EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

EXAMENNUMMER 2019

Besprekingen van de examens wiskunde vmbo (bk en gt) , havo (A en B) en vwo (A, B, C)

Schoolexamen wiskunde D

Alternatief correctievoorschrift

Project werfkracht:
actie tegen het lerarentekort

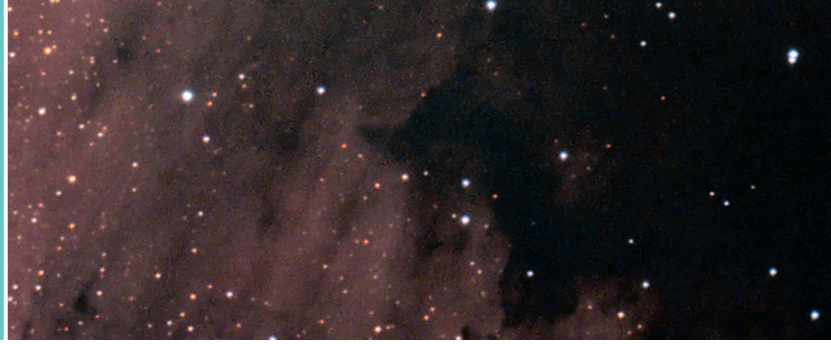
NR.1

JAARGANG 95 - SEPTEMBER 2019

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 95 NR1



IN DIT NUMMER

EXAMEN VMBO-GT
Hugo Duivesteijn — 4

VMBO 2018 DIGITALE EXAMENS
Ruud Jongeling — 6

DE HOEKSTREEP
Jan Beuving — 11

EXAMEN HAVO WISKUNDE A
Henk Hietbrink — 12

EXAMEN HAVO WISKUNDE B
Gerrie Stuurman — 16

KLEINTJE KANSREKENING
Simon Biesheuvel — 19

HET SPRINTTREINTJE
Laurens Quinten — 20

EXAMEN VWO WISKUNDE A
Rob van Oord — 23

EXAMEN VWO WISKUNDE B
Marcel Daems — 26

EEN ONDERSTEUNEND CORRECTIE-VOORSCHRIFT, HOE ZIET DAT ER UIT?
Maarten Müller — 32

EXAMEN VWO WISKUNDE C
Marjan Botke — 36

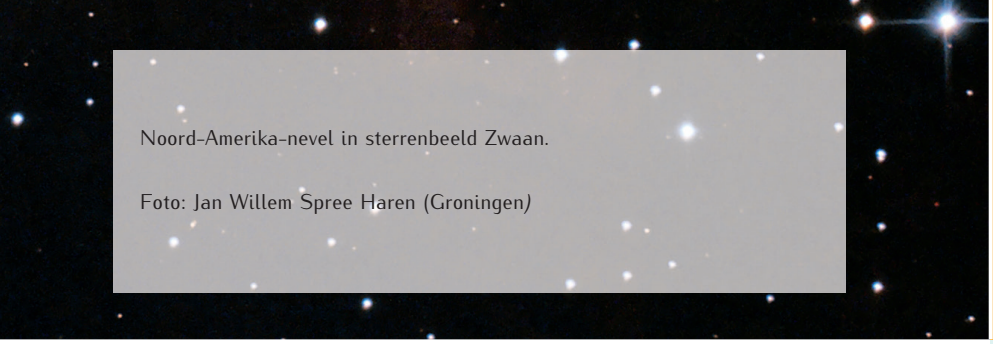
SCHOOLEXAMEN WISKUNDE D
GA DE UITDAGING AAN!
Ruud Stolwijk — 39

WIS EN WAARACHTIG — 42

HET FIZIER GERICHT OP…
WERFKRACHT: ACTIE TEGEN HET LERARENTEKORT
Joke Daemen — 44

PUZZEL
Lieke de Rooij
Wobien Doyer — 46

BOEKBESPREKING
YPE EN IONICA: DE VERRASSENDE VERJAARDAGEN
Ernst Lambeck — 47



Noord-Amerika-nevel in sterrenbeeld Zwaan.

Foto: Jan Willem Spree Haren (Groningen)

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

VERENIGINGSNIEUWS
JAARVERGADERING / STUDIEDAG 2019 48

SERVICEPAGINA 50

Over de foto op de voorkant:
De Noord-Amerika-nevel staat in sterrenbeeld Zwaan, vlakbij de heldere ster Deneb. Het is een zogenaamde emissienevel, een gasnevel ergens in onze eigen Melkweg, waar nieuwe sterren worden geboren.
De nevel is alleen met zeer lichtsterke telescopen waar te nemen, omdat hij vrij zwak is. Fotograferen lukt wel, als je maar lang genoeg belicht en een speciale camera gebruikt, bedoeld voor astrofotografie. Deze foto is zo'n zes uur belicht, en gemaakt met een spiegeltelescoop, gewoon vanuit de achtertuin. De opname is nog wel met 'post-processing' nabewerkt om tot een zo goed mogelijk resultaat te komen.

Kort vooraf

Het examennummer! Met dank aan Hugo Duivesteijn, Ruud Jongeling, Henk Hietbrink, Gerrie Stuurman, Rob van Oord, Marcel Daems en Marjan Botke die het dit jaar aandurfden om na(ast) het corrigeren van de examens, met een bijna onmogelijke deadline, een recensie te schrijven. De eerlijkheid gebiedt te zeggen dat dat niet helemaal geldt voor Ruud: zijn bijdrage was er al een tijdje. Ruud heeft jarenlang de recensie van de papieren versie van het vmbo kb examen verzorgd, maar nu is ook zijn school overgestapt op de digitale variant, zoals inmiddels vrijwel alle scholen. Dus geen recensie van het vmbo kb-examen, maar een analyse van de vaardigheden in de digitale examens van vorig jaar.
Naast de recensies zijn er vier bijdragen binnengekomen die gerelateerd zijn aan het examen. Eén daarvan bewaren we voor de volgende *Euclides*, een verslag van Henri van Bergen over een onderzoek naar de tijd die je nodig hebt om examens van verschillende vakken na te kijken. Ruud Stolwijk maakt voor zijn school de wiskunde D schoolexamens en deelt zijn inspiratiebronnen en een aantal opgaven. Laurens Quinten analyseert een opgave uit het vwo wiskunde A-examen van vorig jaar waarbij de herinneringen aan de sprintetappes van de Tour weer bovenkomen (of van de Vuelta, maar die moet tijdens het schrijven van dit Kort vooraf nog beginnen...). Maarten Müller bespreekt een alternatief voor het correctievoorschrift van het vwo wiskunde B-examen. Zijn suggesties zullen ongetwijfeld stof doen opwaaien. Op het NVvW-forum kun je een bijdrage leveren aan de discussie hierover.
Tot slot is het je hopelijk opgevallen dat het uiterlijk van *Euclides* is vernieuwd. Een iets luchtigere uitstraling, vooruitlopend op de verschijning van nummer 750.
Een mooi schooljaar gewenst namens de hele redactie!

Tom Goris

Hugo Duivesteijn

Examen vmbo-gt

Hugo Duivesteijn bespreekt wederom het vmbo-gt examen. Geen frietzakstandaard-problemen deze keer, maar een 'uitstekend' examen, aldus Hugo. Een N-term van 1,0 doet zoiets al vermoeden.

Inleiding

De afgelopen twee jaar heb ik de recensie voor het vmbo-gt-examen voor dit tijdschrift geschreven. Beide keren ben ik begonnen bij de taligheid van het examen. Na twee keer is het traditie, dus doe ik dat dit jaar weer. Ik denk dat het de examenmakers deze keer heel goed gelukt is om gebruik te maken van toepassingsvragen, zonder dat dit verzandt in enorme lappen tekst waardoor het op de eerste plaats een examen begrijpend lezen zou worden. Een van de meest gehoorde kritieken dit jaar is dat het examen te lang was. Gegeven dat het examen twee uur duurde en er 24 vragen beantwoord dienden te worden, hadden de leerlingen gemiddeld vijf minuten per vraag. Eens zien of het een terechte klacht is.

Paddenstoelen

De vliegenzwam is een rode paddenstoel met witte stippen.

Uit tellingen blijkt dat het aantal vliegenzwammen in Nederland snel afneemt. In 1999 werden 110 000 vliegenzwammen geteld. In 2015 was dat aantal nog maar 41 000.

1 Bereken met hoeveel procent het aantal getelde vliegenzwammen in 2015 is afgenomen ten opzichte van 1999. Schrijf je berekening op.

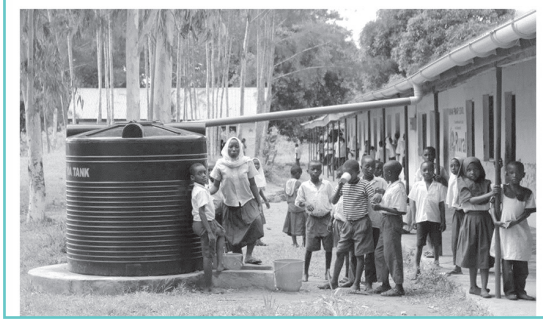
figuur 1

De eerste vier vragen gaan over paddenstoelen, zie figuur 1. Hierin komen het uitrekenen van een percentage met be hulp van een verhoudingstabel, procentuele afnamen uit een formule aflezen, het tekenen van een grafiek bij een formule en het opstellen van een lineaire formule aan bod. Prima vragen. Bij vraag 3, het tekenen van de grafiek die bij de formule hoort, staat op de uitwerkbijlage ook een tabel met gegeven t-waarden. Hierbij moet de leerling alleen nog via de formule het aantal zwammen uitrekenen en invullen. De vier vragen over de paddenstoelen zijn een mooie manier voor de leerling om in het wiskunde-examen te groeien. Niet te makkelijk, maar wel iets wat ze zeker goed geoefend zullen hebben. Wellicht wel ietwat tijdrovend.

Watertank

De volgende vier vragen vallen onder de verzamelnaam 'Watertank'. Vraag 5 en 6 zijn nagenoeg gelijk. Mocht je één van de twee fout doen, dan doe je de andere waarschijnlijk ook fout. In beide gevallen gaat het om een oppervlakte waarop een hoeveelheid neerslag valt, wat moet worden omgerekend in liters.

Scholen in Kenia hebben vaak geen waterleiding, daarom vangen ze het regenwater op in een watertank.
Op de foto zie je een watertank bij een school in Kenia. Het water loopt vanaf het dak van de school via een regenpijp in de watertank.

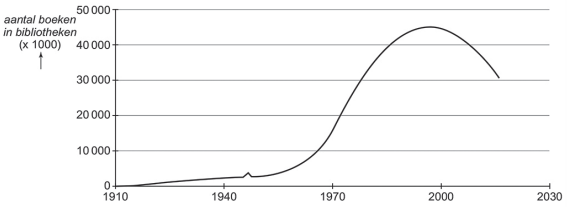


figuur 2

De opgave Watertank is het schoolvoorbeeld van de toepassingsvraag waarbij men zich vragen kan stellen over de toegevoegde waarde van de context. Midden in het eindexamen wiskunde staat een alinea over scholen in Kenia die geen waterleiding hebben, zie figuur 2, en zonder dat dit enige relevante informatie bevat voor het beantwoorden van de vragen. Ik begrijp dat het een soft skill is om de relevante gegevens uit de context te halen, toch vraag ik me ieder jaar weer af of het wiskunde-examen de plaats is om dit te testen. Vraag 7 en 8 zijn wederom prima wiskundevragen. Vraag 7 vraagt je de hoogte van een cilinder te berekenen terwijl je de straal en de inhoud hebt gekregen. Bij vraag 8 wordt de examenkandidaten gevraagd de inhoud van een vergrote watertank uit te rekenen waarvan bij beide cilindervormige tanks de straal bekend is en bij de grootste slechts de inhoud. Deze vragen geven een prima weerslag van de vergaarde kennis van de kandidaten.

Bibliotheken

Alle bibliotheken in Nederland hebben samen veel boeken. Tot de jaren 90 nam het aantal boeken toe, daarna nam het aantal boeken weer af. In de grafiek hieronder zie je het verloop van dit aantal.



Vanaf 1970 benaderen we het aantal boeken in alle bibliotheken samen in Nederland met de formule

$$A = -40t^2 + 2160t + 15\,840$$

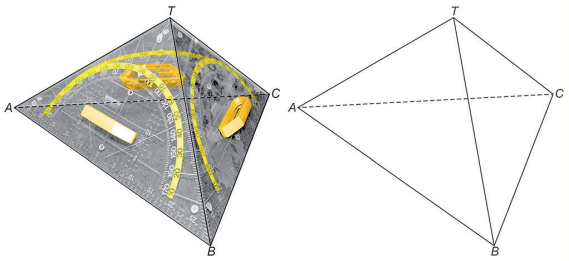
Hierin is A het aantal boeken (× 1000) en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1970.

figuur 3

Vraag 9 tot en met 11 vallen onder de noemer 'Bibliotheken'. Een mooie verzameling inzichtvragen en algebraïsche vaardigheden. Als we het antwoordmodel bekijken is het bijzonder dat voor vraag 11 vier punten te behalen zijn, waarbij de methode van inklemmen gebruikt wordt en er drie onafhankelijke punten te verdienen zijn voor het invullen van $t = 26$, $t = 27$ en $t = 28$. In de vraag wordt letterlijk een berekening gevraagd, maar het antwoordmodel bevat geen berekeningen. Ik neem aan dat de correctoren hier wat vrijer mee zijn omgegaan, maar afgezien hiervan zijn dit zeer degelijke examenvragen.

Piramide van geodriehoeken

Madelon heeft drie even grote bordgeodriehoeken schuin tegen elkaar gezet zodat er een piramide wordt gevormd. Op de foto zie je deze piramide van geodriehoeken met de letters A, B, C bij de hoekpunten en bij de top de letter T. Een schematische tekening staat ernaast.
Er geldt: $AB = BC = AC = 58$ cm



Elke geodriehoek heeft de vorm van een gelijkbenige, rechthoekige driehoek.

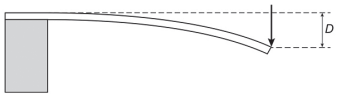
figuur 4

Nu komen we aan bij de 'Piramide van geodriehoeken'. Wederom een groep van vier vragen onder eenzelfde noemer. Vraag 13 tot en met 16 hebben voor een stortvloed van klachten bij LAKS geleid, mijns inziens omdat dit de enige meetkundevragen van het examen zijn. Niet omdat er iets mis mee is. De vragen beslaan alles; Pythagoras, schaal en goniometrie. Leuk bedacht om met de bordgeodriehoeken aan de slag te gaan. Na deze vragen is het examen over zijn zwaartepunt heen. Vraag 17 tot en met 20 gaan over een duikplank en de bijbehorende formule. Dit zijn relatief makkelijke uitschrijfoefeningen, vraag 19 uitgezonderd, zie figuur 5. In vraag 19 wordt de kandidaten gevraagd inzicht te hebben in wat een derdemacht in de formule betekent in de werkelijkheid. Fijn dat zulke inzichtvragen ook het examen halen.

Als er een persoon op het uiteinde van een duikplank staat, buigt deze plank altijd een beetje door. Voor een bepaald type duikplank kun je het aantal cm dat de duikplank doorbuigt, berekenen met de formule

$$D = \frac{L^3 \times G}{40}$$

Hierbij is D het aantal cm dat de duikplank doorbuigt, G het gewicht van de persoon op het uiteinde van de duikplank in kg en L de lengte van de duikplank in m.



19 Als de lengte van een duikplank twee keer zo groot wordt, hoeveel keer zo ver buigt deze duikplank dan door volgens de formule? Schrijf op hoe je aan je antwoord komt.

figuur 5

Het examen sluit af met vragen over de Mount Everest. Deze laatste vier vragen zijn een voorbeeld van een contextvraag waarvan ik, in tegenstelling tot de watertank, wel vind dat de hoeveelheid informatie en vragen in de juiste verhouding aanwezig zijn. De verzameling vragen bij dit onderwerp vind ik wat onsamenhangend; een optelsom met een negatief getal, een vraag over procenten met een verhoudingstabel, het meten van een koershoek (komt die op het laatste moment aangeschafte koershoekmeter bij de plaatselijke boekhandel toch nog van pas) en een hellingshoek berekenen.

Conclusie

Over de hele linie is het een uitstekend examen dit jaar, waarbij de meetkunde wel wat onderbelicht is gebleven. Klachten van kandidaten over de lengte van het examen lijken mij onterecht. Ze zijn eventueel verklaarbaar doordat het zwaartepunt van dit examen niet aan het einde, maar halverwege bij de 'Bibliotheken' en de 'Piramide van geodriehoeken' zat, waardoor kandidaten zonder examenstrategie zich daarop vast hebben zitten staren. Al met al denk ik dat het Cito er dit jaar er wederom in is geslaagd met een degelijke toetsing van de eindtermen te komen.

OVER DE AUTEUR

Hugo Duivesteijn is sinds drie jaar docent wiskunde in het vmbo. Hij werkt op Werkplaats Kindergemeenschap VO in Bilthoven. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *hugoduivesteijn@gmail.com*

Ruud Jongeling

Vmbo 2018
Digitale examens

Ruud Jongeling kijkt terug op de digitale wiskunde-examens uit 2018. Van alle varianten bekijkt hij zowel de puntenverdeling over de wiskundedomeinen als de puntenverdeling over de vragen.

Inleiding

Er worden in de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg vrijwel geen schriftelijke examens meer afgenomen. In 2018 kwam ook op onze school een einde aan de afname van de schriftelijke examens in de kaderberoepsgerichte leerweg. Dit jaar dan ook geen bespreking van het schriftelijke kb-examen uit 2019 maar een terugblik op de digitale examens basis- en kaderberoepsgericht uit 2018. De digitale examens worden door de school zelf op verschillende tijden ingepland. Om voorkennis bij de leerlingen te voorkomen zijn verschillende varianten van het examen noodzakelijk. Het CvTE gebruikt ieder jaar per leerweg drie examens die ontwikkeld zijn door het Cito. Van deze drie examens worden er twee openbaar gemaakt en blijft er één geheim. Door de contexten van de drie examens onderling te combineren werden in 2018 per leerweg negen examenvarianten gemaakt. Dankzij de medewerking van het CvTE heb ik me niet hoeven beperken tot de openbaar gemaakte digitale examens maar heb ik alle varianten van de wiskunde-examens uit 2018 kunnen bekijken. In deze bespreking komen de puntenverdeling over de drie domeinen van de examens en de puntenverdeling over de kleinere en grotere vraagstukken van de examens aan bod.

Basisberoepsgerichte leerweg: de domeinen

Iedere variant van de digitale examens bb bestond uit zes contexten waarvoor de leerlingen in totaal 54 punten konden halen. Het aantal vragen per examen varieerde tussen de 22 en de 24 vragen. In tabel 1 is de verdeling van de punten over de drie domeinen van het examen te zien. In de kolommen staat per examenvariant het percentage van de totaalscore dat aan het betreffende domein werd toegeschreven. In de laatste kolom staat het gemiddelde van de negen varianten.

Voor het domein algebraïsche vaardigheden varieert het percentage tussen de varianten van 28% tot 31%. Bij het domein rekenen, meten en schatten is het laagste percentage 37% en het hoogste 41%. Bij het domein meetkunde varieert het percentage tussen de 30% en de 33%. Kijken we per examenvariant dan is het verschil tussen het laagste en hoogste percentage van de domeinen bij de varianten 1, 4 en 7 het hoogst, namelijk 11%. In alle varianten gaan de meeste punten naar het domein rekenen, meten en schatten. Gemiddeld over alle examens is dat 38%. Voor de domeinen algebraïsche vaardigheden en meetkunde is gemiddeld 30% en 32% van de totaalscore beschikbaar.

Examenvariant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	gem.
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
Algebraïsche vaardigheden	28	30	31	30	30	30	28	31	30	30
Rekenen, meten en schatten	39	37	39	41	37	37	39	39	37	38
Meetkunde	33	33	30	30	33	33	33	30	33	32
Totaal	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

tabel 1 Puntenverdeling over de domeinen per examenvariant bb en het gemiddelde over alle varianten

Conclusie

Tussen de negen varianten van de digitale examens wiskunde bb uit 2018 is de onderlinge variatie waarin de domeinen in de examens aan bod komen beperkt. Uit het overzicht wordt verder duidelijk dat in iedere examenvariant het domein rekenen, meten en schatten zwaarder meetelt in de eindscore dan de beide andere domeinen.

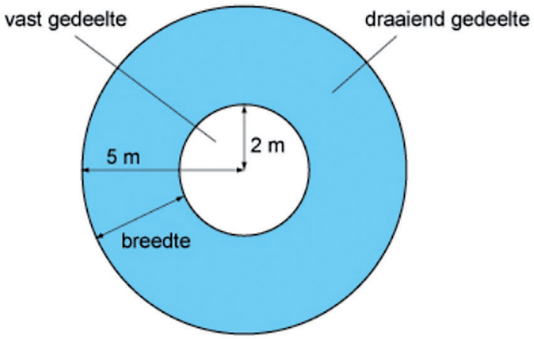
Punten per vraag

De zwaarte van een examen kan onder meer worden afgeleid uit het aantal punten dat aan een vraag wordt toegekend. Vragen met een beperkt aantal denkstappen krijgen één of twee punten, zie het voorbeeld in figuur 1.

Draaimolen

Op een kermis staat een draaimolen. Sandra is de eigenaar van deze draaimolen.

Hier zie je een plattegrond van de draaimolen.



Hoeveel meter is de breedte van het draaiende gedeelte?

meter

figuur 1 1-puntsvraag uit bb-examen 2018, examenvariant 1, opgave 1

Grotere, ingewikkeldere vraagstukken waarvoor de oplossing meer denkstappen vereist, krijgen 4 of 5 punten, zie het voorbeeld in figuur 2. De veronderstelling is dat de variatie van deze vragen over de examenvarianten iets zegt over de mate waarin de leerlingen examens van gelijke aard krijgen voorgelegd.

De Bende van Dirk

Op de derde vakantiedag maakten de motorvrienden een tocht van 368 kilometer. Ze vertrokken 's ochtends om 9.00 uur en waren om 17.30 uur weer terug in het hotel. Onderweg zijn ze in totaal 3,5 uur gestopt.

Bereken met hoeveel km per uur ze die dag gemiddeld hebben gereden. Typ je berekening in en rond je antwoord af op een geheel getal.

figuur 2 4-puntsvraag uit bb-examen 2018, examenvariant 2, opgave 4

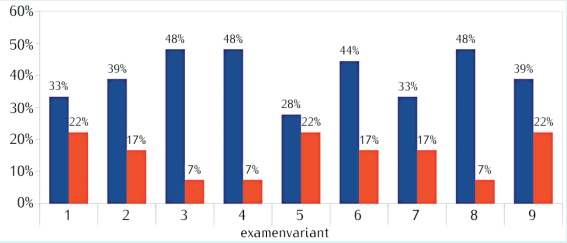
In tabel 2 is de verdeling van de 1-puntsvragen tot en met 5-puntsvragen over de examenvarianten te zien. In de kolommen staat per examenvariant het percentage dat de puntsvragen bijdragen aan de totaalscore. In de laatste kolom staat het gemiddelde van de negen varianten. Onder de tabel staat de N-term voor de betreffende examenvariant.

Examenvariant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	gem.
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
1-puntsvragen	7	9	7	7	9	7	11	7	6	8
2-puntsvragen	26	30	41	41	19	37	22	41	33	32
3-puntsvragen	44	44	44	44	50	39	50	44	39	44
4-puntsvragen	22	7	7	7	22	7	7	7	22	12
5-puntsvragen	0	9	0	0	0	9	9	0	0	3
Totaal	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
N-term	1,8	1,4	1,2	1,7	1,4	1,2	2,5	0,9	1,0	

tabel 2 Puntenverdeling over de verschillende vragen per examenvariant bb en het gemiddelde over alle varianten

>

De variatie tussen de examenvarianten is het kleinst waar het de 1-puntsvragen betreft en het grootst bij de 2-puntsvragen. Ook bij de 3- en 4-puntsvragen zit nog wel wat variatie tussen de examenvarianten. Om een scherper beeld te krijgen heb ik de percentages van de 1- en 2-puntsvragen bij elkaar genomen en hetzelfde voor de 4- en 5-puntsvragen. De 3-puntsvragen heb ik buiten beschouwing gelaten. Wanneer we de gegevens weergeven in een staafdiagram wordt duidelijk dat de verschillen tussen de examenvarianten groot kunnen zijn, zie figuur 3.



figuur 3 puntenverdeling 1-2-puntsvragen (blauw) en 4-5-puntsvragen (rood) per examenvariant bb

Bij de examenvarianten 3, 4 en 8 dragen de 4- en 5 -puntsvragen slechts 7% bij aan de totaalscore. Bij deze varianten zien we een percentage van 48% van het puntentotaal voor de 1- en 2-puntsvragen.

De examenvarianten 1, 5 en 9 laten alledrie een percentage van 22% voor de 4- en 5-puntsvragen zien. De percentages die de 1- en 2-puntsvragen bij deze varianten bijdragen aan de totaalscore wisselen van 28% bij examenvariant 5 tot 39% bij examenvariant 9.
De veronderstelling is dat de variatie van de puntsvragen over de examenvarianten iets zegt over de mate waarin de leerlingen examens van gelijke aard krijgen voorgelegd. De N-termen van de verschillende varianten lijken dit niet te bevestigen. Zo hebben de examenvarianten 3 en 4 met relatief weinig 4- en 5-puntsvragen en veel 1- en 2-puntsvragen, toch een N-term van respectievelijk 1,2 en 1,7. Examenvariant 5 daarentegen met relatief veel 4- en 5-puntsvragen en weinig 1- en 2-puntsvragen heeft een N-term van 1,4.

Conclusie

Op basis van de verdeling van de puntsvragen lijkt het erop dat de leerlingen qua moeilijkheid verschillende examens voorgelegd krijgen. De N-termen bij de examens laten echter een andere verdeling van moeilijkheidsgraad zien. Dat roept de vraag op in welke mate vragen met meer denkstappen de moeilijkheid van het examen beïnvloeden en/of in welke mate de N-term representatief is voor de moeilijkheidsgraad van het examen.

Kaderberoepsgerichte leerweg: de domeinen

De digitale examens kb bestonden uit zes contexten waarvoor de leerlingen in totaal 66 punten konden halen. Het aantal vragen per examen varieerde tussen de 21 en de 24 vragen.
Ook voor de kb-examens is een overzicht gemaakt van de puntenverdeling over de drie domeinen van het examen, zie tabel 3.

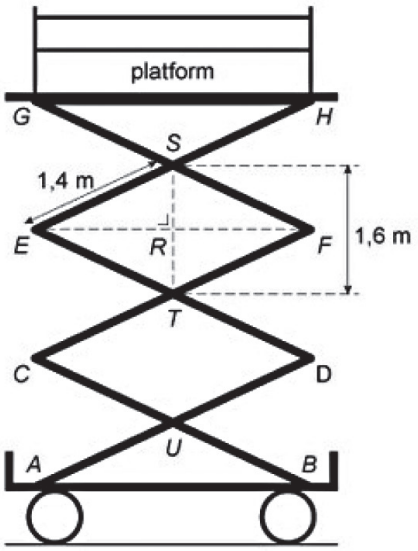
Voor het domein algebraïsche vaardigheden varieert het percentage tussen de varianten van 30% tot 38%.

Bij het domein rekenen, meten en schatten is het laagste percentage 33% en het hoogste 45%. Bij het domein meetkunde varieert het percentage tussen de 23% en de 33%. Kijken we per examenvariant dan is het verschil tussen het laagste en hoogste percentage van de drie domeinen bij variant 4 het grootst: 21%. In vrijwel alle varianten gaat het meeste aantal punten naar het domein rekenen, meten en schatten. Gemiddeld over alle examens is dat 39%. Voor de domeinen algebraïsche vaardigheden en meetkunde is gemiddeld respectievelijk 34% en 27% van de punten beschikbaar.

Examenvariant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	gem.
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
Algebraïsche vaardigheden	30	38	33	30	33	38	35	33	33	34
Rekenen, meten en schatten	41	39	38	45	33	39	38	42	38	39
Meetkunde	29	23	29	24	33	23	27	24	29	27
Totaal	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

tabel 3 Puntenverdeling over de domeinen per examenvariant kb en het gemiddelde over alle varianten

Je ziet een schets van de schaarlift.
De lengte van *ES* is 1,4 m. De lengte van *ST* is 1,6 meter.
Vierhoek *ETFS* is een ruit.



Bereken, zonder te meten, hoeveel meter de lengte van *EF* is.
Typ je berekening in. Rond je antwoord af op één decimaal

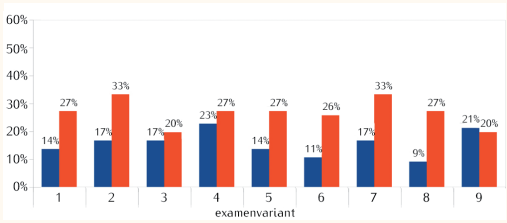
figuur 4 5-puntsvraag uit kb-examen 2018, examenvariant 2, opgave 4

Conclusie

Tussen de negen varianten van de digitale examens wiskunde kb uit 2018 kan de onderlinge variatie waarin de domeinen aan de eindscore bijdragen oplopen tot 21%. Uit het overzicht wordt verder duidelijk dat in vrijwel iedere variant het domein rekenen, meten en schatten zwaarder meetelt in de eindscore dan de beide andere domeinen. Het domein meetkunde levert vaak de kleinste bijdrage aan het puntentotaal.

Punten per vraag

In vergelijking met de examens in de basisberoepsgerichte leerweg laten de examens in de kaderberoepsgerichte leerweg meer 5-puntsvragen zien, zie het voorbeeld in figuur 4. In tabel 4 is de verdeling van de 1-puntsvragen tot en met 5-puntsvragen over de examenvarianten te zien. In de kolommen staat per examenvariant het percentage dat de verschillende vragen bijdragen aan de totaalscore. In de laatste kolom staat het gemiddelde van de negen varianten. Onder de tabel staat de N-term voor de betreffende examenvariant. De variatie tussen de examenvarianten is het kleinst bij de 1-, 4- en 5-puntsvragen en het grootst bij de 2-puntsvragen.
Om weer een scherper beeld te krijgen heb ik, net als bij de bb-varianten, de percentages van de 1- en 2-puntsvragen bij elkaar genomen en hetzelfde voor de 4- en 5-puntsvragen en de gegevens weergegeven in een staafdiagram, zie figuur 5. Vergelijken we de grafiek van kb met die van bb dan valt meteen het verschil in karakter van de examens op. Bij bb domineren de 1- en 2-puntsvragen ten opzichte van de 4- en 5-puntsvragen. Bij kb is het omgekeerde het geval. Hoewel de verschillen kleiner zijn dan bij de bb-varianten, zien we toch ook bij kb verschillen tussen de examens. Het kleinste verschil tussen 1- en 2-puntsvragen en 4- en 5-puntsvragen kent variant 9 met slechts 1% verschil.



figuur 5 Puntenverdeling 1-2-puntsvragen (blauw) en 4-5-puntsvragen (oranje) per examenvariant k

Examenvariant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	gem.
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
1-puntsvragen	2	2	5	2	2	5	5	0	3	3
2-puntsvragen	12	15	12	21	12	6	12	9	18	13
3-puntsvragen	59	50	64	50	59	64	50	64	59	58
4-puntsvragen	12	18	12	12	12	18	18	12	12	14
5-puntsvragen	15	15	8	15	15	8	15	15	8	13
Totaal	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
N-term	0,9	1,2	0,6	1,2	0,6	1,0	1,3	0,6	0,9	

Het grootste verschil heeft variant 8 met 18% verschil. Ook bij de varianten van kb zien we geen duidelijke relatie tussen de verdeling van de 1- en 2-puntsvragen en 4- en 5-puntsvragen enerzijds en de N-termen anderzijds. De gelijke N-term voor varianten 1 en 9 en de gelijke N-term voor de varianten 3 en 5 en voor de varianten 2 en 4 laten zich moeilijk verklaren vanuit de 1- en 2-puntsvragen en 4- en 5-puntsvragen. De verschillen zijn overigens wel kleiner dan bij de examens in de basisberoepsgerichte leerweg. >

tabel 4 Puntenverdeling over de verschillende vragen per examenvariant kb en het gemiddelde over alle varianten

Conclusie

De N-termen bij de examens sluiten ook bij de kb-varianten niet altijd aan op een verdeling van moeilijkheidsgraad gebaseerd op de 1-5-puntsvragen waarbij de verschillen kleiner zijn dan bij bb.

Ten slotte

In dit artikel heb ik eigenschappen van de verschillende varianten van de digitale examens bb en kb met elkaar vergeleken en daar conclusies uit getrokken. Het verschil in karakter tussen het bb- en kb-examen is goed te zien in de verdeling van de 1-5-puntsvragen Het accent dat in de bb-examens gelegd wordt op het domein rekenen, meten en schatten kan verwacht worden maar dat dit gemiddeld genomen ook bij kb het geval is en ten koste gaat van het domein meetkunde verraste me. De tweede verrassing van mijn inventarisatie was dat de verdeling over de 1-5-puntsvragen niet altijd een relatie lieten zien met de N-termen. Bij meer 4- en 5-puntsvragen en minder 1- en 2-puntsvragen had ik een hogere N-term verwacht en omgekeerd. Dat was bij de bb-examens niet altijd het geval en ook bij de kb-examens minder eenduidig dan ik verwachtte. Ondanks dat de minister nog wacht op de uitslag van een onderzoek naar de digitale examens staat nu al vast dat de digitale examens niet meer uit het vmbo zijn weg te denken. Mijn inventarisatie roept de vraag op welke invloed de verdeling van de kleine en grote vraagstukken op het examen heeft. Daarnaast ben ik ook nog steeds nieuwsgierig naar het antwoord op de vraag die ik bij de examenbespreking van het schriftelijke examen kb 2018 stelde. Worden contexten die duidelijk sectorgerelateerd zijn ook beter gemaakt door de leerlingen uit die sector? Het definitief maken van de digitale examens is een mooie aanleiding om dit soort vragen op een hoger plan te onderzoeken.

Noot van de redactie

Voor meer informatie over de totstandkoming van N-termen: *https://cito.nl/onderwijs/voortgezet-onderwijs/centrale-examens-voortgezet-onderwijs/expertise-van-cito/normering*

OVER DE AUTEUR

Ruud Jongeling is wiskundeleraar op het Da Vinci College in Roosendaal, een school voor de beroepsgerichte leerwegen in het vmbo en het praktijkonderwijs. Ook is hij voorzitter van de werkgroep vmbo van de NVvW.
E-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*

Reacties op De Hoekstreep 'X' uit 94-7

Descartes

Het is niet helemaal toeval dat *x* de onbekende in de wiskunde is geworden. Descartes heeft daar bewust voor gekozen in zijn *La Géométrie* uit 1637; volgens mij is hij de eerste die dat expliciet doet. Descartes stelt voor de lengtes van bekende lijnstukken in vergelijkingen met de eerste letters van het alfabet aan te geven, dus met *a*, *b*, *c*, enz. en de onbekenden met de laatste letters, *x*, *y*, *z*. waarom hij de drie laatste letters en niet meer neemt, licht hij niet toe.
De informatie over *X*-stralen kende ik niet. Ik heb altijd iets anders daarover gedacht. Bedankt voor de correctie!

Aad Goddijn (Universiteit Utrecht)

Spanjaarden

De letter *x* is niet per toeval gekozen. Ik ben daar achter gekomen via een video van een Tedx: *https://www.ted.com/talks/terry_moore_why_is_x_the_unknown?language=en*
Het simpele antwoord is: omdat de Spanjaarden geen 'sh' konden zeggen. In de 11e en 12e eeuw werden in Spanje (Andalusië) Arabische geschriften bestudeerd en vertaald. In 'wiskundige' geschriften werd het onbekende aangeduid met الشئ. Dit betekent letterlijk 'iets' of 'ding'. De Arabische letter ش wordt uitgesproken als 'sh' (zoals in *show*). Deze klank bestond niet in het Spaans, dus vervingen ze het door een klank die daar het meest op leek. De letter χ (Chi) kwam daar het dichtst bij in de buurt. Omdat toen Latijn de taal van de wetenschap was, werd de Griekse letter χ vervangen door de letter *x* in het Latijn.

ir. G. Aytekin (docent wiskunde, Lyceum Kralingen)

Jan Beuving

De Hoekstreep

Even sigaretten halen

Ik kocht laatst een velletje postzegels. Omdat de postzegels tegenwoordig niet meer een bedrag bevatten, maar een nummer, kun je geld verdienen door vlak voor de prijsverhoging, die zo ongeveer elk jaar plaatsvindt, heel veel postzegels te kopen; postzegels van 20*xx* blijven geldig in 20*xx* + *n*, waarbij $n \in \mathbb{N}$. De sigarenboer vertelde dat hij een klant had die duizenden euro's bespaarde door op het eind van het jaar alle postzegels voor het volgende jaar te kopen.

Thuis zocht ik op dat de laatste prijsstijging 4 cent per postzegel was. Wil je duizenden euro's besparen, zeg minimaal tweeduizend dus, dan moet je 50.000 poststukken per jaar verzenden. Of 1000 pakketjes van 5 euro. Voor bol.com is dat het overwegen waard, maar bij de klant in kwestie was waarschijnlijk sprake van middenstandelijke overdrijving door de sigarenboer. Of het was cumulatief over de laatste tien jaar, maar dan nog stuurt hij overdreven veel verjaardagskaarten.

Veel interessanter dan de postzegels was wat vlak voor mij gebeurde bij diezelfde sigarenboer. Een vrouw kocht een pakje sigaretten. 'Die van 27' zei ze, waarop de verkoper zei: dat is dan 7,20. Zevenentwintig voor zeven twintig! Dan denk ik gelijk: is dat deelbaar? Mijn intuïtie had hoop, want allebei veelvouden van negen, maar toen zag ik ook gelijk dat het niet ging passen, drie sigaretten voor 80 cent.

Is er een combinatie denkbaar waarbij deze taalgrap wel een deelbare verhouding geeft? Wie even nadenkt, ziet gelijk dat er sowieso acht mogelijkheden zijn: 22 voor 2,20, 33 voor 3,30, enzovoort. Allemaal sigaretten van tien cent. Ik maakte een tabelletje van tien bij tien, zie figuur 1. De eerste rij en kolom zijn gestreept omdat je de deling door de opbouw van onze taal daar niet kunt toepassen. Het laagste getal waarbij je de vraag wel kunt stellen, is 15: vijftien sigaretten voor vijf (euro) tien. Dat kan direct! 34 cent per sigaret. En zie: bij 18 is het weer raak: achttien voor acht (euro) tien is 45 cent per sigaret. Een goed begin. Maar behalve de acht gevallen waarin de sigaretten 10 cent per stuk kosten, komt het nog maar één keer goed met die deling: bij 45 sigaretten voor 5,40. 12 cent per sigaret.

figuur 1

Nu wil de wiskundige nog maar één ding: kijken of hier een logica achter zit. Maar met (niet-triviale) deeluitkomsten 12, 34 en 45 cent per sigaret voelt het vrij willekeurig. Ik probeerde een formule op te stellen. Het gaat om honderd getallen van de vorm *mn*, waarbij *m*, *n* ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. De vraag die je jezelf stelt is

deze: is $\frac{100n+10m}{10m+n} \in \mathbb{N}$? Stel *mn* is 48, dan wil je weten: is 840 (cent) deelbaar door 48? In de formule zie je meteen waarom het geval $n = m$ werkt: dan is de teller tien keer zo groot als de noemer.

Ik keek er even naar, en wist weer waarom ik negen jaar over mijn studie heb gedaan: ik had geen idee hoe dit op te lossen. Tijd voor een sigaret, zou je denken, maar ik rook niet. Ik had alleen maar postzegels, die per stuk meer als drie keer zo duur zijn dan een sigaret. Zonde van je geld om daar een aansteker bij te houden.

OVER DE AUTEUR

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier. Hij toert vanaf september weer door het land met zijn nieuwe voorstelling Rotatie. Kijk voor de speellijst op *www.janbeuving.nl*. **E-mailadres:** *janbeuving@gmail.com*

Henk Hietbrink

Examen havo wiskunde A

Het havo wiskunde A-examen wordt besproken door Henk Hietbrink, lid van de werkgroep havo-vwo van de NVvW. Hij gaat in op de opgaven, maar ook op de vraag of *onwaarschijnlijke antwoorden* eigenlijk wel een punt verdienen.

Tijdsdruk

Het examen havo wiskunde A is dit jaar een verzameling van veel mooie en goede vragen, met een enkele uitschieter. Het examen is prima te doen als je goed in wiskunde bent, maar de doorsnee havist is dat niet en laat massaal weten dat hij in tijdnood kwam. Een hoge N-term werd verwacht, maar het werd N = 1. Onafhankelijk en deskundig onderzoek mag uitwijzen of het examen werkelijk te lang was. Op zich lijken 23 vragen en 78 punten evenveel als vorige jaren, maar is de werklast ook even groot? In de wiskunde E-brief is voorgesteld (nr 846, 816, 814) om serieus onderzoek te doen naar de taligheid van de examens in relatie tot de tijdsdruk die leerlingen ervaren. Mijn vermoeden is dat tijdsdruk doorwerkt in het gebrek aan reflectie op eigen werk door de kandidaat en ook bij de puntentoekenning bij de correctie. Veel leerlingen geven onwaarschijnlijke antwoorden. Slagers maken worsten met 243 mm doorsnede, asfalt gaat vijftig jaar mee, et cetera. Kandidaten rekenen iets uit, ronden keurig af op hele millimeters of een heel aantal jaren. Het is gebruikelijk om voor het juist afronden van een onwaarschijnlijke uitkomst altijd, conform het correctievoorschrift, een punt te geven. Ook mijn leerlingen krijgen voor de meest wonderlijke antwoorden toch twee van de drie punten, want ze schrijven de vergelijking op en ronden keurig af. Zo komen ze op hele dikke worsten en asfalt dat decennia meegaat. Laat ik een voorbeeld geven. In de opdracht over homeopathische verdunningen hebben veel leerlingen moeite met het omwerken van 99,998% naar een verhouding en komen tot een dosis die het honderdvoudige is van hetgeen gevraagd wordt. Het verslag van de centrale examenbespreking stelt voor om deze opdracht schappelijk na te kijken. Werkend met 0,002 in plaats van 0,00002 zou tot slechts één punt aftrek hoeven te leiden. Toch knaagt dit. Wanneer een apotheker iemand een medicijn met een honderdvoudige dosis meegeeft met fatale afloop als gevolg, dan komt er in de krant beslist niet een vergoelijkend artikel met een kop in chocoladeletters 'Patiënt overleden, apotheker krijgt één punt aftrek'. Soms hoor ik van collega's dat havisten zo weinig kritisch zijn op hun eigen werk, maar is dat echt zo? Van mij mag er onderzoek komen naar taligheid, tijdsdruk en reflectie en wat dat betekent voor de manier waarop het vak wiskunde A vorm krijgt en getoetst wordt.

Domeinen

In de syllabus staan de vijf domeinen van havo wiskunde A opgesomd. Welke domeinen overheersen en welke blijven onderbelicht? Dit examen bevat veel herleiden, veel werken met formules en opvallend weinig statistiek. Wel wordt er gevraagd naar modus en mediaan en ook naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie. Van mij had er nog wel een vraag over effectgrootte of 'max V_{cp}' in gemogen. Exponentiële verbanden komen drie keer aan bod, maar echt werken aan een exponentiële formule met beginhoeveelheid en groeifactor ontbreekt. Ik mis een vraag over een echt exponentieel verband waarin iets groeit in de tijd. En er had best wat uit gemogen, om te beginnen de zesde vraag waarin gevraagd wordt om de herleiding te geven van $P = 100 \cdot (1/10)^n$ naar $P = 10^{2-n}$.

Stil asfalt

Opgave 'Stil asfalt' is voor de kandidaten een fijne binnenkomer. Taaltechnisch is er wel een puntje bij de derde vraag, zie figuur 1. Sommige leerlingen lezen dit als 'vervangen wanneer de norm overschreden is', in plaats van 'vervangen voordat de norm overschreden wordt'. In het eerste geval kom je uit op 99 maanden, in het tweede geval op 98 maanden. Het verschil is slechts één maand. Wat ik jammer vind is dat een leerling die de GR niet goed gebruikt en uitkomt op 647,21 maanden en dat afrondt op 647 ook twee punten krijgt, want de vergelijking is goed opgeschreven (punt voor de eerste

Wie naast een snelweg woont, heeft bijna altijd te maken met overlast door de geluidsintensiteit van het verkeer. De laatste jaren probeert men deze overlast te beperken, onder andere door het aanleggen van zogenaamd stil asfalt.
Met de volgende formule kan de geluidsintensiteit I worden berekend als bekend is hoeveel decibel (dB) geluid er wordt geproduceerd.

$$I = 10^{0{,}1d-9}$$

Hierin is d de hoeveelheid geproduceerd geluid in dB en is I de geluidsintensiteit in milliwatt per m^2.

Je kunt de formule van d invullen in de formule van I. Dan ontstaat een nieuwe formule waarin de geluidsintensiteit I uitgedrukt is in het aantal maanden t na het aanleggen van stil asfalt. Deze formule luidt:

$$I = 10^{0{,}1(0{,}04t+73{,}7)-9}$$

Stil asfalt moet volgens planning worden vervangen als de geluidsintensiteit I volgens de formule groter wordt dan 0,058 milliwatt per m^2.

3 Bereken met behulp van de laatste formule hoeveel hele maanden stil asfalt volgens planning meegaat.

figuur 1

In de D-reeks wordt het percentage oertinctuur in een homeopathisch middel bij elke verdunning tien keer zo klein. Er geldt dus:

$$P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Hierin is P het percentage oertinctuur in een homeopathisch middel in de D-reeks en n het aantal verdunningen dat de oertinctuur ondergaan heeft.

Je kunt de formule van P herleiden tot de volgende formule:

$$P = 10^{2-n}$$

6 Geef deze herleiding.

Iemand beweert dat de verdunning van de hoeveelheid oertinctuur in Arnica montana D12 gelijk is aan de verhouding van het volume van één waterdruppel tot het volume van 20 olympische zwembaden.

Een waterdruppel bevat ongeveer 0,05 milliliter en een olympisch zwembad heeft een inhoud van ongeveer 2,5 miljoen liter water.

7 Laat zien dat de bewering klopt.

figuur 2

bol) en de kandidaat heeft juist afgerond (punt voor de derde bol). Dan vind ik die 99 bijna goed en die 647 maanden echt fout, omdat 50 jaar een onwaarschijnlijk lange levensduur is.

Homeopathische middelen

Homeopathie heeft dit jaar geen vrienden gemaakt. De openingsvraag is goed te doen. Gevraagd wordt om zes maal 1/100ste te doen. Veel kandidaten schrijven dat antwoord keurig met twaalf nullen op, al dan niet als een getal dan wel als een verhouding. Het correctievoorschrift en de centrale examenbespreking vinden dat goed. Er was een tijd dat we dit lelijke wiskunde vonden en de wetenschappelijke notatie eisten. Wat ga ik mijn klas volgend jaar leren? Dat er een woord als 'biljoen' voor is, dat ze maar beter met de wetenschappelijke notatie moeten antwoorden of dat een boel nullen ook wel goed is. Over de vijfde vraag met de 99,998% heb ik het al gehad. Bij deze vraag gaat heel veel fout. Toch is met de vraag zelf niets mis. Aan procenten en groeifactoren ga ik volgend jaar beslist meer tijd besteden.

Volgens mijn leerlingen was de zesde vraag, zie figuur 2, absoluut onmogelijk. Ik houd het er maar op dat de makers voorzien hebben in een lage p-waarde. Meer algebra lijkt de trend. Toch lijkt het voor de meerderheid van mijn leerlingen verspilde tijd. Bij een volgende curriculumherziening mag van mij de vraag gesteld worden voor welke vervolgopleiding al dat omschrijven een essentiële vaardigheid is.
Vraag 7 sluit dit onderdeel homeopathie af, zie ook figuur 2. Leerlingen mogen *factchecken*. De opdrachtformulering is sterk. Veel leerlingen haken na de desastreuze zesde vraag niet af maar gaan door. Volgend jaar zal ik deze vraag benadrukken, niet zozeer om de vraag zelf, als wel om aan te geven dat ze na een moeilijke vraag beslist door moeten gaan met de volgende vraag van dat onderdeel.

> "Dit examen bevat veel herleiden, veel werken met formules en opvallend weinig statistiek."

Examenanalyse

De inleidende tekst van het onderdeel 'Examenanalyse' is correct, maar vraagt wel enige ervaring. Lees maar even mee wat er staat: 'Als de scores normaal verdeeld zijn … De scores zijn echter niet normaal verdeeld … de normale verdeling zou verwachten'. Gelukkig passen de kandidaten gewoon de vuistregels toe.
Bij de negende vraag wordt om het verschil tussen de modus en de mediaan gevraagd. Dat woord 'verschil' is voor sommige kandidaten de trigger om iets van het formuleblad te gebruiken, maar dat is niet de bedoeling. In de centrale examenbespreking en op het forum is er discussie hoeveel punten je een kandidaat mag geven die wel de modus goed afleest, struikelt bij de mediaan en wel een verschil uitrekent. Gewoon twee punten of slechts één omdat je niet in de buurt van de gevraagde 39 – 36 = 3 komt.
Bij de tiende vraag wordt gevraagd om te laten zien dat een zeker percentage iets meer dan de helft van

22,8% is. Volgens het correctievoorschrift mag de kandidaat stoppen bij het antwoord 12% zonder dat te vergelijken met de helft van 22,8%, namelijk 11,4%. Dat verbaasde me. Ik ben gewend dat leerlingen een opdracht afmaken met een conclusie. Vraag 11 gaat over een betrouwbaarheidsinterval voor een populatieproportie. Dat hebben we de vorige jaren eerder gezien, inclusief de switch van een percentage naar een proportie en weer terug naar een interval van procenten. Het had een inkoppertje kunnen zijn, maar dat valt tegen. Van de rekentoetsen weet ik dat rekenen aan procenten met veel fouten gepaard gaat. Het vooruitzicht dat met curriculum.nu de reken-wiskundetijd met 30% gekort gaat worden, stemt mij niet vrolijk. Leerlingen moeten meer tijd besteden aan rekenen, niet minder.
Vraag 12 vraagt welke informatie nodig is om een grafische weergave te maken waarin de samenhang tussen de scores van twee vakken zichtbaar is. Dit is op zich een leuke vraag, maar ik heb mijn klas er niet op voorbereid. Gelukkig komen veel kandidaten met gezond verstand op het idee dat je van iedere persoon de scores van beide vakken moet hebben. Dat hebben ze dan helemaal zelf bedacht. Bij de tweede correctie ontstaat discussie hoe je uit de formulering van de kandidaten kunt opmaken dat ze inderdaad bedoelen 'beide scores van iedere leerling met beide vakken'.

File voorkomen

Het onderdeel 'File voorkomen' opent met een prettige vraag over een veilige afstand tussen twee rijdende auto's en vraagt daarna om te beredeneren dat de veilige afstand groter wordt als de snelheid toeneemt. Dit zijn ideale vragen om met de klas van volgend jaar te oefenen. Vier punten verdien je door minstens vier stappen te zetten. Doe je er minder, dan krijg je niet de volle vier punten, maar minder. Vervolgens wordt om een herleiding gevraagd waar wel wat op het correctievoorschrift is af te dingen, zie figuur 3. Expliciet gegeven is

$A = v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0{,}14 \right)$ en in woorden dat $W = A + 4{,}5$.

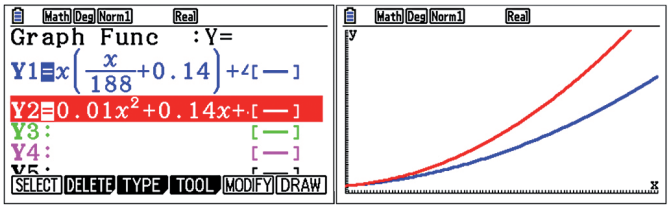
Opdracht is om de formule voor W te schrijven in de vorm $W = \ldots \cdot v^2 + \ldots \cdot v + \ldots$ waarbij de getallen op de puntjes afgerond moeten worden op twee decimalen.

15 maximumscore 3

- $W = A + 4{,}50$ 1
- $A = \frac{v^2}{188} + 0{,}14v$ 1
- Dus $W = 0{,}01v^2 + 0{,}14v + 4{,}50$ (of $W = 0{,}01v^2 + 0{,}14v + 4{,}5$) 1

figuur 3

Krijgt iemand die de eerste stap niet opschrijft maar wel de 4,5 op de puntjes zet nu wel of niet één punt? Je weet nooit wie je als tweede corrector krijgt. Daarom durfde ik het niet aan om voor ieder goed getal één punt te geven. Persoonlijk vind ik de afronding op 0,01 erg ongelukkig. Vergelijk de grafieken van de formule met 1/188 en die met 0,01 eens met elkaar! In figuur 4 zie je de grafieken voor het domein van 0 tot 130 km/uur. Kandidaten hebben er geen erg in, maar ik weet nog niet hoe ik deze afronding volgend jaar met overtuiging ga brengen.



figuur 4

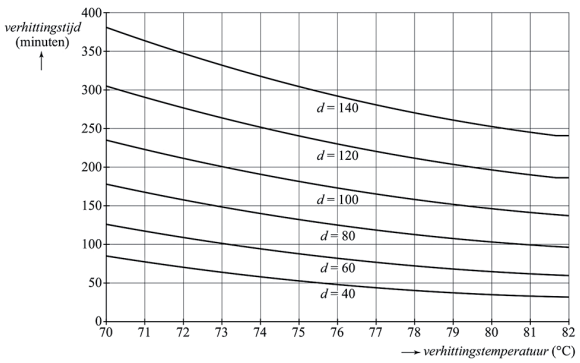
Bij vraag 16 wordt gevraagd bij welke snelheid de capaciteit van de weg maximaal is. Veel leerlingen blijven hangen bij het eerste snijpunt dat de snelheid van 18 km/uur oplevert als maximumsnelheid, en vinden niet de snelheid van 70 km/uur die bij het tweede snijpunt hoort. Van hen mag Rijkswaterstaat het getal 18 als maximumsnelheid op de matrixborden zetten. Ik moet er niet aandenken om een bekeuring te krijgen voor het overschrijden van de maximumsnelheid van 18 km/uur. Voor volwassenen is de context van de opdracht mooi uitgewerkt, maar ik vraag me af wat er in de kandidaten omgaat. Is het tijdsdruk, is het gebrek aan realiteitszin, is het een onvoldoende kritische houding, is het gemakzucht, of is het gebrek aan inzicht dat een kwadratische vergelijking twee oplossingen heeft? Het onderdeel wordt afgesloten met een knap geformuleerde vraag om uit te zoeken in welk tijdsinterval automobilisten voor het eerst een lagere snelheid moeten aanhouden. Dit was echt een vraag waarin de betere leerling zich kon onderscheiden van de zwakkere leerling.

> "Een worst van 243 mm wil ik niet met punten belonen en meer dan een dag pasteuriseren ook niet."

Pasteurisatie

Nog twee onderdelen te gaan, te beginnen met 'Pasteurisatie'. Ook dit jaar krijgen de kandidaten een grafiek met een logaritmische schaalverdeling. Na vorig jaar zal iedereen dit item wel goed geoefend hebben. Het antwoord bij vraag 19 is bijna te gemakkelijk: gewoon na iedere minuut is 90% van de bacteriën gestorven.

figuur 2



In de figuur op de uitwerkbijlage kun je aflezen dat een worst met een diameter van 100 mm bij een verhittingstemperatuur van 80 °C een verhittingstijd van 145 minuten nodig heeft.

Een veelgebruikte verhittingstemperatuur is 75 °C.

20 Teken in het assenstelsel op de uitwerkbijlage met behulp van figuur 2 een grafiek waarin de verhittingstijd is uitgezet tegen de diameter bij een verhittingstemperatuur van 75 °C.

figuur 5

Vraag 20 vraagt om een grafiek af te lezen en zelf een grafiek te tekenen. Wanneer je de verhittingstijd in de nieuwe grafiek op de y-as uitzet, dan komen alle punten op dezelfde hoogte als in de grafiek die je afleest. Je moet alleen de nieuwe punten op de juiste plek op de x-as zetten. Dat gaat zo snel en gemakkelijk dat ik er niet bij stil stond om de getallen eerst in een tabel te zetten om te laten zien hoe goed ik kan aflezen. Veel kandidaten hebben dat ook gedaan. Gelukkig hoefden we geen scorepunten in mindering te brengen.
Daarna komen twee rekenopdrachten waar kandidaten met erg onwaarschijnlijke antwoorden als worsten van 243 mm of verhittingstijden van meer dan een dag toch twee of drie van de vier punten krijgen. Een worst van 243 mm wil ik niet met punten belonen en meer dan een dag pasteuriseren ook niet. Maar dan vind ik wel dat mijn kandidaten de tijd moeten krijgen om rustig na te denken over de kwaliteit van hun antwoord. Staat er niet ergens dat we van onze leerlingen het vermogen tot reflectie willen toetsen?

> "Wie wil, wie inzet toont, die kan het vak leren."

Autodiefstallen

Tot slot de onderzoeksopdracht van 6 punten over het onderwerp autodiefstal. De casus is prima en de vraagstelling is helder. Ook al blijft het percentage gestolen auto's gelijk, dan nog neemt het aantal gestolen auto's toe omdat het aantal auto's toeneemt. Jammer dat de grafiek niet mooi op centimeters is uitgewerkt. Nu is de grafiek slecht af te lezen, terwijl de bladspiegel ruimte genoeg biedt aan een grotere grafiek. Op zich niet erg, maar dan moet het correctievoorschrift wel royaal zijn met de afleesmarge. De gestelde marge van 250 gestolen auto's is minder dan één millimeter. Deze vraag is bij mijn kandidaten wisselend gemaakt. Wel zie ik een mooie correlatie. Kandidaten die bij de vorige onderdelen al veel punten hadden gepakt, pakken nu alle 6, terwijl de zwakkere kandidaten slechts een enkel punt verdienen. Andersom, wie de onderzoeksopdracht goed gemaakt heeft, heeft de andere opdrachten ook goed gemaakt.

Goede voornemens

Uit dit examen trek ik voor mezelf een aantal conclusies voor wat ik volgend jaar ga doen.

- Mijn zwakke leerlingen die in het examenjaar hard zijn gaan werken, laten zien dat je wiskunde A kunt leren. Volgend jaar wil ik niets horen over wel of niet goed zijn in wiskunde. Wie wil, wie inzet toont, die kan het vak leren. Dat wordt de centrale boodschap.
- Ik neem me voor om meer te trainen op tempo en de manier waarop leerlingen hun tijd indelen: probleemverkenning, uitwerking, reflectie. Ik ga ervan uit dat volgend jaar het examen net zo vol zal zijn als dit jaar en dat mijn leerlingen zich kunnen wapenen tegen tijdsdruk door reeds in september te beginnen met de grotere opdrachten. In havo 5 houd ik de examenopdracht van de week in het programma. Ik deel ze wekelijks uit en houd vol dat mijn leerlingen de uitwerkingen bij mij inleveren. Om deze reden wil ik in havo 4 de onderzoeksopdrachten introduceren. Ik wil mijn leerlingen de tijd geven om te wennen aan dit soort opdrachten opdat ze een studiehouding ontwikkelen die ze helpt om succesvol te slagen.
- Algebra en herleiden moet iedere week terugkomen, ook als we volgens het boek met andere onderwerpen als statistiek bezig zijn. Er is geen ontkomen aan.
- Met statistiek zal ik verder gaan dan uitspraken doen met behulp van het formuleblad. We hadden een goede praktische opdracht over het doen van statistische uitspraken. Volgend jaar wil ik die opdracht uitbreiden met vragen over de opbouw van de dataset.

OVER DE AUTEUR

Henk Hietbrink is docent wiskunde op het Hermann Wesselink College te Amstelveen, lid van de werkgroep havo/vwo en beheerder van de websites *www.fransvanschooten.nl* **en** *www.henkhietbrink.nl.*
E-mailadres: *hietbrink.h@planet.nl*

Gerrie Stuurman

Examen havo wiskunde B

Gerrie Stuurman bespreekt het havo wiskunde B-examen van dit jaar. Conclusie: een gebalanceerd examen. Wellicht iets te lang. Misschien verklaart dat de N-term van 1,5.

Inleiding

Dit is alweer het derde examenjaar met het nieuwe examenprogramma. Is het examen daarmee voorspelbaar? Nog steeds niet. Het is toch wel een sport om te raden welk soort vragen in het examen komen. Tegenover mijn leerlingen dek ik mij bij bepaalde onderwerpen in door te zeggen dat 'de kans groot is' dat een bepaald onderwerp in het examen zit. Op deze manier heb je altijd gelijk. Voordat ik het examen ga bespreken, eerst even een soort 'Wiskunde A'-vraag: Wat is de kans dat als je achttien leerlingen in de klas hebt er twee tweelingen bij zitten? Hierbij is gegeven dat beide tweelingen ééneiig zijn en dat de ene tweeling uit twee meisjes bestaat en de andere tweeling uit twee jongens. Je begrijpt dat het voorgaande in mijn havo-examenklas aan de hand was. Ik heb het antwoord op deze vraag overigens nog niet berekend...

De zee in

Formule van Wilson

De geluidssnelheid in zeewater kan worden benaderd met de formule van Wilson:

$$v = 1449{,}2 + 4{,}623T - 0{,}0546T^2 + 1{,}391(Z - 35) + \frac{D}{60}$$

Hierin is
- v de geluidssnelheid in m/s;
- T de watertemperatuur in °C;
- Z het zoutgehalte van het zeewater in promille (‰);
- D de waterdiepte in m.

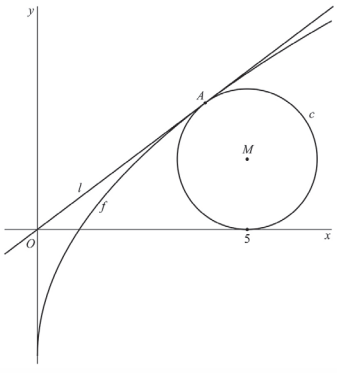
figuur 1

Het examen begint met drie vragen met in de hoofdrol een formule met drie variabelen in de context 'Formule van Wilson', zie figuur 1. Met de gegeven formule kun je de geluidssnelheid berekenen in zeewater als bekend is wat het zoutgehalte is van het water en wat de temperatuur en de waterdiepte zijn. In de eerste vraag bedenken veel leerlingen dat als ze bij gelijkblijvende temperatuur en gelijkblijvende diepte, maar een ander zoutgehalte de geluidssnelheid moeten vergelijken, dat ze dan die temperatuur en diepte kunnen kiezen. De uitdaging voor de correctoren is hier om met al die keuzes de verschillende geluidssnelheden door te rekenen. Gelukkig kun je dan terugvallen op GeoGebra of Excel. Voor de leerlingen blijkt het toch een uitdaging te zijn om de formule zonder fouten in te typen op de rekenmachine.

Bij de tweede vraag moet de formule voor $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T}$ bepaald worden om daarmee de maximale snelheid te berekenen. Een aantal leerlingen haakt af bij deze vraag, omdat ze niet inzien dat het zoutgehalte Z en de waterdiepte D dan willekeurig gekozen kunnen worden of beschouwd als 'constanten' bij de bepalen van de afgeleide. Jammer! Vraag 3 is een mooie rekenvraag waarbij de afstand van een onderzeeboot bepaald moet worden uit een gegeven tijdsduur voor het heen en weer gaan van een geluidssignaal. Ondanks het feit dat sommige leerlingen problemen hebben met vraag 2, zijn de vragen in deze context prima om mee te starten.

Klem zitten

figuur



figuur 2

De tweede context ‘Ingeklemd’ bestaat uit twee meetkundevragen. Er staat slechts één figuur bij de vraag, zie figuur 2, en er is weinig tekst. Bij beide vragen moet er een ‘bewijs’ worden geleverd. Inmiddels zijn ook de havoleerlingen gewend aan dit examenwerkwoord. In 2017 liet dit werkwoord nog een hoop stof opwaaien. Bij vraag 4 moeten leerlingen bewijzen dat een lijn raakt aan de grafiek van een wortelfunctie. ‘Raken’ houdt twee zaken in: 1. $f'(x) = l'(x)$ en 2. $f(x) = l(x)$. In de les gebruik ik met opzet deze volgorde en ik benadruk vaak dat ze met het eerste onderdeel moeten beginnen. Er zijn best veel leerlingen die desondanks met het tweede onderdeel beginnen. Dat maakt de vraag wel lastiger. De kwadratische vergelijking die uit deze aanpak volgt heeft een discriminant met de waarde 0. In de toelichting bij het correctievoorschrift staat aangegeven dat als leerlingen hier stoppen dat ze slechts 1 van de 4 punten mogen krijgen. Er zal vervolgens nog moeten worden aangetoond dat het raakpunt op de lijn ligt. Op het forum is er over deze vraag het meest gediscussieerd. Er staan in totaal 80 reacties bij. Bij vraag 5 moeten de leerlingen bewijzen dat een cirkel waarvan de x-coördinaat van het middelpunt gegeven is, niet alleen de lijn en de grafiek uit de vorige vraag raakt, maar ook de x-as. Het blijkt een mooie onderscheidende vraag te zijn. Mijn leerlingen hebben óf (bijna) alle punten óf geen punten.

Exponentieel

De context ‘Twee exponentiële functies’ begint met de enige vraag in het hele examen waarbij een exponentiële vergelijking exact moet worden opgelost: $2^{\frac{1}{2}x+3} = 4^x$.
Daar scoren mijn leerlingen goed op.
Dat geldt ook voor vraag 7 waarbij de formule $y = 2^{\frac{1}{2}x+3}$ van de exponentiële vorm naar een logaritmische vorm moet worden herleid. De meest exotische vorm die ik ben tegengekomen is hier $x = {}^{\sqrt{2}}\log(\frac{y}{8})$. Ook leuk!

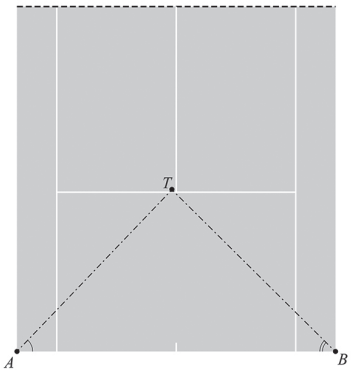
> “Mijn motto:
> Eerst tekenen, dan rekenen.”

‘The ball is out’

Twee jaar geleden werd als sportcontext het atletiek onderdeel ‘speerwerpen’ gebruikt. Ik merkte toen op in mijn examenverslag dat sport niet zo vaak voorkomt bij wiskunde B-examens. Wel leuk om dan te zien dat er dit jaar een vraag met de sport ‘tennis’ in het examen zit. Bij vraag 8 moet er een kwadratische formule worden opgesteld bij de gegeven hoogtes in het midden en bij de uiteinden van het tennisnet. Prettig dat ik in de examentraining nog met de klas de drie mogelijke vormen van een kwadratische vergelijking heb geoefend.

In figuur 3 is hetzelfde speelveld als in figuur 2 nogmaals weergegeven. De camera’s zijn boven de punten A en B gemonteerd.

figuur 3



In figuur 3 geldt:
- A is de positie van camera 1 en B is de positie van camera 2;
- het punt T is de plaats waar de bal na de eerste slag op de grond komt;
- $\angle A$ is de hoek ten opzichte van de achterlijn waaronder camera 1 de bal waarneemt;
- $\angle B$ is de hoek ten opzichte van de achterlijn waaronder camera 2 de bal waarneemt;
- In de situatie zoals weergeven in figuur 3 is de bal nog net in het servicevak $PQDR$ op de grond gekomen.

We bekijken nu een andere situatie, waarbij $\angle A = 45{,}4°$ en $\angle B = 44{,}2°$.

9 Onderzoek met behulp van een berekening of in deze situatie de bal in rechthoek $PQDR$ op de grond is gekomen.

figuur 3

Dan komt vraag 9, zie figuur 3. De inleiding en vraag beslaan samen de middelste twee bladzijden van het examenboekje. Dat is veel leeswerk in een wiskunde B-examen. Mijn leerlingen maken goed gebruik van mijn motto: ‘Eerst tekenen, dan rekenen.’ Dat helpt zeker bij deze vraag. De belangrijkste denkstap bij deze vraag is het gebruik van de sinusregel om de lengte AT te bepalen. Daarmee kan met de stelling van Pythagoras de afstand van T tot de achterlijn worden berekend. Als dat allemaal goed is uitgevoerd, blijkt dat de tennisbal T niet in het servicevak terecht is gekomen. Uit!

Een derdegraadsfunctie

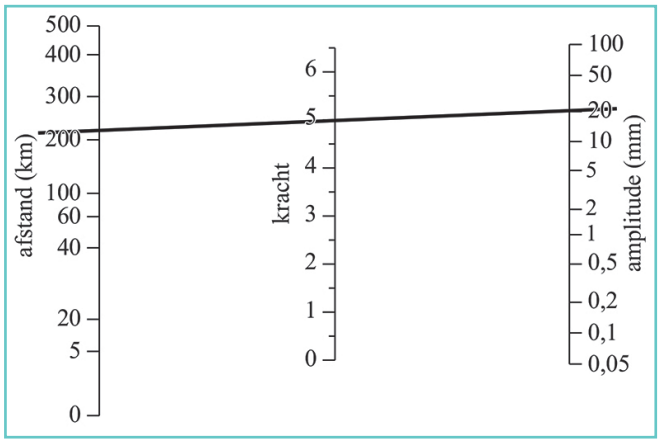
De context ‘Grafiek van een derdegraadsfunctie en een lijn’ bestaat uit drie vragen. Het is een mooie opgave waarin allerlei vaardigheden aan bod komen. Bij vraag 10 moet worden bepaald welke twee transformaties op de grafiek van $g(x) = x^3$ moeten worden toegepast om de grafiek van $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^3$ te krijgen. Voor het feit dat ik uitgebreid aandacht heb besteed aan transformaties valt het mij tegen hoe weinig punten mijn leerlingen hier behalen. Jammer! Gelukkig maken ze dat weer goed door bij de andere twee vragen uit deze context netjes te scoren. Bij vraag 11 moeten leerlingen bewijzen dat de grafiek van f een horizontale raaklijn heeft in het >

snijpunt met de x-as. De meeste leerlingen volgen het eerste correctiemodel: snijpunt x-as exact berekenen, differentiëren met de kettingregel, gevonden x-waarde uit de eerste stap invullen in de afgeleide en ja, daar komt 0 uit. Klaar!
Bij vraag 12 moeten de leerlingen de twee uiterste snijpunten van twee grafieken berekenen door de vergelijking $(\frac{1}{2}x - 2)^3 = \frac{1}{2}x - 2$ op te lossen. Vervolgens moeten ze de afstand berekenen tussen die twee snijpunten. Het is slechts een 3-punts vraag, maar zo op twee derde van het examen is het ook wel fijn om een eenvoudige vraag te maken.

Sinusoïden

Bij vraag 13 moeten de vier snijpunten van de grafiek van $f(x) = 1 + 2\cos(2x + \frac{1}{2}\pi)$ worden bepaald op het interval $[0, 2\pi]$. Jammer dat er hier niet voor een exacte berekening is gekozen. Vervolgens moet worden berekend hoeveel keer zo groot de afstand tussen de twee uiterste snijpunten is ten opzichte van de afstand tussen de middelste twee snijpunten. Een enkele leerling rondt tussendoor af en komt daardoor niet precies op de juiste waarde $a = 2$. Vraag 14 is op zich een oude bekende. De somformule van twee sinusoïden levert weer een sinusoïde op. De vier parameters moeten worden bepaald. De valkuil bij deze vraag zit in de wijze waarop de somformule is beschreven: $g(x) = f(x) - 2 + 5\cos(2(x - \frac{1}{4}\pi)$. Veel leerlingen lezen over die term $f(x)$ heen. Zonde van die 5 punten! En ook het dieptepunt van de scores bij dit examen. Ik begrijp ook niet zo goed hoe dit komt. Is de concentratie minder? Lezen ze slordig? Ik ben er nog niet uit.

Aardbeving



figuur 4

In de context 'Schaal van Richter' wordt er gewerkt met logaritmische formules. Je zou hier een grafiek met een log-schaal verwachten. Maar nee, dit keer staat er een nomogram bij, zie figuur 4. De enige keer dat ik me kan herinneren dat er een nomogram in een wiskunde B-examen zat, was in 2012 (context 'Het gewicht van een paard'). Het nomogram moet gebruikt worden om te laten zien dat als de amplitude van de meetapparatuur tien zo groot wordt, dat de kracht op de schaal van Richter met één toeneemt. 4 punten is riant voor deze eenvoudige vraag. Vraag 16 gaat over het berekenen van de oppervlakte van een rampgebied. Door het invullen van de amplitude en de kracht van een aardbeving in een gegeven logaritmische formule kan de afstand tot het epicentrum worden berekend, zie figuur 5.

Voor de kracht op de schaal van Richter geldt:

$K = \log(A) + 1{,}6 \cdot \log(D) - 0{,}15$ voor $D \le 200$ (1)
$K = \log(A) + 3 \cdot \log(D) - 3{,}38$ voor $D > 200$ (2)

Hierin is K de kracht op de schaal van Richter, A de amplitude in mm en D de afstand tot het epicentrum in km.

figuur 5

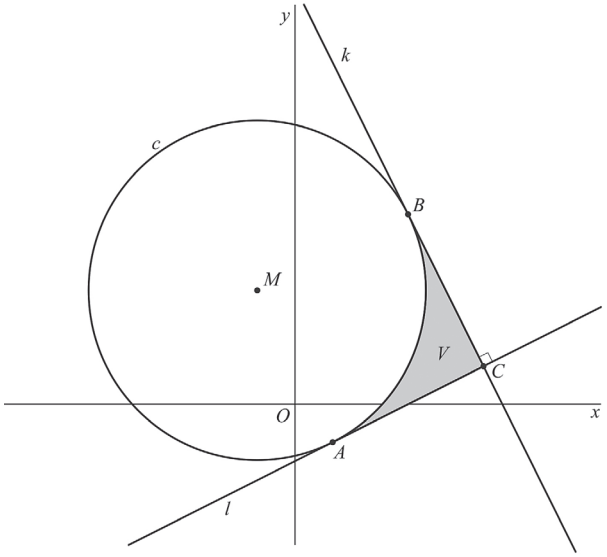
Die afstand is nodig om de oppervlakte van het cirkelvormige rampgebied te bepalen. De formule voor de oppervlakte van een cirkel moeten leerlingen wel paraat hebben. Op het forum was te lezen dat niet elke docent daar aandacht aan had besteed. Vraag 17 was een herleidvraag. Het omschrijven van de formule $K = \log(A) + 3 \cdot \log(D) - 3{,}38$ naar de vorm $K = \log(p \cdot A \cdot D^q)$ is voor de meesten van mijn leerlingen een 'brug te ver'.

Loodrecht en raken of de plank misslaan

Tijdens de examentraining heb ik mijn leerlingen voorbereid op deze 8-punts slotvraag 'Loodrecht en raken'. 'Het zal wel een onderzoeksvraag zijn.' En dat is inderdaad het geval. De enige 'harde' gegevens bij deze vraag zijn de coördinaten van het middelpunt M en de vergelijking van lijn l. En verder is gegeven dat de cirkel de lijnen l en k raakt en dat l en k loodrecht op elkaar staan, zie figuur 6. Veel leerlingen beginnen nog wel met een lijn loodrecht op l. Een deel komt correct uit op het snijpunt van die twee lijnen. Maar dan? Een enkeling maakt de vraag foutloos af, maar voor de meesten is de energie op en de tijd om. Alle leerlingen zitten er nog aan het eind van de examenzitting.

Conclusie

Het examen sloot goed aan bij het examenprogramma. Er was een mooie spreiding over de verschillende soorten functies: een wortelfunctie, een exponentiële functie, een kwadratische functie, een sinusfunctie enzovoort. Ook de meetkundige stof kwam goed aan bod. Ik heb geen enkel onderwerp of vaardigheid gemist. Het was een gebalanceerd examen als je kijkt naar de inhoud. De berekeningen hadden wat meer 'exact' gemogen.
De rekenmachine mocht relatief vaak worden gebruikt.



18 Bereken algebraïsch de omtrek van V.
Geef je eindantwoord in twee decimalen.

figuur 6

Het examen was aan de lange kant. Zelf denk ik, dat het deels te wijten is aan de lange teksten bij met name vraag 9. Dat kost veel tijd. Voor de meeste leerlingen was het ook een moeilijk examen. Bij de poll op *scholieren.com* geeft 54% van 1515 stemmers aan dat het examen 'echt moeilijk was'. Slechts 14% vond het 'goed te doen'. Het feit dat dit het eerste examen was voor de havoleerlingen heeft zeker invloed op hoe moeilijk leerlingen het examen hebben ervaren. En ook was een enkele leerling te zenuwachtig om 'goed uit de verf' te komen. Dat gold niet voor die ene leerling die een 10 op haar eindlijst heeft weten te behalen voor wiskunde B. Fijn, zo'n topper in je klas. Al met al ben ik tevreden met de resultaten van mijn leerlingen. En ik heb weer een paar punten om mee te nemen naar mijn lessen aan de volgende examenklas.

> "Op *scholieren.com* geeft 54% aan dat het examen 'echt moeilijk' was!"

OVER DE AUTEUR

Gerrie Stuurman is docente wiskunde op SG Huizermaat te Huizen.
E-mailadres: *gstuurman@gsf.nl*

Kleintje kansrekening

Simon Biesheuvel

In *Moderne Wiskunde* wordt leerlingen geleerd dat je P(A en B) mag berekenen met P(A)·P(B) als A en B onafhankelijk zijn. Onafhankelijk is dat de kans op B niet afhangt van de uitkomst van A (en omgekeerd). Ook leren leerlingen: In een vaas zitten vier rode en zes witte balletjes. Er wordt aselect, zonder terugleggen, twee balletjes getrokken. De kans op eerste rood en tweede rood bereken je door $P(r, r) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$. Wat mij verbaast is dat leerlingen nooit vragen: 'Maar de kans op die tweede rood is toch afhankelijk van de uitkomst van de kleur bij de eerste trekking? En mag je dan toch vermenigvuldigen?'

Mijn antwoord op deze nooit gestelde vraag is dan: De kans op eerste rood is $\frac{4}{10}$. Maar weet je wel wat de kans is op tweede rood? Dat weten ze niet zo snel. Dus moet ik even uitleggen hoe eenvoudig dit is: Elke bal heeft evenveel kans om als tweede getrokken te worden. Dus de kans op tweede rood is 4 (aantal gunstige uitkomsten) gedeeld door 10 (aantal mogelijke uitkomsten). Dus P(tweede is rood) $= \frac{4}{10}$, gewoon hetzelfde als de kans op eerste rood. (Tussen twee haakjes: zo is de kans op vijfde rood ook $\frac{4}{10}$ ...). Dus klopt het dat je niet de kans op eerste rood mag vermenigvuldigen met de kans op tweede rood. Er komt dus niet $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10}$ uit.

OVER DE AUTEUR

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum.
E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl.*

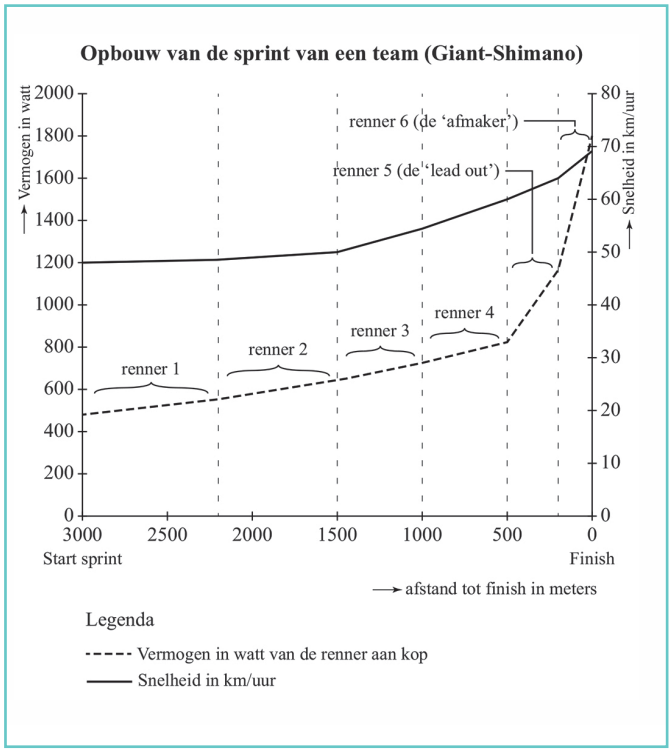
Laurens Quinten

Het sprinttreintje

In wiskundemethodes ‘zie’ je wel eens voorwerpen ‘lineair afkoelen’. Ondanks dat dat bij benadering soms klopt, is het een doorn in het oog van de natuurkunde collega, die juist wil dat de leerlingen begrijpen dat dat een exponentieel proces is. Iets dergelijks was er ook aan de hand met de onderzoeksvraag op het vwo wiskunde A-examen van vorig jaar. Dat inspireerde Laurens Quinten tot de volgende beschouwing.

Benadering

Tijdens het voorbije eindexamen had ik het genoegen te mogen surveilleren bij het CE wiskunde A, vwo. Nadat ik had vastgesteld dat het werken met lineaire verbanden en formules enigszins oververtegenwoordigd was, las ik de onderzoeksvraag: onderzoek welke van de zes wielrenners, die vlak voor de finish een zogenoemd *sprinttreintje* vormen, de meeste arbeid verricht. Een aardige vereenvoudiging was dat alleen de verrichte arbeid tijdens het op kop rijden in de overwegingen werd betrokken, terwijl ik vermoedde dat ik toch al geruime tijd voor de finish zou zijn afgehaakt zonder al op kop te zijn gekomen (en dus nog geen arbeid had verricht). Voor de snelheid en het geleverde vermogen waren keurige lineaire grafieken getekend (nou ja keurig, het feit dat voor de schaalverdeling voor de snelheid 12 mm overeenkwam met 10 km/u stemde me niet zo vrolijk; waarom is dat nodig, zeker na ruim tweeëneenhalf uur werken?). De schrik sloeg me evenwel om het hart toen ik zag dat de variabele op de horizontale as niet de tijd maar de afstand tot de finish was, zie figuur 1.



figuur 1 vwo wiskunde A, CE 2018 1e tijdvak, (onderzoeks)vraag 21

En indachtig opgaven als ‘ik fiets met 20 km/u naar school en later met 10 km/u terug naar huis’, waarbij de gemiddelde snelheid echt geen 15 km/u is kwam ik tot de conclusie dat ook hier zo maar middelen niet in de haak was. Nu werd die soep lang niet zo heet gegeten als ze werd opgediend, immers de gedachte oplossing was ‘lees voor de eerste en voor de laatste wielrenner af wat ongeveer de snelheid en het vermogen zijn, reken daarmee de tijd voor het traject uit en bereken daarmee de verrichte arbeid’. Dat was ook hetgeen een grote meerderheid van de leerlingen deed.
Het stemt me echt droevig dat wiskundige wetmatigheden in examens zonder schaamte te grabbel worden gegooid.

Dat is niet alleen het geval in deze opgave; vorig jaar werd de leerlingen gevraagd *lineair* te interpoleren in een tabel gebaseerd op *exponentiële* groei.

Exacte berekening

Desondanks intrigeerde de vraag me hoe een en ander ‘echt’ zou moeten worden uitgerekend. En dan kom je op

een alleraardigst stukje oude wiskunde B uit. Laat ik, na het aflezen van de begin- en eindpunten van de lineaire snelheids- en vermogensgrafieken van één van de renners proberen de geleverde arbeid uit te rekenen. Daarvoor kies ik renner 3, een wat overdreven variant zou zijn voor de begin- en eindpunten acht parameters te nemen en dan in één keer de arbeid van alle zes renners te berekenen. Met wat handig programmeren is dat in Excel overigens goed te doen.

Het startpunt van de snelheidsgrafiek ligt op A(-1500 m, 50 km/h) of A(-1500 m, 13,9 m/s) en het eindpunt op B(-1000 m, 55 km/h) of B(-1000 m, 15,3 m/s). Omdat v (en P) lineaire functies zijn van s kan de formule $v = as + b$ opgesteld worden met $a = \frac{15{,}3-13{,}9}{500} \approx 0{,}0028$ en, na substitutie van de coördinaten van A, $b \approx 18{,}1$.

Dus $v = 0{,}0028s + 18{,}1$. Nu geldt, zoals bekend, dat $v = \frac{ds}{dt}$. Daarom ontstaat de differentiaalvergelijking $\frac{ds}{dt} = 0{,}0028s + 18{,}1$. Oplossen levert:

$\frac{ds}{dt} = 0{,}0028s + 18{,}1 \rightarrow 360\frac{ds}{dt} = s + 6500 \rightarrow$

$\frac{ds}{s+6500} = 0{,}0028dt.$

Integreren geeft: $\ln(s + 6500) = 0{,}0028t + C \rightarrow$

$s + 6500 = e^{0{,}0028t + C}$.

De finish $s = 0$ vindt plaats op $t = 0$, dus

$e^C = 6500$. Dat levert op:

$s = 6500e^{0{,}0028t} - 6500$.

Het tijdinterval wordt dan gevonden door t uit te rekenen voor s = -1000 m en voor s = -1500 m.

s = -1000 m: t_0 = -60 s, s = -1500 m: t_1 = -94 s

Voor de arbeid geldt vervolgens $W = \int_{t_0}^{t_1} P(t)dt$.

Voor P gelden als begin- en eindpunt van de rechte lijn achtereenvolgens C(-1500, 640) en D(-1000, 730).

Ook hier kan een formule worden opgesteld:

$P = cs + d \cdot c = \frac{730-640}{500} \approx 0{,}18$; substitutie van C en s leidt tot

$P = 0{,}18s + 910 = 0{,}18(6500e^{0{,}0028t} - 6500) + 910 =$

$1170e^{0{,}0028t} - 260$.

Dus $W = \int_{-94}^{-60} (1170e^{0.0028t} - 260)dt =$

$1170/0{,}0028 \cdot e^{0{,}0028t} - 260t$

tussen de genoemde grenzen, hetgeen gelijk is aan

$23 \cdot 10^3$ Watt.

Hoe goed is de benadering?

Met de middens van AB en CD komt de gemiddelde snelheid op 14,6 m/s en het gemiddelde vermogen op 685 Watt. De tijd is dan 500/14,6 ≈ 34 s en de geleverde arbeid is $34 \cdot 685 \approx 23 \cdot 10^3$ Watt.

Bij deze relatief kleine verschillen tussen begin- en eindsnelheid *levert de benadering dus een alleraardigst resultaat op*. Om te onderzoeken of er in andere gevallen wel grote verschillen zijn kijk ik ook even naar het geval waarin de grafieken van v en P lineair blijven met dezelfde gemiddelden maar waarin ze veel steiler lopen: A_1(-1500 m, 5 km/h); B_1(-1000, 100 km/h) resp. C_1(-1500, 270) en D_1(-1000, 1100). Een vergelijkbare berekening leidt dan tot $W = 29 \cdot 10^3$ bij de exacte berekening en dat maakt duidelijk een aanzienlijk verschil met de eerder geschatte $W = 23 \cdot 10^3$ Watt.

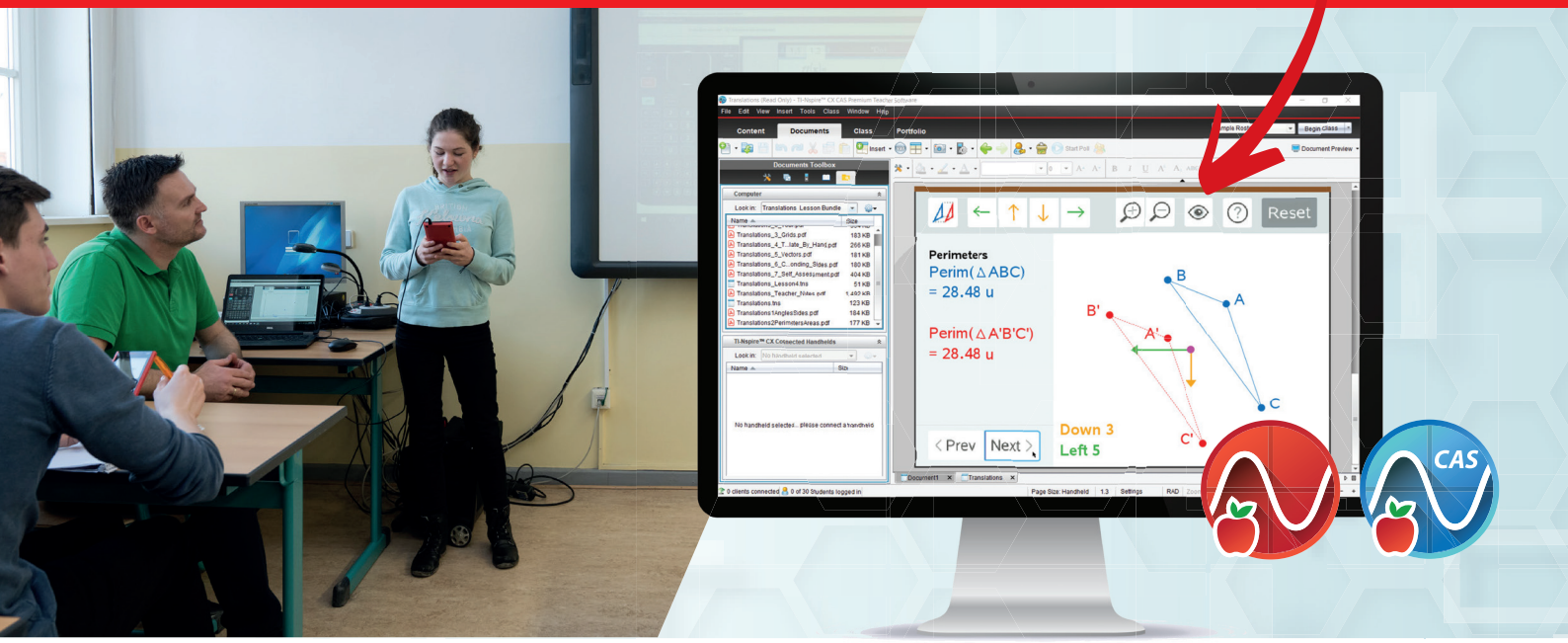
Ten slotte kunnen we de hele vraagstelling omdraaien: hoe ziet de s-v grafiek er uit als $v(t)$ de lineaire functie is waarvan de grafiek door A en B gaat? Dan wordt A_2(-94 s, 55 km/h) en B_2(-60 s, 50 km/h). Na enig rekenwerk blijkt dat een mooie parabool, als grafiek van een wortelfunctie te zijn. Logisch eigenlijk, want het s-t verband is kwadratisch zodat het t-s verband hiervan de inverse is.

OVER DE AUTEUR

Laurens Quinten is gepensioneerd leraar wiskunde en is bijna veertig jaar verbonden geweest aan Gymnasium Juvenaat in Bergen op Zoom en het Newmancollege te Breda. Na zijn pensionering heeft hij als invaller op zes scholen in Zuidwest-Nederland lessen in de bovenbouw havo/vwo verzorgd. E-mailadres: *ljiquinten@gmail.com*

Aanbieding speciaal voor leraren!

Gratis licentie TI-Nspire™ CX Premium software



Met TI-Nspire™ CX Premium software maakt u lessen interactief en dynamisch. U kunt concepten en handelingen stap voor stap laten zien en leerlingen voor de klas laten presenteren vanaf hun eigen handheld.

GRATIS

Wilt u kennismaken met onze TI-Nspire™ technologie? Vraag dan nu een **licentie TI-Nspire™ CX Premium software** aan. Probeer de technologie op uw computer uit en benut de nieuwe functies die onderzoekend leren mogelijk maken!

education.ti.com/nl/gratislicentie

Kijk voor meer informatie op: **education.ti.com/nederland**

TEXAS INSTRUMENTS

©2019 Texas Instruments

Rob van Oord

Examen vwo wiskunde A

Rob van Oord bespreekt de opgaven van het vwo wiskunde A-examen en geeft een algemene indruk. De N-term van het examen was 1,2.

Inleiding

Het examen bestond uit twintig vragen verdeeld over vijf opgaven. Het examen beantwoordde aan mijn verwachtingen wat betreft de onderwerpen en de moeilijkheidsgraad. De eerste opgave vond ik niet erg gelukkig gekozen. Ik vond het examen ook best lang, veel tekst.
De Groningse aardbevingen zorgden voor een actueel onderwerp, hoewel de aangeboden grafieken voor de nodige problemen zorgden. De opgaven over kentekens en verpakkingen sloten goed aan bij de geoefende sommen. Met de opgave over goudplevieren kwam de natuur aan bod en de opgave over het hek langs het Zandpad in Utrecht zorgde voor de creatieve kant van het examen.

Globaal

Als we de vragen wat nader bekijken, dan was het aantal vragen waarbij geredeneerd moest worden, al dan niet ondersteund door berekeningen, vrij groot.
De vragen 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 14, 18 en 20 met 'onderzoek, laat zien, beredeneer, ga na, toon aan, geef aan en geef' waren samen goed voor 47 van de te halen 79 punten. Er werd dus in hoge mate een beroep gedaan op het denkvermogen, 'wat moet ik precies doen', om te voldoen aan wat de examenmakers van de kandidaten willen zien. Uit het correctievoorschrift bleek vaak dat stappen die voor veel leerlingen vanzelfsprekend zijn eigenlijk ook hadden moeten worden opgeschreven. Maar samen met het verslag van de examenbespreking en een begrijpende collega als tweede corrector kon ik toch nog aardig wat (terecht verdiende) punten geven.
Wat ik bedenkelijk vond was dat er een aantal vragen bij zat waar door elke leerling een zelfde aantal punten gescoord werd, soms ook zelfs 0 punten, terwijl je verwacht dat het examen voor de betere leerling meer punten op zou leveren dan voor de zwakkere. Hierdoor kwamen er weinig diepe onvoldoendes (wat natuurlijk leuk is voor de leerlingen) maar ook vrijwel geen hoge scores die ik graag mijn superleerlingen had zien halen. Vragen die vrijwel iedereen goed had: 4 (21 van de 23 leerlingen), 8 (15 van de 23), 10 (16 van de 23) en 18 (17 van de 23). Vragen waarvan je van tevoren kon zien dat vrijwel niemand die zou scoren (en dat bleek ook zo te zijn): 3 (16 van de 23), 11 (18 van de 23), 13 (15 van de 23) en 20 (22 van de 23). Nu neem ik het examen per opgave onder de loep.

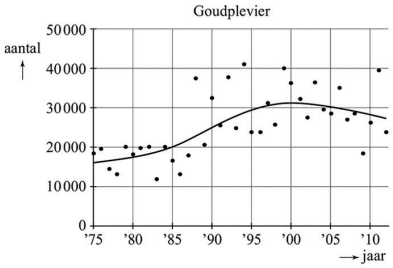
Goudplevieren (vragen 1 t/m 5)

Goudplevieren

Een goudplevier (zie foto) is een vogel die niet in Nederland broedt, maar tijdens zijn trektochten wel in Nederland te vinden is. Er zijn grote verschillen in aantallen goudplevieren tussen de verschillende jaren. In figuur 1 zijn de aantallen goudplevieren in Nederland in de jaren 1975 tot en met 2012 weergegeven als zwarte stippen.

foto

figuur 1



In figuur 1 is ook een kromme getekend die de trend aangeeft. We nemen aan dat vanaf 2003 deze trend een rechte lijn is en dat dit ook na 2012 zo blijft.

figuur 1

Niet alle leerlingen zagen in dat bij de trendlijn (vraag 1, zie figuur 1) een lineair verband hoort en ze gingen aan de slag met een exponentiële formule (met name de betere leerlingen). Jammer dat meteen bij de eerste vraag een

klein stukje grafiek gebruikt moest worden, dat niet echt op een rechte lijn lijkt, waarbij ook nog eens de aantallen slecht af te lezen waren. Waarom was deze grafiek ook niet op de uitwerkbijlage gezet? (Van de dubbel A4 bijlage waren drie zijden leeg!) De marge bij het correctievoorschrift was dan wel groot, maar als leerling zit je wel meteen met de vraag hoe nauwkeurig het moet. Bij de grafiek van het najaar (vraag 2 stelling 1) staat de helling er wel bij. Veel leerlingen zien dit niet en gaan van beide lijnen de gemiddelde toename berekenen. Het was elegant geweest als de makers in de stam van vraag 2 gezegd hadden: 'Zo kun je aflezen dat de gemiddelde toename van het lichaamsgewicht in het najaar 0,6 gram per dag is'. Of die 0,6 niet in de figuur gezet hadden.
Het goed verwoorden waarom de gewichtstoename in het voorjaar niet uit vet bestaat (vraag 2 stelling 2) was voor veel leerlingen lastig.
Bij vraag 3 moest een formule over het percentage vet, $P_{voorjaar} = \frac{1600}{2{,}3t + 198}$, bij het totale lichaamsgewicht worden toegelicht. Als de leerlingen nu eerst hadden bedacht hoe je een percentage uitrekent, dan hadden ze niet massaal naar het antwoord toegewerkt waar 1600 in de teller stond.
Het beredeneren aan de hand van de formule dat het vetpercentage in het voorjaar afneemt is een eitje. Hoewel het correctievoorschrift eist dat je vermeldt dat de teller constant (en positief) is. Maar dat kun je dan impliciet ook goed rekenen. Bij vraag 5 moest P_{najaar} worden gedifferentieerd en aan de hand van de afgeleide worden onderzocht of de functie P_{najaar} afnemend stijgend is. Veel leerlingen kunnen niet goed het verschil uitleggen tussen de afgeleide en de functie zelf. Zinnen als 'De breuk is positief dus hij stijgt' reken ik niet goed.

Kentekens (vragen 6 t/m 9)

Bij vraag 6 en 7 kwamen mogelijke aantallen kentekens van auto's aan bod. Het viel tegen hoeveel leerlingen niet de uitkomst van het aantal mogelijke nummerborden met CC – LLL - C (= 10 × 10 × 26 × 26 × 26 × 10) konden berekenen. Goed lezen van alle voorwaarden is vereist om tot een volledig aantal punten te komen (vraag 10) en dat deed slechts een enkeling. Bij vraag 8 en 9 kwam het onderwerp rijen aan bod. Dat er gevraagd wordt naar de recursieve formule maar dat je dan ook A_0 moet opschrijven (ten koste van 1 punt) vond ik wel weer flauw. Ook werd er niets gedaan met de opmerking in de tekst dat de verslaggever zich afvroeg tot welke datum deze serie, sidecode 8, zou meegaan. Zo blijven vraag 8 en 9 in de lucht hangen.

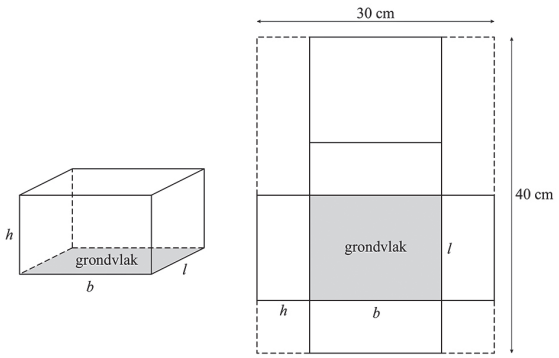
Verpakkingen (vragen 10 t/m 13)

Ik begon dit examenjaar met mijn klas met de opgave Pakketshop (CE vwoA 2010 - 2). Ook een opgave waarin de inhoud van een doos gemodelleerd en geoptimaliseerd moest worden. Dus ik had verwacht dat ze deze opgave wel goed zouden scoren. Helaas, modelleren, vraag 11, zelfs na het getallenvoorbeeld van vraag 10, waar de inhoud van een doos uit een stuk karton van 30 bij 40 cm moest worden uitgerekend, zie figuur 2, blijft een brug te ver.
Bij vraag 13 moesten drie formules worden omgewerkt tot één nieuwe. Als je bedacht had 'de r moet weg' dan was je al een eind gekomen. Uit $A = 12{,}57r^2$ moet je dan r vrij schrijven. Daarbij moet je snappen dat A / 12,57 geschreven kan worden als 1 / 12,57 · A = 0,08A.

Verpakkingen

Om een verpakking in de vorm van een balk te maken, wordt een karton van 30x40 cm gebruikt. In de afbeeldingen hieronder zie je links een verpakking en rechts hoe de uitslag daarvan uit het karton geknipt wordt. Hierbij is h de hoogte, b de breedte en l de lengte van de verpakking in cm. De uitslag eindigt precies bij de randen van het karton. Zie de figuur.

figuur



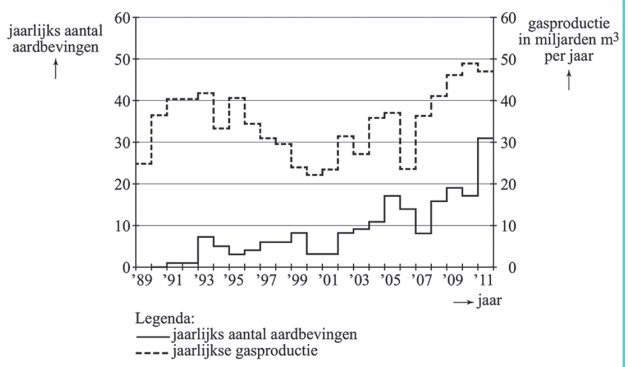
Van een bepaalde verpakking is de hoogte gelijk aan 3 cm.

10 Bepaal de lengte en breedte van deze verpakking en bereken daarmee vervolgens de inhoud van deze verpakking.

figuur 2

"Het juist aflezen op de logaritmische schaal (vraag 15) bleek voor veel leerlingen lastig genoeg."

Groningse aardbevingen (vragen 14 t/m 19)



We bekijken de volgende drie beweringen:

1 De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de gehele periode 2000-2011 procentueel evenveel gestegen.
2 Als na 2000 de gasproductie daalt, dan heeft dat altijd een jaar later ook een daling van het aantal aardbevingen tot gevolg.
3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde stijging per jaar van het aantal aardbevingen groter dan in de periode 1998-2004.

14 Geef van elke bewering aan of deze waar is of niet. Gebruik in je toelichting gegevens uit figuur 1 en gebruik daarbij eventueel de figuur op de uitwerkbijlage.

figuur 3

Hier kregen de leerlingen een (dubbele) trapgrafiek voorgeschoteld met daarin per jaar het aantal aardbevingen en de totale gasproductie. Deze figuur was ook heel groot te vinden op de uitwerkbijlage. Ondanks de toelichting in de tekst begrepen veel leerlingen niet hoe ze traptreden bij het jaar moesten aflezen.
Het tweede deel van de opgave ging over een logaritmische schaal en exponentiële functies. Op zich bekende stof, maar veel leeswerk hoe een en ander bedoeld was. Ik vraag me af of de uitleg van de getekende stippen wel juist geformuleerd is. In feite stelt elke stip niet een aardbeving voor op het getekende tijdstip, maar geeft de stip het totaal aantal aardbevingen aan die bij de getekende magnitudelijn vanaf april 1994 tot dat tijdstip geweest zijn. Het zijn dus cumulatieve aantallen. Gelukkig hebben de leerlingen hier geen punt van gemaakt. Het juist aflezen op de logaritmische schaal (vraag 15) bleek voor veel leerlingen lastig genoeg. Vraag 16 (tweede deel) over de betekenis van $A'(117)$ bij $A = 12 \cdot e^{0{,}013t}$, gaf de nodige problemen. Het correctievoorschrift was nogal stellig over wat leerlingen moesten opschrijven. Mijn tweede corrector vond dat ik soms te streng was. Dat $A'(117)$ een toename in die maand is, en $t = 117$, waar in de grafiek tussen haakjes januari 2004 bij stond, mocht ik ook goed rekenen.

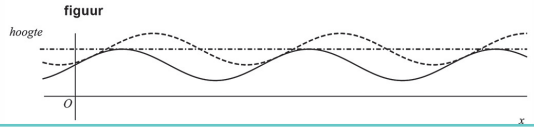
Een hek bij het Zandpad (vraag 20)

Langs het Zandpad in Utrecht staat een hek dat bestaat uit twee sinusoïden, die elkaar raken. Zie de foto.

foto

In de figuur hieronder zijn de twee sinusoïden in het hek schematisch weergegeven.

figuur



figuur 4

Hier moest de formule van een sinusvorm worden gevonden: de standaardformule $S_{boven} = a + b\sin(c(x - d))$ levert al 1 punt op. De punten voor amplitude, evenwichtstand en c ($= 2\pi$ / periode) zijn ook makkelijk te scoren. Maar er is in mijn klas maar één leerling die de 4 punten voor het berekenen/bepalen van d heeft gescoord. Zelf had ik die waarde ($d = 1$) beredeneerd door de symmetrie van de grafieken te gebruiken. Maar die manier stond niet in het correctievoorschrift. Door het woord *raken* probeerde ik ook nog met een berekening met d / dx van S_{onder} in de GR in te voeren, maar daar loop je vast als je geen kettingregel gebruikt. De afgeleide van de sinus hoort niet tot de stof van wiskunde A. Gezien het correctievoorschrift hoefde het begrip 'raken' in deze opgave helemaal niet verder onderzocht te worden. Dus had ik moeten inzien dat de waarde $S_{onder}(0{,}5) = 125$ ook hoort bij $S_{boven}(0{,}5)$. Net een brug te ver voor de kandidaten (en voor mij). Jammer dat deze (onderzoeks)vraag (8p) niet het onderscheid maakt tussen de mindere en betere leerlingen. Misschien dat daarom de N-term 1,2 werd.

Tot slot

Kortom, een examen dat goed te doen was, gunstig voor zwakke leerlingen om snel al veel punten te scoren, maar dat weinig soelaas bood voor de echt goede leerlingen.

OVER DE AUTEUR

Rob van Oord is docent wiskunde, van augustus 1974 tot augustus 2014 op het Coenecoop College in Waddinxveen, daarna als invaller op scholen in de regio. Hij is voorzitter van de NVvW werkgroep havo-vwo en redactielid van de Zebra reeks.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Marcel Daems

Examen vwo wiskunde B

Marcel Daems bespreekt het vwo wiskunde B-examen. ‘Een mooi examen’, maar over het correctievoorschrift is nog wel het een en ander te melden. Zie ook het artikel van Maarten Müller op bladzijde 32. Het examen heeft een N-term van 1,8.

Inleiding

Om maar meteen met de deur in huis te vallen: wat een mooi examen. Een stevig examen waarin veel algebraïsche vaardigheden en denkactiviteiten van leerlingen gevraagd worden, een examen met genoeg uitdaging. Is er dan niets op aan te merken? O zeker wel, meer dan genoeg. Dat gaat dan meer over het correctievoorschrift dan over het examen. Ook het punt van de (on)deelbaarheid van scorepunten komt ter sprake.

Vorig jaar opende het centraal examen vwo met wiskunde, nu was wiskunde bijna aan het eind gepland. Zou dit van invloed zijn op de prestatie van de leerlingen? Zijn ze aan het eind nog fit genoeg? Of geeft dit de leerlingen juist meer tijd om te leren? Voor de docenten betekende het in ieder geval een kortere periode om de eerste en tweede correctie uit te voeren, zeker voor docenten met twee groepen. Het (raadselachtige) advies om het werk op de dag na Hemelvaart – waarop verreweg de meeste scholen dicht zijn! – bij de school van de tweede corrector te bezorgen maakte de druk op de eerste correctie nog groter.

Op 20 mei was het dan zover. Zoals altijd ben ik zeer benieuwd naar het examen. Zodra de leerlingen aan de slag zijn, kan ik het examen bekijken. Mijn eerste indruk is meteen positief, er zit van alles in en het lijkt niet moeilijk. Toen ik na afloop het examen ging maken, kwam ik allerlei listigheden tegen. Het is misschien toch niet zo makkelijk. Waar zouden de leerlingen tegenaan zijn gelopen?

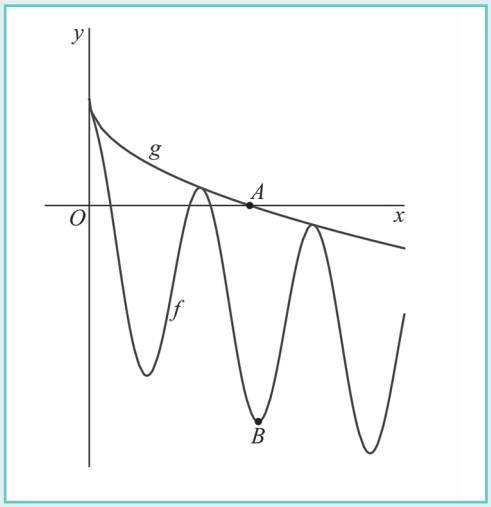
> “Het examen was uitdagend en aan de lange kant met (te) veel grote opgaven”

Lijnen door de oorsprong en de cirkel

De eerste vraag is een mooie binnenkomer. Gegeven is een vectorvoorstelling van een lijn, een middelpunt van een cirkel en de bijbehorende straal. Er wordt gevraagd om op exacte wijze de snijpunten van de lijn met de cirkel te vinden. Omdat de lijn door de oorsprong gaat, is deze opgave relatief makkelijk. Zoals gezegd een mooie binnenkomer, niet veel leerlingen hadden hier moeite mee.

Rechts van het snijpunt

De tweede vraag bevat twee functies $f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{(2x)}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{(2x)}$ waarbij met behulp van de afgeleide van $f(x)$ aangetoond moet worden dat een bepaald (lokaal) minimum van $f(x)$ rechts moet liggen van het nulpunt van $g(x)$, zie figuur 1.



figuur 1

Bij het nakijken bleek dat hier bij sommige leerlingen enige verwarring ontstond. Het is een ‘toon aan’-vraag en sommigen dachten blijkbaar dat dit algebraïsch

moest. Dat stond echter niet in de opdracht. Uiteindelijk gebruikten verreweg de meeste leerlingen de grafische rekenmachine om het probleem op te lossen.
Er is nog een manier die niet in het correctievoorschrift stond, namelijk door de x-coördinaat van het nulpunt van $f(x)$ in de afgeleide van $g(x)$ in te vullen en te laten zien dat de afgeleide in dat punt negatief is. Oftewel het bedoelde minimum van $g(x)$ ligt dus rechts van het nulpunt van $f(x)$.

Altijd raak

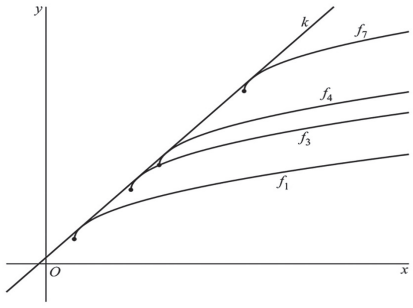
Vraag 3 en 4 gaan over een gegeven lijn k en een wortelfunctie f_p met een parameter p, zie figuur 2.

Voor $p \geq 1$ is de functie f_p gegeven door:

$f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$

In figuur 1 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p weergegeven en ook lijn k met vergelijking $y = x + \frac{1}{4}$.

figuur 1

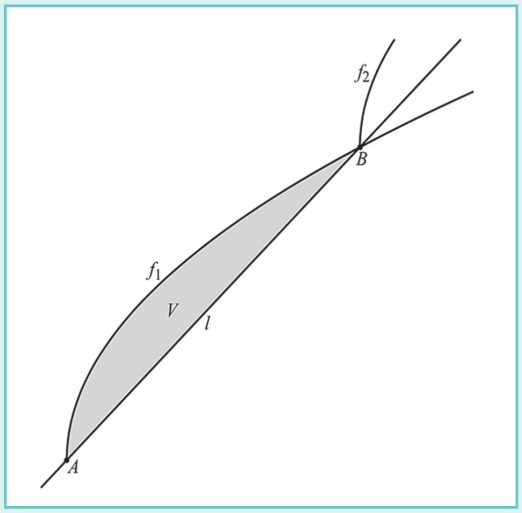


Lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke waarde van $p \geq 1$.

3 Bewijs dit.

figuur 2

vraag die dan ook terecht maar 3 punten waard is. Echter een oplettende leerling zou bij deze vraag in de problemen kunnen komen. Voor iedere $p \geq 1$? Dus ook voor $p = 1$! Maar dan bestaat f_{p-1} niet, want f_0 is niet gedefinieerd. Zou het helpen om de vraag te veranderen in te bewijzen dat voor $p \geq 2$ geldt dat het randpunt van f_p op f_{p-1} ligt? Dat kan ook weer verwarrend zijn, want waarom geldt nu ineens $p \geq 2$? En vraagt dat dan om extra uitleg? Ik vraag me af of dit naar voren is gekomen in de verschillende testen en ben benieuwd hoe in een volgend examen zoiets als dit opgelost wordt. Een uitdaging voor de examenmakers.
Tot slot bij dit onderdeel moet in vraag 5 de oppervlakte berekend worden tussen de grafiek van f_1 en de lijn l: $y = x$, zie figuur 3.



figuur 3

In vraag 3 moet bewezen worden dat de lijn k de grafiek van f_p voor elke waarde van $p \geq 1$ raakt. Door de afgeleiden aan elkaar gelijk te stellen is de x-coördinaat van het raakpunt in p uit te drukken. Zowel de functie als de lijn hebben bij deze x-coördinaat dezelfde y-coördinaat. Het correctievoorschrift geeft naast deze werkwijze nog een oplossingsmethode met behulp van vectoren en translaties. Maar die vind ik enigszins ver gezocht. Een strategie waarbij de discriminantmethode wordt gebruikt had ik eerder verwacht. Verschillende leerlingen hebben die strategie gekozen. Het randpunt van iedere functie f_p ligt op de lijn $y = x$ en de lijn k is geen horizontale lijn. Door k te snijden met f_p volgt een tweedegraadsvergelijking. De discriminant van deze vergelijking is nul. De conclusie die dan getrokken kan worden is, dat er slechts één snijpunt is en met het gegeven dat het randpunt onder of rechts van de lijn k ligt, moet het wel om een raakpunt gaan.
Bij vraag 4 moest bewezen worden dat voor $p \geq 1$ geldt dat het randpunt van f_p op f_{p-1} ligt. Een eenvoudige

De enige moeilijkheid is het primitiveren van een wortel. Een makkelijke opgave. Tenminste als de leerling het verschil van de functies neemt en dan de integraal berekent. Leerlingen die de boel opknippen en de oppervlakte onder f_1 uitrekenen moeten er rekening mee houden dat de oppervlakte onder l meer is dan alleen een driehoek. De bijzonderheid van deze vraag zit in het correctievoorschrift.
Laten we het even hebben over de interpretatie van de (on)deelbaarheid van scorepunten. In de algemene regels (regel 2.2) van het correctievoorschrift staat dat alleen met hele scorepunten gewerkt moet worden. Toch is er vaak discussie waarbij menigeen beweert dat een scorebol met twee punten alleen met nul of twee punten beloond mag worden. Om verwarring te voorkomen had het CvTE in de bijlage met vakspecifieke informatie bij de Septembermededeling met de Maartaanvulling aangegeven, altijd een opmerking te zullen plaatsen bij een antwoordelement dat meer dan één punt waard is. Bij deze vraag is het derde antwoordelement 2 scorepunten >

figuur 3

waard zonder dat er een opmerking bij geplaatst is, zie figuur 4. Ook bij vraag 7 en 14 komt dit voor.

5 maximumscore 5

- Een vergelijking van lijn l is $y = x$ 1
- De oppervlakte is gelijk aan $\int_1^2 \left(1+\sqrt{x-1}-x\right)\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $1+\sqrt{x-1}-x$ is $x+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2$ 2
- De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{6}$ 1

figuur 4

De aanvulling op het correctievoorschrift maakt het gelukkig helemaal duidelijk, zie figuur 5.

Aan de secretarissen van het eindexamen van de scholen voor vwo,
Bij het centraal examen wiskunde B vwo:

Op **pagina 6**, bij **vraag 5** moet het volgende worden toegevoegd:

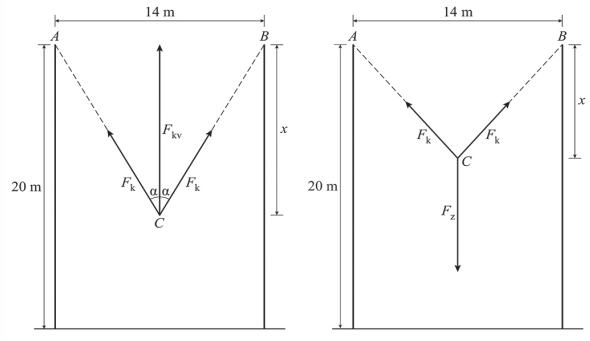
Opmerking
Voor het derde antwoordelement mogen 0, 1 of 2 scorepunten worden toegekend.

figuur 5

Antwoordelementen met meer dan één scorepunt zijn wel degelijk deelbaar als er geen opmerking bij staat zolang we maar met hele punten blijven rekenen. Hopelijk is de verwarring over de vermeende ondeelbaarheid van punten nu voorgoed verdwenen. En hopelijk bevatten toekomstige correctievoorschriften ook antwoordelementen met meer punten zonder een alles-of-niets karakter.

Slingshot

De gebruikelijke contextrijke opgaven waarbij leerlingen moeten laten zien dat zij in staat zijn de wiskunde uit die context te halen. Het gaat om het berekenen van de krachten die op een capsule werken. Vraag 6 is een cadeautje. Tenminste voor iedereen die ziet dat de stelling van Pythagoras nodig is. In de situatie waarin punt C op de grond staat, moet lengte $L = BC$ berekend worden om vervolgens met behulp van de formule $F_k = 0{,}6(L - 8)$ de kracht F_k te berekenen.



figuur 6

Vraag 7, zie figuur 6. Dat de afbeeldingen een leerling op het idee brengen dat de kracht F_{kv} gelijk is aan x is geen bezwaar. Van leerlingen mag verwacht worden dat ze geen vermeende informatie uit een plaatje halen. De vraagstelling is echter bedenkelijk. De opdracht luidt: 'Druk F_{kv} uit in x en bereken daarmee hoe hoog de capsule boven de grond hangt als hij tot stilstand is gekomen'. Dat zijn twee opdrachten in één vraag en deze vraag is ook nog eens 7 punten waard. Zodra het eerste deel niet lukt, blijft er weinig over om te verdienen. Het is jammer dat deze opdracht niet gesplitst is in twee aparte opdrachten. Afgezien daarvan vind ik het een leuke opdracht waarin de leerling moet laten zien hoe hij of zij een probleem met een vergelijking met twee variabelen aanpakt.

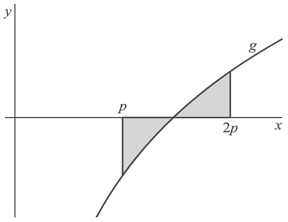
Een logaritmische functie en haar afgeleide

De volgende twee vragen gaan over de natuurlijke logaritme. Gegeven is de functie $f(x) = x\ln(x) - x + 1$ en de functie $g(x) = f'(x)$. Vraag 8 vraagt uit te zoeken waar de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ elkaar snijden. De primitieve van $\ln(x)$ zit niet meer in het programma, maar omdat de afgeleide van $f(x)$ nodig is en gelijk is aan de natuurlijke logaritme van x komen de leerlingen er toch mee in aanraking. De vergelijking die exact opgelost worden is $x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$.
Menig leerling heeft zich verslikt in deze vergelijking. Degene die gaan ontbinden in factoren komen eruit. Maar degenen die $\ln(x)$ vrijmaken door te delen door $x - 1$ komen tot de vergelijking $\ln(x) = (x - 1) / (x - 1)$. Zij kunnen nu niet zomaar zeggen dat $x = 1$ ook een oplossing is. Vraag 9 is een integraal met variabele grenzen, zie figuur 7.

Er is één waarde van p waarvoor geldt:

$$\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Voor deze waarde van p is de situatie in de figuur geschetst.
figuur



9 Bereken exact deze waarde van p. Schrijf je eindantwoord in de vorm $p = ae$, waarbij a een getal is.

figuur 7

Leerlingen die bij de vorige vraag met een verkeerde primitieve aan de slag zijn gegaan, kunnen daardoor bij deze vraag ook in de moeilijkheden komen of, als de verkeerde primitieve de vraag te makkelijk maakt, weinig verdienen. Ik vind het een mooi gekozen probleem. De primitieve $f(x) = x\ln(x) - x + 1$ en de grenzen p en $2p$ zorgen voor een vergelijking waar even over nagedacht moet worden. Het leidt namelijk tot:
$2p\ln(2p) - p\ln(p) - p = 0$. Die 'losse' p en de factor $2p$ maken deze vergelijking uitdagender. De stap $2p\ln(2p) = \ln((2p)^{2p})$ brengt een leerling niet dichter bij een oplossing. Die p moet eerst weggewerkt worden om de rekenregels zinvol toe te kunnen passen.

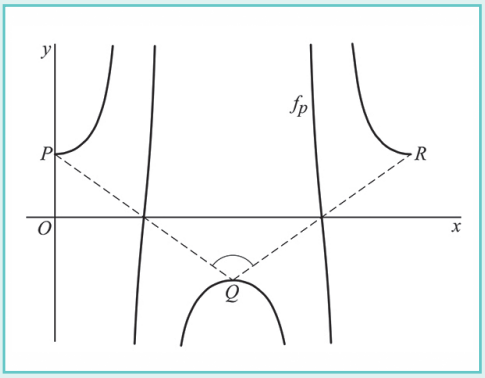
Gebroken goniometrische functie

Een drietal vragen waarbij goniometrie, limieten en analytische meetkunde bij elkaar komen. Leuk bedacht. Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \cos(x) / (p - \sin^2(x))$. Maar bij vraag 10 nog niet, daar geldt $p = 0$. Hier is de vraag exact uit te rekenen waar de functie $f(x)$ gelijk is aan $\sqrt{2}$. Het leidt door op de juiste manier gebruik te maken van $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ tot een kwadratische vergelijking waarvan de ontbinding niet zo snel gevonden kan worden. De *abc*-formule levert de uitkomsten. Een aardig goniometrisch probleem. De vervolgopgave is om te onderzoeken of er waarden van p zijn waarvoor de grafiek van f_p perforaties heeft. Een mooie opgave waar enige denkactiviteit bij komt kijken en hier blijkt dat velen daar moeite mee hebben. Het onderzoek komt neer op de volgende combinatie van vragen:

— Als er perforaties zijn, wat moet dan de waarde van p zijn?
— En als die waarde van p bekend is, heeft de grafiek dan perforaties?

De meeste leerlingen komen wel tot de waarde van $p = 1$, maar denken niet aan het tweede deel en trekken direct de conclusie dat er perforaties zijn in het geval $p = 1$. Jammer, zo missen de leerlingen 2 punten. Voor deze moeilijke opgave valt de schade dan reuze mee.
De derde vraag in deze serie, vraag 12, is het analytisch meetkundig deel. Hier geldt de situatie dat $p \neq 0$ is.
Er is een drietal punten P, Q en R gegeven met hun bijbehorende x-coördinaten, respectievelijk 0, π en 2π. Gesteld is dat er waarden van p bestaan zodanig dat PQ en QR loodrecht op elkaar staan. De leerlingen moeten deze waarden exact berekenen, zie figuur 8.

> "Het was een kwelling te bepalen op grond van welk alternatief of bol een leerling wel of geen punten verdient."



figuur 8

Het is naar mijn idee een niet al te moeilijke opdracht. Dan zijn we bijna bij het einde. Er valt nog veel te verdienen, want de laatste drie vragen zijn samen 20 punten waard. Dat is 25% van alle punten. Dat is veel en erg duur voor leerlingen die veel tijd hebben gespendeerd aan bovenstaande vragen.

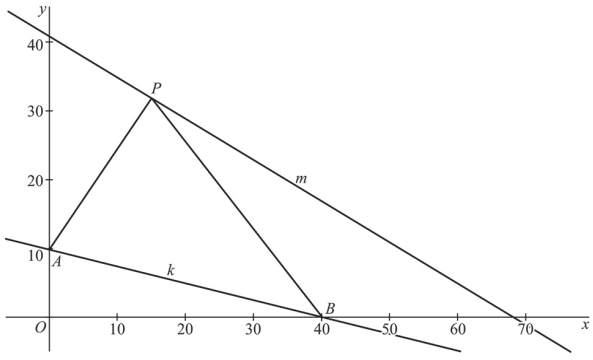
Driehoek en bewegend punt

Lijn k gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(40,0)$.
De baan van een punt P is gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$$

De baan van punt P is de lijn m. Zie de figuur.

figuur



Bij bijna elke positie van punt P vormen de punten A, B en P een driehoek ABP. Er is één uitzondering.

13 Bereken de coördinaten van P zodat A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek vormen.

14 Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is.

figuur 9

>

Gedifferentieerd lesgeven

met bettermarks wiskunde

De wiskundemethode van bettermarks combineert de voordelen van digitaal met het werken op papier. De methode is gericht op het individuele leerproces van de leerling. Dit kenmerkt zich door gerichte feedback, herkenning van systematische fouten en verschillende soorten opgaven. De docent kan door de rapportages gedetailleerd de voortgang per leerling volgen.

- Hiatenanalyse
- Differentiatie
- Inzicht

Gratis proeflicentie

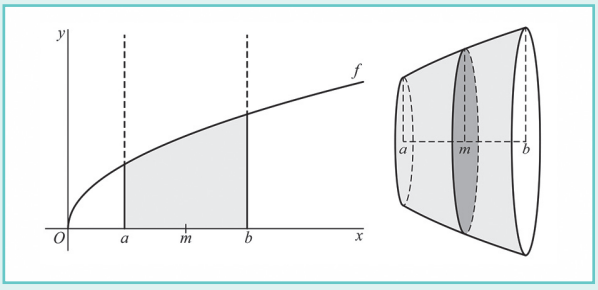
Benieuwd wat bettermarks voor uw wiskunde - of rekenlessen kan betekenen? Vraag gratis een proeflicentie aan via support@bettermarks.nl, 036 30 30 363 of **www.bettermarks.nl**

Wiskunde VMBO leerjaar 1 - 4 | HAVO/VWO leerjaar 1 - 3 | Rekenen 1F, 2F en 3F

Een driehoek ligt tussen twee lijnen. Op een van de lijnen ligt de basis van de driehoek en de andere lijn gaat door de top. De lijn door de basis ligt vast door de snijpunten met de assen en de lijn door de top is beschreven door een parametervoorstelling, zie figuur 9. De punten *A*, *B* en *P* vormen, op één uitzondering na, altijd een driehoek. In vraag 13 moeten de leerlingen nagaan wanneer die uitzondering optreedt en wat dan de coördinaten van *P* zijn. Slechts weinigen hadden niet door dat het om de coördinaten van het snijpunt van de lijnen gaat. De coördinaten zijn bovendien zonder al te veel problemen te vinden. Een aardige opgave, omdat het om een combinatie van een vergelijking en een parametervoorstelling gaat. Het vervolg is vraag 14 met de opdracht te onderzoeken of er een positie van *P* is waarbij driehoep *ABP* gelijkbenig is met een rechte hoek bij *P*. Een hele leuke vraag waar veel in zit en waar goed over nagedacht moet worden. Leerlingen kunnen in deze vraag veel creativiteit kwijt. Dat hebben docenten die het moesten beoordelen wel geweten. Het correctievoorschrift geeft maar liefst zes verschillende alternatieven om tot een beoordeling te komen. Verschillende daarvan kunnen ook nog gecombineerd worden en menig leerling blijkt nog een andere manier te hebben bedacht. Het correctievoorschrift had met twee varianten kunnen volstaan. Eén die uitgaat van een rechte hoek waarbij dan nagegaan moet worden of de zijden *AP* en *BP* even lang zijn. En een ander natuurlijk andersom. Omdat bij analytische meetkunde vele wegen naar Rome kunnen leiden, lijkt het aan te raden om bij dit soort opgaven antwoordelementen die meer punten bevatten op te nemen zonder enige beperking. De eerste en de tweede corrector kunnen heel goed bepalen wat wel en geen verantwoorde wiskunde is om tot een oplossing te komen. Het was een kwelling te bepalen op grond van welk alternatief of bol een leerling wel of geen punten verdiende. Deze vraag heeft de correctoren enorm veel tijd gekost.

Afgeknotte paraboloïde

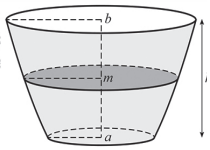
De afsluitende vraag 15 is een wortelfunctie, $f(x) = \sqrt{(x)}$, die gewenteld wordt om de *x*-as. De inhoud van dit omwentelingslichaam kan natuurlijk met de bekende omwentelingsintegraal berekend worden, zie figuur 10.



figuur 10

De opgave geeft een alternatieve manier. Namelijk door in het midden van *a* en *b* de oppervlakte van de cirkel te nemen en die te vermenigvuldigen met de breedte van het lijnstuk dat loopt van *a* tot *b*, zie figuur 11.

In figuur 3 staat de afgeknotte paraboloïde een kwartslag gedraaid. In die figuur is ook de hoogte *h* van de afgeknotte paraboloïde aangegeven.



figuur 11

Het volume is dan te berekenen met $V = h \cdot A$. De opdracht is te bewijzen dat deze manier tot hetzelfde resultaat leidt.
Dit is redelijk makkelijk te doen door de beschreven procedure na te lopen. Na afloop verklaarden meerdere leerlingen de vraag niet moeilijk te vinden, maar er te weinig tijd voor te hebben gehad.

Tot slot

Het is de tweede maal dat het examen van het nieuwe programma landelijk is afgenomen. Waar het examen vorig jaar bestond uit 73 punten verdeeld over 17 vragen, bestond het dit jaar uit maar liefst 80 punten verdeeld over 15 vragen. Dit jaar waren er drie vragen met 7 of 8 punten waar dat vorig jaar niet eenmaal voorkwam. Bovendien werden dit jaar wel onderzoeksvragen opgenomen, twee zelfs. Dit jaar werd beduidend meer gevergd van de leerlingen.

Dat blijkt ook uit de N-term van 1,8 vergeleken met de N-term van 0,9 uit 2018. Het examen was uitdagend en aan de lange kant met (te) veel grote opgaven. Toch vind ik dit een mooi examen en een verbetering vergeleken met het examen van vorig jaar.

OVER DE AUTEUR

Marcel Daems is docent wiskunde aan Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag en hij is lid van de wiskunde A-lympiade commissie
E-mailadres: *da@gymnasium-sorghvliet.nl*

Maarten Müller

Een ondersteunend correctievoorschrift.

Hoe ziet dat er uit?

Zoals ook al in de vwo wiskunde B recensie van Marcel Daems naar voren kwam: het correctievoorschrift zorgt voor problemen bij opgaven die uiteenlopende oplossingsstrategieën kennen. Maarten Müller signaleert deze problemen ook en komt met een voorstel voor een alternatief correctievoorschrift.

Inleiding

Iedere wiskundedocent die eindexamens nakijkt, kent ze wel: opgaven waarbij het correctievoorschrift niet echt helpt. Algemene regel 3.3 uit het correctievoorschrift (figuur 1) zorgt ervoor dat ook oplossingsstrategieën die niet beschreven staan, beloond mogen worden. Als een leerling dat foutloos doet, zijn we blij, maar wat nu als een leerling een beginnetje maakt en vastloopt? Is er een route die zo begint en leidt tot het juiste antwoord of niet? Hoeveel punten zijn er al verdiend met dit beginnetje? In de geest van het correctievoorschrift,... hoe dan?

> 3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;

figuur 1

Bij het nakijken van een van de opgaven van het eindexamen wiskunde B voor het vwo (en daartoe beperk ik me in dit artikel) verzuchtte de tweede corrector dat ze bij alles mee was gegaan met mijn beoordeling, omdat het zo lastig na te kijken was en dat het vaak niet duidelijk was waar je überhaupt zou moeten beginnen met beargumenteren waarom je voor een bepaald aantal punten had gekozen. Bij een andere opgave werd ik het niet eens met de tweede corrector en bleef ik met een vervelend gevoel achter. Hoe komt het nu dat juist deze opgaven zoveel problemen opleveren?

Van wiskundige denkactiviteiten naar wiskundige denk- en werkwijzen

De vernieuwingscommissie cTWO heeft zich vanaf 2004 sterk gemaakt voor een grotere plaats van wiskundige denkactiviteiten in het wiskundeonderwijs[1] en daarmee indirect ook in het eindexamen. Onlangs verscheen een artikel van Drijvers, Kodde-Buitenhuis en Doorman[2], waarin onder andere de pilotexamens wiskunde B voor vwo worden geanalyseerd op het voorkomen van wiskundige denkactiviteiten. Ze worden daarbij vergeleken met de reguliere examens van die jaren.
Binnen curriculum.nu worden de wiskundige denkactiviteiten omgedoopt tot wiskundige denk- en werkwijzen. Ze worden net als de domeininhouden als doelen van het wiskundeonderwijs geformuleerd.[3] Maar hoe herken je die wiskundige denk- en werkwijzen eigenlijk in een eindexamen?

Drijvers, Kodde-Buitenhuis en Doorman beperken zich bij het analyseren van de examens tot probleemoplossen, modelleren en abstraheren. Met name probleemoplossen komt veelvuldig aan bod. Opgaven worden gelabeld als 'probleemoplosopgaven' als geldt dat leerlingen op zoek moeten naar een oplossingsstrategie waarvan algemeen gesproken verwacht wordt dat ze die niet routinematig kunnen uitvoeren. Verder is het zo dat dit soort opgaven vaak vraagt om een uitwerking die bestaat uit meerdere stappen waarbij er meerdere routes zijn naar het eindantwoord. Interessant is wel dat opgaven voor de ene leerling wel onder probleemoplossen kunnen vallen en voor de andere leerling niet. Vraag 3 uit het laatste eindexamen wiskunde B en vooral vraag 14 voldoen

duidelijk aan deze kenmerken. Dat er verschillende routes naar het eindantwoord zijn, maakt ook dat het beoordelen erg lastig wordt.

Probleemoplossen of toch maar liever meer routinematig werken?

Dat probleemoplossen een plek in het wiskundeonderwijs moet hebben, daar zijn we het wel over eens, maar hoe moet het met de toetsing? Naar mijn idee kun je probleemoplossen prima toetsen in een eindexamen, maar dan moeten we wel andere correctievoorschriften ontwerpen, die meer globaal beschrijven waar de punten voor moeten worden gegeven. Ik zal in het vervolg van dit artikel een voorzet geven.

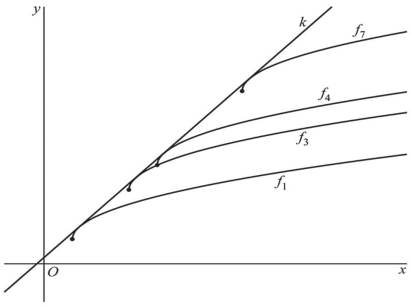
De discriminantmethode

Voor $p \geq 1$ is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$$

In figuur 1 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p weergegeven en ook lijn k met vergelijking $y = x + \frac{1}{4}$.

figuur 1



Lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke waarde van $p \geq 1$.

3 Bewijs dit.

figuur 2

Deze vraag zag er voor mij, als docent, uit als een routineopgave. $f_p(x) = x + \frac{1}{4} \wedge f'_p(x) = 1$ geeft twee vergelijkingen met x en p. Druk x uit in p (met behulp van de eenvoudigste vergelijking: $f'_p(x) = 1$) en vul dit in de andere vergelijking in om te kijken of het gevonden verband tussen x en p ook altijd kloppend is voor die vergelijking. Mijn leerlingen dachten hier echter anders over. Wat nu routineopgave? Dat kan vast ook wel op een andere manier. Wat nu als we eens niet x uitdrukken in p , maar p uitdrukken in x en dat dan invullen? Wat nu als we $f_p(x) = x + \frac{1}{4}$ omschrijven naar iets kwadratisch en de discriminant gelijk stellen aan 0 om vast te stellen dat we met een raakpunt te maken hebben? Dit leidt tot een aantal interessante vragen. Is de alternatieve route wiskundig juist? Moet uitgelegd worden waarom deze route gevolgd mag worden? Wat is de puntenverdeling die hierbij hoort?

Laten we dat eens uitwerken voor de discriminantmethode. Op het NVvW-forum kon men het er niet over eens worden of deze methode juist is. In de Facebook-groep 'Leraar wiskunde' gold hetzelfde en, nog vervelender,... ik werd het niet eens met de tweede corrector.
Een grafiek van een wortelverband en een rechte lijn kunnen op twee verschillende manieren één punt gemeenschappelijk hebben. Dat kan bij raken, maar ook bij snijden. Geeft $D = 0$ dan wel aan dat er sprake is van raken? Ja, als er één gemeenschappelijk punt is, maar dit geen raakpunt is, zul je bij het omschrijven van de vergelijking $f_p(x) = x + \frac{1}{4}$ naar iets kwadratisch altijd een tweede snijpunt vinden (dat niet voldoet aan de oorspronkelijke wortelvergelijking). De methode is dus wel wiskundig correct.

Interessante vragen die ik in dit artikel onbeantwoord zal laten, zijn 'Moet de leerling dan nog uitleggen waarom de discriminantmethode hier mag worden gebruikt?' en 'Wat nu als een leerling wel een begin maakt, maar het einde niet haalt? Hoe is dan de puntenverdeling?'

Op zoek naar de geest van het correctievoorschrift

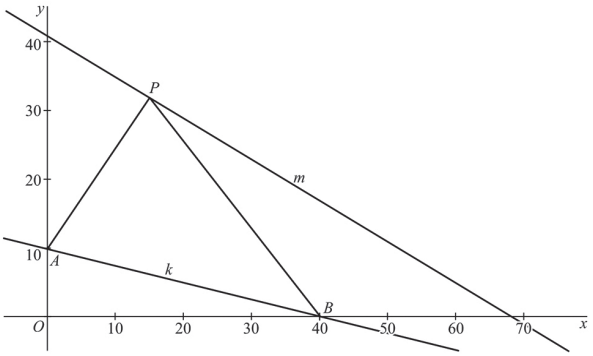
Laten we vraag 14 eens bekijken, zie figuur 3.

Lijn k gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(40,0)$.
De baan van een punt P is gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$$

De baan van punt P is de lijn m. Zie de figuur.

figuur



Bij bijna elke positie van punt P vormen de punten A, B en P een driehoek ABP. Er is één uitzondering.

13 Bereken de coördinaten van P zodat A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek vormen.

14 Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is.

figuur 3

>

Bij vraag 14 was onmiddellijk duidelijk dat leerlingen wat te kiezen hadden. Het correctievoorschrift gaf maar liefst zes verschillende mogelijkheden. Helaas conformeerden niet al mijn leerlingen zich aan het correctievoorschrift, dus ik moest regelmatig nakijken 'in de geest van het correctievoorschrift'. Leerlingen kozen voor het begin van het ene alternatief en het eind van het andere of ze kwamen met nog weer andere methodes aan.
Op het NVvW-forum zag ik dat ik niet de enige was die moeite had met het beoordelen van deze vraag. Op basis van de reacties kunnen we verder concluderen dat niet iedereen blij wordt van dit soort opgaven in een examen, zie het kader.

Leraar A: Ik heb 61 examens na te kijken. Als er in de komende jaren meer van dit soort opgaven komen, wil ik geen examenklassen meer. Dan mogen ze bij het CvTE het lekker gaan nakijken.
Leraar B: Bijzondere ervaring. Na zes uitwerkingsmogelijkheden veronderstel je toch dat het CV redelijk compleet zal zijn. Maar vier leerlingen verder ben ik al twee andere correcte uitwerkingen tegengekomen! Ik ben zeer blij verrast met de creativiteit en vindingrijkheid van deze leerlingen maar snel nakijken zit er helaas niet in.
Leraar A: Ja, leuk is het wel.
Leraar C: Ik vind jullie ietwat te genuanceerd reageren. Hoe is het mogelijk dat een opgave die zo slecht nakijkbaar is, met zoveel punten, een eindexamen haalt? Schandalig.
Leraar A: Eens met leraar C.
Leraar D: Mwah... kweenie... Het is in de basis geen vreselijk ingewikkeld vraagstuk en die kinderen hebben heel veel tools om zo'n vraagstuk mee op te lossen, en dus zijn er heel veel manieren om het probleem aan te vliegen. Ik vind het juist wel leuk dat er ook eens een keer *niet* zo'n voorgekookt behandel-volgens-recept vraag in zit. Past ook wel bij vwo, lijkt me. 'Hier heb je een probleem, zoek het maar uit.' Dat is ook hoe wetenschap werkt, toch? En ja, dat levert een hoop nakijk-gedoe op... Jammer dan. [...] Ik vind eerlijk gezegd deze vraag de extra nakijkmoeite wel waard. Ik zou graag examens zien met 5 van dit soort vraagstukken, en meer niet. Gewoon een paar open problemen, en verzin maar hoe je dat aanpakt...

14 maximumscore 8

- Het inzicht dat uitgegaan moet worden van twee van de drie voorwaarden ('rechte hoek bij P', 'gelijkbenigheid' en 'de ligging van P op m'). 1
- Het inzicht dat het voldoen aan de derde voorwaarde hieruit bewezen moet worden. 1
- Het opstellen van een vergelijking bij twee van de drie voorwaarden. 2
- Het oplossen van de vergelijking om te komen tot de ligging van P. 3
- De berekening die hoort bij het controleren van de derde voorwaarde. 1

Opmerking
Als de kandidaat kiest voor het uitgaan van 'de rechte hoek bij P' en 'de ligging van P op m', geldt bovenstaande puntenverdeling. Als de kandidaat kiest voor uitgaan van 'gelijkbenigheid' en 'de ligging van P op m' of 'gelijkbenigheid' en 'de rechte hoek bij P' wordt de verdeling 1-1-2-2-2 i.p.v. 1-1-2-3-1.

figuur 3

Na de zes varianten te hebben bekeken, kwam ik tot de conclusie dat ik niet uit de voeten kon met het correctievoorschrift omdat het veel te gedetailleerd was. Het correctievoorschrift is soms meer een uitwerking dan een correctievoorschrift. Punten zouden mijns inziens gegeven moeten worden voor het tonen van inzicht en het laten zien van bepaalde vaardigheden. Als het correctievoorschrift op die manier geformuleerd zou worden, zou het er heel anders uitzien. Laat ik een alternatief voorstel doen, zie figuur 3.

Deze manier van beschrijven komt overeen met varianten 1, 3, 4, 5 en 6 uit het oorspronkelijke correctievoorschrift en nog een aantal alternatieven die mijn leerlingen bedachten. Variant 2 was echt een geheel andere aanpak met vectoren, waarvoor het dan wel weer zinnig is om deze apart te beschrijven.
De kern van mijn betoog is dat opgaven waarbij probleemoplossen een grote rol speelt, en waarbij dus veel verschillende aanpakken te verwachten zijn, vragen om een ander soort correctievoorschrift. Het uitschrijven van mogelijke aanpakken op het niveau waarop dat nu gebeurt is nooit uitputtend. Een puntenverdeling die uitgaat van een beschrijving op een hoger niveau geeft aan de ene kant minder houvast, maar aan de andere kant omvat het meer verschillende aanpakken.

Willen en kunnen we meer van dit soort opgaven verwachten in de toekomst?

Drijvers, Kodde-Buitenhuis en Doorman[2] beschrijven dat het aantal opgaven waarbij probleemoplossen een grote rol speelt sinds het eerste pilotexamen alweer gehalveerd is. Verrassend genoeg geldt dit zowel voor de pilotexamens als voor de reguliere examens

van de afgelopen jaren. Mogelijk geeft het door het ontwikkelteam rekenen & wiskunde van curriculum.nu voorgestelde curriculum in de toekomst aanleiding tot het opnemen van meer van dergelijke opgaven in wiskunde-eindexamens, nu probleemoplossen als grote opdracht voor het vak is opgenomen.
Om tot slot nog even te reageren op de discussie op het NVvW-forum: ik zou me willen aansluiten bij leraar D. Met een ander correctievoorschrift en wat meer ervaring met het nakijken van dit soort opgaven, kunnen we binnen een acceptabele hoeveelheid tijd onze leerlingen van de juiste hoeveelheid punten voorzien. Het zou toch jammer zijn als we dit probleem niet tackelen en terug moeten vallen op enkel routinevragen.

Tot slot

Toen ik dit artikel had geschreven kwam ik erachter dat Ruud Stolwijk en Ger Limpens (beiden Cito) tijdens de laatste Nationale Wiskunde Dagen een werkgroep hadden georganiseerd over dit onderwerp. Mooi om te zien dat op verschillende plekken soortgelijke ideeën ontstaan.

Noten

[1] Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2013). *Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: cTWO. *http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf.*

[2] Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics.*

[3] Curriculum.nu (2019). Conceptvoorstellen leergebied rekenen en wiskunde. Curriculum.nu. *https://curriculum.nu/wp-content/uploads/2019/05/Conceptvoorstellen-Rekenen-en-Wiskunde.pdf*

OVER DE AUTEUR

Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo en lid van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde van curriculum.nu. E-mailadres: *m.muller@marianum.nl*

Symposium over de geschiedenis van wiskundige leermiddelen

Denken met dingen

Op zaterdag 28 september 2019 organiseert de werkgroep 'Geschiedenis' van de NVvW haar 25e symposium over instrumenten en modellen die vroeger in het wiskundeonderwijs werden gebruikt.

Programma:

- Johan van Kuilenburg demonstreert instrumenten uit de collectie van het Rijksmuseum Boerhaave.
- Frits Beukers spreekt over aanschouwelijke gips- en draadmodellen die rond 1900 werden gebruikt in het wiskundeonderwijs. Daarnaast maakt hij een uitstapje naar hedendaagse digitale equivalenten.
- Willem Uittenbogaard bespreekt meer en minder geslaagde voorbeelden van lesmaterialen en leermiddelen die het reken-wiskundig denken van kinderen moesten ondersteunen.
- Wilfred de Graaf vertelt over de geschiedenis van het astrolabium en leert ons hoe we er zelf een kunnen maken en gebruiken.

Plaats: Nationaal Onderwijsmuseum in Dordrecht.
Kosten: € 42,50 leden NVvW en NVORWO, € 47,50 niet-leden. Inbegrepen zijn: koffie, thee, lunch en toegang tot het onderwijsmuseum
Inschrijving: *https://nvvw.nl/werkgroepen/werkgroep-geschiedenis/symposia/denken-met-dingen/*

Marjan Botke

Examen vwo wiskunde C

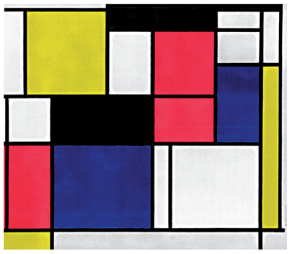
Marjan Botke bespreekt puntsgewijs alle vragen van het vwo wiskunde C-examen. Een aantal vragen van dit examen komt ook voor op het vwo wiskunde A-examen.

Inleiding

Het examen bestaat uit 22 vragen, in totaal zijn er 80 punten te behalen. Hiervan zijn zeven onderdelen hetzelfde (vraag 7, 8, 10, 11, 12 en 14) of bijna hetzelfde (vraag 13) als in het vwo wiskunde A-examen.

Mondriaan

Piet Mondriaan (1872-1944) was een Nederlandse kunstschilder die algemeen wordt gezien als één van de grondleggers van de abstracte kunst.
Vooral zijn latere werk, schilderijen bestaand uit zwarte lijnen en rode, gele, blauwe en witte vlakken, is wereldberoemd.



Een kunstenaar wil een schilderij maken dat lijkt op een schilderij van Piet Mondriaan. Hij wil daarbij voor de vlakken de drie kleuren rood, blauw en wit gebruiken. De kunstenaar vindt het niet erg als twee naast elkaar liggende vlakken dezelfde kleur hebben.

Het aantal manieren waarop hij zijn schilderij in kan kleuren, het aantal mogelijke **kleuringen** dus, hangt af van het aantal vlakken waaruit het schilderij bestaat. Het verband tussen het aantal mogelijke kleuringen M en het aantal vlakken V is: $M = 3^V$.

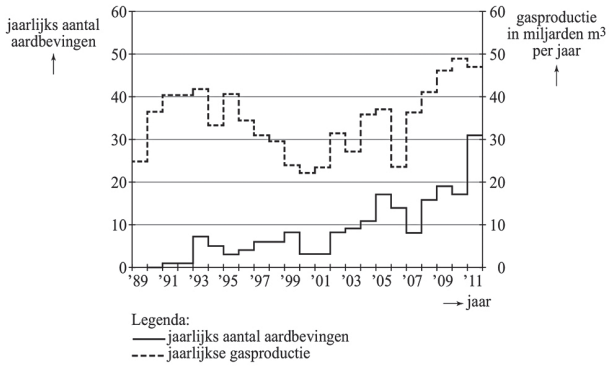
figuur 1

Vraag 1: Ongelijkheid oplossen.
Het snijpunt vinden bij de gelijkheid en vervolgens nadenken hoe de ongelijkheid opgelost kan worden. Helaas denken mijn leerlingen soms te moeilijk en gaan ze een exponentiële functie opstellen of (nog erger) een combinatie van een lineaire en exponentiële functie.
Vraag 2: Verdubbeling checken.
Hier waren verschillende oplossingen mogelijk. Deze vraag was goed te doen. Mijn leerlingen hebben deze vraag goed gemaakt.
Vraag 3: Logisch redeneren met logische symbolen.
Mooie vraag. Niet heel moeilijk. Mijn leerlingen hebben deze vraag goed gemaakt.
Vraag 4: Logische symbolen vertalen naar gewone spreektaal.
Leuke vraag, wel jammer dat er vier maal bijna hetzelfde moet worden opgeschreven. Had ook twee maal kunnen zijn. Mijn leerlingen hebben deze vraag goed gemaakt.
Vraag 5: Logische redenering opstellen.
Een samengestelde logische redenering opstellen. De meeste leerlingen doen dit netjes. Een goed vervolg op vraag 2.
Vraag 6: Juiste oplossing zoeken voor het inkleuren van de figuur. Mooie afwisseling op bovenstaande vragen. Even lekker proberen en inkleuren. Mijn leerlingen hebben deze vraag goed gemaakt. Bij mijn tweede correctie heb ik wel leerlingen gezien die hier een fout in maakten.

Groningse aardbevingen

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. Enkele resultaten daarvan staan in figuur 1. Deze figuur staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage. Hier zie je bijvoorbeeld dat er in 1993 zeven aardbevingen zijn geweest en er in datzelfde jaar 42 miljard kubieke meter gas is geproduceerd.

figuur 1



figuur 2

Vraag 7: (= vraag 14 bij wiskunde A). Beweringen checken aan de hand van de grafiek en berekeningen (goed aflezen). De eerste bewering gaat over een procentuele stijging van aardbevingen en de gasproductie. De tweede bewering gaat over een daling in de gasproductie en de gevolgen hiervan voor het aantal aardbevingen een jaar later. De derde bewering gaat over de gemiddelde stijging per jaar van de gasproductie over twee verschillende tijdsperioden.

Vraag 8: (= vraag 15 bij wiskunde A). Aflezen van waarden in een log-schaal en procentuele berekening. Het aflezen van de log-schaal gaat nog wel eens fout. De berekening wordt meestal goed uitgevoerd. Mijn leerlingen hebben deze vraag slecht gemaakt.
Vraag 9: Recursieve formule opstellen voor exponentiële groei. In deze vraag is een groot verschil in antwoorden. Leerlingen die snappen waar het over gaat geven de juiste berekening en schrijven in één keer het juiste antwoord op (soms vergeten ze A_0). Anderen proberen tevergeefs nog iets op te schrijven en halen daarbij alles door elkaar. Hier is dus duidelijk te merken wie deze opdracht wel en wie hem niet beheersen. Mijn leerlingen hebben deze vraag slecht gemaakt.
Vraag 10: (= vraag 16 bij wiskunde A). Aflezen van een punt op een grafiek en de vergelijking oplossen.
Als je het punt neemt dat ook in de beschrijving van de vraag staat, is deze vraag makkelijk op te lossen met logaritmen of met de grafische rekenmachine. Mijn leerlingen hebben deze vraag goed gemaakt, ondanks hun afkeer voor logaritmen.

Goudplevieren

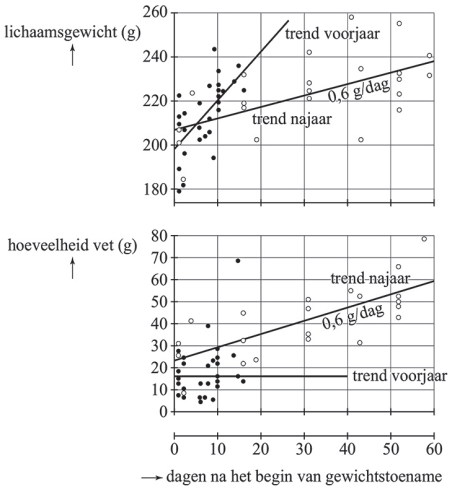
Vraag 11: (= vraag 1 bij wiskunde A). Aflezen van punten in de grafiek en lineair extrapoleren. Omdat bij het aflezen veel mogelijkheden waren en de leerling er 1000 naast mocht zitten, zijn hier meerdere antwoorden mogelijk. Vervolgens op de juiste manier afronden.
Vraag 12: (= vraag 2 bij wiskunde A). Beweringen checken aan de hand van de grafiek en berekeningen. Bij de eerste bewering moeten de leerlingen de helling van de *trend voorjaar* voor het lichaamsgewicht berekenen door twee geschikte punten te kiezen. De helling van *trend najaar* hoeft niet berekend te worden (mag wel), want deze staat gegeven in de figuur. De helling in het voorjaar is vele malen groter dan 2 maal 0,6. Bij de tweede bewering moet de leerling zien dat de hoeveelheid vet (tweede plaatje) in het voorjaar niet toeneemt, maar het lichaamsgewicht (eerste plaatje) wel, zie figuur 3.
Vraag 13: (bijna hetzelfde als vraag 3 bij wiskunde A). Een formule verklaren aan de hand van een figuur en twee gegeven punten.
Het invullen van de twee gegeven punten is in dit geval niet voldoende om aan te tonen dat deze formule klopt. Uit de figuur moet de formule voor het totale gewicht worden opgesteld. Er moet worden opgemerkt dat de hoeveelheid vet de waarde 16 heeft. Als laatste moet worden vermeld dat er vermenigvuldigd moet worden met 100(%) (dit staat ook in de tekst boven de vraag). Leerlingen proberen vaak naar het antwoord toe te werken en maken dan foutjes bij de uitleg. Bijvoorbeeld dat het gewicht 1600 gram is.
Vraag 14: (= vraag 4 bij wiskunde A). Beredeneren van het verloop van een functie. De leerlingen moeten beredeneren dat de noemer in

$$P_{\text{voorjaar}} = \frac{1600}{2{,}3t + 198}$$

groter wordt als t groter wordt.

In figuur 2 zie je het resultaat van een onderzoek naar deze gewichtstoename: van een aantal op verschillende tijdstippen gevangen goudplevieren is het gewicht en/of de hoeveelheid vet bepaald. De open stippen horen bij waarnemingen in het najaar en de dichte stippen bij waarnemingen in het voorjaar. Ook zijn de trendlijnen getekend.

figuur 2



Op grond van specifieke biologische kenmerken kunnen de onderzoekers bepalen wanneer de gewichtstoename van een goudplevier begint.
Aan de hand van de trendlijnen in figuur 2 kun je onderzoeken of de volgende stellingen waar zijn.

I In het voorjaar is de gemiddelde gewichtstoename per dag van een goudplevier ongeveer 2 keer zo groot als in het najaar.
II De gewichtstoename in het voorjaar bestaat niet uit vet.

figuur 3

Omdat de teller constant is, wordt de breuk dus steeds kleiner. Als de breuk steeds kleiner wordt, neemt P_{voorjaar} af.

Het lijkt mij niet noodzakelijk om te noemen dat de teller contant is. Het is voldoende om te noteren dat de breuk in dit geval kleiner wordt als de noemer groter wordt.
Vraag 15: Toenemende of afnemende stijging laten zien door meerdere punten in te vullen. Dit vond ik een C-onwaardige vraag. Het beredeneren van stijging is een typische wiskunde A-opdracht waarbij de formule/grafiek van de afgeleide moet worden gebruikt. Zó is deze vraag ook gesteld in het wiskunde A-examen. Bij wiskunde C zit het onderwerp afgeleide niet in het programma. Er moet dus op een andere manier aangetoond worden dat de functie wel toeneemt, maar steeds minder. Dit kan de leerling doen door meer dan twee punten in te vullen en dan te constateren dat de stijging steeds minder wordt. Ik vond dit een rare vraag.

Gangnam Style

Vraag 16: Berekening met grote getallen en correct afronden. Bij deze vraag moeten de leerlingen een zeer groot getal delen door het aantal seconden in een jaar. Dat gaat over het algemeen goed, maar sommige leerlingen vergeten de stap van minuten naar seconden. Vervolgens moet het antwoord op honderdtallen worden afgerond.

>

Het nummer Gangnam Style van de Zuid-Koreaanse zanger Psy is de eerste YouTube-video die vaker dan 1 miljard keer bekeken is; die grens werd bereikt op 21 december 2012.

Op de foto staat rechts onderaan de teller van 12 januari 2015, rond vier uur 's middags: toen was de video ruim 2,2 miljard maal bekeken.

foto

figuur 4

Vraag 17: Beredeneren van het verloop van een totale grafiek aan de hand van een grafiek met dagelijkse verandering (toenamediagram). Vanuit een grafiek met de dagelijkse views moeten de leerlingen nagaan hoe de grafiek van het totaal aantal views eruitziet. Dit gaat redelijk goed, maar natuurlijk zijn er altijd leerlingen die het verloop van de dagelijkse views gaan beschrijven.
Vraag 18: Groeifactor berekenen met behulp van twee gegeven punten. Hier moet uit de tekst de informatie worden gehaald voor de punten waarmee de groeifactor kan worden berekend. Vervolgens moet de groeifactor per 64 weken worden omgerekend naar de groeifactor per week. Mooie vraag over groeifactoren.
Vraag 19: Ongelijkheid oplossen en het antwoord omzetten naar de juiste maand. Sommige leerlingen maken bij deze vraag de volgende fout: ze vullen $V = 100\,000$ in. Maar in de vraag staat vermeld dat V in miljoenen is. Er moet dus worden opgelost wanneer $V = 0{,}1$. Als ze deze fout maken, geven ze ook nog een verkeerd antwoord voor de vergelijking.

Triangular Lodge

Vraag 20: Oppervlakte in square feet omrekenen naar vierkante meter. Een aantal leerlingen heeft netjes opnieuw de oppervlakte van de driehoek berekend met de afmeting van de zijden in meters. Dit lijkt mij meer werk voor de leerlingen, maar het eindantwoord is correct. En ze gebruiken impliciet ook de factor 2. Ik heb dit goed gerekend. Sommige leerlingen rekenen het antwoord volgens het antwoordmodel netjes uit.
Vraag 21: Hoogte van de fotograaf berekenen aan de hand van een foto. Hoe hoog is de horizon? Als de leerling de horizon netjes tekent met behulp van de verdwijnpunten, gaat deze vraag prima. Ook hier zijn meerdere goede antwoorden mogelijk (door afleesonnauwkeurigheden). Mijn leerlingen hebben deze vraag heel goed gemaakt.

Nabij Rushton in Engeland staat een bijzonder gebouw: Triangular Lodge. Voor de ontwerper van het gebouw had het getal 3 zoveel betekenis dat alles van dit gebouw in het teken staat van 3.

foto

Het grondvlak van het gebouw is een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden 33 feet lang zijn. Eén foot is gelijk aan 30,48 cm.
De oppervlakte van dat grondvlak is 471,55 square feet. Dat is ongeveer 44 m^2.

figuur 5

Vraag 22: Tekenen van een perspectieftekening van een regelmatige zeshoek, waarbij de achterzijde van de zeshoek evenwijdig is aan de horizon. Dit is een hele lastige vraag. Het in drieën delen van de achterzijde van de driehoek komt bij weinig leerlingen op. De verdwijnpunten lukken vaak wel. Maar zonder de driedeling lukt het niet meer om de complete zeshoek te construeren. Zeker niet omdat er (bijvoorbeeld) gebruik moet worden gemaakt van de diagonalen in de zeshoek, want deze lopen wel evenwijdig. Zowel mijn eigen leerlingen als de leerlingen van mijn tweede corrector, kwamen niet goed uit deze vraag.

Conclusie

Het examen was lang en talig. Bij een aantal vragen was het mogelijk om bij twee volledig verkeerd afgelezen waarden toch nog een juist berekend antwoord te krijgen. Dan krijgt de leerling de punten voor de berekening nog wel. Dat vind ik persoonlijk lastig, omdat het antwoord dan eigenlijk nergens op slaat. In het examen moet veel worden afgerond volgens de norm in de vraag (vraag 8, 11, 16, 18, 20, 21). Dat betekent dat de leerlingen niet zelf hoeven na te denken over het afronden. Dat vind ik jammer, want dat kunnen ze best. En daarnaast moet ik het antwoord fout rekenen als er niet is afgerond. Het examen bevat veel verschillende onderwerpen uit de stof. Dat is fijn en geeft leerlingen goed de kans om te laten zien wat ze allemaal kunnen. De N-term van dit examen is 0,8. Ik had zelf een hogere N-term verwacht, omdat ik het examen lastiger vond dan het wiskunde A-examen van dit jaar.

OVER DE AUTEUR

Marjan Botke is docent wiskunde A, B, C en D op het Erasmiaans Gymnasium Rotterdam en is werkzaam als lerarenopleider aan de Technische Universiteit Delft. Daarnaast is ze lid van de onderwijscommissie van PWN en van de havo-vwo werkgroep van de NVvW.
E-mailadres: *Botke@erasmiaans.nl*

Ruud Stolwijk

Schoolexamen wiskunde D

Ga de uitdaging aan!

Van de wiskunde D schoolexamens kun je moeilijk een recensie vragen, die maak je immers zelf. Ruud Stolwijk beschrijft bronnen die hij bij het maken van zijn schoolexamens voor vwo wiskunde D gebruikt.

Inleiding

Sinds 24 augustus 1987 ben ik wiskundeleraar, hoofdzakelijk werkzaam in de bovenbouw van havo en vwo. En vanaf het begin van mijn onderwijscarrière heb ik mijn toetsen steeds gevuld met een mix van eigen en bestaand materiaal. Sinds 2011 geef ik wiskunde D op de Vrijeschool Zutphen, en in dit artikel beschrijf ik hoe ik mijn schoolexamens voor dat prachtige vak maak. Aan de orde komen de verschillende bronnen die ik daarbij gebruik, voorbeelden van (in mijn ogen) aardig geslaagde zelfgemaakte opgaven en enkele 'alternatieve' manieren om wiskunde D te toetsen. Want zonder een centraal schriftelijk eindexamen zijn de mogelijkheden nu eenmaal toch wat ruimer - en waarom zou je ze niet benutten?

PTA

Het PTA voor wiskunde D is op mijn school eigenlijk erg eenvoudig. Het jaargemiddelde van klas 10 (op de Vrijeschool nummeren we de klassen na de basisschool gewoon door), idem klas 11, en drie toetsen in klas 12 leveren in totaal vijf cijfers die elk even zwaar meetellen. In de aanloop (klas 10 en 11) wordt het jaargemiddelde bepaald door ongeveer vijf toetsmomenten: meestal 'gewone' toetsen over een los hoofdstuk, maar daarnaast ook één of twee opdrachten.

Toetsvormen

Naast 'hoofdstuktoetsen' geef ik in elk leerjaar wel één of twee keer een opdracht die ik meestal in twee- of drietallentallen laat maken. Het idee hierachter is dat leerlingen zich dan wat verder in een onderwerp verdiepen dan bij een gewone toets het geval zou zijn, en daar ook enige (wiskundige) creativiteit in kwijt kunnen. Dat ze onderling overleggen of zelfs 'elders' informatie of hulp vergaren, vind ik zelf niet erg: in een verslag van een opdracht is het verantwoorden en uitleggen wat je doet altijd van groot belang. Voorbeeld van zo'n opdracht is de '*abc*-opdracht', die in *Euclides* 94-3[1] (onder de titel 'Puzzels in de wiskundeles') is terug te vinden en daar ook nader is beschreven.

Darts

figuur 1

Een ander voorbeeld van een opdracht die ik gebruik bij het onderdeel combinatoriek, komt uit de Alympiade-finale-opdracht uit 2006 over het dartspel.[2] In deze opdracht wordt het welbekende dartbord beschreven, een bord dat is 'uitgevonden' door ene Gamlin, zie figuur 1. In een artikel wordt daarover het volgende gezegd: 'There are 2,432,902,008,176,640,000 different possible arrangements of the 20 segments on a standard dartboard so it is perhaps a little surprising that Gamlin's arrangement of the numbers is almost perfect.' >

Vraag 1: Onderzoek door een berekening of dat getal 2,432,902,008,176,640,000 klopt.

Gamlin wilde 'missers' zoveel mogelijk benadelen, vandaar dat naast een hoge waarde (bijvoorbeeld 20) steeds twee lage waarden (in dit geval 5 en 1) zitten. De 'buurverschillen' zijn steeds zo groot mogelijk. Bij het perfecte bord volgens dit criterium is de som van alle buurverschillen maximaal. Het Gamlinbord is een 198-bord (dat is dus een bord waarbij de som van alle buurverschillen 198 is). Het Gamlinbord is daarmee een bijna perfect bord, volgens dit criterium: het maximum is dus niet 198.

Vraag 2: Onderzoek wat het maximum voor de som van de buurverschillen is. Hoeveel echt verschillende perfecte borden kun je maken? Geef hier een duidelijke redenering.
Vraag 3: Niet aardig van die Gamlin om missers zoveel mogelijk te af te straffen. Ontwerp daarom ook een bord waarin de som van alle buurverschillen minimaal is en leg uit hoe je dit gevonden hebt.

Bronnen en voorbeelden

Oude eindexamens zijn deels (teruggaand tot 2002) te vinden op *examenblad.nl*.[3] Nog oudere eindexamens vind je, behalve in allerlei oude wiskundeboeken natuurlijk, bijvoorbeeld op de site van Herman Hofstede.[4]
Voor een onderwerp als hypothesetoetsen (en kansrekening natuurlijk) zijn de eindexamens vwo wiskunde A1,2 bijvoorbeeld een prima bron. Opgaven over ruimtemeetkunde zijn bijvoorbeeld te vinden in de oudere havo-B1,2-examens. En voor inspiratie voor opgaven over differentiaalvergelijkingen kun je prima terecht in de examens wiskunde 1 uit de jaren 70/80, al is een bewerkingsslag dan wel aan te raden. Een voorbeeld:

In 1982 deed jullie wiskunde D leraar eindexamen vwo. Hij deed onder andere examen in het vak wiskunde I (een soort voorloper van wiskunde B zou je kunnen zeggen). Een van de vragen in dit examen was de volgende:

2 Voor elke $p \in \mathrm{R}$ is D_p de differentiaalvergelijking:
$(x^2 - 2y)\mathrm{d}y = (p - 2xy)\mathrm{d}x$
a Voor welke p en voor welke $k \in \mathrm{R}$ geldt: de parabool $y = kx^2$ is een integraalkromme van D_p?

Onderstaande vraag is een bewerking van deze vraag 2a.

1 (6p) Voor welke p en voor welke k is de parabool $y = kx^2$ een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p-2xy}{x^2-2y}\ ?$$

In vraag 2c van ditzelfde examen uit 1982 werd gesproken over een singulier punt. Hieronder een (uitgebreide) bewerking (met wat extra uitleg) van deze vraag 2c.
Een *singulier* punt is een punt op een oplossingskromme van een differentiaalvergelijking

waar $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ de 'waarde' $\frac{0}{0}$ heeft.

We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p-2xy}{x^2-2y}\ .$$

Er is een waarde van p waarvoor het singuliere punt van deze differentiaalvergelijking op de lijn met vergelijking
$y = x + 1\frac{1}{2}$ ligt.

2 (7p) Bereken deze waarde(n) van p.

Een andere prima bruikbare bron is natuurlijk het materiaal dat Ctwo[5] ter voorbereiding op de huidige wiskundeprogramma's heeft ontwikkeld, en dat nog steeds te vinden is.

Bonusopdrachten

Los van toetsen geef ik mijn leerlingen zo af en toe een bonusopdracht, liefst gerelateerd aan de alledaagse praktijk of de directe omgeving. Hiermee kunnen ze een paar tienden extra op hun toetsresultaat verdienen en dat blijkt de werklust en het enthousiasme bij een aantal (helaas niet bij allemaal...) behoorlijk te verhogen. Zo gebruik ik voor een van die bonusopdrachten een foto van een fietsbrug in Zutphen, zie figuur 2. De bijbehorende opdracht luidt: 'Op de foto zie je een gelijkzijdige driehoek die precies binnen een cirkel past. Hoeveel procent van de cirkel valt buiten deze driehoek?' Dit leidt altijd tot stevig denkwerk bij leerlingen wat je eigenlijk nodig hebt om het probleem op te kunnen lossen... en zo zijn ze ongemerkt aan het modelleren!

figuur 2 Op de foto zie je een gelijkzijdige driehoek die precies binnen een cirkel past. Hoeveel procent van de cirkel valt buiten deze driehoek?

Pronikgetallen

Boeken over wiskunde, en overigens ook oude lesboeken, kunnen ook een prima bron zijn voor opgaven en opdrachten. Zo kwam ik ergens *Pronikgetallen* tegen, en dit leidde tot de volgende vraag in een toets over bewijzen:

> Een pronikgetal is een getal dat geschreven kan worden als $p(p + 1)$, met p een positief geheel getal. De rij pronikgetallen begint dus met 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...
>
> **1** (4p) Bewijs dat het product van twee opeenvolgende pronikgetallen weer een pronikgetal is.
>
> **2** (4p) Bewijs dat de helft van de som van twee opeenvolgende pronikgetallen een kwadraat is.

Columns

Het laatste en meest recente voorbeeld van een opdracht bij de introductie van het onderwerp kansrekening vond ik in *Trouw*, waarin Jan Beuving (zijn Hoekstreep kan overigens ook vaak dienen als inspiratiebron, net als de *Volkskrant*-columns van Ionica Smeets natuurlijk!) en Daan van Eijk regelmatig een wiskundige of natuurkundige kwestie aan de orde stellen. Op 18 mei 2019 ging het over het volgende: 'Ken je dat, dat je de trein wilt halen? Je komt aanfietsen, snel je fiets op slot maar je slot raakt een spaak! Je moet je achterwiel dus iets draaien. Dat doe je, op slot, paar seconden verspeeld - precies de trein gemist. Dan kun je denken: moet je eerder van huis weggaan. Ik denk dan: hoe groot is eigenlijk de kans dat je een spaak raakt als je je fiets op slot zet? Nu had ik toevallig een geodriehoek in mijn tas, en ik moest toch op de volgende trein wachten, dus ik begon te meten.' En dat kunnen leerlingen best zelf - en zo komen ze op een kans van tegen de 20% uit, net als Jan in de rest van het artikel.

Tot slot

Alle in dit artikel genoemde voorbeelden gebruik ik in mijn wiskunde D-toetsing. Uiteraard staat het de lezer vrij deze voorbeelden te gebruiken, en hopelijk inspireert het om verder zelf op zoek te gaan naar manieren om ook in toets-opzicht de relatieve vrijheid binnen wiskunde D te benutten!

Noten

[1] *https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/094_2018-19_03.pdf* (online vanaf september 2020)
[2] te vinden op *http://www.fisme.science.uu.nl/alympiade/nl/opgaven*
[3] *www.examenblad.nl*
[4] *www.hhofstede.nl*
[5] *http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/*

OVER DE AUTEUR

Ruud Stolwijk is wiskundeleraar op de Vrijeschool Zutphen. Email: *rstolwijk@vszutphen.nl*

Wis en Waarachtig

20 jaar oude computerpuzzel opgelost

Bernard Fabrot

De Belg Bernard Fabrot, die door zelfstudie leerde programmeren, is erin geslaagd een cryptografische puzzel uit 1999 op te lossen. De bedenker van de puzzel, Ron Rivest, ging ervan uit dat het 35 jaar zou duren, maar op 15 april van dit jaar had Fabrot na drieënhalf jaar puzzelen de oplossing gevonden. De puzzel is een onderdeel van een tijdscapsule. Nu de code is gekraakt, kan ook de tijdcapsule uit 1999 geopend worden. De inhoud van de capsule is grotendeels onbekend, maar ze bevat een vijftigtal items van onder meer Tim Berners-Lee, uitvinder van het wereldwijde web, Bob Metcalfe, uitvinder van ethernet, en van Microsoft-oprichter Bill Gates.
Fabrot zegt dat hij het meest nieuwsgierig is naar een van de eerste computerspelletjes: 'Zork'. Ook dat bevindt zich in de capsule. De essentie van de oplossing was om een begingetal te vinden, waarvan vervolgens een miljoen keer een miljoen het kwadraat moest worden genomen. Dat vereist opeenvolgende berekeningen: zonder het begingetal was het eerste kwadraat onvindbaar, zonder het eerste het tweede, enzovoort... Hierdoor was het onmogelijk om verschillende computers tegelijk te laten draaien. Bron: *https://vvwl.be*

Goro Shimura overleden

Op 3 mei jl. overleed Goro Shimura, 89 jaar oud. In 1955 werkte hij samen met Yutaka Taniyama aan elliptische krommen. Het werk resulteerde in het zogenaamde Taniyama-Shimura-vermoeden.
In 1986 bewees Kenneth Ribet dat er een verband was

Goro Shimura

tussen dit vermoeden en de laatste stelling van Fermat. Door gebruik te maken van dit verband bewees Andrew Wiles midden jaren '90 van de vorige eeuw uiteindelijk de stelling van Fermat. Shimura, die je wellicht kent van de Horizon-documentaire over Andrew Wiles, schreef meer dan honderd artikelen en boeken. Zijn werk heeft onder meer geresulteerd in tools, die veel gebruikt worden in de moderne cryptografie. Shimura werd meermalen onderscheiden, bijvoorbeeld met een Guggenheim Fellowship in 1979, de Cole Prize voor getaltheorie in 1976, de Asahi Prize in 1991 en de American Mathematical Society's Steele Prize for lifetime achievement in 1996.
Bron: *https://www.nytimes.com*

Hoe moeilijk is punten tellen bij het Songfestival?

Bij het Songfestival ontging het commentatoren Cornald Maas en Jan Smit dat Nederland al ruim voor het einde gewonnen had. Ten onrechte wekten ze achteraf de indruk dat dit heel moeilijk te ontdekken was.
Als de commentatoren bij het Songfestival in Tel Aviv over cijfermatig inzicht hadden beschikt, hadden ze geweten dat het Nederlandse liedje de winnaar was zodra de publiekspunten binnen waren. In plaats daarvan hielden ze half Nederland tot de allerlaatste stemronde in onnodige spanning. Het stemsysteem voor het Songfestival is in de zestigjarige geschiedenis keer op keer gewijzigd. Sinds 2016 wordt de helft van de punten uitgedeeld door vakjury's uit de deelnemende landen, en de andere helft

via *televoting* door de kijkers. Per land hebben zowel de vakjury's als het publiek 58 punten te verdelen (12 + 10 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) over de tien deelnemers van hun voorkeur. Er waren 41 deelnemende landen. Dit betekent dat alle 26 deelnemers aan de finale samen 41 × 58 = 2378 jurypunten ontvangen, en ook 2378 publiekspunten. De ranglijst van de vakjury's wordt eerst bekendgemaakt. Vervolgens worden de publiekspunten in omgekeerde volgorde bekendgemaakt, dus van onder naar boven in de juryranglijst. In theorie kan de beslissing dan al bij een van de onderste landen vallen.
Immers, als de vakjury's de punten vrij gelijkmatig over de landen verdelen, zijn de verschillen tussen al die landen klein, zeg enige tientallen punten. Als *televoting* dan wel een overduidelijke publiekslieveling oplevert die bijna het maximum van 40 × 12 = 480 punten krijgt, dan weet je meteen dat dit land het Songfestival wint, omdat een land daarna nog maar maximaal 10 × 40 = 400 publiekspunten kan krijgen. De claim van de organisatie dat deze manier van stemmen spanning tot op het laatste moment garandeert, hangt dus af van de aanname dat de voorkeuren van de vakjury en het publiek ongeveer gelijk op lopen.
Wat gebeurde er nu precies in Tel Aviv? Nederland kwam in de ranglijst van de vakjury's op de derde plaats, vóór Italië en achter Noord-Macedonië en Zweden. De commentatoren bleven er tot aan de laatste publiekspunten, voor Zweden, op hameren hoe spannend het allemaal was. Immers, toen Nederland zijn 261 publiekspunten binnen had en op totaal 492 kwam, boven Italië, moesten Noord-Macedonië (237) en Zweden (239) hun publiekspunten nog binnenkrijgen.
Het leek heel spannend, maar de commentatoren hadden simpelweg op een rekenmachientje kunnen bijhouden hoeveel publiekspunten er nog te vergeven waren. En wel door iedere keer als de publiekspunten voor een deelnemer binnenkwamen, dit aantal ook af te trekken van 2378, het totaal dat het publiek te vergeven had.
Voordat Nederland de publiekspunten binnenkreeg, waren er nog 412 publiekspunten te vergeven. Dus toen had Zweden nog kunnen winnen. Maar direct nadat Nederland de publiekspunten kreeg waren het er nog maar 412 – 261 = 151. Omdat Zweden minstens 253 (492 - 239) publiekspunten nodig had, stond toen vast dat het niet eens meer in de buurt van Nederland kon komen, dus Noord-Macedonië ook niet.
Hiermee geconfronteerd bij *Pauw* deden commentatoren Jan Smit en Cornald Maas er zowel lacherig als afwerend over, alsof het bizar was om van hen te verlangen dat ze behalve showbizz-enthousiastelingen ook nog rekenwonders waren. Maar zo ingewikkeld was het niet. Misschien is het alvast een tip voor het Songfestival 2020 om de puntentelling wel bij te houden?
Bron: *https://www.nemokennislink.nl*

SMART-finale in Nemo

Dit jaar werd voor de zesde keer de SMART-finale van W4Kangoeroe georganiseerd. De beste 20 deelnemers van groep 7, van groep 8 en van het vmbo (wizSMART) werden uitgenodigd om op dinsdag 11 juni deel te nemen aan deze finale. In wetenschapsmuseum Nemo streden uiteindelijk 59 leerlingen (19 uit groep 7, 20 uit groep 8 en 20 van het vmbo) voor een plaats bij de beste drie van hun categorie.
De finale werd gespeeld over twee rondes (één met zestien meerkeuzevragen en één met acht open vragen). Alle deelnemers kregen dezelfde opgaven en de maximale score was 56 punten. De uitslag luidde als volgt.

De winnaars

Bij groep 7:
1. Martijn Treur uit Nieuw Beijerland met 47 punten
1. Sander Paaschens uit Oss met 47 punten
3. Alexander van Diesen uit Breda met 45 punten
3. Menno van der Waal uit Delft met 45 punten

Bij groep 8:
1. Wendy Huang met 56 punten!!
1. Felicia Jayawardhana uit Groningen met 56 punten!!
3. Rens Blom uit Amstelveen met 54 punten

Bij het vmbo:
1. Christian van Tol uit Alkmaar met 49 punten
2. Mattias Stok uit Hardinxveld-Giessendam met 45 punten
3. Matthijs Brom uit Oegstgeest met 40 punten

Bron: *www.w4kangoeroe.nl*

Joke Daemen

Het Fizier gericht op...

Werfkracht: actie tegen het lerarentekort

De instroom in universitaire lerarenopleidingen voor wiskunde is al jaren verontrustend laag in Nederland. In deze Fizier laat Joke Daemen zien hoe het Freudenthal Instituut met het project Werfkracht hier iets aan probeert te doen.

Inleiding

Toen ik in 2000 startte bij de lerarenopleiding van de UU, was de instroom voor wiskunde drie. In de jaren van economische crisis wisten we de instroomcijfers te verhogen naar 22, maar snel daarna daalden deze cijfers helaas weer naar een dieptepunt. Op dit moment zijn we blij als we in Utrecht vijftien eerstegraads wiskundedocenten per jaar kunnen opleiden.
Landelijk zijn er veel initiatieven geweest om de instroom in de lerarenopleiding te vergroten. Zo kunnen studenten rekenen op financiële middelen als ze starten met de lerarenopleiding, of wanneer ze hun bevoegdheid willen 'upgraden'. Bij de universiteiten zijn educatieve minoren ontwikkeld, die in combinatie met bijvoorbeeld de bacheloropleiding wiskunde een tweedegraads bevoegdheid opleveren. De opstap naar de eerstegraads bevoegdheid wordt hierdoor veel makkelijker en het traject naar een bevoegdheid korter. Vanuit het ministerie zijn 'trainees in het onderwijs' gestimuleerd. De laatste jaren is er geïnvesteerd in het flexibeler maken van opleidingstrajecten om nog beter aan te sluiten bij de wens van de studenten in de opleiding. Voor kandidaten die geen wiskundevooropleiding hebben, is de mogelijkheid om zich te kwalificeren voor de wiskundelerarenopleiding toegankelijker gemaakt. Via het aanbod van wisk4all kunnen zij hun wiskundekennis aanvullen. Helaas leiden deze initiatieven nog niet tot de massale instroom die nodig is om het tekort op te lossen. De populatie van de studenten die wij op dit moment in de lerarenopleiding hebben bestaat voor een groot deel uit zij-instromende studenten die na een eerdere carrière de stap naar het onderwijs maken. De indruk bestaat dat bachelorstudenten binnen de universitaire studie wiskunde de lerarenopleiding niet of nauwelijks op het netvlies hebben staan. Ondanks dat het aantal studenten in de bacheloropleiding bij de tekortvakken enorm is gestegen in de afgelopen jaren, zien we dit niet of nauwelijks terug in het aantal studenten dat direct na de opleiding kiest voor het leraarschap.

Project Werfkracht

Het project Werfkracht is onderdeel van het bètadidactiekproject 'Versterking vakdidactiek in de bètawetenschappen' (IMPULS). In dit project participeren de Universiteiten van Twente, Leiden, Delft, Groningen en Utrecht, waarbij ieder een eigen focus heeft.
De invulling van Utrecht aan het project is Werfkracht: het zichtbaar maken van het lerarenberoep bij bachelorstudenten van de tekortvakken natuurkunde, wiskunde, scheikunde en informatica. Door studenten tijdens hun studie op een positieve manier in aanraking te brengen met onderwijs hopen we dat studenten het docentschap als een aantrekkelijke mogelijkheid gaan zien. Gedurende deze activiteiten monitoren we studenten en onderzoeken wat hun houding is ten aanzien van een carrière in het onderwijs.

Escaperoom

In 2018 organiseerden wij een wedstrijd om een escaperoom-activiteit te ontwerpen voor leerlingen in het

De escaperoom

voortgezet onderwijs. Het doel was dat de deelnemende bachelorstudenten bezig zijn met het bedenken van leuke wiskundeopdrachten voor leerlingen. Door zich te verdiepen in deze leerlingen en de schoolwiskunde ontdekten ze hoe dit het werk kan uitdagen en creativiteit vereist. Een kleine groep studenten werkte de escaperoom verder uit en hij gaat volgend jaar op tournee langs scholen.

Studentassistenten

Studenten in de bacheloropleiding werden, via een studentassistentschap, betrokken bij het onderwijs en onderzoek naar onderwijs. Bij U-talent[1] verzorgden zij samen met een vo-docent verbredende masterclasses, zoals 'Wiskunde in de architectuur', 'Verpakkingen' en 'Origami'. Voor wiskunde D online[2] waren zij betrokken bij de campusdagen en hielpen ze leerlingen online met hun huiswerk. Ze assisteerden bij de Nationale Wiskunde Dagen, en leverden hand- en spandiensten bij de activiteiten van 'Wiskunde in Teams'. Voor onderzoek gingen ze naar scholen om te observeren en leerlingen en docenten te interviewen, bijvoorbeeld in het kader van een onderzoek 'wiskunde voor blinden en slechtzienden' in het onderwijs.

Effecten

Om de effecten te onderzoeken van de onderwijsactiviteiten, wordt in het project Werfkracht onderzocht in hoeverre de houding van studenten ten aanzien van het leraarschap verandert wanneer ze met de activiteiten bezig zijn geweest. Álle bachelorstudenten krijgen jaarlijks een online enquête die gaat over hun attitude ten aanzien van het leraarschap, zodat eventuele veranderingen in hun houding zichtbaar worden. Studenten die deelnemen aan één van de onderwijsactiviteiten, worden via diepte-interviews extra gemonitord. We zien veel enthousiasme bij de studenten. Leerlingen zijn veel leuker dan verwacht, sommigen raken niet uitgepraat over de leerlingen. In terugkombijeenkomsten scheppen ze op over wat de leukste conferentie is die je kunt bijwonen. In de interviews die wij met hen houden geven ze aan hoeveel voldoening het werken met leerlingen hen geeft. Ze verbazen zich over de nascholingsbijeenkomsten, vooral over wat er allemaal bij het docentschap komt kijken. Precies wat we hoopten. Echter op de vraag naar de toekomst blijven de antwoorden op de korte termijn hardnekkig. Zij kiezen voor uitdaging, graag zelf blijven leren en vinden dat je als docent wel erg weinig verdient. Bovendien, docent worden kan altijd nog... Wel constateren we dat er een aarzeling ontstaat over de verdere toekomst.

Toekomst

Het afgelopen jaar hebben we ook ervaring opgedaan met het inzetten van onze studentassistenten op school.[3] Ook hier zien we dat de omgang van de studenten met leerlingen inspirerend is voor beide groepen. De leerlingen vinden het interessant en prettig om begeleid te worden door jonge studenten en de studenten genieten van hun rol als 'aspirant docent'. Docenten geven aan dat het geweldig is, die extra handen in de klas. Studenten geven vaak extra hulp voor zwakkere leerlingen of ze gaan aan de slag met de leerling die wel iets extra's wil. Een enkeling introduceert zelfs een nieuw onderwerp bij leerlingen, waar hij of zij tijdens de eigen studie door is geïnspireerd.
In aansluiting op deze ervaringen gaan we komend jaar verder met mogelijkheden te onderzoeken om studenten meer in te zetten in vo-scholen in de regio Utrecht. Door studenten tijdens hun studie voor een aantal uur per week in het onderwijs in te zetten, kunnen we het enthousiasme van de studenten en leerlingen behouden. Niet alleen kunnen ze op deze manier in contact blijven met het voortgezet onderwijs, maar ook kunnen ze de taak van de docent in het onderwijs verlichten. Zelfs al kiezen ze niet meteen voor het beroep van docent, dan toch hopen we hiermee een bijdrage te leveren aan het docententekort op school én een mooie manier te bieden om de motivatie voor het onderwijs te blijven ontwikkelen.

Zou je graag de Werfkracht Escaperoom bij jou op school bezoek willen hebben? Of lijkt het je wel wat om een studentassistent bij jou in de les te hebben? Neem dan contact op met Joke: *J.W.M.J.Daemen@uu.nl*

Noten

[1] U-Talent is een samenwerkingsverband tussen de Universiteit Utrecht, de Hogeschool Utrecht en meer dan 40 partnerscholen uit de regio Utrecht. Het doel van U-Talent is om het regionale bètaonderwijs in het vo én in de bachelor van het hoger onderwijs (ho) te versterken en de aansluiting tussen vo en ho te verbeteren.

[2] Via Wiskunde D Online kunnen scholen met weinig wiskunde D-leerlingen het vak in *blended* vorm aanbieden.

[3] Zie ook het project PAL (*persoonlijk assistent van de leraar*).

OVER DE AUTEUR

Joke Daemen is werkzaam bij het Freudenthal Instituut, docent in de lerarenopleiding van de UU en projectleider 'Werfkracht van het leraarschap in de betavakken'.
E-mailadres: *J.W.M.J.Daemen@uu.nl*

Puzzel 95-1

Raaklijnen voor slimme dummies

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze keer bekijken we twee alternatieve methodes om raaklijnen te bepalen. De methodes en bewijzen kunnen goed in de klas bij de differentieerlessen worden gebruikt, hetzij als alternatief, hetzij voor een beter begrip. De eerste methode is het bepalen van een raaklijn aan kegelsneden. Deze staat in Nederland bekend onder de naam 'eerlijk delen'. In 'Kleintje didactiek' van Lonneke Boels in *Euclides* 94-6 wordt deze methode beschreven voor cirkels. Ook in het algemeen, dus voor $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ is het 'eerlijk delen' bekend en te vinden op internet. Een bewijs ontbreekt nogal eens, maar is wel te vinden. Meestal zijn die bewijzen echter niet erg inzichtelijk en daardoor niet erg overtuigend voor leerlingen en dus lastig te doorgronden. De methode in het kort: Vervang x^2 door px, y^2 door qy, xy door $(py+xq)/2$, x door $(x+p)/2$ en y door $(y+q)/2$. Dus de waarden p en q worden eerlijk verdeeld over de variabelen x en y. Het resultaat is een raaklijn of poollijn door $P(p,q)$, afhankelijk of P al of niet op de kegelsnede ligt. In deze puzzel vragen we onder andere om een zo overtuigend mogelijk bewijs te zoeken of nog beter zelf te bedenken. We beginnen relatief eenvoudig met een parabool recht in het assenstelsel.

Opgave 1a: Bepaal met eerlijk delen de raaklijn aan de parabool $y = ax^2 + bx + c$ in het punt $P(p,q)$ op de parabool. En bewijs zo overtuigend mogelijk dat dit klopt.
Opgave 1b: Idem voor een cirkel. Dat mag de eenheidscirkel zijn.
Opgave 1c: Idem voor een ellips, bijvoorbeeld: $(ax)^2+(by)^2=c^2$ maar een andere notatie is ook toegestaan.
Opgave 1d: Idem voor de hyperbool $xy = a$.
Opgave 1e: En nu voor het algemene geval: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Met een hele andere minder bekende methode kun je raaklijnen aan polynomen $f(x) = ax^n+bx^{n-1}+....+ hx^2+ix+j$ bepalen door een deling. Deel de polynoom $f(x)$ door $(x - p)^2$ en bepaal de rest $r(x)$. Dat is dan de raaklijn in $P(p,q)$, met P op de polynoom.
We geven eerst een voorbeeld met $f(x) =2x^3-10x-4$ in $P(3,20)$. Merk op dat we die y-waarde 20 niet nodig hebben. We gaan delen door $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$. Zie figuur 1. We hebben het daar genoteerd zoals dat tegenwoordig wordt gedaan volgens de 'hapmethode'.
De rest $r(x)$ is dus $44x$ - 112 en de raaklijn is $y = 44x$ - 112 . Een verrassing?
Merk op dat dit voor de polynoom $y =ax^2 + bx + c$ gewoon neerkomt op het aftrekken van $a(x - p)^2$.

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^3 & -10x & -4 & : x^2-6x+9 \\ 2x^3-12x^2+18x & & - & 2x \times \\ \hline & 12x^2-28x & -4 & \\ & 12x^2-72x+108 & - & 12 \times \\ \hline & 44x-112 & & \end{array}$$

figuur 1

Opgave 2a: Bepaal zo de raaklijn aan $y = x^4 + 2x^3 + 3x - 4$ in $x=-2$.
Opgave 2b: Bewijs dat deze methode voor alle polynomen klopt.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.
Er zijn 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij je idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden. Inzendingen moeten uiterlijk 29 oktober 2019 binnen zijn.

vakbladeuclides/951puzzel

Top 10 ladderstand

Tot en met puzzel 94-6		
1	G. Bouwhuis	153
2	H. Bakker	131
3	M. Rijnierse	122
4	F. Göbel	114
5	B. Groot	108
6	R. Stolwijk	106
7	L. Cizkova	61
8	J. Remijn	61
9	H. Huisman	61
10	H. Linders	60

We feliciteren Gerard Bouwhuis van harte met de ladderprijs.

Boekbespreking

Ype en Ionica: De verrassende verjaardagen

Ernst Lambeck

Titel: Ype en Ionica. De verrassende verjaardagen
Ondertitel: En andere nogal logische fotostrips
Auteurs: Ype Driessen en Ionica Smeets
Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds (2019)
ISBN: 978-90-5712-528-7, 72 pagina's, paperback
Prijs: € 17,29

1729

Velen van jullie kennen ongetwijfeld de anekdote over het bezoek van G.H. Hardy aan Ramanujan. 'Ik herinner me dat ik hem eens opzocht in Putney toen hij ziek was. Ik was gekomen met een taxi met het nummer 1729, en ik merkte op dat het getal mij tamelijk saai leek, en dat ik hoopte dat dat geen slecht voorteken was. "Nee," zei Ramanujan, "het is een heel interessant getal; het is het kleinste getal dat op twee manieren kan worden geschreven als de som van twee derdemachten,"' aldus Hardy. (Mocht je het niet zien: $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$). Het hier te bespreken boek kost € 17,29. Je mag zelf beslissen of dit toeval is...
Ik heb het getal 1729 nog twee keer kunnen vinden in dit boek met fotostrips die de afgelopen jaren zijn verschenen in het populair-wetenschappelijke tijdschrift *New Scientist*. De fotostrips bevatten veel van dit soort details. Nee, ik ga niet vertellen waar 1729 te vinden is en ik ga ook niet meer voorbeelden geven. Het is veel te leuk om deze zelf te ontdekken.

Fotostrips

Het boek bevat 62 strips waarin tal van onderwerpen, vooral op wis- en natuurkundig gebied, aan de orde komen. De achterflap van het boek noemt er een aantal in de vorm van de volgende vragen.

— Is 0,99999 echt hetzelfde als 1?
— Wat is de kans dat van een groep van 23 mensen er 2 op dezelfde dag jarig zijn?
— Hoeveel pianostemmers telt Amsterdam?
— Hebben wij wel gevoel voor wat echt willekeurig is?
— Hoeveel verschillende potjes schaak zijn er mogelijk?

> "Hoeveel pianostemmers telt Amsterdam?"

Op diezelfde achterflap wordt ook nog een aantal striptitels genoemd: 'het doldwaze Droste-effect', 'de illustere illusies', 'de pittige pi', 'de fantastische Fibonacci-getallen' en 'de coole code'. Kortom: het boek bevat een rijk en gevarieerd aanbod van onderwerpen. Het notenapparaat achterin het boek geeft voor elke strip/onderwerp een noot: een verwijzing naar een boek of een website voor meer informatie, een antwoord op een puzzel, een achterliggend idee, een bonusgrap, enzovoort.

Goed te gebruiken in de wiskundeles

Ik denk dat het boek ook goed te gebruiken is in de wiskundeles, bijvoorbeeld als introductie op bepaalde onderwerpen. Zo is de strip 'io qngo qokoywbnnp' goed te gebruiken bij cryptografie (als je de sleutel niet kunt vinden, mail mij gerust), de strip 'in vijf grafieken' is een mooie illustratie van hoe te misleiden met statistiek en 'de letterlijke logica' lijkt me goed te gebruiken als inleiding of afsluiting van het onderwerp logica bij wiskunde C. Ik heb mijn leerlingen in vwo 4 en 5 enkele strips voorgelegd, zij hebben deze met veel plezier gelezen en er het nodige in ontdekt. Want er zijn dus veel details in te ontdekken.... Een aanrader!

OVER DE AUTEUR

Ernst Lambeck is docent wiskunde op het Newmancollege in Breda en lid van de redactie van Euclides. E-mailadres: *elambeck@newmancollege.nl*

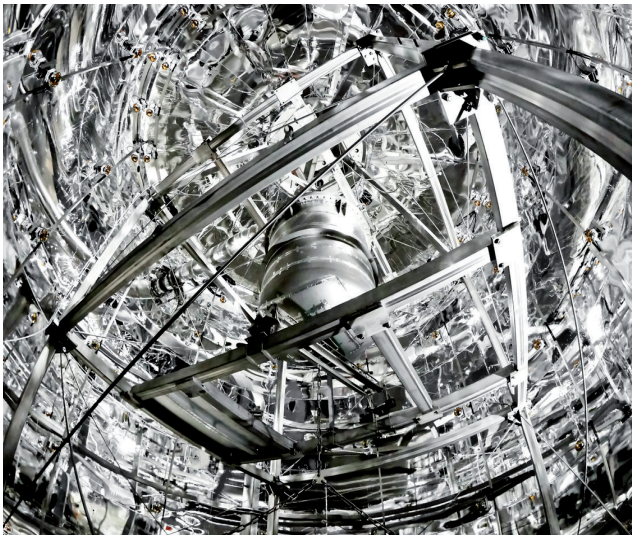
Jaarvergadering/ Studiedag 2019

Tweede uitnodiging

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/ studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 2 november 2019**.
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.15 uur
Plaats: Ichthus College,
Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.

Technieken in de wiskundeles

Bij het thema 'Technieken in de wiskundeles' denk je misschien aan technieken zoals haakjes wegwerken, vergelijkingen oplossen en differentiëren. We leren dit soort technieken al decennia aan onze leerlingen. Apparaten kunnen nu veel technieken overnemen. Wie leert er bijvoorbeeld nog het algoritme voor worteltrekken aan de leerlingen? Wat verandert er allemaal door die apparaten? En hoe kan een rekenmachine eigenlijk 2^{10} of sin(45°) uitrekenen? Voor iedere techniek die we leerlingen willen leren, hebben we zelf een techniek nodig. De techniek van het vinden van een balans tussen oefenen en beheersen aan de ene kant en begrijpen, herkennen en toepassen in nieuwe situaties aan de andere kant. Dat zou je didactische technieken kunnen noemen. Denk ook aan 'flipping the classroom', 'gamification' en 'formatief toetsen'. Wat betekenen dergelijke technieken voor het wiskundeonderwijs? Tijdens de studiedag hopen we op inspirerende voorbeelden van docenten over nieuwe werkvormen, vormen van toetsen of didactische benaderingen. En dan kun je bovendien nog denken aan technologie in de wiskundeles en aan techniek als context voor het leren van wiskunde.
Heb je een idee voor een werkgroep en wil je een bijdrage aan de studiedag leveren? Schroom dan niet en neem contact op met Lidy Wesker (*l.wesker@nvvw.nl*) of Michiel Doorman (*m.doorman@nvvw.nl*).



Agenda jaarvergadering

10.00-11.00 uur – Jaarvergadering
1. Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange
2. Jaarrede van de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2018
4. Jaarverslagen 2018/2019 van de NVvW en van *Euclides*
5. Financiën. Jaarrekening en balans 2018/2019, verslag kascommissie en decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6. Bestuursverkiezing. Aftredend zijn: Erik van den Hout en Desiree van den Bogaart. Desiree stelt zich herkiesbaar voor een nieuwe termijn. Het bestuur nodigt leden uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*). Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7. Rondvraag
8. Sluiting van de jaarvergadering

Programma studiedag

11.00 – 11.15 Inleiding op de studiedag
11.15 – 12.00 Plenaire lezing
12.00 – 12.15 Pauze
12.15 – 13.05 Workshopronde 1A/lunch en markt
13.05 – 13.15 Wisseltijd
13.15 – 14.05 Workshopronde 1B/lunch en markt
14.05 – 14.15 Wisseltijd
14.15 – 15.05 Workshopronde 2
15.05 – 15.30 Wisseltijd/markt
15.30 – 16.15 Plenaire lezing en afsluiting

Iedereen volgt een workshop in ronde 1A óf 1B.
De tijdsindeling van de studiedag biedt deelnemers ruim gelegenheid voor lunch en marktbezoek.

De LIO-dag

Al enige jaren is de LIO-dag een succesvolle traditie geworden: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name de LIO-ers. De LIO's krijgen in september via hun opleider meer informatie.

Nieuwe leden

De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit voor de jaarvergadering/studiedag. In de loop van oktober ontvangen zij hiervoor een persoonlijke uitnodiging via de mail.

Kosten

De studiedag is gratis voor leden. Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 87,50; Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2019 inclusief alle faciliteiten, waaronder zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen en gratis gebruik van helpdesk t.b.v advisering in arbeidszaken. Ook studenten zijn welkom, zij betalen € 40,00 (mits ze niet ouder zijn dan 27 jaar). Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00. *Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!*

Aanmelding

Aanmelden kan vanaf half september, tot 25 oktober 2019. Voor de organisatie is het van belang dat je je op tijd aanmeldt.

Ook dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de site van de vereniging. Daarop staat het volledige programma, inclusief de workshops waar je een keuze uit kunt maken.

Markt

Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar je je hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes. Er is zowel een commercieel als een niet-commercieel deel. Verantwoordelijk voor deze markt is Theo Wesker.

Certificaat

Wil je een certificaat ontvangen, vermeld dan bij je aanmelding ook je voorletters en geboortedatum. Het certificaat wordt je na afloop van de studiedag digitaal toegestuurd.

Informatie

Verantwoordelijk voor de organisatie en contactpersoon van deze dag is Heleen van der Ree (e-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*).

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Op vrijdag 13 september vindt op de Technische Universiteit Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor zijn 148 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen. Voor docenten die meegaan naar de finale is er tijdens de wedstrijd een onderhoudende lezing. Vanaf maandag 16 september vind je de opgaven (en uitwerkingen) van de finale op *www.wiskundeolympiade.nl*. De vijftien prijswinnaars (vijf uit elk van de drie categorieën) worden 8 november bekend gemaakt tijdens de prijsuitreiking.

Internationale Wiskunde Olympiade 2019, Verenigd Koninkrijk

Matthijs van der Poel (18 jaar) behaalde voor het derde jaar een zilveren medaille. De leerlingen kregen zes opgaven van hoog wiskundig niveau voor hun kiezen. Voor elke opgave konden ze zeven punten verdienen. De resultaten zijn:

28 punten – zilver:	Matthijs van der Poel (18 jaar, IJsselstein, 6 vwo, Christelijk Gymnasium Utrecht)
21 punten – brons:	Jesse Fitié (17 jaar, Rijswijk, 5 vwo, Maerlant-Lyceum Den Haag)
21 punten – brons:	Richard Wols (16 jaar, Ruinen, 6 vwo, CSG Dingstede Meppel)
19 punten – brons:	Jovan Gerbscheid (16 jaar, Amsterdam, 5 vwo, St. Ignatiusgymnasium Amsterdam)
18 punten – brons:	Jippe Hoogeveen (16 jaar, Odijk, 5 vwo, Openbaar Lyceum Zeist)
10 punten – eervolle vermelding:	Szabi Buzogány (19 jaar, Hooglanderveen, 6 vwo, Corderius College Amersfoort)

Van de 621 deelnemers kregen de beste 52 een gouden medaille, de 94 besten daarna een zilveren en de volgende 156 deelnemers een bronzen medaille. In het landenklassement van 112 landen eindigde Nederland met Hong Kong op de 37e plaats, de VS en China op de eerste plaats.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2019

vr 13/9

EINDHOVEN

Finale wiskunde olympiade 2019

vr 28/9

DORDRECHT

'Denken met dingen'. Symposium over de geschiedenis van wiskundige leermiddelen
Plaats: Onderwijsmuseum
Organisatie: NVvW

wo 02/10

TILBURG

'Ruimte voor Wiskunde'. Fontys Wiskunde Event 7
Organisatie: Fontys Lerarenopleiding Tilburg

za 02/11

VEENENDAAL

Jaarvergadering/studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 95

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	29 oktober 2019	26 augustus 2019
3	17 december 2019	14 oktober 2019
4	28 januari 2020	18 november 2019
5	17 maart 2020	06 januari 2020
6	05 mei 2020	02 maart 2020
7	23 juni 2020	27 april 2020

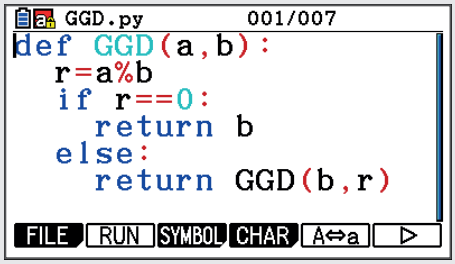
CASIO

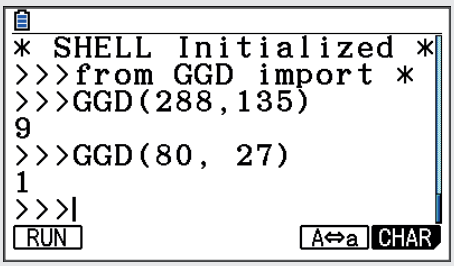
Casio fx-CG50

Vertrouwde functionaliteit, betrouwbaar en intuïtief te gebruiken

De Casio fx-CG50 heeft een moderne vormgeving, beschikt over een kleurendisplay met hoge resolutie en is voorzien van een makkelijk te gebruiken examenstand. Naast de vertrouwde toepassingen kunt u uw grafische rekenmachine nu ook gebruiken met een extra functionaliteit: programmeren in Python. Hiervoor hoeft u uw Casio fx-CG50 alleen te updaten naar OS versie 3.20. U vindt de update op edu.casio.com.

Programmeer in Python met de Casio fx-CG50





Bestel direct uw docentenexemplaar voor maar € 39,50*

Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer.

* Inclusief btw en verzending

MODERNE WISKUNDE

Ontdek Moderne Wiskunde 12e editie vmbo en havo/vwo onderbouw

- Heldere structuur: één les per paragraaf.
- Eenvoudig differentiëren door de drie verschillende leerroutes.
- Een digitale, adaptieve omgeving: incl. oefentoetsen met studie-advies op maat.

Vraag uw gratis proefpakket aan op modernewiskunde.noordhoff.nl

Nu ook voor vmbo-basis en vwo English!

Noordhoff Uitgevers

Iedereen leert