

Olympiadepuzzel

Euclides 94 nummer 5



Trap verven

Opgave

Je wilt je trap van 14 treden verven; elke trede moet rood, wit of blauw worden. Je wilt geen twee opeenvolgende treden met dezelfde kleur. En drie opeenvolgende treden met drie verschillende kleuren mag alleen als de volgorde dan van boven naar beneden rood-wit-blauw is. Hoeveel mogelijke kleuringen van de trap zijn er?

Uitwerking

Stel dat er geen drie opeenvolgende treden met drie verschillende kleuren zijn. Twee opeenvolgende treden mogen niet dezelfde kleur hebben, dus als je twee opeenvolgende treden met kleuren wit en rood hebt, mag de volgende niet rood en ook niet blauw zijn, dus hij moet wit zijn. En de trede daarna wordt dan weer rood, enzovoorts. Zo'n trap bevat dus maar twee kleuren en de treden worden afwisselend in deze kleuren geverfd. Voor het kiezen van twee kleuren uit rood, wit en blauw zijn drie mogelijkheden; voor het kiezen van welke kleur de bovenste trede krijgt, zijn dan nog twee mogelijkheden. Al met al zijn er $3 \cdot 2 = 6$ van zulke trappen mogelijk.

Stel dat er wel drie opeenvolgende treden met drie verschillende kleuren zijn. Dan moet dat van boven naar beneden rood-wit-blauw zijn. Merk nu op dat je onder wit-blauw en blauw-wit nooit een rode trede mag hebben, want dan zouden er drie opeenvolgende treden met drie verschillende kleuren in de verkeerde volgorde zijn. Na wit-blauw komt dus altijd wit en na blauw-wit komt altijd blauw. Dus onder de treden die rood-wit-blauw geverfd zijn, komt rood nooit meer terug en wisselen de blauwe en witte treden elkaar af. Net zo goed geldt boven deze drie treden dat blauw niet meer terugkomt en rood en wit elkaar afwisselen. Als eenmaal de plek van de rood-wit-blauw-treden vastligt, heb je voor het verven van de rest van de trap dus geen enkele keuze meer. De rood-wit-blauwe treden kunnen beginnen op de eerste trede van boven, de tweede, enzovoorts, tot en met de twaalfde trede (dan is de dertiende wit en de veertiende blauw). Er zijn dus 12 mogelijke trappen waar rood-wit-blauw in voorkomt.

Alles bij elkaar zijn er $12 + 6 = 18$ mogelijke kleuringen van de trap.

Inzenders met een juiste uitwerking

Harm Bakker, Hans Huisman, Hans Linders, Jan Meerhof, Ruben Schuurman, Peter van Venrooij, Monica Woldinga.

Winnaar van de cadeaubon

Hans Linders.