Uitwerking Paul Dillo

Paren bekertjes

$2n$ bekertjes, met n paren gelijkgekleurde, staan op een rij.
Als twee gelijke kleuren naast elkaar staan, noemen we dat een huwelijk.
Hoeveel rijen zijn er mogelijk zonder één huwelijk?

Allereerst kan je $2n$ willekeurige bekertjes op $(2n)!$ posities plaatsen. Bij een paar kan je onderling wisselen zonder dat dat iets nieuws oplevert, Dus voor elk paar delen door 2!. Dan is het totale aantal rijen gelijk aan $\frac{(2n)!}{(2!)^n}$.
Noteer het aantal rijen van n paren waar k huwelijken in voorkomen met $H_n(k)$. Dan is
(*) $\quad \frac{(2n)!}{(2!)^n} = \sum_{k=0}^{k=n} H_n(k)$
Dit gebruiken we ter controle van onze berekeningen (zie Excel paren_bekertjes_defi)
Merk op dat $H_0(0) = 1,\ H_n(k) = 0\ als\ k < 0\ of\ k > n$.
We permitteren ons de slordigheid met $H_n(k)$ ook de verzameling van zulke rijtjes aan te geven.

Toevoegen van twee bekertjes levert de volgende 4 mogelijkheden:
a) Er komt 1 huwelijk bij;
b) Het aantal huwelijken blijft gelijk;
c) Het aantal huwelijken wordt 1 minder;
d) Het aantal huwelijken wordt 2 minder.

Ad a) Elk element uit $H_n(k-1)$ wordt een van de $H_{n+1}(k)$. Noem de factor $Fa_n(k)$.
$2n$ bekertjes hebben $2n$+1 tussenruimtes. De k-1 huwelijken blijven in stand, zodat er $(2n+1)-(k-1) = 2n+2-k$ posities overblijven: $Fa_n(k) = 2n+2-k$.

Ad b) Nu gaat elke $H_n(k)$ over in $H_{n+1}(k)$. Noem de factor $Fb_n(k)$.
i) Handhaaf oude huwelijken, nieuw paar geeft geen huwelijk.
plaats 1e , dat kan op $2n+1-k$ manieren. Plaats 2e hier niet naast.
Van de overige $2n+2-k$ vallen dan 2 posities af. Samen $\binom{2n+1-k}{2}$
ii) Eén huwelijk gaat kapot, aldaar nieuw huwelijk (…xx… wordt …xyyx…):
Dat kan op k manieren.
Dan is $Fb_n(k) = \binom{2n+1-k}{2} + k$.

Ad c) Nu wordt elke $H_n(k+1)$ een element van $H_{n+1}(k)$. Noem de factor $Fc_n(k)$.
1e van het nieuwe paar breekt 1 huwelijk open (=k+1). Overige huwelijken blijven.
Dan voor 2de $2n - k$ posities. Factor $Fc_n(k) = (k+1)(2n-k)$.

Ad d) 2 huwelijken gaan kapot, elke $H_n(k+2)$ wordt een van de $H_{n+1}(k)$.
Factor is $Fd_n(k) = \binom{k+2}{2}$.

Waaruit volgt dat

$$H_{n+1}(k) = Fa_n(k)H_n(k-1) + Fb_n(k)H_n(k) + Fc_n(k)H_n(k+1) + Fd_n(k)H_n(k+2).$$

Dit voert tot $H_6(0) =$2631600.