

Geachte heer Biesheuvel,
beste Simon,

Dank voor je leuke artikel in Euclides 94-3 en de uitdaging die je aan het eind van het artikel het land instuurt. Als (mede-)auteur van het telhoofdstuk in Moderne Wiskunde (11ed) kan ik het natuurlijk niet laten om op je uitnodiging in te gaan.

Over opgave 6 wil ik het niet hebben. Die is gewoon fout uitgewerkt. Maar aan opgave 43 hangt een ander verhaal. Het formuleren van zo'n opgave is niet zo moeilijk. En als je niet direct ook een uitwerking maakt, kun je je enorm vergissen in de moeilijkheidsgraad. En dat is hier gebeurd. Helaas heeft de uitwerkingenmaker de opgave niet goed geïnterpreteerd en daardoor niet aan de bel getrokken, met als gevolg dat er een veel te lastige opdracht in het boek terecht is gekomen.

Tot zover de geschiedenis. Maar daar kan het natuurlijk niet bij blijven. Je schrijft dat je een antwoord hebt gevonden en dat je (redelijk) zeker bent van je resultaat. Mijn hoogste doel is om die latente onzekerheid weg te nemen. Ik probeer op twee manieren het juiste antwoord te produceren. De tweede manier laat zich ook redelijk eenvoudig generaliseren.

1 Formulering van het telprobleem

De opgave in het boek is geformuleerd in termen van een geordend rijtje kleuren. Maar voor het vervolg is het makkelijker om te praten over getallen. We vragen naar het aantal verschillende permutaties van de getallen $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$ waarin twee opeenvolgende elementen verschillend zijn. Zo'n permutatie heet (ben ik deze vakantie achter gekomen) een *Carlitz-permutatie van de multiset* $\langle 1, 1, 2, 2, \dots, n, n \rangle$. Laten we dit aantal maar noteren met $cp(n)$. De opgave vraagt dus om $cp(6)$ te bepalen.

2 Methode 1: Brute force

Als nadenken te lastig of te foutgevoelig is, dan wil het schrijven van een programmaatje nog wel eens uitkomst bieden. Met behulp van een redelijk standaard backtracking algoritme zijn alle Carlitz-permutaties te genereren. Tellen is dan eenvoudig geworden. Het resultaat staat in de tabel van figuur 1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$cp(n)$	1	0	2	30	864	39480	2631600	241133760

Figuur 1: Computerresultaten

Dit zou een einde moeten maken aan je eventuele onzekerheid. Of het slaat een deukje in je zelfvertrouwen, maar dat kan ik me nauwelijks voorstellen.

3 Encyclopedie

Ken je *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (<https://oeis.org>)? Een geweldige site. Als je het beginstuk van een rij hebt, dan levert deze site je vast een heleboel informatie over de rest van de rij, over contexten waarin deze rij opduikt, directe formules en recurrente betrekkingen. Het feit dat deze site de getallen uit figuur 1 herkent en weet voort te zetten geeft mij de overtuiging dat mijn uitwerking van het algoritme correct is.

4 Methode 2: redeneren

Een programma levert het juiste antwoord. Maar je wordt er niet veel slimmer van. Sowieso vraagt het genereren van alle (Carlitz-)permutaties voor wat grotere waarden van n veel te veel rekentijd. $n = 6$ is nog wel te doen, maar veel groter moet het (op mijn machine) niet worden.

Het valt (mij althans) niet mee om in één keer het aantal Carlitz permutaties te berekenen. Maar het lukt wel met een aantal tussenstappen.

Het is niet moeilijk om het aantal (gewone) permutaties van de multiset $\langle 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 \rangle$ te berekenen. Dat gaat min of meer standaard:

$$\frac{12!}{(2!)^6}$$

Maar daar zitten ook permutaties bij waar opeenvolgende elementen wel gelijk zijn. Ik noem twee gelijke elementen die naast elkaar staat een *dubbel*. Een Carlitz-permutatie is dus een permutatie met 0 dubbels. We beginnen met het makkelijkste geval (6 dubbels) en werken toe naar 0 dubbels. Als we daar zijn, dan zijn we er.

Laat nu $p(k)$ het aantal permutaties van $\langle 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 \rangle$ zijn waarbij de eerste k cijfers dubbels vormen en de andere cijfers lossen. Bijvoorbeeld $p(4)$ is het aantal Carlitz-permutaties van de acht symbolen $\langle 11, 22, 33, 44, 5, 5, 6, 6 \rangle$.

Merk op dat $cp(6) = p(0)$.

4.1 Zes dubbels

Een permutatie van $\langle 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 \rangle$ met zes dubbels is in feite een (gewone) permutatie van de zes (verschillende) symbolen 11, 22, 33, 44, 55, 66. En dat zijn er $6! = 720$. Dus

$$p(6) = 720 \tag{1}$$

4.2 Vijf dubbels

Met 6 als los getal berekenen we het aantal Carlitz-permutaties. We hebben nu de zeven symbolen 11, 22, 33, 44, 55, 6, 6. Het aantal permutaties van deze symbolen is $\frac{7!}{2!} = 2520$. Maar daar zitten ook de permutaties bij waar de twee zessen naast elkaar staan, ofwel de permutaties met zes dubbels. Maar dat aantal hadden we al berekend: $p(6) = 6! = 720$. Dus

$$p(5) = \frac{7!}{2!} - p(6) = 1800 \tag{2}$$

4.3 Vier dubbels

Met 5 en 6 als losse getallen berekenen we het aantal Carlitz-permutaties. We hebben nu de acht symbolen 11, 22, 33, 44, 5, 5, 6, 6. Het aantal permutaties van deze symbolen is $\frac{8!}{(2!)^2} = 10800$. Maar daar zitten ook de permutaties bij waar de twee 6-en en/of de twee 5-en naast elkaar staan. Maar die aantallen hebben we al berekend:

- twee 5-en naast elkaar; de 6-en los: $p(5) = 1800$ (zie 2).
- twee 6-en naast elkaar; de 5-en los: dit zijn er natuurlijk net zoveel als de 5-en dubbel en de 6-en los, dus ook $p(5) = 1800$.
- zowel de 5-en als de 6-en dubbel: $p(6) = 720$ (zie 1).

Zo komen we op

$$p(4) = \frac{8!}{(2!)^2} - 2 \cdot p(5) - p(6) = 5760 \quad (3)$$

4.4 Drie dubbels

Met 4, 5 en 6 als losse getallen berekenen we het aantal Carlitz-permutaties. We hebben nu de negen symbolen 11, 22, 33, 4, 4, 5, 5, 6, 6. Het aantal permutaties van deze symbolen is $\frac{9!}{(2!)^3}$. Maar daar moeten weer een aantal vanaf:

- de permutaties waarbij één van de cijfers 4, 5 of 6 een dubbel vormt (en de anderen niet). Dat zijn er $\binom{3}{1} \cdot p(4)$.
- de permutaties waarbij twee van de cijfers 4, 5 of 6 een dubbel vormen (en de andere niet). Dat zijn er $\binom{3}{2} \cdot p(5)$.
- de permutaties waarbij de cijfers 4, 5 en 6 alle drie een dubbel vormen. Dat zijn er $\binom{3}{3} \cdot p(6)$.

Zo komen we tot

$$p(3) = \frac{9!}{(2!)^3} - \binom{3}{1} \cdot p(4) - \binom{3}{2} \cdot p(5) - \binom{3}{3} \cdot p(6) = 21960 \quad (4)$$

4.5 Twee dubbels

Het patroon is inmiddels wel zo'n beetje duidelijk. Bij de tien symbolen 11, 22, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 eerst maar weer alle permutaties: $\frac{10!}{2^4}$. En daar vanaf halen:

- één van de vier symbolen 3, 4, 5 of 6 dubbel: $\binom{4}{1} \cdot p(3)$.
- twee van de vier symbolen 3, 4, 5 of 6 dubbel: $\binom{4}{2} \cdot p(4)$.
- drie van de vier symbolen 3, 4, 5 of 6 dubbel: $\binom{4}{3} \cdot p(5)$.
- alle vier de symbolen 3, 4, 5 en 6 dubbel: $\binom{4}{4} \cdot p(6)$.

Samen

$$p(2) = \frac{10!}{2^4} - \left(\binom{4}{1} \cdot p(3) + \binom{4}{2} \cdot p(4) + \binom{4}{3} \cdot p(5) + \binom{4}{4} \cdot p(6) \right) = 96480 \quad (5)$$

4.6 Eén dubbel

Maar in één keer

$$p(1) = \frac{11!}{2^5} - \binom{5}{1} \cdot p(2) + \binom{5}{2} \cdot p(3) + \binom{5}{3} \cdot p(4) + \binom{5}{4} \cdot p(5) + \binom{5}{5} \cdot p(6) = 47808 \quad (6)$$

4.7 Nul dubbels

Dan nu waar het om gaat

$$cp(6) = p(0) = \frac{12!}{2^6} - \left(\binom{6}{1} \cdot p(1) + \binom{6}{2} \cdot p(2) + \binom{6}{3} \cdot p(3) + \binom{6}{4} \cdot p(4) + \binom{6}{5} \cdot p(5) + \binom{6}{6} \cdot p(6) \right) = 2631600 \quad (7)$$

5 Generalisatie

Het is aardig om op een systematische manier een opgave op te lossen, maar het wordt pas echt leuk als daaruit ook een algemeen patroon valt af te leiden, zodat ook grotere versies van het probleem effectief (en efficiënt) zijn door te rekenen.

Laat nu

$$\begin{aligned} & p(n, k) \\ & = \\ & \text{het aantal Carlitz-permutaties van de multiset} \\ & \langle 11, 22, \dots, kk, k+1, k+1, \dots, n, n \rangle \end{aligned}$$

Dan voldoet dit aan de recurrente betrekkingen

•

$$p(n, n) = n!$$

• voor $0 \leq k < n$:

$$p(n, k) = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}} - \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} \cdot p(n, k+i)$$

en

$$cp(n) = p(n, 0)$$

Achteraf was het misschien handiger geweest om niet te kijken naar het aantal dubbelen, maar naar het aantal lossen. Dus laat $q(n, t) = p(n, n-t)$. Voor q hebben we dan de recurrente betrekkingen

•

$$q(n, 0) = n!$$

• voor $0 < t \leq n$:

$$\begin{aligned}
& q(n, t) \\
= & p(n, n - t) \\
= & \{ \text{vervang } k \text{ door } n - t \} \\
& \frac{(2n - (n - t))!}{2^{n - (n - t)}} - \sum_{i=1}^{n - (n - t)} \binom{n - (n - t)}{i} \cdot p(n, (n - t) + i) \\
= & \frac{(n + t)!}{2^t} - \sum_{i=1}^t \binom{t}{i} \cdot p(n, (n - t) + i) \\
= & \frac{(n + t)!}{2^t} - \sum_{i=1}^t \binom{t}{i} \cdot q(n, t - i) \\
= & \{ \binom{t}{i} = \binom{t}{t - i} \} \\
& \frac{(n + t)!}{2^t} - \sum_{i=1}^t \binom{t}{t - i} \cdot q(n, t - i) \\
= & \{ \text{hernoem sommatie-index: } j = t - i \} \\
& \frac{(n + t)!}{2^t} - \sum_{j=t-i}^0 \binom{t}{j} \cdot q(n, j) \\
= & \{ \} \\
& \frac{(n + t)!}{2^t} - \sum_{j=0}^{t-1} \binom{t}{j} \cdot q(n, j)
\end{aligned}$$

en

$$cp(n) = q(n, n)$$

Dat ziet er al aanmerkelijk werkbaarder uit. Dit is ook eenvoudig te implementeren. In pseudo-code:

```

FUNCTION cp (int n) {
  ARRAY a [0 .. n]; // a[i] = q[n,i]
  a[0] := n!;
  FOR i = 1 .. n DO {
    a[i] := (n + i)! / 2^i;
    FOR j = 0 .. (i - 1) DO {
      a[i] := a[i] - binom(i,j)*a[j];
    }
  }
  RETURN a[n];
}

```

Een paar resultaten voor $q(n, t)$ met n verticaal en t horizontaal:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0							
2	2	1	2						
3	6	6	12	30					
4	24	36	84	246	864				
5	120	240	660	2220	8760	39480			
6	720	1800	5760	21960	96480	478080	2631600		
7	5040	15120	55440	236880	1149120	6219360	37079280	241133760	
8	40320	141120	584640	2772000	14736960	86597280	556426080	3876561360	29083420800

6 Alternatieven

In het op de site van de Encyclopedia aangegeven artikel van Eriksson en Martin worden twee andere aanpakken beschreven. De inclusie-exclusie methode lijkt veel op wat hiervoor is beschreven. Ze doen het iets anders en komen dan tot een (gesloten) uitdrukking met een (ingewikkelde) sommatie. Uit eindelijk verschilt de uitwerking dan niet zoveel van mijn implementatie.

De aanpak met geordende permutatie-patronen is uitermate elegant. Dat bedenk je (ik althans) niet zelf.