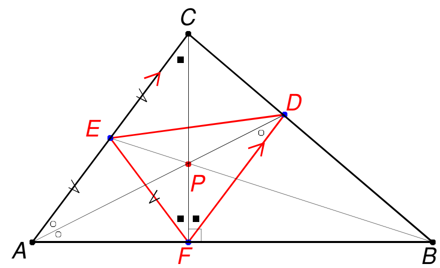


Figuur 3: Gelijkbenige driehoeken

Tot nu toe is de hoogtelijn uit C buiten beschouwing gelaten. Bekijk nu de situatie dat de ceviaan CF de hoogtelijn is en E het midden van AC. Dan is ΔAFC een rechthoekige driehoek. Thales geeft dan dat de punten A, F en C liggen op de cirkel met middellijn AC. Maar dat betekent dat het midden E van AC het middelpunt is van deze cirkel en dat dus $EA = EF = EC$. En hieruit volgt dan weer dat de driehoeken EAF en EFC gelijkbenig zijn.

2.4 Het hele plaatje

We bekijken nu de situatie waarin AD bissectrice is van hoek A, BE de zwaartelijn uit B en CF de hoogtelijn uit C.



Figuur 4: Het hele plaatje

In figuur 4 zijn de conclusies uit de vorige secties samengebracht. Er zijn nog een paar zaken die het waard zijn op te merken.

- DEF is een Ceva-driehoek met concurrentiepunt P .
  Niet wereldschokkend, maar toch leuk.

- CF is bissectrice van $\angle EFD$
  We hebben al geconstateerd dat $\angle EFC = \angle ECF$ (gelijkbenige driehoek). Uit de evenwijdigheid van AC en FD vinden we $\angle ECF = \angle CFD$ (Z-hoeken). En dat leidt samen tot

$$\angle EFC = \angle CFD \tag{6}$$

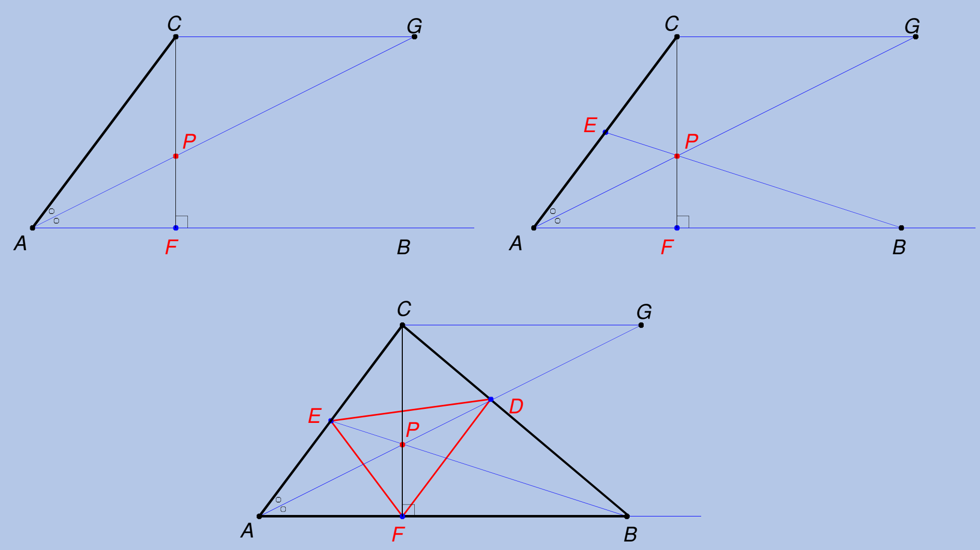
- EB is de zwaartelijn uit E in driehoek DEF .
  Dit volgt direct uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en FBD en het feit dat E het midden is van AC

.

3 Opgave 2: construeren

3.1 Constructie bij gegeven hoek en lijnstuk

Laat gegeven zijn het lijnstuk AC en de hoek tussen AB en AC. Ik kies er voor om AB horizontaal te nemen en het lijnstuk AC onder de gegeven hoek.



Figuur 5: Constructie

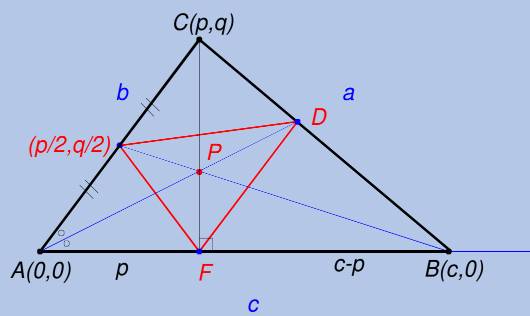
- Uit het bewijs van de bissectrice-stelling halen we een mooie constructie van de bissectrice: construeer het punt G zo, dat CG evenwijdig is aan AB met lengte $CG = CA$. Dan deelt de lijn AG hoek A middendoor.
- Teken de loodlijn CF uit C op AB. Het 'concurrentiepunt' P is het snijpunt van AG met CF .
- Construeer het midden E van lijnstuk AC en snij de lijn EP met de lijn AB om het punt B te vinden.
- Nu is het verder een kwestie van afmaken: de lijnstukken AB en BC tekenen; het snijpunt D van AG en BC tekenen en de lijnstukken DE, EF en FD tekenen.

Merk op dat alle constructies klassiek met passer en liniaal zijn uit te voeren.

3.2 Nog niet beantwoord

- Is de driehoek te construeren als twee zijden zijn gegeven?
- Is er bij twee gegeven zijden altijd zo'n driehoek?

4 Opgave 3: relatie tussen zijden



Figuur 6: Coördinatenstelsel

We brengen een coördinatenstelsel aan met de x-as langs AB en de oorsprong in A. Met de gebruikelijke notatie ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) is $B(c, 0)$.
De coördinaten van C noemen we (p, q). Het midden van AC is dan $E(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q)$ en het voetpunt van de hoogtelijn uit C is $F\,(p, 0)$.
Combineren we het resultaat van opgave 1a met de bissectricesstelling, dan vinden we

$$\frac{p}{c-p} = \frac{AF}{FB} = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \tag{7}$$

In verband met wat verderop volgt, isoleren we hieruit p:

$$p \cdot c = b \cdot (c - p)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$p \cdot c = b \cdot c - b \cdot p$$
$$\Leftrightarrow$$
$$p \cdot c + b \cdot p = b \cdot c$$
$$\Leftrightarrow$$
$$p \cdot (b + c) = b \cdot c$$

waaruit volgt

$$p = \frac{b.c}{b+c} \tag{8}$$

Pythagoras in de linker rechthoekige driehoek levert

$$p^2 + q^2 = b^2 \tag{9}$$

en in de rechter rechthoekige driehoek

$$(c - p)^2 + q^2 = a^2 \tag{10}$$

Deze twee vergelijkingen van elkaar aftrekken elimineert q:

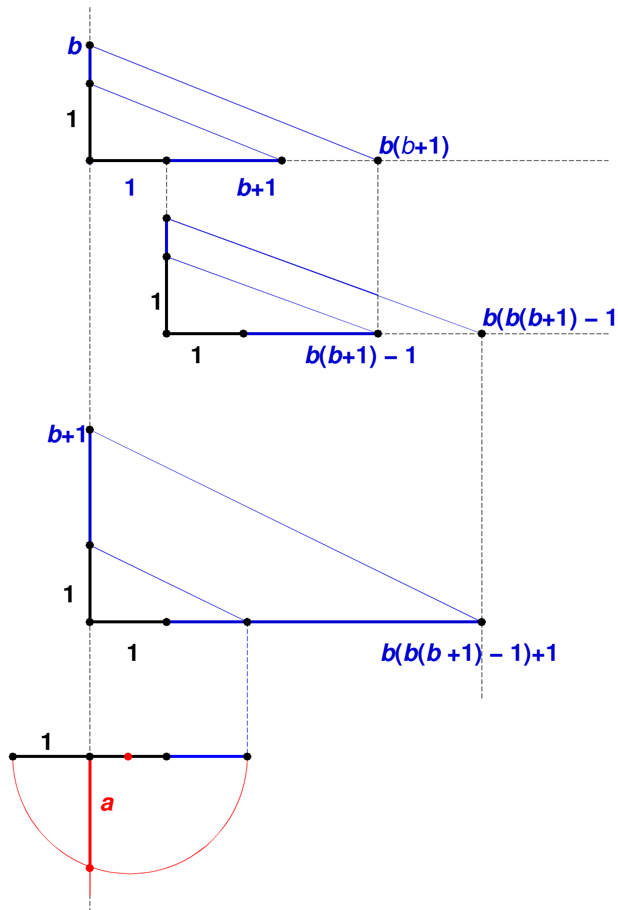
$$\begin{aligned}
& b^2 - a^2 \\
= \quad & \\
& (p^2 + q^2) - ((c - p)^2 + q^2) \\
= \quad & \\
& p^2 - (c^2 - 2cp + p^2) \\
= \quad & \\
& 2cp - c^2 \\
= \quad & \qquad \{ \text{ gebruik (8) } \} \\
& \frac{2.b.c^2}{b+c} - c^2 \\
= \quad & \\
& c^2.\left(\frac{2b}{b+c} - 1\right) \\
= \quad & \\
& \frac{c^2(b-c)}{b+c}
\end{aligned}$$

met als resultaat

$$a^2 = b^2 - \frac{c^2(b-c)}{b+c} = \frac{b^3+b^2.c-b.c^2+c^3}{b+c} \tag{11}$$

4.1 Construeerbaarheid

We kunnen nu nog even terug komen op de in sectie 3.2 nog niet beantwoorde vragen. Relatie (11) laat zien dat bij gegeven lengtes b en c de lengte a geconstrueerd kan worden. Kies (bijvoorbeeld) de lengte c als eenheid. Met behulp van gelijkvormige driehoeken zijn dan de lengtes b^3, b^2 en b te construeren. Vervolgens door optellen en aftrekken de lengtes van de teller en de noemer en daarna (weer met gelijkvormigheid) de breuk. Nu nog de worteltrekken. Dat lukt met de constructie van de middenevenredige (zeg maar Thales). En daarmee is a gemaakt.



Figuur 7: Constructie van a bij gegeven b en c

In figuur 7 is de constructie uitgevoerd voor een gegeven waarde van b, waarbij gebruik is gemaakt van de identiteit $b^3 + b^2 - b + 1 = b(b(b + 1) - 1) + 1$.

De vraag is of het ook lukt om b te construeren bij gegeven a en c, waarbij we c maar weer als eenheid kiezen. Even rekenen:

$$a^2 = \frac{b^3+b^2.c-b.c^2+c^3}{b+c}$$
$\Leftrightarrow$ { kies c als eenheid }
$$a^2 = \frac{b^3+b^2-b+1}{b+1}$$
$\Leftrightarrow$
$$a^2(b+1) = b^3+b^2-b+1$$
$\Leftrightarrow$ { schrijf als polynoomuitdrukking in b }
$$b^3+b^2-(a^2+1)b-a^2+1=0$$

De vraag is of bij willekeurige waarde van a het (positieve) nulpunt van het polynoom is te construeren. We onderzoeken het geval $a = \frac{3}{2}$:

$$b^3+b^2-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2+1\right)b-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=0$$
$\Leftrightarrow$
$$b^3+b^2-\frac{13}{4}b-\frac{5}{4}=0$$
$\Leftrightarrow$
$$4b^3+4b^2-13b-5=0$$

Uitproberen van de waarden $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 5, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{4}$ levert dat het polynoom

$$F(X) = 4X^3 + 4X^2 - 13X - 5 \tag{12}$$

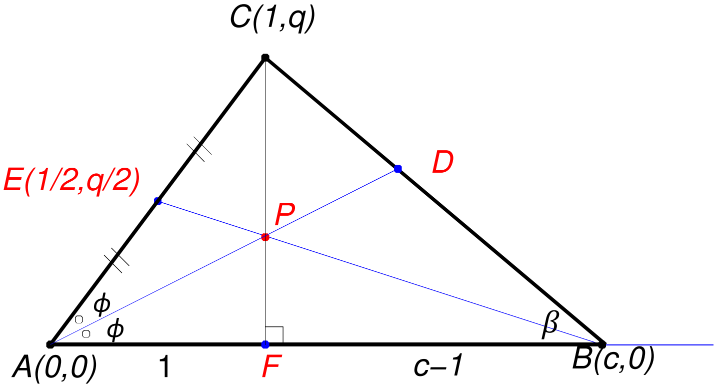
geen rationale nulpunten heeft en dus niet reducibel is over $\mathbb{Q}$. Laat b nu het positieve reële nulpunt van $F(X)$ zijn. Uit de theorie van lichaamsuitbreidingen weten we nu dat de uitbreidingsgraad van het lichaam $\mathbb{Q}[b]$ over $\mathbb{Q}$ gelijk is aan de graad van het (minimaal) polynoom, dus 3. Dit is geen macht van 2 en de algebraïsche theorie van passer en liniaal constructies leert dan dat b niet is te construeren. Samenvattend: we hebben een geval gevonden waarin bij gegeven lijnstukken a en c het lijnstuk b wel bestaat, maar niet met passer en liniaal is te construeren. Maar dat betekent dat er geen constructiemethode is waarmee bij willekeurige zijden a en c de zijde b kan worden geconstrueerd. Omdat uitdrukking (11) redelijk symmetrisch is in b en c, zal het ook wel niet lukken bij gegeven waarden van a en b

5 Relaties tussen de hoeken

We gaan proberen relaties af te leiden tussen de hoeken van de driehoek

5.1 Versie 1

We schalen de lengtes zo, dat $AF = 1$: zie figuur 8.



Figuur 8: Hoeken

Hoek A wordt door de bissectrice verdeeld in twee gelijke delen, zeg $\alpha = 2 \cdot \phi$. Door de keus $AF = 1$ is $PF = \tan(\phi)$ en $q = CF = \tan(2\,\phi) = \frac{2\tan(\phi)}{1-\tan^2(\phi)}$

De lijn EP: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{q}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ \tan(\phi) - \frac{q}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{q}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \tan(\phi) - \frac{q}{2} \end{pmatrix}$

snijden met $y = 0$ geeft

$$\lambda = \frac{\frac{q}{2}}{\frac{q}{2} - \tan(\phi)} = \frac{1}{1 - \frac{2}{q}\tan(\phi)} = \frac{1}{1 - \frac{1-\tan^2(\phi)}{\tan(\phi)}.\tan(\phi)} = \frac{1}{\tan^2(\phi)} \tag{13}$$

Met deze waarde van λ vinden we $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda$. Maar eigenlijk zijn we meer geïnteresseerd in

$$BF = c - 1 = \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(\lambda - 1) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan^2(\phi)} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\tan^2(\phi)}{\tan^2(\phi)}\right) = \frac{1}{\tan(2\phi).\tan(\phi)} \tag{14}$$

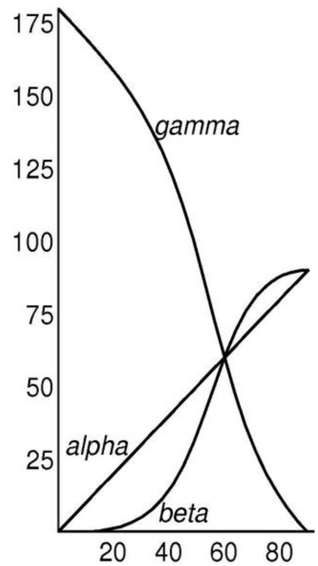
waaruit volgt

$$\tan(\beta) = \frac{CF}{BF} = \tan(2\phi)\,.\tan(2\phi)\,.\tan(\phi) = \tan^2(2\phi).\tan(\phi)$$

ofwel

$$\tan(\beta) = \tan^2(\alpha).\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

Of dit een fraaie vorm is valt over te twisten. Wat we wel zien is dat bij een gegeven hoek α de tangens van β vast ligt en daarmee ook β. En daarmee natuurlijk ook γ.
Hoe zit het met het omgekeerde? We tekenen de grafieken van β en γ als functies van α. Met bijvoorbeeld Mathematica is dat eenvoudig te doen.

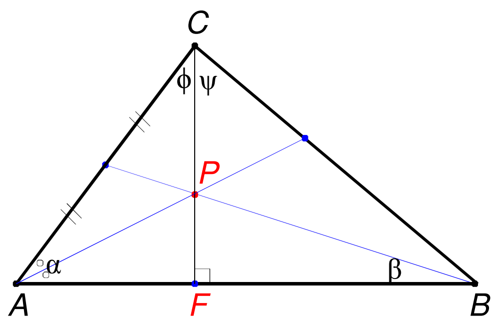


Figuur 9: Verband tussen α, β en γ

De grafieken in figuur 9 zijn alle drie monotoon. Dat betekent dat bij een gegeven waarde van een van de drie de andere twee vast liggen. Mooi is ook het gemeenschappelijke snijpunt bij $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. In de volgende paragraaf komt dit ook aan de orde.

5.2 Versie 2

Nog een aardige relatie tussen de hoeken.



Figuur 10: Nog een relatie tussen de hoeken

We maken in onderstaande gebruik van (5):

$$\frac{FB}{FA} = \frac{AB}{AC}$$

$sin(\gamma)$

$=$ {somregel}

$\sin(\phi).\cos(\psi) + \cos(\phi).\sin(\psi)$

$=$

$\frac{FA}{AC} \cdot \frac{CF}{BC} + \frac{CF}{AC} \cdot \frac{FB}{BC}$

$=$

$\frac{CF}{BC} \cdot \left(\frac{FA}{AC} + \frac{FB}{AC}\right)$

$=$

$\frac{CF}{BC} \cdot \frac{FB}{AC}$

$=$ {gebruik 5}

$\frac{CF}{BC} \cdot \frac{FB}{FA}$

$=$

$\frac{CF}{FA} \cdot \frac{FB}{BC}$

$=$

$\tan(\alpha) \cdot \cos(\beta)$

of, zoals kennelijk gebruikelijker,

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\beta)} \tag{16}$$

6 Opgave 4a

Gevraagd wordt aan te tonen dat de enige gelijkbenige driehoek de gelijkzijdige driehoek is.

We maken gebruik van (de voorlaatste variant van) vergelijking 11:

$$(b+a)(b-a) = b^2 - a^2 = \frac{c^2(b-c)}{b+c} \tag{17}$$

We doen een gevalsonderscheid (waarbij we bedenken dat a, b en c positieve reële getallen zijn).

- $a = b$

Het linkerlid van (17) is nul. Maar dan is $b - c = 0$ ofwel $a = b = c$.

- $b = c$

Het rechterlid van (17) is nul. Maar dan is $b - a = 0$ ofwel $a = b = c$.

- $c = a$

$$(b+a)(b-a) = a^2.\frac{b-a}{b+a}$$

$\Rightarrow$

$$(b+a)^2(b-a) = a^2.(b-a)$$

$\Rightarrow$

$$b - a = 0 \lor (b+a)^2 = a^2$$

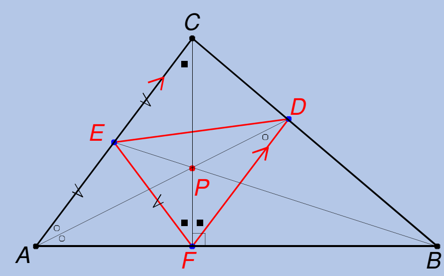
$\Rightarrow$ { voor positieve getallen vervalt de tweede mogelijkheid }

$$b - a = 0$$

Conclusie: $a = b = c$

7 Opgave 4b

Aan te tonen is dat de driehoek gelijkzijdig is als gegeven is dat één van de hoeken 60 graden is. Dit hebben we ook al gezien in paragraaf 5, maar nu kiezen we voor een meer meetkundige invalshoek. We herhalen figuur 4.



Figuur 11: Het hele plaatje

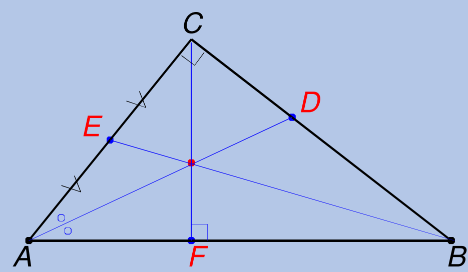
- $\angle A = 60^\circ$.
  Uit vergelijking (5) $\left(\frac{FB}{FA} = \frac{AB}{AC}\right)$ vinden we $\frac{FA}{AC} = \frac{FB}{AB}$
  Als $\angle A = 60^\circ$, dan is $\frac{FA}{AC} = \frac{1}{2}$. Maar dat betekent dat F het midden is van AB en dus dat de hoogtelijn uit C de basis AB doormidden deelt. Maar dan is ΔABC gelijkbenig en dus is $\angle B = \angle A = 60^\circ$ en daarmee ook $\angle C = 60^\circ$.

- $\angle B = 60^\circ$.
  Het is me niet gelukt hierbij een meetkundige argumentatie te vinden.

- $\angle C = 60^\circ$.
  Idem.

8 Opgave 5*

We bekijken nu de situatie waarin hoek C recht is.



Figuur 12: Een rechthoekige driehoek

Even op een rijtje:

- Stelling van Ceva geeft: $\frac{AF}{FB} = \frac{CD}{DB}$
- Bissectricestelling geeft: $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$
- De rechthoekige driehoeken AFC, CFB en ACB zijn gelijkvormig. In het bijzonder geeft dit $\frac{AF}{AC} = \frac{AC}{AB}$

Hieruit vinden we

$$\frac{AF}{FB} = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow FB = AC \tag{18}$$

wat leidt tot

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{AB} = \frac{FB}{AB} \tag{19}$$

Maar dat betekent dat het punt F het lijnstuk AB verdeelt volgens de Gulden Snede.

Maar dan volgt uit $\frac{CD}{DB} = \frac{AF}{FB}$ dat het punt D het lijnstuk CB verdeelt volgens de Gulden Snede

* Noot van Lieke en Wobien over de extra vraag onder opgave 5:
Naar welke beroemde wetenschapper is deze driehoek vernoemd? Wij hadden daarbij iets anders op het oog dan het mooie verhaal van Harm op de volgende bladzijde:

Ook AB/AC=Gulden Snede en dat maakt driehoek ABC een Kepler driehoek, vernoemd naar de wetenschapper Johannes Kepler (1571-1630) die een rechthoekige driehoek beschreef waarvan hypotenusa en de kortste zijde zich verhouden als de Gulden Snede. Met Pythagoras volgt dan dat de derde zijde gelijk is aan wortel van de Gulden Snede, zodat de lengtes van de zijden een meetkundige rij vormen.

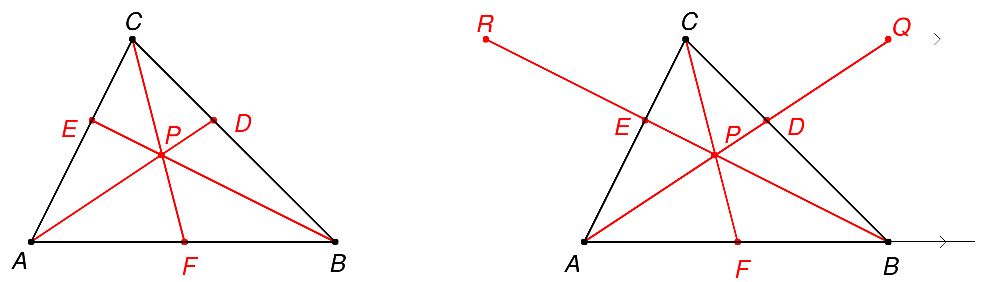
9 Vadertrots

Het feit dat in de opdracht wordt gevraagd de naam te noemen die met deze bijzondere driehoek is verbonden, doet mij vermoeden dat het artikel van Jasbir Chahal en Jaap Top uit het Nieuw Archief (NAW 5/16, 2015) bij de redacteuren bekend is. In dat artikel worden diverse namen in verband gebracht met deze driehoek. In de eerste plaats natuurlijk professor Van der Blij die in 2003 op de lerarendag in Groningen dit probleem (weer) in de publiciteit bracht. Daarnaast zijn buurman Kletter, die hem op het spoor heeft gezet en waarmee nu dit soort driehoeken (op verzoek van van der Blij) wordt aangeduid (in het Nederlands althans). En verder nog de namen van Trigg, Hoyts en Guy en nog enkele.

In de literatuurverwijzing komt nog een naam voor, voor mij wellicht de belangrijkste in het hele artikel. In de tekst wordt aangegeven dat het in artikel [2] is gelukt om met volledig elementaire argumenten alle gebruikte details te bewijzen. Als eerste auteur wordt daar Erika Bakker vermeld, mijn dochter. Zij heeft, geïnspireerd door de Kletter-driehoek met rationale zijden, in haar afstudeerproject gekeken naar rationale punten op een zekere klasse van elliptische krommen. Stap voor stap kan ik haar verslag volgen, maar dat staat nog wel heel ver af van begrijpen.

Inmiddels is ze al een aantal jaren docent wiskunde op een middelbare school. Tijdens haar LIO-jaar heeft ze voor Euclides een serie artikeltjes geschreven over haar ervaringen als beginnend leraar. Misschien aardig om jaargang 88 er nog eens op na te slaan.

A Stelling van Ceva



Figuur 13: Stelling van Ceva

In het inwendige van driehoek ABC is gegeven een punt P . De cevianen AD, BE en CF snijden elkaar in het punt P.

Stelling 2 *(Ceva) In de situatie van figuur 13 geldt*

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CF}{EA} = 1$$

Bewijs:
Construeer door punt C een lijn evenwijdig aan zijde AB en construeer de snijpunten Q en R van de lijnen AD en BE met deze lijn (zie rechter figuur). We merken op:

$$\Delta AFP \sim \Delta QCP \Rightarrow \frac{AF}{QC} = \frac{FP}{CP} \tag{20}$$

$$\Delta BFP \sim \Delta RCP \Rightarrow \frac{BF}{RC} = \frac{FP}{CP} \tag{21}$$

Uit (20) en (21) volgt

$$\frac{AF}{BF} = \frac{QC}{RC} \tag{22}$$

Verder

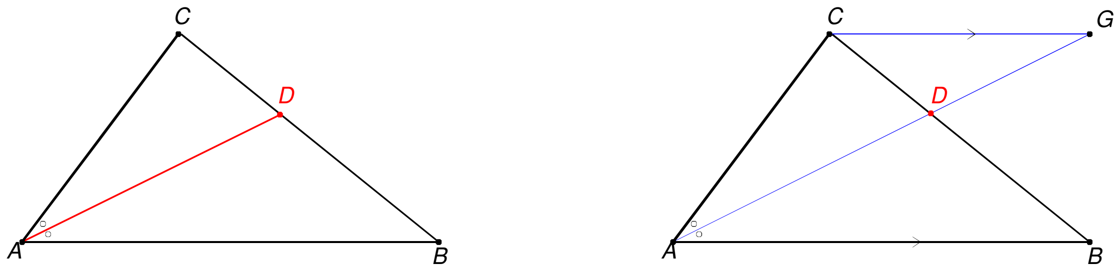
$$\Delta ABD \sim \Delta QCD \Rightarrow \frac{AB}{QC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{QC} \tag{23}$$

$$\Delta \mathrm{ABE} \sim \Delta \mathrm{CRE} \Rightarrow \frac{AB}{RC} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{RC}{AB} \tag{24}$$

Nu geldt:

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{CD} \times \frac{CE}{EA} = \frac{QC}{RC} \times \frac{AB}{QC} \times \frac{RC}{AB} = 1 \tag{25}$$

B Bissectricestelling



Figuur 14: Bissectricestelling

In de driehoek ABC is de ceviaan AD gegeven die de hoek A doormidden deelt.

Stelling 3 *(Bissectricestelling) In de situatie van figuur 14 geldt*

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

Bewijs:
Construeer evenwijdig aan zijde AB een lijn door punt C en snij het verlengde van AD met deze lijn. Noem het snijpunt G.
Dan geldt $\angle CGA = \angle GAB$ (Z-hoeken). Omdat GA de bissectrice is van hoek A (en dus $\angle GAB = \angle GAC$) is $\angle CGA = \angle CAG$. Maar dat betekent dat driehoek CAG gelijkbenig is en dus geldt

$$CG = CA \tag{26}$$

Verder geldt $\Delta ABD \sim \Delta GCD$ en dus (samen met $CG = AC$)

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{GC} = \frac{AB}{AC} \tag{27}$$