Uitwerking Adri Scheepers

Hoeveel rijtjes met 12 bekers die twee aan twee gelijk gekleurd zijn kunnen op een rijtje worden gezet, zodat er niet twee dezelfde kleuren naast elkaar staan?

Ik introduceer de volgende variabelen:

n is het aantal verschillende kleuren (dus 2*n* bekers).

S_n is het aantal rijtjes bij *n* kleuren.

ED_n is het aantal foute rijtjes bij *n* kleuren met één dubbele kleur naast elkaar.

TD_n is het aantal foute rijtjes bij *n* kleuren met twee keer een dubbele kleur naast elkaar.

DD_n is het aantal foute rijtjes bij *n* kleuren met drie keer een dubbele kleur naast elkaar.

VD_n is het aantal foute rijtjes bij n kleuren met vier keer een dubbele kleur naast elkaar.

De kleuren worden genummerd (1, 2, 3, …)

Dat betekent voor *n* = 1: $\boxed{1\ 1}$

$S_1 = 0$, je kunt geen rijtjes maken zonder dubbele kleuren.

$ED_1 = 1$

$TD_1 = 0$, er is maar één kleur, DD_n en VD_n idem.

Stel dat je de volgende aantallen weet: S_{n-1}, ED_{n-1}, TD_{n-1}, DD_{n-1} en VD_{n-1}, hoe maak je dan de rijtjes met een kleur meer?

Hoe groot is S_n ?

Er zijn S_{n-1} correcte rijtjes met $2(n-1)$ bekertjes in een rij, daar worden twee nieuwe bekertjes bijgezet (niet naast elkaar).Dat kan bij elk rijtje op: $\binom{2(n-1)+1}{2} = (2n-1)(n-1)$ manieren,

Dus: $(2n-1)(n-1) \cdot S_{n-1}$. (1)

Verder kunnen ook de foute rijtjes met één dubbele kleur worden 'opgewaardeerd'. Dat kan als volgt: Gebruik het ene nieuwe bekertje om de dubbele kleur te splitsen, het andere bekertje kan dan op $2(n-1)$ plaatsen komen staan. Dit kan bij elk rijtje met één dubbele:

Dus: $2(n-1) \cdot ED_{n-1}$ (2)

Dat opwaarderen kan ook bij elk rijtje met twee dubbelen. Gebruik nu elk nieuw bekertje om de dubbelen te splitsen. Dat kan op één manier bij elk rijtje, dus op TD_{n-1} manieren. (3)

Het nieuwe aantal rijtjes wordt dus:

$$S_n = (2n-1)(n-1) \cdot S_{n-1} + 2(n-1) \cdot ED_{n-1} + TD_{n-1}$$

Hoe bereken je het nieuwe aantal foute rijtjes met één dubbele?

Hoe groot is ED_n?

Je kunt de nieuwe kleur als dubbele toevoegen aan een bestaand goede rijtje. Daarvoor zijn er $2(n-1)+1 = 2n-1$ plaatsen, dus $(2n-1) \cdot S_{n-1}$ manieren (1)

Je kunt ook een bestaande dubbele kleur splitsen door er de twee met de nieuwe kleur dubbel tussen te zetten: ED_{n-1} manieren.   (2)

Een andere mogelijkheid is om juist die dubbele kleur te laten staan en de twee nieuwe bekers te verdelen over de overige plekken: Als voorbeeld een rijtje met $n-1=3$:

.. .. .. $\boxed{2\ 2}$ ..

Je ziet, er zijn $2(n-1)$plekken dus kan dit op $\binom{2(n-1)}{2} = \frac{2(n-1)(2(n-1)-1)}{2} = (n-1)(2n-3)$, bij elk rijtje dus $(n-1)(2n-3) \cdot ED_{n-1}$ manieren.   (3)

De volgende mogelijkheid is om bij een rijtje met twee dubbelen er ééntje op te heffen. Als voorbeeld een rijtje met $n-1=5$:

.. .. .. $\boxed{3\ 3}$ .. .. $\boxed{1\ 1}$ ..

.. .. .. $\boxed{3\ 3}$ .. .. $\boxed{1\ 1}$ ..

Het eerste bekertje tussen de 33 of de 11, voor het tweede bekertje nog $2(n-1)-1 = 2n-3$ mogelijkheden. Dus $2(2n-3) \cdot TD_{n-1}$ rijtjes.   (4)
De laatste mogelijkheid is om bij elk fout rijtje met drie dubbelen er twee op te heffen. Dat kan op $\binom{3}{2} = 3$ manieren: $3 \cdot DD_{n-1}$.   (5)
Alles samen:

$$ED_n = (2n-1) \cdot S_{n-1} + ((n-1)(2n-3)+1) \cdot ED_{n-1} + 2(2n-3) \cdot TD_{n-1} + 3 \cdot DD_{n-1}$$

Het nieuwe aantal foute rijtjes met 2 dubbelen:
Hoe groot is TD_n?

Je kunt de nieuwe kleur als dubbele toevoegen aan een bestaand fout rijtje met één dubbele: Daarvoor zijn er
$2(n-1)$ plaatsen, dus $2(n-1) \cdot ED_{n-1}$ manieren.   (1)

Je kunt ook in een rijtje met twee dubbelen er één dubbele kleur splitsen door er de twee met de nieuwe kleur dubbel tussen te zetten. Dat kan op 2 manieren per rijtje,
dus op $2 \cdot TD_{n-1}$ manieren.   (2)

Je kunt de nieuwe kleur ook los tussen de rijtjes met twee dubbelen zetten. Dat kan per rijtje op $\binom{2(n-1)-1}{2} = \frac{(2n-3)(2n-4)}{2} = (2n-3)(n-2)$ manieren, (zie ook (5) bij ED_n)
dus in totaal $((2n-3)(n-2)+2) \cdot TD_{n-1}$ manieren.   (3)

De volgende mogelijkheid is om bij een fout rijtje met drie dubbelen er één op te heffen. Dat kan op $\binom{3}{1} = 3$ manieren. . Als voorbeeld een rijtje met $n-1=5$:

$\boxed{2\ 2}$ .. $\boxed{3\ 3}$ .. .. $\boxed{1\ 1}$ ..

Het andere bekertje kan dan nog op $2(n-1)-2=2n-4$ plaatsen dus $3(2n-4)\cdot DD_{n-1}$ (4)

De laatste mogelijkheid is om bij een fout rijtje met 4 dubbelen er twee op te heffen. Dat kan op $\binom{4}{2}=6$ manieren, dus $6\cdot VD_{n-1}$. (5) Alles samen:

$TD_n=2(n-1)\cdot ED_{n-1}+((2n-3)(n-2)+2)\cdot TD_{n-1}+3(2n-4)\cdot DD_{n-1}+6\cdot VD_{n-1}$

Hoe groot is DD_n?

Bij $n=3$ $\boxed{1\ 1}$ $\boxed{2\ 2}$ $\boxed{3\ 3}$ er zijn $3!=6$ manieren

Bij $n=4$. Kies eerst de drie dubbelen: $4\cdot 3\cdot 2=24$ manieren. De overige twee bekers verdelen tussen deze dubbelen : $\binom{4}{2}=6$, in totaal $24\cdot 6=144$ manieren.
Meer waarden van DD_n zijn overbodig.

Hoe groot is VD_n?
Bij $n=4$ $\boxed{1\ 1}$ $\boxed{2\ 2}$ $\boxed{3\ 3}$ $\boxed{4\ 4}$ er zijn $4!=24$ manieren

Meer waarden van DD_n zijn overbodig.

AL: deze formules worden ingevoerd in een Excelblad:

n	Sn	EDn	TDn	DDn	VDn
1	0	1	0	0	0
2	2	2	2	0	0
3	30	36	18	6	0
4	864	984	504	144	24
5	39480	43800	22200		
6	2631600				

Volgens deze berekening is het aantal bekertjes 2.631.600

Adrie Scheepers,
Docent wiskunde
Cambiumcollege Zaltbommel