EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Kwadratix: de twee-vliegen-in-één-klap-kromme

Boeken- en filmtips voor de zomervakantie

Alympiade: leerlingen onderzoeken vaccinatiegraad

Lesgeven in wiskunde volgens Barton

De taal van wiskunde: wiskundeles in tweetalig onderwijs

NR.7

JAARGANG 94 - JUNI 2019

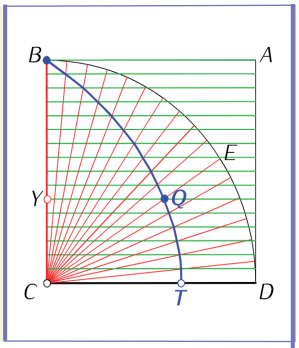
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 94 NR7

IN DIT NUMMER

DE TWEE-VLIEGEN-IN-ÉÉN-KLAP-KROMME
Martin Kindt
4



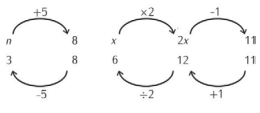
DE HOEKSTREEP
Jan Beuving
7

TOP 3 BOEKEN EN FILMS OVER WISKUNDE
8

KLEINTJE DIDACTIEK
Lonneke Boels
13

BOEKBESPREKING
TOEVAL IS ALTIJD LOGISCH
Henk Reuling
14

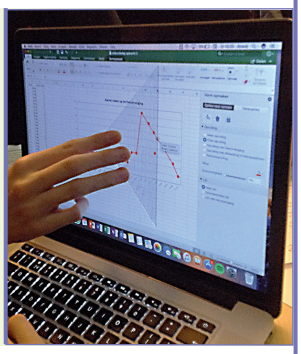
BOEKBESPREKING
VOLGENS BARTON
Dédé de Haan
Maarten Müller
16



TWAALF BEKERTJES KLEUREN
Simon Biesheuvel
Harm Bakker
20

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?
DEEL 6 CITO OVER DE GRENS
Sjoerd Crans
24

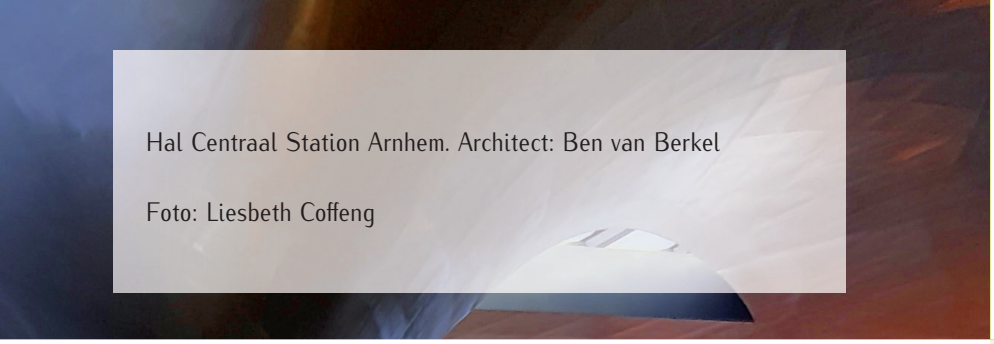
ALYMPIADE 2018: BEWUST VACCINEREN IN HAARLEM
Ruud Stolwijk
27



MEER MET MINDER
Gerard Koolstra
30

WIS EN WAARACHTIG
32

I SEE WHAT YOU MEAN
CROSSING LANGUAGE BARRIERS IN DUTCH MATH CLASSROOMS
Jana Dean
36



Hal Centraal Station Arnhem. Architect: Ben van Berkel

Foto: Liesbeth Coffeng

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

HET FIZIER GERICHT OP... 40
ONDERZOEKEND WISKUNDE LEREN IN NEDERLAND EN CHINA
Luhuan Huang
Michiel Doorman
Wouter van Joolingen

VASTGEROEST 43
Ab van der Roest

PUZZEL 44
Birgit van Dalen
Quintijn Puite

VERENIGINGSNIEUWS 44
JAARVERGADERING / STUDIEDAG 2019

SERVICEPAGIINA 46

Kort vooraf

Het laatste nummer jaargang 94, geen moment om terug te blikken maar vooruit te kijken naar de volgende jaargang met twee oproepen aan jullie, lezers. Eén over de vorm en één over de inhoud.

Eerst de vorm: binnenkort bereiken we een verborgen mijlpaal. Enigszins afhankelijk van hoe je telt hebben we het tweede nummer van jaargang 95 uitgeroepen tot het 750e nummer. En dat nummer moet natuurlijk een heel bijzondere voorkant hebben. Vandaar deze oproep aan iedereen (dus ook aan jullie leerlingen...) om een ontwerp te maken rond het getal 750. Een onafhankelijke jury (want ik doe zelf natuurlijk ook mee) beslist dan welke afbeelding de voorkant van deze gedenkwaardige editie gaat sieren.

Dan de inhoud. In dit nummer staat een recensie van *Volgens Barton*, René Kneybers Nederlandse bewerking van het boek *How I Wish I Had Taught Maths* van Craig Barton. Dit boek deed in het Verenigd Koninkrijk veel stof opwaaien. Veel docenten raakten erdoor geïnspireerd om eens op een andere manier les te gaan geven. In nauwe samenwerking met René willen we in de loop van jaargang 95 een serie artikelen gaan maken over docenten die ook na het lezen van het boek dingen wezenlijk anders zijn gaan doen. Mocht je na het lezen van de recensie zin krijgen om met het boek aan de slag te gaan, stuur dan een mailtje met een motivatie naar de redactie. René stelt een aantal exemplaren van het boek gratis ter beschikking. En wellicht raak je dan zó geïnspireerd dat je aan deze serie mee wilt werken. Je hoeft geen begenadigd schrijver te zijn: als het schrijven van een artikel een drempel opwerpt, dan komen we je met alle plezier interviewen!
Maar nu eerst de zomervakantie. Eindelijk tijd om mooie boeken over wiskunde te lezen. We vroegen een aantal wiskundigen naar hun top 3 boeken en films. Een vakantie-shortlist is dan snel samengesteld.

Namens de hele redactie wensen we je een fijne vakantie!
Tom Goris

DE TWEE-VLIEGEN-IN-ÉÉN-KLAP-KROMME

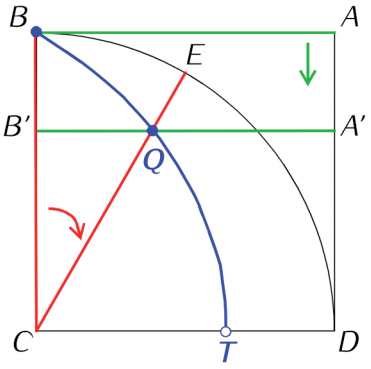
Martin Kindt

Griekse wiskundigen in de Oudheid vonden allerlei krommen uit, geïnspireerd als ze waren door de drie klassieke constructieproblemen: de trisectie van de hoek, de kwadratuur van de cirkel en de verdubbeling van de kubus. Eén van die krommen, de zogeheten *kwadratrix*, blijkt een dubbelrol te spelen.

De kwadratrix van Hippias[1]

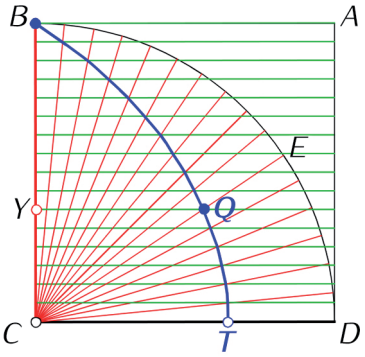
Kwadratrix zou zo maar een figuur in een van de geestige stripboeken van Goscinny kunnen zijn. En misschien treedt daar ergens wel een Galliër met die naam op.
De kwadratrix in dit artikel heeft niets met Asterix en Obelix te maken, maar is een figuur bedacht door de Griek Hippias (460 v.Chr.– 400 v.Chr.).
Het is een kromme die in eerste instantie is ontworpen om een willekeurige hoek in drie gelijke delen te kunnen verdelen, maar die meer noten op haar zang blijkt te hebben. Zeven eeuwen later schrijft Pappos (290 – 350) dat ook Dinostratos (390 v.Chr.– 320 v.Chr.) en Nicomedes (280 v.Chr.– 210 v.Chr.) de kwadratrix kenden. Zij gebruikten die dan voor de kwadratuur van de cirkel en dat verklaart haar naam. Pappos definieert de kwadratrix aldus, zie figuur 1.

Laat ABCD een vierkant en BED een cirkelboog met middelpunt C en straal CB zijn. Laat lijnstuk CB eenparig om C draaien, zodat B de cirkelboog BED doorloopt en laat lijnstuk BA simultaan (en ook eenparig) verticaal naar beneden schuiven.
Laat beide bewegingen in dezelfde tijd voltooid zijn, zo dat CB en BA op hetzelfde ogenblik met CD samenvallen. De meetkundige plaats van de snijpunten Q van de twee bewegende lijnstukken is een kromme (in figuur 1 blauw) die de kwadratrix wordt genoemd.



figuur 1

De eenparigheid van beide bewegingen houdt in dat steeds geldt: BB' : BC = bg BE : bg BD.[2] In figuur 2 is te zien hoe via een serie van zestien snijpunten de kwadratrix is getekend.



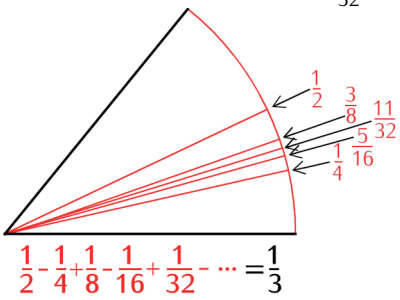
figuur 2

Bisectie en trisectie

Uit het bouwvoorschrift van de kwadratrix volgt dat de kromme kan worden gebruikt om een gegeven scherpe hoek ECD te verdelen in drie gelijke parten. Teken de lijn door het snijpunt Q van CE met de kwadratrix evenwijdig aan CD en bepaal het snijpunt Y van deze lijn met CB. Verdeel dan YC in drie gelijke stukken en trek door de deelpunten lijnen evenwijdig aan CD en via de snijpunten met de kwadratrix kan de trisectie van hoek ECD worden voltooid.

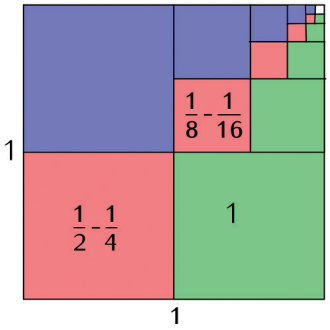
Pappos vermeldt dat Sporos (240 – 300) ernstige kritiek had op de definitie van de kwadratrix en zich afvroeg hoe het mogelijk is om de twee simultaan uitgevoerde bewegingen te definiëren zonder de verhouding van de lengte van BC en boog BD te kennen? En dan: hoe zou je het lijnstuk BC en de boog BD in stukken kunnen verdelen met dezelfde verhouding (rationaal of irrationaal)?
Het komt er in de praktijk op neer dat je voor het tekenen van de kwadratrix de rechte hoek BCD in een groot aantal gelijke delen moet zien te verdelen en om dan die kwadratrix te gebruiken voor de trisectie van een hoek,

dat ruikt toch naar boerenbedrog! Van der Waerden[3] schrijft dat Sporos' kritiek wel ten dele terecht is, maar dat de kromme *theoretisch* wel bepaald is en dat de *praktische* 'constructie' kan plaatsvinden door hoeken stapsgewijs te halveren. In figuur 2 is dat zo gebeurd (via zestien standen van de draaiende lijn) en dat maakt een benaderingstrisectie van een of andere scherpe hoek wel acceptabel.
Maar stap voor stap halveren kan ook rechtstreeks worden toegepast op een willekeurige hoek! Na vijf bisecties is in figuur 3 een hoek getekend die $\frac{11}{32}$ van de gegeven hoek is.



figuur 3

Dat de *limietsom* van de alternerende rij breuken gelijk is aan ⅓ kan op diverse manieren plausibel worden gemaakt. Een aanschouwelijk 'bewijs' zie je in figuur 4.
De (oneindige) sommen van de rode, blauwe en groene vierkanten zijn aan elkaar gelijk.

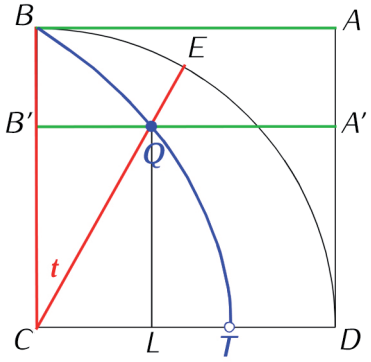


figuur 4

De kwadratrix op het scherm

Een aardige opdracht bij wiskunde B kan zijn om de leerlingen de definitie van de kwadratrix voor te leggen zoals Pappos die gaf en dan te vragen om die kromme met de grafische rekenmachine of met GeoGebra te produceren. Dat is dan een uitdaging om de meetkundige beschrijving te vertalen naar een parametervoorstelling. Bijvoorbeeld zó.
Beschouw *ABCD* als eenheidsvierkant, zodat geldt: bg *BD* = ½π, zie figuur 5.
Om de kwadratrix volgens Pappos' beschrijving van boven naar beneden te laten tekenen kun je stellen ∠*BCE* = *t*.
De verhouding van de booglengten van *BE* en *BD* is dan gelijk aan *t* : ½π ofwel 2*t* : π en hieruit volgt dan
y = *B'C* = 1 – 2*t*/π
0 < *t* < ½ π
x = *B'Q* = ((1 – 2*t*/π)·tan(*t*)

Zo is een parametervoorstelling van de kwadratrix gevonden en de machine kan zijn werk doen.



figuur 5

Het 'limietpunt' *T* op de *x*-as wordt niet bereikt, want tan(*t*) is niet gedefinieerd voor *t* = ½π. Uit de parametervoorstelling kan de *x*-coördinaat van *T* worden berekend via een limiet:

$$\lim_{t\to\pi/2}(1-2t/\pi)\tan(t)=$$

$$\lim_{t\to\pi/2}\frac{2/\pi\cdot(\pi/2-t)}{\tan(\pi/2-t)}=2/\pi$$

Het rekenwerk ziet er wat vriendelijker uit als je stelt ∠*ECD* = *t*, en dat leidt tot deze parametervoorstelling:

$$x=2/\pi\cdot\frac{t}{\tan(t)}$$

$0 < t < ½\ \pi$

$$y=2/\pi\cdot t$$

Via deze formules wordt de kwadratrix van onder naar boven op het scherm getekend, waarbij dan een klein stukje boven de *x*-as wordt gestart.

De kwadratrix kan ook goed worden geproduceerd via een vergelijking in poolcoördinaten. Stel *CQ* = *r* en ∠*ECD* = θ, dan *QL* = 2θ/π en vervolgens
r = 2θ/(πsin(θ))

De afstand *CT* wordt nu gevonden uit

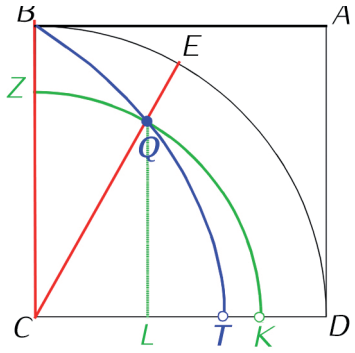
$$\lim_{\theta\to0}r=\lim_{\theta\to0}2\theta/(\pi\sin(\theta))=2/\pi$$

Het optreden van π in de limiet verklaart waarom de kwadratrix in verband werd gebracht met de kwadratuur van de cirkel. Maar hoe konden de Grieken dit snappen zonder een limietberekening met goniometrische functies?

Het bewijs van Pappos

De Grieken waren meesters in het hanteren van 'reductio ad absurdum' (bewijs uit het ongerijmde) en Pappos[4] hanteert dit op fraaie wijze om aan te tonen dat *CT* de lengte 2/π heeft.
Hij poneert de stelling dat *boog BED en lijnstuk* BC *zich verhouden als de lijnstukken BC en CT.*

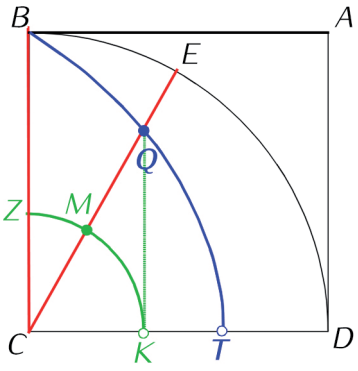
Dit komt op hetzelfde neer als $CT = 2/\pi$.
Pappos stelt dat er ergens op CD een punt K moet liggen zodat $bg\ BED : BC = CD : CK = BC : CK$
Dan laat hij langs meetkundige weg zien dat CK *niet groter* én *niet kleiner* kan zijn dan CT, zodat K wel moet samenvallen met T.
(A) Stel eerst $CK > CT$, zie figuur 6.



figuur 6

Beschouw de kwartcirkelboog ZQK met middelpunt C. Die boog snijdt de kwadratrix in Q.
Als gezegd geldt:
$bg\ BED : BC = BC : CK$ (1)
Maar ook:
$bg\ BED : bg\ ZQK = BC : CK$ (2)
want de booglengten van twee kwartcirkels verhouden zich als hun stralen. Uit (1) en (2) volgt nu:
$bg\ ZQK = BC$ (3)
Uit de definitie van de kwadratrix volgt
$bg\ BED : bg\ ED = BC : QL$ (4)
Ook geldt:
$bg\ BED : bg\ ED = bg\ ZQK : bg\ QK$ (5)
Uit (3), (4) en (5) volgt dan:
$bg\ QK = QL$
wat absurd is.
Dus is CK niet groter dan CT.

(B) Stel nu $CK < CT$, zie figuur 7.
De kwartcirkel met middelpunt C en straal CK ligt nu geheel onder de kwadratrix (zie figuur 7).



figuur 7

De verticale lijn door K snijdt de kwadratrix in Q en de kwartcirkel met middelpunt C en straal CK snijdt CQ in M.
Net zo als in bewijs (A) volgt:
$bg\ ZMK = BC$ (6)
Verder geldt:
$bg\ BED : bg\ ED = bg\ ZMK : bg\ MK$ (7)
Uit de definitie van de kwadratrix volgt:
$bg\ BED : bg\ ED = BC : QK$ (8)
Uit (6), (7) en (8) volgt dan:
$bg\ MK = QK$
en ook dit noemt Pappos absurd.

Ik vergelijk nog even de twee absurditeiten van Pappos en stel $\angle ECK = \varphi$ en $CK = r$.
In de situatie van figuur 6 geldt: $bg\ QK = r \cdot \varphi$ en $QL = r \cdot \sin(\varphi)$. Voor $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ geldt $\varphi > \sin(\varphi)$, dus $bg\ QK > QL$.
In figuur 7 geldt: $bg\ MK = r \cdot \varphi$ en $QK = r \cdot \tan(\varphi)$.
Uit $\varphi < \tan(\varphi)$ voor $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ volgt $bg\ MK < QK$.
$\varphi > \sin(\varphi)$ en $\varphi < \tan(\varphi)$ zijn respectievelijk equivalent met opp. sector $CQK >$ opp. CQL, zie figuur 6, en opp. sector $CMK <$ opp. CGK, zie figuur 7. Dit was voor Pappos natuurlijk gesneden koek!

Pappos sluit zijn verhaal af met de opmerking dat het nu duidelijk is dat de derde evenredige bij de lijnstukken CT en CB dezelfde lengte heeft als de kwartcirkel BED zodat vier keer dit lijnstuk gelijk is aan de omtrek van de gehele cirkel.
En ja, noem ik die derde evenredige a, dan bedoelt hij dat uit $CT : CB = CB : a$ volgt $a = bg\ BED$ zodat $4a = 2\pi$. Pappos beroept zich op Archimedes wanneer hij zegt dat met een lijnstuk gelijk aan de omtrek van een cirkel eenvoudig een vierkant kan worden geconstrueerd met een oppervlakte gelijk aan die van de cirkel. En dat heet dan 'de kwadratuur van de cirkel'.

Noten

[1] Jeanine Daems schreef eerder een mooi artikel over de kwadratrix (*Pythagoras*, februari 2017).
[2] Met bg wordt hier booglengte bedoeld (de internationale aanduiding is arc).
[3] Van der Waerden B.L. (1950). *Ontwakende Wetenschap.* Groningen: P. Noordhoff N.V.
[4] Thomas, I. (1991). *Greek Mathematical Works I, Thales to Euclid*, Loeb Classical Library. Harvard: Harvard University Press.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

DE HOEKSTREEP

X

Jan Beuving

Zou het toeval zijn dat uitgerekend de *x* gekozen is als letter om de onbekende mee aan te geven? Ik ben er niet op afgestudeerd, maar dat we het hebben over Mr. X, of x-ray, dat zal iets te maken hebben met de rol die *x* al had in de wiskunde. Als iemand voor de *q* had gekozen, had Mr. X wellicht Mr. Q geheten. (In Bondfilms bestaat hij al.) En de x-ray was q-ray geweest. (Ik heb het toch even opgezocht: toen Röntgen de straling ontdekte, noemde hij het x-ray, omdat hij geen idee had wat het was.)

De x is alomtegenwoordig. En lang niet alleen als onbekende. Het kan ook een kusje zijn. (Als je op Valentijnsdag een kusje van een onbekende krijgt, is het dus eigenlijk x^2. Hoewel er meestal drie kusjes gebruikt worden, *xxx*, dus de vraag is of dat niet $x^2x^2x^2$ moet worden, maar ja, dan kun je net zo goed *xxxxxx* schrijven, maar dat is dan weer overdreven, x^6 is weer te nerdy, enfin, ik krijg toch nooit Valentijnspost). Amsterdam heeft ook drie kruisen, XXX, in het stadswapen staan. Die hebben dan weer niets met wiskunde te maken, of wel, want het komt vermoedelijk van de rechtstafel waarop bij aanvang van de zitting drie kruisjes werden getekend, die na de zitting weer werden uitgewist – wis-kunde dus. En dan kan de *x* zelfs voor Christ staan, in x-mas. Dat is een uiterlijke overeenkomst: de x in X-mas lijkt op de chi uit het Griekse alfabet, die weer voor Christus staat. En zó ver van een onbekende zit de mysterieuze Christus nu ook weer niet.

Laatst was er nog een betekenis die mij aan kwam waaien, toen ik op de snelweg reed. Langs de weg staat namelijk regelmatig dit bord:

Bij rood X:
Rijstrook DICHT

Ik weet niet wat er in jouw hoofd gebeurt, maar bij mij wordt van die X onmiddellijk 'licht' gemaakt. De bordjes-methode is dus gevoelig voor rijm. Als er bij een voordeur een ledscherm zou hangen, met daarbij de tekst

Bij rood X:
Niemand thuis

dan maakt je hoofd er kruis van. Of ben ik de enige? Of als bij een naaktstrand staat

Bij groen O:
In je blote kontje

dan lees ik gelijk rondje. Zo zie je dat de O ook prima de rol van de X als onbekende had kunnen overnemen (al is het in het langwerpige lettertype van deze column twijfelachtig of je echt aan een rondje denkt bij de hoofdletter O, misschien had ik beter de kleine letter o kunnen gebruiken). Het roept wel een vraag op. Stel bijvoorbeeld dat dit er had gestaan:

Bij rood X:
Rijstrook voor een busje

Had je dan voor die X het gangbare kusje ingevuld? Of is de kusje-betekenis van de X hoofdletter-gevoelig?

Bij rode X
Mag u niks

Hier gebeurt iets anders: door de aanpassing van het bijvoeglijk naamwoord naar rode, is de kruis-betekenis niet meer te lezen, en moet je wel naar de x-betekenis toe in het rijm. Zo zie je dat de taal de invulling van de wiskunde kan sturen.

Over de auteur

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier. Hij toert vanaf september weer door het land met zijn nieuwe voorstelling Rotatie. Kijk voor de speellijst op *www.janbeuving.nl.*

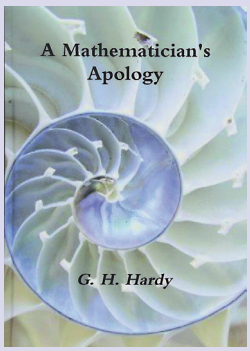
TOP 3 BOEKEN EN FILMS OVER WISKUNDE

Met de zomer voor de boeg zijn tips voor boeken en films nooit weg. We vroegen een aantal medewerkers van *Euclides* en andere wiskundeliefhebbers naar boeken en films die hen hebben geïnspireerd. Ze mochten slechts drie titels nomineren. Het resultaat: een grote verscheidenheid aan titels die je meteen in huis wilt halen. Van een prentenboek met een wiskundige boodschap tot een puzzelboek met intrigerende raadsels tot een documentaire over Hendrik Lenstra die geen computer heeft, maar wel tien edities van Homerus' Odyssee bezit. Er is nog veel te ontdekken deze zomer!

Alexander Rinnooy Kan

Mijn drie favoriete boeken voor en door wiskundigen, speciaal geschikt voor de zomermaanden.

1 *A mathematician's apology* van G.H. Hardy. Bekentenissen van een grootmeester, die aan het verdrietige einde van zijn creatieve werkzame leven berustend terugkijkt op zijn avonturen in een vakgebied dat - naar zijn overtuiging - zijn nut vooral ontleent aan zijn fundamentele nutteloosheid.



2 *Fooled by randomness* van N.N. Taleb. Het fascinerende, met begrijpelijke zelftevredenheid opgeschreven verhaal over de mate waarin bijna iedereen - behalve de auteur natuurlijk - zich verkijkt op de valkuilen van de onzekerheid.

3 *The Magical Maze* van I. Stewart. Een wandeling door het doolhof van de wiskunde, voor niet-wiskundigen redelijk gemakkelijk af te leggen, voor wiskundigen een bron van vermakelijke voorbeelden uit hun altijd weer verrassende vakgebied.

Alexander Rinnooy Kan is wiskundige, senator en hoogleraar economie en bedrijfskunde aan de Universiteit van Amsterdam.

Desiree van den Bogaart

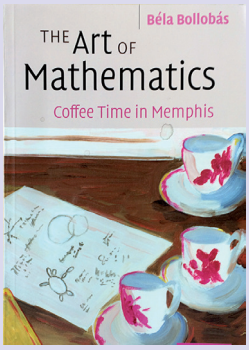
1 Mijn grote voorbeeld als het gaat om de vertaalslag van kennis van geschiedenis van de wiskunde naar het onderwijs/didactiek is Martin Kindt. Dus ik raad zo ongeveer zijn hele oeuvre aan, bijvoorbeeld: *Wiskunde dat kun je begrijpen* (samen met Ed de Moor) en Zebra-boekje 48 *Het avontuur dat Algebra heet* (samen met Henk Hietbrink).

2 Dan kom ik vervolgens terecht bij Marcus du Sautoy. Zijn roman *Het symmetriemonster* is een mooie combinatie van een persoonlijk verhaal (een jaar uit het leven van Du Sautoy zelf) en fragmenten uit de geschiedenis van de wiskunde (in het bijzonder de ontwikkeling van abstracte algebra). Du Sautoy is ook de maker van een prachtige vierdelige documentaireserie over de geschiedenis van de wiskunde, genaamd *The Story of Maths*.

3 Tot slot raad ik voor de vakantie absoluut dit boek aan: *The GCHQ Puzzle Book II*, met daarin denksport voor gevorderden. Ik kan erg genieten van deze raadsels, waarin niet alleen de wiskunde creatief wordt toegepast maar algemene kennis en taalvaardigheid ook zeker nodig zijn. Het boek bevat bovendien hints en antwoorden (waarbij het dus de uitdaging is om die niet te snel te raadplegen). En ook hier vinden we geschiedenis terug: het boek is doorspekt met boeiende informatie over de geschiedenis van de Britse Geheime Dienst.

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam.

Vincent Icke



Toen ik op de Sterrewacht Leiden naar een piepkleine werkkamer verhuisde, moest bijna de helft van mijn boeken weg. Gelukkig 1134 behouden, waarvan 137 over wiskunde. Beetje zuinig van *Euclides* om er slechts drie op te voeren.

1 R. Courant & D. Hilbert (1968). *Methoden der mathematischen Physik*. Berlin: Springer. Zonder deze wiskunde is er geen theoretische fysica.

2 D. Stoyan & H. Stoyan (1995). *Fractals, random shapes and point fields*. Chichester: Wiley. Een super geleerd werk, waarin ik de wiskunde vond die ik nodig had om de groteschaalstructuur van het Heelal te beschrijven.

3 B. Bollobás (2006). *The art of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press. Subliem, zoals de wiskunde waarop mijn opa F.C. Icke mij trakteerde als de anderen verjaarstaartjes zaten te eten.

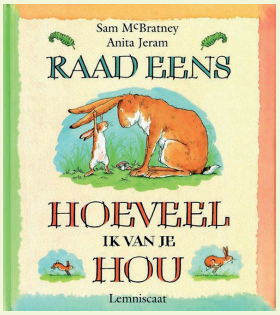
Vincent Icke is hoogleraar sterrenkunde aan de Universiteit van Leiden, bijzonder hoogleraar kosmologie aan de Universiteit van de Amsterdam en beeldend kunstenaar.

'DE SCHOONHEID VAN DE WISKUNDE? JE MOET HET NIET BENOEMEN, JE MOET ER STILLETJES VAN GENIETEN.'

Marjolein Kool

Wiskunde is fantastisch! Die boodschap zou je alle kinderen willen meegeven. Enzensberger doet in *De Telduivel* enorm zijn best om pyjamajongen Robert hiervan te overtuigen. Prachtige wiskunde, maar voor mij net iets te luidruchtig. Ik hou juist van boeken waar kinderen (en hun ouders) van genieten zonder door te hebben dat ze met wiskunde bezig zijn.

In het prentenboek *Ik zou wel een kindje lusten* roept de hongerige babykrokodil pagina's lang dat hij een kindje gaat opeten. Dat is reuzespannend! Totdat de kleuter die hij besluipt hem keihard uitlacht. De babykrokodil blijkt nog veel te klein te zijn om kindjes te eten. In *Wat het lieveheersbeestje hoorde* worden twee boeven de vijver in gelokt met een slim bedachte geluidenrouteplanner. Mijn favoriete kraamcadeautje is *Raad eens hoeveel ik van je hou*, met de wiskundig-filosofische boodschap dat je ouderliefde niet kunt meten. De schoonheid van de wiskunde? Je moet het niet benoemen, je moet er stilletjes van genieten.



Mijn top 3:

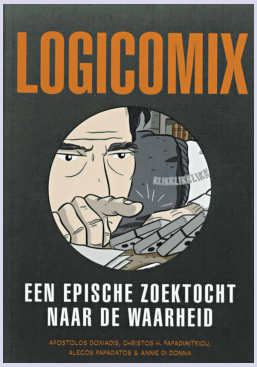
1 McBratney, S. & Jeram, A. (2015). *Raad eens hoeveel ik van je hou*. Rotterdam: Lemniscaat.

2 Donaldson, L. & Monks, L. (2010). *Wat het lieveheersbeestje hoorde*. Haarlem: Gottmer.

3 Donnio, S. & Pietersma, D. (2005). *Ik zou wel een kindje lusten*. Haarlem: Gottmer.

Marjolein Kool is hogeschoolhoofddocent Rekenen-Wiskunde en Didactiek aan de Hogeschool Utrecht, onderzoeker bij het lectoraat Didactiek van Wiskunde en Rekenen en dichter.

Gerardo Soto y Koelemeijer



1 *De dingen die je niet begrijpt*. In de aankondiging van deze documentaire staat: Wiskundige Hendrik Lenstra heeft geen auto, geen computer en ook geen televisie. Daarentegen is hij in het bezit van tientallen edities van Homerus' Odyssee. Dan ben ik verkocht. Grappige, boeiende en ontroerende documentaire over een interessante wiskundige.

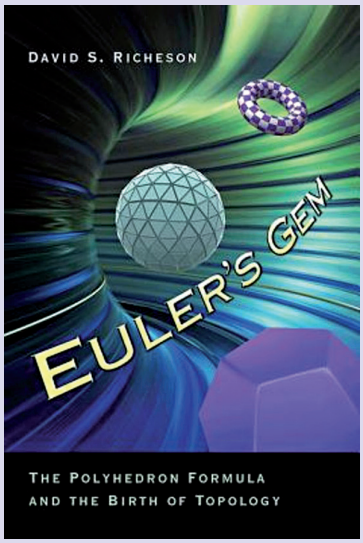
2 *Logicomix. Een epische zoektocht naar de waarheid*. Onder andere van de Griekse wiskundige en auteur A. Doxiadis. Een fantastisch idee om geschiedenis en filosofie van de wiskunde in stripvorm te gieten. Met twee briljante grappen wanneer Russell en Frege elkaar ontmoeten. Doxiadis is overigens een pleitbezorger voor het vertellen van verhalen over wiskunde in de les.

3 *In de naam van oneindigheid* van L. Graham en J.M. Kantor. Dit boek vertelt het verhaal van de Moskouse school voor wiskunde en wat de mystieke leer van de naamaanbidding de moderne wiskunde bracht. Inspirerend omdat er nog zoveel te ontdekken valt.

Gerardo Soto y Koelemeijer is postdoc aan het ICLON Leiden, docent wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium Leiden.

'EEN FANTASTISCH IDEE: GESCHIEDENIS EN FILOSOFIE VAN DE WISKUNDE IN STRIPVORM'

Jeanine Daems



1 David S. Richeson (2008). *Euler's Gem.* Princeton: Princeton University Press.
De veelvlakkenformule van Euler als gids door de meetkunde en de topologie. Richeson laat heel mooi zien hoe wiskundigen op elkaars ideeën voortbouwen. Dat de eerste formulering van een stelling vaak niet de uiteindelijke formulering is, dat wat als bewijs geaccepteerd wordt in de tijd kan veranderen, en dat vragen over generalisaties of uitzonderingen weer tot nieuwe wiskunde leiden. Bovendien legt hij de wiskunde op een zeer inzichtelijke manier uit. Prachtige combinatie van wiskunde en geschiedenis.

2 Martin Kindt & Ed de Moor (2012). *Wiskunde, dat kun je begrijpen.* Amsterdam: *Bert Bakker.*
Heel veel verschillende thema's uit de wiskunde komen aan bod. Je zou denken dat het dan weinig diepgang meer kan hebben, maar niets is minder waar. De auteurs slagen erin om bij elk onderwerp iets wat je eigenlijk al wist écht inzichtelijk te maken. Met plaatjes, geschiedenis en duidelijke uitleg. Ed en Martin zijn voorbeelden voor helder schrijven over wiskunde.

3 Drs. P. en Marjolein Kool (2000, uitgebreide editie 2018). *Wis- en natuurlyriek.* Nijgh en Van Ditmar.
Een fantastisch boek om cadeau te doen aan wiskunde-collega's: versjes over wiskunde en natuurwetenschappen. Mijn absolute favoriet is het gedicht 'Bewijzen', een vers over bewijzen uit het ongerijmde dat zelf een bewijs uit het ongerijmde *is* en - uiteraard - niet rijmt. Of toch? Ik lees het altijd voor als het onderwerp aan de orde komt in mijn lessen.

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht.

Jacques Jansen

Bij wiskundeboeken en films die met wiskunde te maken hebben, gaat het vaak om kennis en inzicht krijgen. Maar niet altijd. Ik begin met films:

1 *De eenzaamheid van de priemgetallen* van de Italiaanse auteur Paolo Giordano. Twee vliegen in een klap: een boek dat ook verfilmd is. Ontroerend. Tweelingpriemgetal wordt gebruikt als een metafoor voor de liefdesgeschiedenis van fotograaf Alice en wiskundige Mattia.

2 *Incendies.* De twintiger wiskundige Jean en haar tweeling-broer Simon zijn bij de notaris uitgenodigd om twee brieven in ontvangst te nemen en het dramatische levensverhaal van hun moeder Nawal kan beginnen.

3 *The man who knew infinity* (2015) van regisseur Matt Brown gaat over de briljante Indische wiskundige (autodidact) Srinivasa Ramanjan die in Engeland gaat samenwerken met professor G.H. Hardy en wiskundige John Littlewood.

Dan mijn favoriete boeken:

1 De biografie van Leonardo Da Vinci van Walter Isaacson. Wees nieuwsgierig, denk visueel, geef nooit op, fantaseer.

2 *Liefde & Wiskunde* van de Russische wiskundige Edward Frenkel. Inhoudelijk wiskundige zaken worden afgewisseld met gebeurtenissen uit zijn persoonlijk leven.

3 *Het meten van de wereld* van Daniel Kehlman. Een roman over twee genieën: wiskundige Carl Friedrich Gauss en natuuronderzoeker/geograaf Alexander von Humboldt. Hun levensverhalen worden afwisselend beschreven.

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.

Jan van de Craats

Ik geef twee boekentips en een algemene internettip.

1 John Derbyshire (2004). *Prime Obsession – Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics,* Plume Books. Dit boek was een inspiratiebron toen Roland van der Veen en ik onze UvA-webklas *De Riemann-hypothese – Een miljoenenprobleem* organiseerden. De lesteksten van die webklas voor scholieren hebben we omgewerkt tot een Epsilon-boek met dezelfde titel.

2 John H. Conway, Heidi Burgiel and Chaim Goodman-Strauss (2008). *The Symmetries of Things,* A.K. Peters. Dit was de inspiratie bij het schrijven van mijn Epsilon-boek *Een passie voor symmetrie.*

3 De site *www.numberphile.com* van Brady Haran. De website *Numberphile* is een ware schatkamer van wiskundefilms, documentaires en internetcolleges.

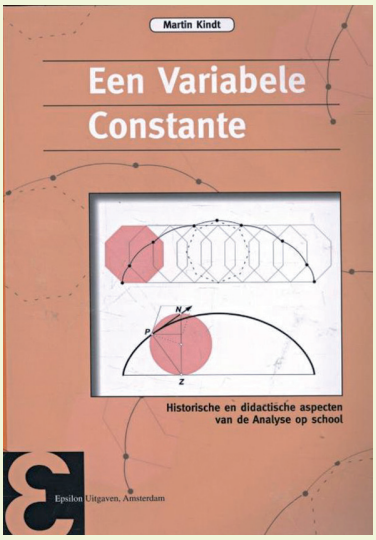
Ik wijs in het bijzonder op het college over de Riemann-hypothese van de Russisch-Amerikaanse wiskundige Edward Frenkel: *https://www.youtube.com/watch?v=d6c6ulyieoo*
Frenkel heeft ook een zeer lezenswaardig boek geschreven over onder andere zijn moeilijke jeugd als Jood in de Sovjet-Unie. De titel ervan is *Love and Math.*

Jan van de Craats is emeritus hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam.

Gerard Koolstra

Mijn tips zijn enigszins ingegeven door zorgen over de ontwikkeling van een nieuw wiskundecurriculum. Onderstaande boeken zouden kunnen zorgen voor enige achtergrondkennis.

1 Martin Kindt (2015). *Een variabele constante. Historische en didactische aspecten van de analyse op school* Epsilon Uitgaven. Een 100-jarige geschiedenis van de analyse in het voortgezet onderwijs, gevolgd door wiskundige, historische en didactische achtergronden van zes thema's, zoals discrete analyse, raaklijnen en analyse in combinatie met meetkunde.



2 David Didau (2019). *Making Kids Cleverer. A manifesto for closing the advantage gap.* Crown House Publishing Ltd. Een gedreven boek van een oud-leraar, waarin veel aandacht is voor feiten en mythes rond intelligentie en kennis. Beschrijft veel onderzoeken en theorieën. O.a. het concept 'krachtige kennis' (ontleend aan Meyer en Land) kan van pas komen bij het beantwoorden van de vraag welke wiskunde onderwezen zou moeten worden.

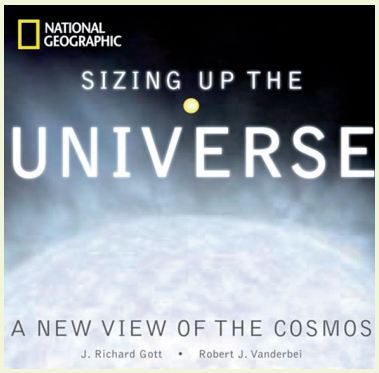
3 Roger Penrose (2019). *De weg naar de werkelijkheid.* Vertaling van *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of Universe.* Merlin uitgaven en Meromorf Press. Een monumentaal werk waarin o.a. de fundamentele rol van (vaak behoorlijk abstracte) wiskundige concepten uit de wiskunde in de moderne natuurkunde uitgebreid wordt behandeld.

Gerard Koolstra was veertig jaar wiskundedocent en is nu onder andere redacteur van de WiskundE-brief.

'WAT WISKUNDE JE VERTELT OVER INTERNETDATEN, DE IDEALE PARTNER, HET HUWELIJK EN NOG VEEL MEER'

Theo van den Bogaart

Tijdens zomeravonden op aardedonkere Franse campings raak ik altijd geïntrigeerd door de sterrenhemel. Mijn eerste tip is dan ook een rijk geïllustreerd non-fictieboek dat heel knap een beeld geeft van de idioot grote afmetingen van ons heelal.



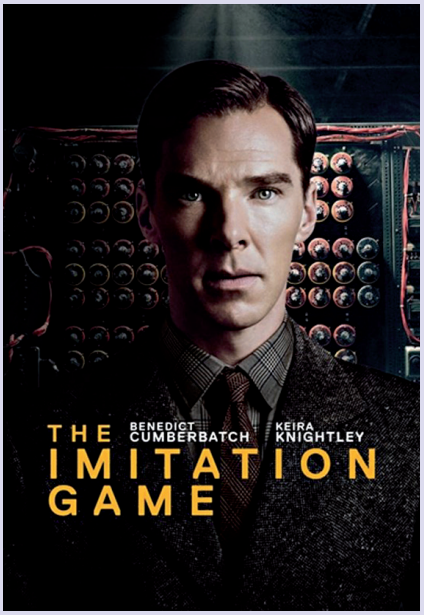
1 J. Richard Gott & Robert J. Vanderbei: *Sizing Up the Universe*
Het boek begint meteen goed met een vertederende foto van de eerste auteur waarop hij als tiener trots zijn zelfbedachte (en mij onbekende) 'gnomische projectie' tentoonstelt – en wordt daarna alleen nog maar beter.

2 En als we dan toch wegdromen tussen de sterren, kunnen we meteen overstappen op de betere science fiction. In deze rubriek moet ik dan natuurlijk wijzen op de klassieker Poul Anderson, *Tau Zero*. Bijzonder aan dit 'realistisch fantasieverhaal' is dat het helemaal draait om een wiskundige formule!

3 En om in het genre te blijven tot slot een minder bekende Spaanstalige film over de logische paradoxen van tijdreizen: *Timecrimes* (Los cronocrímenes).

Theo van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde voor het tweede- en eerstegraadsgebied aan de Hogeschool Utrecht.

Lonneke Boels



1 Film: *The Imitation Game*. Over de ontcijfering van Duitse berichten in de Tweede Wereldoorlog door wiskundige Alan Turing en de sociaal ongemakkelijke situaties waarin deze nerd vaak terechtkomt met zijn aandoenlijk onhandige acties. Ook: het dramatische einde van deze genie.

2 Serie: *Eureka* van Ionica Smeets en Sofie van den Enk. Een enorme schat aan wiskunde en haar toepassingen komen in deze vierdelige serie voorbij, waaronder: hoe vind je de ideale partner, hoe word je 100 en hoe statistiek levens heeft gered.

3 Boek: *Liefde volgens de wiskunde* van Hannah Fry. Wat wiskunde je vertelt over internetdaten, de ideale partner, het huwelijk en nog veel meer. Prima geschikt als voorleesboek voor 5 vwo, óók bij wiskunde C.

Lonneke Boels is wiskundedocent en doet promotieonderzoek naar het ontwikkelen van statistische gecijferdheid.

'OVER *LIEFDE VOLGENS DE WISKUNDE*: 'WAT WISKUNDE JE VERTELT OVER INTERNETDATEN, DE IDEALE PARTNER, HET HUWELIJK EN NOG VEEL MEER.'

KLEINTJE DIDACTIEK

BEWIJS ABC-FORMULE

Lonneke Boels

Onlangs vroeg ik me af of we het oplossen van kwadratische vergelijkingen niet op een andere manier moeten aanleren. Namelijk, door te starten met kwadraat afsplitsen als standaardtechniek en vandaaruit naar de *abc*-formule en mogelijk zelfs het bewijs daarvan. Het ontbinden in factoren krijgt dan veel later een plek. Pas als leerlingen dit echt nodig hebben omdat de *abc*-formule niet meer werkt of onhandig is, bijvoorbeeld bij specifieke typen hogeregraadsvergelijkingen die pas oplosbaar zijn als ze eerst zijn ontbonden in factoren, komt het ontbinden in factoren aan bod. In deze 'Kleintje didactiek' beantwoord ik de vraag of dit een betere volgorde is niet, want ik ben er zelf nog niet uit. Wat ik wel doe, is het bewijs geven voor de *abc*-formule omdat dat in sommige schoolboeken helaas ontbreekt.

En passant behandel ik ook enkele veelvoorkomende fouten van leerlingen.
De algemene vorm van een kwadratische vergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$. We herleiden dit via kwadraat afsplitsen. Zie de tabel.

Stap 2 is dus het meest kritisch; hierin worden de meeste fouten gemaakt. Stappen 3 – 7 worden door leerlingen doorgaans niet zo gemaakt omdat de getallen worden uitgerekend; alleen in het bewijs zijn dit uitgeschreven stappen.

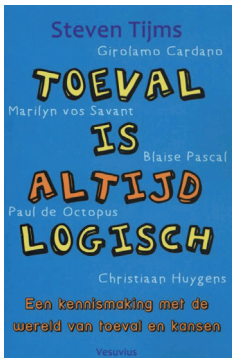
Wie dit bewijs in de klas behandelt, kan daarna ook veel duidelijker maken waarom de x-coördinaat van de top $-b/(2a)$ is en waar $D = b^2 - 4ac$ vandaan komt.

Stap	Formule	Fouten van leerlingen (maar dan met getallen ingevuld voor a, b en c)
1	$a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=0$	Haakjes niet op de juiste plek gezet. Of: $a(x^2+\frac{b}{a}x+c)=0$
2	$a\left(\left(x+\frac{1}{2}.\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0$	$a\left(x+\frac{1}{2}.\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a^2}+c=0$ of: $a\left(x+\frac{1}{2}.\frac{b}{a}\right)^2+c=0$ of: $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a^2}+c=0$
3	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$	Merk op dat bij een andere start bij stap 1, deze stap overbodig was geweest omdat deze al direct was gezet.
4	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$	n.v.t.
5	$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$	n.v.t.
6	$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{1}{4a^2}\cdot(b^2-4ac)}$	n.v.t.
7	$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$ Waarna de standaardvorm van de formule volgt.	$x=\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

BOEKBESPREKING

TOEVAL IS ALTIJD LOGISCH

Henk Reuling



Titel: Toeval is altijd logisch
Auteur: Steven Tijms
Uitgever: Vesuvius (2018)
ISBN: 978-90-8659-780-2, 218 pagina's, paperback
Prijs: € 19,95

Inleiding

De titel van dit boekje maakte mij meteen enthousiast, doordat de titel de woorden 'toeval' en 'logisch' bevat. Dit zijn twee begrippen die mij, als pilotdocent wiskunde C van het eerste uur, zeer nieuwsgierig maakten. Zou dit een boekje zijn die de twee domeinen 'E: Statistiek en kansrekening' en 'F: Logisch redeneren' van wiskunde C aan elkaar kon koppelen? Misschien een boek dat ik mijn leerlingen kan laten lezen in plaats van *De Telduivel*, voor een praktische opdracht? Of als basis voor een groepje leerlingen voor een profielwerkstuk bij wiskunde C? Of desnoods als (inspiratie)bron voor mijn lessen met de mogelijkheid deze twee schijnbaar losstaande domeinen aan elkaar te koppelen! Met grote nieuwsgierigheid en gretigheid ben ik aan dit boek begonnen. Al snel bleek dat mijn verwachtingen niet werden waargemaakt: het woord 'logisch' in de titel heeft niets te maken met het domein 'logisch redeneren'. Het heeft (slechts) de betekenis die het woord vaak in de dagelijkse wereld heeft: *het is te begrijpen*. Het boek probeert enkele gebeurtenissen en situaties in het dagelijks leven, waarbij kansrekening een rol speelt, te verklaren, of te 'ont-mythen'. Dus helaas, in dit boek trof ik geen dwarsverbanden aan tussen de twee domeinen uit het examenprogramma van wiskunde C.

In de inleiding staat: 'Dit boek is vrijwel zonder wiskundige formules en symbolen geschreven.
En de enige 'wiskunde' die je hoeft te beheersen, zijn de rekenkundige vaardigheden optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen.' Dat is dus een geheel andere insteek dan zijn vader Henk Tijms heeft gekozen in het boek *Kansrekening van alledag, een wereld vol verrassingen*. Daarna volgt een belofte: 'Trouwens, ook voor degenen die wel een wiskundige achtergrond bezitten, valt er nog wel het een en ander van dit boek op te steken.'

Geschiedenis van de kansrekening

De eerste helft van het boek heeft de titel 'De geboorte van de kansrekening'. Het is een chronologische greep van gebeurtenissen, anekdotes en ontwikkelingen in de geschiedenis van de kansrekening: het begint bij de Griekse oudheid, waar al gedobbeld werd met zogenaamde *astragali*: het springbotje afkomstig uit de enkels van schapen of geiten. Nu vond ik het wel erg jammer dat er hiervan geen afbeelding bij staat, maar gelukkig bestaat er zoiets als Google.
De Grieken dobbelden o.a. met vier astragali: de vier zijden hadden de waarden 1, 3, 4 en 6, waarbij de 3 tegenover de 4 en de 1 tegenover de 6 stonden. De hoogste worp was de Venus-worp, waarbij alle vier de astragali een verschillende waarde toonden. Ook wordt een dobbelspel voor geestelijken in de Middeleeuwen genoemd waarbij 'de 56 combinaties van een worp met drie dobbelstenen' werden gekoppeld aan evenzoveel deugden. En dat je naar verwachting meer dan 1650 worpen nodig had om deze allemaal te werpen, dus dat het wel een tijdje kon duren voordat alles was geworpen. Dit is de tweede teleurstelling: nergens in dit boek wordt gerekend en bijna geen enkele kans verklaard. Hoe groot zijn de genoemde kansen bij de vier astragali? Hoe kom je aan 56 combinaties bij drie dobbelstenen en die verwachtingswaarde van ruim 1650 worpen? Doordat er niets wordt berekend of verklaard, blijven er veel interessante inzichten achterwege. Bijvoorbeeld: is de kans op vier dezelfde aantallen bij het dobbelen met de vier astragali niet kleiner dan de Venus-worp met vier verschillende aantallen? Dat vind ik jammer.
In het eerste hoofdstuk komen zo allerlei stukjes geschiedenis van de wiskunde aan bod. Voor iemand die een beetje thuis is in de geschiedenis niet allemaal nieuw, maar zeker voor iemand die daar nog niet zoveel van weet, geeft dit deel veel nieuwe inzichten en verhalen die de lessen kunnen aankleden. Maar ik mis wel een plaatje hier en daar, bijvoorbeeld een tijdlijn.

Wet van de grote aantallen

In het eerste deel komt een belangrijk onderwerp uitgebreid aan de orde: *de wet van de grote aantallen*. Het

komt meerdere keren terug in het tweede deel en laat dan zien welke misverstanden deze wet op kan leveren of juist kan verklaren: de *logica* van de kansrekening gaat vaak regelrecht tegen onze intuïtie in.
Het tweede deel heeft als titel 'Toeval is altijd logisch'. Dit deel vond ik veel leuker om te lezen: het bevat een groot aantal onderwerpen uit de kansrekening uit het leven van alledag. Ik geef een onvolledige rij van onderwerpen die aan de orde komen om een idee te geven van de grote variatie: de waan van de gokker, toevallige reeksen, de illusie van de *hot hand* bij basketbal, hoe bijzonder zijn bijzondere gebeurtenissen, wet van de *enorme* grote aantallen, voorwaardelijke kansen, gebruik van kansrekening in de rechtszaal, drogreden van de aanklager, het verjaardagsprobleem en het probleem van de drie quizdeuren. Ik, als basketballiefhebber, heb met name het deel over de *hot hand* met grote interesse gelezen. In dit tweede deel maakt de auteur zijn belofte ruimschoots waar: ook voor de wiskundig geschoolde lezer valt hier heel wat te halen! Ook in het tweede deel komen regelmatig kansen of aantallen voor die mijns inziens om toelichting of een berekening vragen. Ik mis het overzicht: een grafiek, tabel, stroom- of boomdiagram, ... Ik vraag mij regelmatig af of een lezer die wiskundig niet voldoende geschoold is en voor wie de materie nieuw is, bij afwezigheid van dit alles het verhaal nog wel kan volgen. Er staat geen enkele afbeelding in het boek.

Conclusie

Is dit boek een aanrader? Jazeker! Het staat vol met anekdotes en voorbeelden uit het leven van alledag om je les mee op te fleuren. En het is misschien juist wél een prima boekje voor leerlingen met wiskunde A/C: ze worden in ieder geval niet afgeschrikt door het gebruik van wiskundige formules en symbolen. De afwezigheid van berekeningen biedt ook juist kansen voor gebruik in de les: ik kan de leerlingen leesopdrachten meegeven en de genoemde kansen en aantallen uit laten rekenen, of (als profielwerkstuk of praktische opdracht?) de ontbrekende appendix laten schrijven met alle berekeningen, afbeeldingen en diagrammen. Daar ga ik zeker nog eens over nadenken. Wel een tip voor een eventuele tweede druk: voeg hier en daar een afbeelding toe! En haal de veel te vele uitroeptekens weg! Hoe bijzonder sommige inzichten ook zijn, je moet niet bijna elke zin eindigen met een uitroepteken! Dat werkt erg storend bij het lezen! Bij mij in ieder geval wel!

Over de auteur

Henk Reuling is 28 jaar wiskundedocent op het Liemers College in Zevenaar. Als pilotddocent was hij betrokken bij de nieuwste programma's voor vwo wiskunde C en wiskunde B. Hij is daarnaast al vele jaren betrokken bij de Wageningse Methode als auteur en programmeur van wiskundeapplicaties, en is momenteel ook voorzitter van deze stichting. E-mailadres: *h.reuling@gmail.com*.
Website: *henkreuling.nl*

VERSCHENEN

PODCAST 'DE FASCINATIEVOLGER' DEEL 10: ERIC OPDAM

Titel: De Fascinatievolger Deel 10: prof. Dr. Eric Opdam
Uitgever: Meromorf Press
Beluisteren: https://soundcloud.com/user-864747685/

Als nieuwsgierigheid de motor is en fascinatie de richtingaanwijzer, waar kom je dan terecht?
In de Meromorf Press podcast interviewt Judith Lengkeek (*Verte Vertelling*) een serie wetenschappers over de rol die nieuwsgierigheid en fascinatie in hun werk speelt. Onder deze wetenschappers is ook een aantal wiskundigen, onder anderen Valentijn Karemaker, Peter Sloot, Ronald Westra, Janne Kool en Peter Stevenhagen. De doelen hiervan zijn om 1) wiskunde een gezicht te geven 2) op een toegankelijke wijze zuivere wiskunde te introduceren 3) jongeren, en met name meisjes, vertrouwen te geven dat wiskunde ook voor hen is weggelegd.

In deze editie, deel 10 alweer, een interview met Eric Opdam (Directeur Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, Universiteit van Amsterdam en senior onderzoeker bij Qusoft) over onder andere het Langlandsprogramma en zijn lezing op de Abelconferentie in Minneapolis, quantumcomputers, diversiteit in de wetenschap en symmetrie.

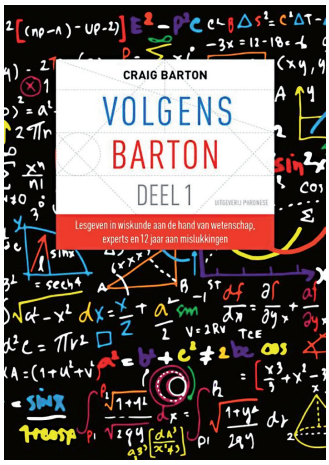
Alle vorige delen zijn terug te luisteren via de site van Meromorf Press: *http://www.meromorfpress.co.uk/Podcast/Podcast.html*

BOEKBESPREKING

VOLGENS BARTON

Dédé de Haan
Maarten Müller

Er is geen wiskundeleraar in Engeland die niet bekend is met Craig Barton sinds vorig jaar zijn boek *How I Wish I'd Taught Maths* verscheen naar aanleiding van zijn succesvolle podcastserie. De eerste zes (van de twaalf) hoofdstukken zijn door René Kneyber 'hertaald' naar de Nederlandse schoolsituatie. Dit boek wordt een rode draad in de komende jaargang. Nu eerst de recensie van Dédé de Haan en Maarten Müller, na de zomer volgt een interview met Craig Barton en vervolgens een serie artikelen van René Kneyber over docenten die met *Volgens Barton* aan de slag zijn gegaan.



Titel: Volgens Barton, deel 1
Auteur: Craig Barton
Vertaald en bewerkt: René Kneyber
Uitgever: Phronese (2019)
ISBN: 978-90-4463-683-3, 262 pagina's, paperback
Prijs: € 20,95

Inleiding

De ondertitel van het boek luidt *Lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts, en twaalf jaar aan mislukkingen*. Deze ondertitel refereert aan de worsteling die Barton heeft doorgemaakt. Barton beschrijft (met een flinke knipoog) in de inleiding van het boek wat hij – niet gehinderd door enige wetenschappelijke onderbouwing voor zijn manier van werken – allemaal al heeft bereikt in de eerste twaalf jaar van zijn carrière. Maar, zo beschrijft hij, 'de dag dat ik onderwijsonderzoek ging lezen, veranderde mijn leven'. Sindsdien heeft hij meer dan tweehonderd boeken en artikelen gelezen en meer dan honderd uur gesproken met experts. Deze gesprekken zijn deels terug te vinden op zijn website[1] in de vorm van podcasts.

Actueel thema

Volgens Barton past perfect in deze tijd waarin didactische uitgangspunten ter discussie worden gesteld. Moet je je puur richten op vakinhoud of is die vakinhoud slechts een middel om bepaalde vaardigheden (zoals probleem oplossen) onder de knie te krijgen? Moet je beginnen bij de context, moet je contextloos beginnen of hebben contexten zelfs helemaal geen plaats in het wiskundeonderwijs? Moet je leerlingen voordoen hoe het moet en ze net zo lang laten oefenen tot zij het ook kunnen of moet je ze zelf laten ontdekken hoe de wiskunde in elkaar steekt? Allemaal vragen die soms leiden tot heftige discussies, waarbij de emoties hoog op kunnen lopen, en die polariserend kunnen werken, omdat daarbij vaak aan de onderliggende vraag voorbij wordt gegaan: wat is wiskunde, en wat wil je bereiken met wiskundeonderwijs?

Als je deze vraag hebt beantwoord, kun je je vervolgens afvragen: hoe doe ik dat dan? *Volgens Barton* geeft op die vraag ook niet echt antwoord. Dat neemt echter niet weg dat er een hoop onderwerpen de revue passeren die aanleiding geven zelf over bovengenoemde vraag na te denken en met anderen in gesprek te gaan.

Structuur, structuur, structuur,...

Het boek heeft een heldere structuur en leest lekker weg. Het begint met een inleiding met daarin een lijst met 'Tien dingen die ik vroeger geloofde'. In de twaalf hoofdstukken die hij schrijft heeft elke paragraaf dezelfde inhoud met als kopjes: 'Wat ik vroeger dacht', 'Inspiratiebronnen', 'Wat ik er van opstak' en 'Wat ik nu doe'. Onder het kopje 'Wat ik er van opstak' beschrijft Barton wat hij geleerd heeft door zijn onderzoek. Door de heldere structuur en het opknippen in stukjes die los van elkaar zijn te lezen, pak je het boek snel op om weer een paragraaf te lezen en kun je even later zo weer verder lezen zonder de draad van het verhaal kwijt te zijn. Verder is het ook lekker luchtig geschreven. Hierna een kort fragment:

Ik: "Hoeveel is 1/3 + 1/5 ?". Een leerling uit de examenklas (na elf jaar op school te hebben gezeten, waarvan in zeker zes jaar breuken behandeld zijn, waarvan drie door mijzelf): "2/8".
Zodra ik me realiseer dat ze geen grapje maakt, sterf ik een beetje van binnen.

Rode draad?

Hoewel je, ook volgens de auteur, met ieder hoofdstuk zou kunnen beginnen, heeft hij niet voor niets voor de opbouw gekozen die het boek uiteindelijk heeft gekregen. Hij verwijst vaak naar onderwerpen die in eerdere hoofdstukken naar voren komen.
Zoals hierboven al is verklapt: het boek begint *niet* met een visie op wiskunde en op wiskundeonderwijs. Het begint met 'Hoe leerlingen nadenken en leren' (hoofdstuk 1), 'Motivatie' (hoofdstuk 2), 'Het denken richten' (hoofdstuk 4), waarbij veel kennis van hoe het brein werkt duidelijk uitgelegd wordt aan de hand van literatuur en vertaald wordt naar wat dat betekent voor wiskundeonderwijs.
Ook een hoofdstuk over 'Expliciete instructie' (hoofdstuk 3), en één over 'Uitleggen-aan-jezelf' (hoofdstuk 5).
Verder vier hoofdstukken over oefenen en het gebruik van voorbeelden, onder andere 'Uitgewerkte voorbeelden optimaal benutten' (hoofdstuk 6), een hoofdstuk over 'Problem-solving and independence', over 'Formative assessment and diagnostic questions' en het laatste hoofdstuk, hoofdstuk 12, gaat over 'Long-term memory and desirable difficulties'.
Vanwege de vaste structuur, de lichte toon, de humor en de concrete voorbeelden is het een ontzettend fijn boek om direct toe te kunnen passen - zeker omdat je je gesteund voelt door literatuur. Het mooie is ook nog: iedereen kan er wel iets uithalen wat hem of haar bevalt. De literatuurverwijzingen geven wellicht wel een te groot gevoel van zekerheid. Iemand anders kan het tegenovergestelde beweren en daar ook literatuur bij vinden. Het ontbreken van een beschrijving van de visie van Barton is de kracht, en tegelijkertijd de zwakte van het boek.

Bartons visie

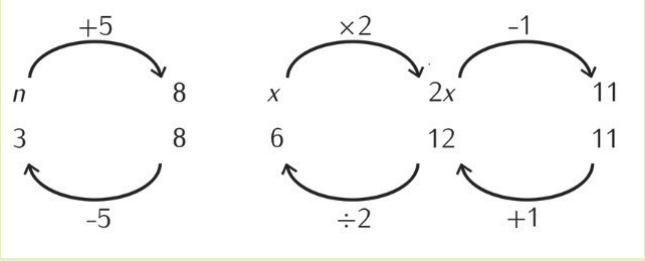
Barton beschrijft hoe hij ondanks alles wat hij fout deed, toch al een 'behoorlijk succesvolle leraar' wiskunde was. Kennelijk doet een goede docent, ook als er geen wetenschappelijke onderbouwing is voor zijn handelen, op intuïtie al heel erg veel goed. Zijn leerlingen haalden goede resultaten; er is dus niet maar één weg naar succes.
Hij vindt het, achteraf gezien, heel erg dat hij dat allemaal niet kon onderbouwen met literatuur.
Het lijkt echter alsof hij niet op zoek is gegaan naar literatuur die de keuzes die hij eerst maakte, onderbouwt; hij heeft allerlei andere literatuur erbij gehaald waardoor hij zo'n beetje alles onderuit haalt, wat hij eerst deed, en waar iedereen (inspectie, leerlingen, hijzelf) tevreden over was. Dat is natuurlijk interessant, want wat je doet in de klas heeft toch vooral te maken met je visie op wat wiskunde is en wat je wilt bereiken met de leerlingen.
Als we de verschillende visies op wiskunde op een schaal zetten tussen twee uitersten, dan kunnen we aan de ene (zeg linker)kant een visie onderscheiden waarbij wiskunde als een puur formeel deductief systeem wordt opgevat. Binnen deze visie is het zo dat alle wiskunde in feite al bestaat, maar dat sommige delen nog ontdekt moeten worden. We leren onze leerlingen dan zo veel mogelijk van alles wat we al weten, zodat ze daarmee aan de slag kunnen gaan. De nadruk zal hierbij meer liggen op vaardigheden oefenen en algoritmes toepassen.
Aan de andere (zeg rechter)kant van de schaal wordt wiskunde gezien als een bouwwerk dat we zelf maken. Telkens als we erachter komen dat hetgeen we nu kennen leidt tot conflictsituaties, zoeken we naar een passende oplossing en veranderen we de wiskunde, zodat de verschillende blikken op de wiskunde met elkaar in overeenstemming komen of dat ze elkaar in ieder geval gaan versterken. Bij deze visie past het meer om de leerlingen wiskunde als activiteit te laten ervaren, waarin zij zelf ervaren hoe dit proces van bouwen aan wiskunde in zijn werk gaat. De nadruk zal daarbij meer liggen op het doorzien van ideeën en structuren.
De meeste mensen zitten niet bij een uiterste op de beschreven schaal, maar pakken van beide visies wat en combineren dat met elkaar. Het lijkt of Barton zijn visie op basis van alle onderzoek behoorlijk bijstelt. Waar hij eerst meer aan de rechterkant zat, schuift hij een stuk naar links. Barton doet hier echter geen expliciete uitspraken over, maar misschien wil hij het ook liever zo objectief mogelijk houden en zijn persoonlijke visie niet betrekken bij het geheel.
Als het boek kritisch gelezen wordt, is dit geen enkel

probleem, maar wie volledig vertrouwt op de autoriteit van Barton, doet zichzelf tekort. Zie het als een uitnodiging met elkaar het gesprek aan te gaan over je eigen visie en die van je collega's. Hieronder een voorbeeld om te laten zien hoe je visie je keuzes kan beïnvloeden.

Omgekeerde pijlenketting of toch liever niet?

In een paragraaf met als titel 'Methoden die blijven' beschrijft Barton 'wat hij vroeger dacht' over het oplossen van een bepaald type eerstegraads vergelijking: 'Ik denk aan een getal, ik tel er 5 bij op, en dan krijg ik 8. Met welk getal ben ik begonnen?' Zijn leerlingen konden hem zelf uitleggen dat het antwoord 3 is, omdat je 5 van 8 moet aftrekken. Hij schreef dit vervolgens voor ze in een schema, een 'omgekeerde pijlenketting' zoals wij dat ook als strategie in ons wiskundeonderwijs kennen:

'Het mooie aan deze aanpak (althans, dat vond ik) was dat ze complexere problemen op een soortgelijke manier konden oplossen. Bijvoorbeeld: ik denk aan een getal, ik vermenigvuldig met 2, trek er 1 van af, en ik krijg dan 11. Dit werd dan $2x - 1 = 11$, dat we konden oplossen door het volgende diagram te gebruiken (zie figuur 1).



figuur 1

Aan het einde van de les konden mijn brugklasleerlingen zelfs de volgende formule oplossen – een formule op examenniveau, zoals ik ze trots meedeelde:

$$\frac{4(2x-3)}{5}+6=10$$

Mijn leerlingen hadden veel vooruitgang geboekt, algebra was niet langer eng, en ze beheersten nu zelfs een methode die gebruikt kon worden om vergelijkingen te herschikken. Het was precies deze les die me de beoordeling 'uitmuntend' had opgeleverd tijdens mijn eerste inspectiebezoek, toen ik nog maar net begonnen was met lesgeven. Applaus voor jezelf! Ik had dat lesgeven al binnen een paar maanden onder de knie.
De enige domper in het feestgedruis was dat mijn leerlingen geen idee hadden hoe ze vergelijkingen als $5 - x = 3$ of $3x - 2 = x + 4$ konden oplossen, maar ach, deze vergelijkingen zouden ze pas volgend jaar tegenkomen, dus waarom zou ik me daar nu al druk over maken?
Volgens Barton, p. 43

Bartons 'Wat ik er van opstak' is, kort samengevat: als je het laatste type vergelijking wilt oplossen, dan zul je een andere strategie moeten gebruiken (de balansmethode, bijvoorbeeld). Dan heb je twee opties: of je 'verlaat het pad' van de omgekeerde rekenpijlen (wat leerlingen niet zullen willen, want dat is immers een gemakkelijke methode):

'Of je geeft ze een complexe set regels om te bepalen wanneer ze welke oplossingsmethode moeten toepassen, wat er in feite op neerkomt dat ze voor elke variatie een ander schema moeten ontwikkelen, en zo ontwikkelt wiskunde zich dus tot een onsamenhangend samenraapsel van betekenisloze regeltjes, precies zoals veel volwassenen en leerlingen wiskunde beschouwen. Beide benaderingen zijn niet erg kansrijk, en dat is ongetwijfeld geheel en al mijn schuld.
Volgens Barton, p. 46

Iemand die de visie van het formeel deductieve systeem aanhangt, zal het onmiddellijk met Barton eens zijn dat je veel beter meteen kunt kiezen voor de balansmethode. Waarom zou je allerlei inferieure strategieën leren, als er ook een methode is die altijd werkt? De personen die zich op de beschreven schaal meer aan de rechterkant bevinden, zouden tegen kunnen werpen dat een stuk begrip over waarom deze (soms) omslachtige methode geleerd moet worden, verloren gaat. Het proces van een methode kennen, erachter komen dat hij niet altijd werkt en op zoek gaan naar alternatieven, wordt door hen gezien als een essentieel proces, dat leerlingen door moeten maken, waarbij je leerlingen leert om eerst goed te kijken naar wat je weet, om op visuele kenmerken te letten, zodat ze 'symbol sense' ('gevoel voor symbolen', de algebraïsche tegenhanger van 'gevoel voor (de grootte van) getallen') ontwikkelen. Een aanvullende vraag die gesteld kan worden is of het voldoende is één methode te kennen die altijd werkt of dat het belangrijk is in verschillende situaties verschillende aanpakken te kunnen gebruiken. Wat gebruik je bijvoorbeeld voor het oplossen van $(x - 1)(x + 3) = 0$? Die ene methode die altijd werkt?
Al dit soort vragen worden in het boek niet beantwoord. Hier geldt dus nogmaals dat kritisch lezen noodzakelijk is en dat, als dit gedaan wordt, dit boek kan leiden tot prachtige gesprekken tussen collega's.

Diagnostische vragen, een voorproefje op deel 2

Een ander punt waarop het boek van Barton actueel is, is dat het aansluit bij de ontwikkeling van formatief evalueren. Op veel scholen wordt gesproken over formatief evalueren, maar concrete handvatten zijn niet

altijd voorhanden en veel docenten weten nog niet goed hoe ze het aan moeten pakken. Barton maakt het heel concreet door zijn zogenaamde *low stake quizes* te introduceren. Hij begint elke les met een quiz, die bestaat uit een aantal *diagnostic questions*, die hij met verschillende doelen inzet. Een belangrijk doel is het ophalen van voorkennis voor aanvang van de nieuwe uitleg.
Als je een nieuw stuk stof introduceert, bouwt dit altijd voort op voorkennis. Is die voorkennis niet aanwezig, dan wordt deze impliciet herhaald bij de uitleg, maar dit zorgt voor overbelasting van het werkgeheugen bij de leerlingen die deze voorkennis eigenlijk niet hebben. Om te voorkomen dat je alle voorkennis met de hele klas gaat ophalen, begin je met het stellen van een aantal vragen om vast te stellen wat de leerlingen weten en wat ze nog niet weten. Zo kun je heel gericht zorgen dat alle leerlingen klaar zijn voor de nieuwe uitleg. Het hébben van goede diagnostische vragen, kan je uitleg dus stukken effectiever maken. Het máken van goede diagnostische vragen, zorgt dat je heel goed nadenkt over hoe de lesstof in elkaar zit.
Een goede diagnostische vraag moet aan een aantal kenmerken voldoen, volgens Barton. Een van deze kenmerken is dat elk antwoord een misconceptie bloot moet leggen. Een mooi voorbeeld is de vraag:

'Welk getal is een factor van 27?' met de keuze antwoorden
A. 7 B. 13,5 C. 54 D. 3

Wellicht is het mooiste van de vragen nog niet eens dat je ze stelt, maar dat je samen met je collega's nadenkt over welke vragen gesteld moeten worden en welke keuzeantwoorden nodig zijn. Om de vraag 'welke vragen nodig zijn' te kunnen beantwoorden, moet je overzicht hebben over de didactische leerlijn. Om de vraag 'welke keuzeantwoorden nodig zijn' te kunnen beantwoorden, moet je weten welke fouten leerlingen maken. Kortom: een prachtige intercollegiale activiteit. Volgens Barton de meest nuttige die er bestaat.

> 'HET HEBBEN VAN GOEDE DIAGNOSTSCHE VRAGEN, KAN JE UITLEG DUS STUKKEN EFFECTIEVER MAKEN'

Afsluitend

Het boek is, door de praktische toepasbaarheid en door de manier waarop het geschreven is, heerlijk om te lezen, én, zoals we hierboven hebben beschreven, mooie gespreksstof voor in de sectie.
Er staan echt pareltjes in: naast de diagnostische vragen die we hierboven noemden is er bijvoorbeeld het hoofdstuk over 'Uitleggen-aan-jezelf', waarbij leerlingen hardop aan zichzelf uit moeten leggen welke stappen ze waarom maken bij het oplossen van vraagstukken, en heel veel over het leren door voorbeelden.
Je wenst toch iedere leerling een wiskundedocent toe die blijft nadenken over zijn onderwijs: het gaat hier om een wiskundedocent die al twaalf jaar lesgeeft, maar die door het lezen van onderwijsonderzoek en het praten met wetenschappers zijn onderwijs veranderd, en daar een ontzettend leesbaar boek over schrijft, waarin hij al zijn inzichten bruikbaar opschrijft. Waak echter voor de valkuil waar Barton zelf af en toe in trapt: blijf kritisch op wat je leest, en redeneer vanuit de doelen die je wilt behalen met je wiskundeonderwijs, met de leerlingen die je voor je hebt.

Noot

[1] *http://www.mrbartonmaths.com*

Over de auteurs

Dédé de Haan is werkzaam als lerarenopleider wiskunde aan NHLStenden Hogeschool in Leeuwarden en Groningen en als ontwikkelaar van wiskundeonderwijs bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo en lid van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde van curriculum.nu.

TWAALF BEKERTJES KLEUREN

Simon Biesheuvel
Harm Bakker

Het artikel 'Met 130 leerlingen op excursie' (*Euclides* 94-3) eindigde met een oproep van Simon Biesheuvel om mee te denken over een opgave uit *Moderne Wiskunde* die de gemoederen van hem en zijn collegae al jaren bezighield. Een oproep met succes: ze zijn er uit.

Ik heb een stapel van twaalf bekertjes die ik in zes verschillende kleuren wil kleuren waarbij elke kleur twee keer voorkomt. Twee opeenvolgende bekertjes mogen niet dezelfde kleur krijgen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er?
Deze vraag komt uit *Moderne Wiskunde*, hoofdstuk 1 voor klas V4 wiskunde A/C.

Mijn eigen oplossing

Ik heb eerst het probleem 'verkend'. Toen leek een boom, althans een deel ervan een goed idee, maar dat werd toch al snel erg lastig, te veel splitsingen en dat twaalf keer! Dus bedacht ik een ander plan. Voor het gemak noem ik de kleuren 1 t/m 6. Ik begin met de kleuren 1 en 2 (begin klein en breid dan uit: tip van collega Izaak). De stapel geef ik horizontaal weer, dat typt eenvoudiger.
Twee kleuren: twee mogelijkheden: 1212 en 2121
Drie kleuren: .1.2.1.2. en .2.1.2.1. met op de puntjes twee keer een 3, maar niet twee 3-en op een puntje.
Dus: kies uit de vijf puntjes er twee en plaats daar een 3.
Dat kan op $\binom{5}{2}$ manieren.

Drie kleuren hebben dus $2 \times \binom{5}{2} = 20$ mogelijkheden,
vier kleuren $2 \times \binom{5}{2} \times \binom{7}{2} = 420$ mogelijkheden,
zes kleuren $2 \times \binom{5}{2} \times \binom{7}{2} \times \binom{9}{2} \times \binom{11}{2} = 831600$
mogelijkheden.

Makkie, als je tenminste op het idee van 'klein beginnen en uitbreiden' komt. Trots heb ik dit rondgestuurd naar mijn collega's. Die waren er drie jaar geleden niet uitgekomen en een van die collega's was er laatst weer over begonnen.
Maar... na twee dagen (trots zijn) bedacht ik dat 1221 (fout bij twee kleuren) uitgebreid kan worden tot 312321 met drie kleuren en die is goed! Die had ik dus niet meegeteld. Helaas, het probleem levert dus veel meer mogelijkheden op.
Toen opperde Izaak: zou het kunnen met alle mogelijkheden tellen (ook twee opeenvolgende bekertjes met dezelfde kleur) en de verkeerde mogelijkheden ervan afhalen?
Hieronder volgt mijn oplossing en die is zo ingewikkeld, dat ik benieuwd ben of iemand een fout kan ontdekken in mijn berekening, of misschien zelfs een slimmere methode weet.

— Kleur 1 geeft $\binom{12}{2}$ mogelijkheden. Dan blijven er tien bekertjes over. Voor kleur 2 zijn er dan $\binom{10}{2}$ mogelijkheden, enzovoort.
Totaal is dat $\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$.
Deze uitkomst noem ik A.

— Daar moeten de mogelijkheden met kleur 1 volgend op kleur 1 weer af. Plak die 1 en 1 aan elkaar, dan heb ik 11, 2, 2, 3, 3 enz. dus elf 'dingen'. Dat geeft

$\binom{11}{1}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ mogelijkheden.

Dit gaat ook voor de kleur 2 en de kleur 3 enzovoort. Dus zes keer moet dit eraf.

De uitkomst $-6\cdot\binom{11}{1}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ noem ik *B*.

— De mogelijkheid dat 11 en ook 22 opeenvolgend zijn heb ik er nu twee keer afgehaald. Die moet er weer een keer bij. Dat zijn $\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{1}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ mogelijkheden.
Dit geldt ook voor 11 en 33 en ook voor 44 en 66 enzovoort. Uit zes kleuren een tweetal kiezen kan op $\binom{6}{2}$ manieren.
Totaal is dat $\binom{6}{2}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{1}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ en dit noem ik *C*.

— De mogelijkheid dat 11 en 22 en ook 33 opeenvolgend zijn heb ik er nu bij *B* drie keer afgehaald en bij *C* weer $\binom{3}{2} = 3$ keer bijgeteld (11 en 22 maar ook 11 en 33 maar ook 22 en 33). Die moet er dus weer een keer af. Dit is $\binom{9}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ maar drie dubbele kleuren van 6 kleuren kan op $\binom{6}{3}$ manieren.
Totaal wordt dit $-\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ en dit noem ik *D*.

— De mogelijkheid dat 11 en 22 en 33 en ook 44 opeenvolgend zijn heb ik er nu bij *B* vier keer afgehaald en bij *C* weer $\binom{4}{2} = 6$ keer bijgeteld. En bij *D* $\binom{4}{3} = 4$ keer eraf gehaald. Die moet er weer een keer bij. (want $-4+6-4\mathbf{+1} = -1$ en hij moet er inderdaad af, dus de uitkomst moet -1 worden)
Dit is $\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ maar vier dubbele kleuren van zes kleuren kan op $\binom{6}{4}$ manieren.
Totaal wordt dit $\binom{6}{4}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ en dit noem ik *E*.

— De mogelijkheid dat 11 en 22 en 33 en 44 en ook 55 opeenvolgend zijn heb ik er nu bij *B* vijf keer afgehaald en bij *C* weer $\binom{5}{2} = 10$ keer bijgeteld. En bij *D* $\binom{5}{3} = 10$ keer eraf gehaald. En bij *E* weer $\binom{5}{4} = 5$ keer bijgeteld. Die moet er weer een keer af. (want $-5+10-10+5\mathbf{-1} = -1$ en hij moet er inderdaad af)
Dit is $\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}$ maar vijf dubbele kleuren van zes kleuren kan op $\binom{6}{5}$ manieren.
Totaal wordt dit $-\binom{6}{5}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}$ en dit noem ik *F*

— Nu moeten alleen 11 en 22 en 33 en 44 en 55 en ook 66 nog bekeken worden. Die mogelijkheid heb ik er nu bij *B* zes keer afgehaald en bij *C* weer $\binom{6}{2} = 15$ keer bijgeteld. En bij *D* $\binom{6}{3} = 20$ keer er afgehaald. En bij *E* weer $\binom{6}{4} = 15$ keer bijgeteld. En bij *F* weer $\binom{6}{5} = 6$ keer afgehaald. Die moet er weer een keer bij. (want $-6+15-20+15-6\mathbf{+1} = -1$ en hij moet er inderdaad af)
Zes dubbel kleuren van zes kleuren kan op 6! manieren. Dit noem ik getal *G*.

(of $+1\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}$).

Het antwoord op de vraag is dus $A + B + C + D + E + F + G = 7484400 - 7484400 + 3402000 - 907200 + 151200 - 15120 + 720 = 2631600$ mogelijkheden.

De oplossing van Harm Bakker

Geachte heer Biesheuvel, beste Simon,

Dank voor je leuke artikel in *Euclides* 94-3 en de uitdaging die je aan het eind van het artikel het land instuurt. Als (mede-)auteur van het telhoofdstuk in *Moderne Wiskunde* (11e editie) kan ik het natuurlijk niet laten om op je uitnodiging in te gaan.
Het formuleren van zo'n opgave is niet zo moeilijk. En als je niet direct ook een uitwerking maakt, kun je je enorm vergissen in de moeilijkheidsgraad. En dat is hier gebeurd. Helaas heeft de uitwerkingenmaker de opgave niet goed geïnterpreteerd en daardoor niet aan de bel getrokken, met als gevolg dat er een veel te lastige opdracht in het boek terecht is gekomen.
Tot zover de geschiedenis. Maar daar kan het natuurlijk niet bij blijven. Je schrijft dat je een antwoord hebt gevonden en dat je (redelijk) zeker bent van je resultaat. Mijn hoogste doel is om die latente onzekerheid weg te nemen. Ik probeer op twee manieren het juiste antwoord te produceren. De tweede manier laat zich ook redelijk eenvoudig generaliseren.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$cp(n)$	1	0	2	30	864	39480	2631600	241133760

tabel 1 Computerresultaten

Formulering van het telprobleem

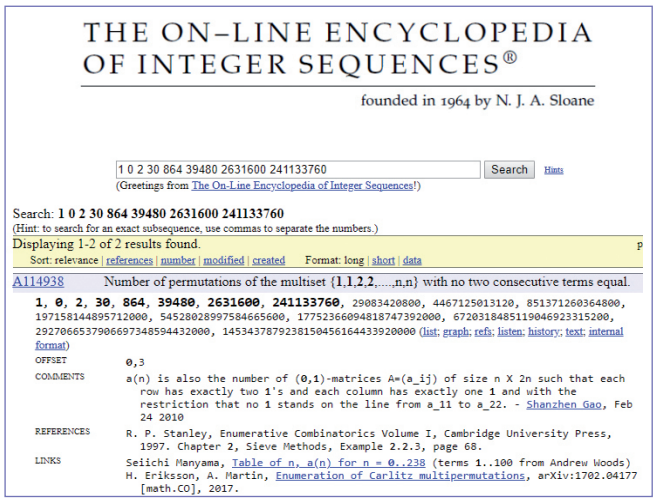
De opgave in het boek is geformuleerd in termen van een geordend rijtje kleuren. Maar voor het vervolg is het makkelijker om te praten over getallen. We vragen naar het aantal verschillende permutaties van de getallen 1, 1, 2, 2, ..., n, n waarin twee opeenvolgende elementen verschillend zijn. Zo'n permutatie heet (ben ik deze vakantie achtergekomen) een *Carlitz-permutatie van de multiset* ⟨1, 1, 2, 2, ..., n, n⟩. Laten we dit aantal noteren met $cp(n)$. De opgave vraagt dus om $cp(6)$ te bepalen.

Methode 1: Brute kracht

Als nadenken te lastig of te foutgevoelig is, dan wil het schrijven van een programmaatje nog wel eens uitkomst bieden. Met behulp van een redelijk standaard backtracking algoritme zijn alle Carlitz-permutaties te genereren. Tellen is dan eenvoudig geworden. Het resultaat staat in tabel 1.
Dit zou een einde moeten maken aan je eventuele onzekerheid. Of het slaat een deukje in je zelfvertrouwen, maar dat kan ik me nauwelijks voorstellen.

Encyclopedie

Ken je The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (*https://oeis.org*, zie figuur 1)? Een geweldige site. Als je het beginstuk van een rij hebt, dan levert deze site je vast een heleboel informatie over de rest van de rij, over contexten waarin deze rij opduikt, directe formules en recurrente betrekkingen. Het feit dat deze site de getallen uit tabel 1 herkent en weet voort te zetten geeft mij de overtuiging dat mijn uitwerking van het algoritme correct is.



figuur 1 The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Methode 2: Redeneren

Een programma levert het juiste antwoord. Maar je wordt er niet veel slimmer van. Sowieso vraagt het genereren van alle (Carlitz-)permutaties voor wat grotere waarden van n veel te veel rekentijd. $n = 6$ is nog wel te doen, maar veel groter moet het (op mijn machine) niet worden. Het valt (mij althans) niet mee om in één keer het aantal Carlitz-permutaties te berekenen. Maar het lukt wel met een aantal tussenstappen. Het is niet moeilijk om het aantal (gewone) permutaties van de multiset ⟨1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6⟩ te berekenen. Dat gaat min of meer standaard: $12!/(2!)^6$. Maar daar zitten ook permutaties bij waar opeenvolgende elementen wél gelijk zijn. Ik noem twee gelijke elementen die naast elkaar staan een dubbel. Een Carlitz-permutatie is dus een permutatie met nul dubbels. We beginnen met het makkelijkste geval (zes dubbels) en werken toe naar nul dubbels. Als we daar zijn, dan zijn we er.
Laat nu $p(k)$ het aantal permutaties van ⟨1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6⟩ zijn waarbij de eerste k cijfers dubbels vormen en de andere cijfers losse. Bijvoorbeeld $p(4)$ is het aantal Carlitz-permutaties van de acht symbolen ⟨11; 22; 33; 44; 5; 5; 6; 6⟩. Merk op dat $cp(6) = p(0)$.

Zes dubbels

Een permutatie van ⟨1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6⟩ met zes dubbels is in feite een (gewone) permutatie van de zes (verschillende) symbolen 11; 22; 33; 44; 55; 66.
En dat zijn er $6! = 720$. Dus $p(6) = 720$. (1)

Vijf dubbels

Met 6 als los getal berekenen we het aantal Carlitz-permutaties. We hebben nu de zeven symbolen 11; 22; 33; 44; 55; 6; 6. Het aantal permutaties van deze symbolen is $7!/2! = 2520$.
Maar daar zitten ook de permutaties bij waar de twee zessen naast elkaar staan, ofwel de
permutaties met zes dubbels. Maar dat aantal hadden we al berekend: $p(6) = 6! = 720$.
Dus $p(5) = 7!/2! - p(6) = 1800$. (2)

Vier dubbels

Met 5 en 6 als losse getallen berekenen we het aantal Carlitz-permutaties. We hebben nu de acht symbolen 11; 22; 33; 44; 5; 5; 6; 6. Het aantal permutaties van deze symbolen is $8!/(2!)^2 = 10800$. Maar daar zitten ook de permutaties bij waar de twee 6-en en/of de twee 5-en naast elkaar staan.

Maar die aantallen hebben we al berekend:

— twee 5-en naast elkaar; de 6-en los: $p(5) = 1800$ (zie 2).
— twee 6-en naast elkaar; de 5-en los: dit zijn er natuurlijk net zoveel als de 5-en dubbel en de 6-en los, dus ook $p(5) = 1800$.
— zowel de 5-en als de 6-en dubbel: $p(6) = 720$ (zie 1).

Zo komen we op

$p(4) = 8!/(2!)^2 - 2 \cdot p(5) - p(6) = 5760.$ (3)

Drie dubbels

Met 4, 5 en 6 als losse getallen berekenen we het aantal Carlitz-permutaties. We hebben nu de negen symbolen 11; 22; 33; 4; 4; 5; 5; 6; 6. Het aantal permutaties van deze symbolen is $9!/(2!)^3$. Maar daar moeten er weer een aantal vanaf:

— de permutaties waarbij één van de cijfers 4, 5 of 6 een dubbel vormt (en de anderen niet). Dat zijn er $\binom{3}{1} \cdot p(4)$.
— de permutaties waarbij twee van de cijfers 4, 5 of 6 een dubbel vormen (en de andere niet). Dat zijn er $\binom{3}{2} \cdot p(5)$.
— de permutaties waarbij de cijfers 4, 5 en 6 alle drie een dubbel vormen. Dat zijn er $\binom{3}{3} \cdot p(6)$.

Zo komen we tot

$p(3) = 9!/(2!)^3 - \binom{3}{1} \cdot p(4) - \binom{3}{2} \cdot p(5) - \binom{3}{3} \cdot p(6) = 21960.$ (4)

Twee dubbels

Het patroon is inmiddels wel zo'n beetje duidelijk. Bij de tien symbolen 11; 22; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6 eerst maar weer alle permutaties: $10!/2^4$. En daar vanaf halen:

— één van de vier symbolen 3, 4, 5 of 6 dubbel: $\binom{4}{1} \cdot p(3)$.
— twee van de vier symbolen 3, 4, 5 of 6 dubbel: $\binom{4}{2} \cdot p(4)$.
— drie van de vier symbolen 3, 4, 5 of 6 dubbel: $\binom{4}{3} \cdot p(5)$.
— alle vier de symbolen 3, 4, 5 en 6 dubbel: $\binom{4}{4} \cdot p(6)$.

Samen $p(2) = 10!/2^4 - (\binom{4}{1} \cdot p(3) + \binom{4}{2} \cdot p(4) + \binom{4}{3} \cdot p(5) + \binom{4}{4} \cdot p(6)) = 96480.$ (5)

Eén dubbel

Maar in één keer:

$p(1) = 11!/2^5 - (\binom{5}{1} \cdot p(2) + \binom{5}{2} \cdot p(3) + \binom{5}{3} \cdot p(4) + \binom{5}{4} \cdot p(5) + \binom{5}{5} \cdot p(6)) = 47808.$ (6)

Nul dubbels

Dan nu waar het om gaat:

$cp(6) = p(0) = 12!/2^6 - (\binom{6}{1} \cdot p(1) + \binom{6}{2} \cdot p(2) + \binom{6}{3} \cdot p(3) + \binom{6}{4} \cdot p(4) + \binom{6}{5} \cdot p(5) + \binom{6}{6} \cdot p(6)) =$

2631600. (7)

Generalisatie

Het is aardig om op een systematische manier een opgave op te lossen, maar het wordt pas écht leuk als daaruit ook een algemeen patroon valt af te leiden, zodat ook grotere versies van het probleem effectief (en efficiënt) zijn door te rekenen. Laat nu $p(n; k)$ = het aantal Carlitz-permutaties van de multiset $\langle 11, 22, ..., k, k, k+1, k+1, ..., n, n \rangle$. Dan voldoet dit aan de recurrente betrekkingen:

— $p(n; n) = n!$
— voor $0 \leq k < n$:
$p(n; k) = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}} - \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} \cdot p(n, k+i)$ en
$cp(n) = p(n; 0)$.

Alternatieven

In het op de site van de Encyclopedia aangegeven artikel van Eriksson en Martin worden twee andere aanpakken beschreven. De inclusie-exclusie-methode lijkt veel op wat hiervoor is beschreven. Ze doen het iets anders en komen dan tot een (gesloten) uitdrukking met een (ingewikkelde) sommatie. Uiteindelijk verschilt de uitwerking dan niet zoveel van mijn implementatie. De aanpak met geordende permutatiepatronen is uitermate elegant. Dat bedenk je (ik althans) niet zelf...

Nog meer oplossingen

Ook Adrie Scheepers (Cambium College, Zaltbommel), Frans 't Sas (Helmond), Bert Smid (Almere) en Paul Dillo komen met verschillende oplossingen. Je treft ze aan op de website, alsmede een nog iets uitgebreidere generalisatie van Harm Bakker.

vakbladeuclides.nl/947biesheuvel

Over de auteurs

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum. E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*. Harm Bakker is leraar wiskunde aan de CSG Liudger in Drachten en docent aan de educatieve masteropleiding wiskunde van de NHL Hogeschool in Groningen.

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?

Sjoerd Crans

DEEL 6 CITO OVER DE GRENS

In september 2018 bestond Cito 50 jaar. In dit zesde artikel in de reeks over Cito en wiskunde schetst Sjoerd Crans aan de hand van diverse internationale Cito-projecten een beeld van Cito's (wiskunde)werkzaamheden in het buitenland.[1]

Inleiding

Het Nederlandse onderwijs staat internationaal hoog aangeschreven. In het laatste internationale vergelijkingsonderzoek, PISA 2015, scoorde Nederland zoals gebruikelijk ruim boven het OECD-gemiddelde. Daarnaast heeft het Nederlandse onderwijs een aantal kenmerken dat het internationaal interessant maakt. Zo is er, in vergelijking met veel andere landen, in Nederland op school een open cultuur en is de prestatiedruk relatief laag.
Op didactisch gebied heeft Nederland iets te bieden, bijvoorbeeld met het realistisch reken- en wiskundeonderwijs - in de meeste landen wordt rekenen en wiskunde vanuit een meer traditioneel en theoretisch perspectief aangeboden. Dat scholen zelf verantwoordelijk zijn voor de kwaliteit van het onderwijs komt elders ook voor, maar er zijn ook veel landen waarin het onderwijs van staatswege centraal wordt aangestuurd. Uitzonderlijk is ook de mate waarin het voortgezet onderwijs in Nederland is opgedeeld naar niveau. En natuurlijk onze Centrale Examens, want in veel landen zijn er alleen schoolexamens, al dan niet in combinatie met toelatingsexamens voor het hoger onderwijs.

In de andere artikelen in deze serie is of wordt al uitgebreid toegelicht hoe Cito al 50 jaar het Nederlandse onderwijs ondersteunt op toetsgebied. Er zijn echter veel landen die niet een instituut zoals Cito hebben. Als (een organisatie in) zo'n land ondersteuning zoekt op het gebied van toetsen, wat vaak gebeurt als er veranderingen in het onderwijssysteem plaatsvinden of worden overwogen, komt het nogal eens voor dat Cito benaderd wordt voor advies en consultancy. En omdat Cito regelmatig succesvol betrokken was bij dergelijke projecten is Cito ook in het buitenland inmiddels een gevestigde naam.

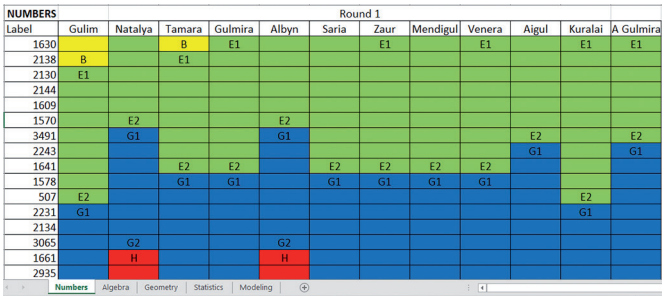
Enkele mijlpalen hierbij:
- 1974 Cito founding member of the International Association for Educational Assessment (IAEA)
- 1992 eerste internationale project: Educational Standards and Evaluation in Rusland
- 1998 eerste Wereldbankproject: Assessment and Examinations in Romania
- 2000 Cito founding member of the Association Educational Assessment Europe (AEA-E)

Vaak betreffen dergelijke projecten (ook) rekenen en/of wiskunde. Logisch, want rekenen-wiskunde wordt in het algemeen gezien als een belangrijk onderdeel van het onderwijs en bovendien is de inhoud van het vak wiskunde, in tegenstelling tot bijvoorbeeld het vak geschiedenis, redelijk vergelijkbaar van land tot land. Cito-toetsdeskundigen wiskunde zijn dan ook geregeld over de grens gegaan.
In dit artikel geven we een impressie van drie recente internationale projecten met wiskunde, in drie werelddelen: een langlopend project over formatieve toetsing in Kazachstan, een eenmalig groot project over toetsen voor het meten van onderwijskwaliteit in Peru en het begin van een actueel project over eindexamens in Kosovo. Hierbij kijken we vooral naar de inhoud van de werkzaamheden van de Cito-toetsdeskundigen wiskunde.

Kazachstan: NIS monitoring mathematics

Kazachstan is een ex-Sovjet land in Centraal-Azië. Het is een enorm land, met een oppervlakte die 64 keer zo groot is als die van Nederland. Het heeft ongeveer net zoveel inwoners als Nederland, dus het is gemiddeld zeer dunbevolkt. Iets meer dan de helft van de bevolking leeft in stedelijke gebieden, waarvan de twee grootste Almaty (bij ons beter bekend onder de Russische naam Alma-Ata) en de hoofdstad Astana zijn. Sinds enige tijd is men in Kazachstan bezig met het hervormen van het

onderwijssysteem, gebaseerd op 'internationale standaarden van best practice'. Het door president Nazarbayev in 2008 opgerichte netwerk van Nazarbayev Intellectual Schools[2] (NIS), een twintigtal middelbare scholen voor getalenteerde leerlingen, is bedoeld als aanjager van en voorloper voor deze hervormingen.
In 2011 werd besloten voor de NIS-scholen met ingang van het schooljaar 2012-13 gefaseerd een nieuw curriculum in te voeren, met meer aandacht voor toepassing van het geleerde en voor kritisch denken. Tegelijkertijd werd gestart met de invoering van een 'monitoring system of student achievements in mathematics'. Onder andere voor de ontwikkeling van dit volgsysteem werd Cito om hulp gevraagd. De doelen van het project waren tweeledig: ten eerste ondersteuning door Cito bij de ontwikkeling en praktische uitvoering en ten tweede deskundigheidsbevordering van medewerkers zodat op termijn NIS het volgsysteem zelfstandig zou kunnen beheren en uitvoeren.
De eerste workshop vond plaats begin 2012, in Astana. Aanwezig waren zo'n 25 docenten van NIS scholen, verdeeld over onderbouw en bovenbouw. Er moesten veel keuzes gemaakt worden: hoeveel toetsmomenten per jaar, hoeveel items per toets, met/zonder rekenmachine, hoe te rapporteren, et cetera. Daarna werd voor alle toetsen een begin gemaakt met het vertalen van de leerdoelen uit het curriculum naar toetsdoelen en werden voor de eerste toetsen, aan het begin van de brugklas en aan het begin van de vijfde klas, af te nemen in september 2012, de toetsdoelen gebundeld in een toetsmatrijs. Op basis van deze toetsmatrijs construeerden de docenten items. Deze items werden, vertaald in het Engels, naar Cito gestuurd voor screening, en in de tweede workshop, in juni, met de docenten besproken in de vorm van een soort constructiegroep. In de loop van de tijd - er zijn inmiddels meer dan twintig workshops geweest - kwamen er ook toetsen voor de overige klassen, werden er meer docenten betrokken bij het project en kwamen er meer activiteiten. Evaluatie van de toetsen na afname, standard settings, zie figuur 1, om de grenzen te bepalen tussen 'adequate voortgang' en 'heeft extra ondersteuning nodig' en 'heeft ernstige achterstand', *level descriptors* om deze aanduidingen inhoudelijk te beschrijven, en onderzoek naar de samenhang van de toetsen, want een volgsysteem is meer dan een verzameling toetsen.



NUMBERS	Round 1											
Label	Gulim	Natalya	Tamara	Gulmira	Albyn	Saria	Zaur	Mendigul	Venera	Aigul	Kuralai	A Gulmira
1630			B	E1			E1		E1		E1	E1
2138	B		E1							G1		G1
2130	E1											
2144												
1609												
1570		E2			E2							
3491		G1			G1					E2		E2
2243										G1		G1
1641			E2	E2		E2	E2	E2	E2			
1578			G1	G1		G1	G1	G1	G1			
507	E2										E2	
2231	G1										G1	
2134												
3065		G2			G2							
1661		H			H							
2935												

Numbers | Algebra | Geometry | Statistics | Modeling

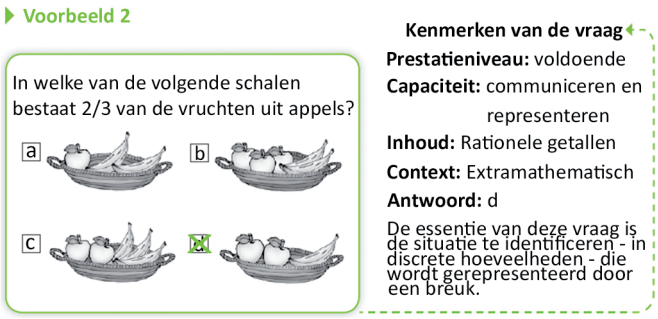
figuur 1 De grens tussen E (groen) en G (blauw) wordt besproken

De voertaal in de workshops is Russisch, de items worden in het Russisch geconstrueerd en in het Russisch en in het Kazachs afgenomen. Dit betekent dat we tijdens de workshops werken met tolken en dat de items voor ons in het Engels vertaald worden. Natuurlijk raakt hierbij wel eens iets 'lost in translation' en kunnen we niet voor de formuleringen van de items in het Russisch en in het Kazachs instaan. Zo kwamen we er bijvoorbeeld pas bij de evaluatie van een toets achter dat bij een van de items het in het Russisch ging over een varken, maar in het Kazachs over een schaap.
Door de geleidelijke overdracht van taken aan NIS zijn de werkzaamheden van de Cito-medewerkers inmiddels behoorlijk van karakter veranderd: we zijn nu meer procesbegeleider en adviseur. We hopen in deze rol NIS nog jaren van dienst te kunnen zijn.

Peru: Evaluación Censal de Estudiantes en Evaluación Muestral

Peru ligt aan de westkust van Zuid-Amerika aan de Stille Oceaan. Peru heeft ongeveer twee keer zoveel inwoners als Nederland, het grootste gedeelte daarvan is van indiaanse of gemengde afkomst. Driekwart van de bevolking woont in steden, van wie maar liefst tien miljoen in Lima.
Peru is een gevarieerd land. Ten eerste is er de kuststrook, droog en het meest verstedelijkt. Ten tweede de Andes, waar men nog grotendeels leeft op traditionele wijze. Ten derde het tropisch regenwoud in het noordoosten, warm en nat maar dunbevolkt. De drie gebieden verschillen niet alleen in levenswijze maar ook in opleidingsniveau - in rurale gebieden is meer dan 20% van de vrouwen en meer dan 5% van de mannen analfabeet - in de taal die er gesproken wordt: Spaans of een van de vele indiaanse talen. Dat dit voor een complexe onderwijssituatie zorgt moge duidelijk zijn.

Het aansturen van het onderwijs in Peru gebeurt op een meer centrale manier dan in Nederland. Er zijn wel privéscholen en openbare scholen, maar er zijn nationale criteria, standaarden en processen van evaluatie, accreditatie en certificering van onderwijsinstellingen. Om de kwaliteit van het onderwijs te evalueren is er een systeem van nationale, zogeheten gestandaardiseerde toetsen zowel voor primair als voortgezet onderwijs, de *Evaluación Censal de Estudiantes* (ECE) en de *Evaluación Muestral* (EM). De resultaten van deze toetsen worden tevens gebruikt om feedback te geven aan het veld, van regioniveau tot aan docent - en zelfs 'vader en moeder'-niveau, met het doel dat het onderwijs hierdoor beter wordt. De feedback is in de vorm van lijvige rapporten.



figuur 2 In welke van de volgende schalen bestaat 2/3 van de vruchten uit appels?

Het rapport voor docenten is diagnostisch van aard: er worden onder andere voorbeelditems gegeven, zie figuur 2, met toelichting over wat er goed gaat en wat er minder goed gaat, zie figuur 3.

figuur 3 Moeilijkheid: de 'getallen' van de breuk interpreteren als onafhankelijke aantallen

In 2017 heeft Cito, na een eerder succesvol project voor het vak Natural Science, de opdracht verworven om ook voor andere vakken, waaronder wiskunde, items te maken voor deze toetsen.
UMC[3], de afdeling van het Peruviaanse Ministerie van Onderwijs verantwoordelijk voor de ECE en EM, neemt voor wiskunde deze toetsen al sinds 2007 af, namelijk in (wat wij in Nederland noemen) groep 6 en 8 van het po en in klas 2 van het vo. De opdracht betrof het maken van nieuwe items voor deze toetsen en het maken van items voor een nieuw te ontwikkelen toets voor klas 5, in Peru het laatste jaar van het vo.

Een flink aantal uitdagingen diende zich aan.

— De taal: de items werden in het Nederlands door Nederlandse constructeurs geconstrueerd, maar moesten in het Spaans aangeleverd worden en werden ook in het Spaans van feedback voorzien.
— Het beoogde niveau van de items: aan de ene kant is het niveau van de leerlingen laag (in klas 2 heeft minder dan 15% van de leerlingen het beoogde niveau (gemeten volgens de ECE) en in PISA 2015 was Peru een van de laagst scorende landen), aan de andere kant was er de uitgesproken wens om vooral ook de hogere denkvaardigheden te adresseren.
— De opzet van de te construeren items: de meeste multiple choice, waarbij ook extra diagnostische informatie gegeven moest worden, en een aantal open items die modelleren, redeneren, beargumenteren en evalueren toetsen, niet met een correctievoorschrift maar met een beschrijving van verschillende leerlingaanpakken en wat die zeggen over de getoetste vaardigheid.
— De contexten: die moesten niet alleen op de Peruaanse leerling en op de Peruaanse situatie toegesneden zijn, maar mochten ook leerlingen uit de verschillende delen van Peru niet bevoor- of benadelen.

We hebben deze uitdagingen het hoofd geboden middels enkele onorthodoxe werkwijzen. Zo is er bijvoorbeeld een groep van collega's deels vrijgemaakt van andere projecten voor snelkookpansessies in een werkruimte bij ons magazijn in Arnhem Oost. Een andere groep constructeurs bestond uit twee Nederlanders, twee Peruanen (niet van UMC) en een Venezolaan, en construeerde half in het Nederlands half in het Spaans.

Kosovo: Matura examens

Kosovo heeft zich in 2008 onafhankelijk verklaard van Servië. Ondanks dat deze onafhankelijkheid door bijna de helft van de leden van de Verenigde Naties (nog) niet erkend wordt, functioneert Kosovo de facto als zelfstandig land. Het heeft een kleine twee miljoen inwoners, van wie meer dan de helft jonger is dan dertig jaar. Daarmee is het in meer dan één opzicht het jongste land van Europa. Albanees is de meest gesproken taal in Kosovo, gevolgd door Servisch. Daarnaast zijn er kleine anderstalige minderheden, waarvan de belangrijkste twee Bosnisch en Turks zijn.
De recente roerige geschiedenis van de Balkan en van Kosovo in het bijzonder heeft ook diepe sporen nagelaten in het Kosovaarse onderwijs. De huidige generatie jonge docenten is misschien wat genoten onderwijs betreft wel het meest tekortgekomen. Om in een dergelijke lastige situatie een nieuw en up-to-date onderwijssysteem te ontwikkelen is een moeilijke, maar tegelijkertijd noodzakelijke opdracht die de regering van Kosovo zich heeft gesteld. Gelukkig is er internationale steun hiervoor, onder andere in de vorm van een project van de

Wereldbank: het Kosovo Education System Improvement Project[4] (ESIP). In het kader van dit project heeft Cito de opdracht verworven om onder andere hun bestaande eindexamens, de zogenaamde *Matura* examens, te verbeteren.
Verbetering komt in kleine stappen. Een van de stappen voor onder andere wiskunde is het uitbreiden van het examen van twintig multiplechoicevragen naar vijftig multiplechoicevragen. Een andere stap is dat het examen gebaseerd moet worden op het nieuwe 'competence based' curriculum dat een paar jaar geleden is ingevoerd. In november 2018 heeft een aantal Cito-toetsdeskundigen Kosovo bezocht om een begin te maken met twee volgende stappen: het maken van een toetsmatrijs gebaseerd op het nieuwe curriculum, en het maken van items op basis van de in deze toetsmatrijs opgenomen toetsdoelen door Kosovaarse constructeurs. Op het moment van het verschijnen van dit artikel heeft dit begin waarschijnlijk een vervolg gekregen: de toetsmatrijs is af, items zijn gescreend door Cito en misschien zijn er al vijftig items uitgekozen voor de Matura van 2019. Nog niet allemaal competence based, want de leerlingen hebben nog niet allemaal volgens het nieuwe curriculum les gehad, maar die stap kan mogelijk in 2020 gezet worden.

Conclusie

We hebben drie projecten in drie landen gezien. Ook al zijn de projecten en de landen zeer verschillend, het blijkt dat er één ding bij toetsen en bij de werkzaamheden van Cito-toetsdeskundigen toch het belangrijkste blijft: het stellen van de juiste vragen.

Noten

[1] Voor meer informatie over Cito activiteiten in het buitenland: *https://www.cito.com/*
[2] Voor meer informatie over NIS: *http://nis.edu.kz/en/*
[3] Voor meer informatie over UMC (in het Spaans): *http://umc.minedu.gob.pe/*
[4] Voor meer informatie over ESIP: *http://projects.worldbank.org/P149005?lang=en*

Over de auteur

Sjoerd Crans is toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: *sjoerd.crans@cito.nl*

ALYMPIADE 2018: BEWUST VACCINEREN IN HAARLEM

Ruud Stolwijk

Al dertig jaar lang vindt in november op tientallen scholen in Nederland de voorronde plaats van de Alympiade. Op 22 november 2019 is de eerstvolgende. Om je warm te maken voor dit evenement blikken we terug aan de hand van een verslag van het verloop van de voorronde op 16 november 2018 op het Mendelcollege in Haarlem, waar Ruud Stolwijk (voorzitter van de Alympiadecommissie) op bezoek was.

8.45 uur

Onder het genot van koffie overleggen Jeroen, Bouke, William en Timo (de bij het evenement betrokken docenten van het Mendelcollege) nog even met Elias (student uit Utrecht die meehelpt tijdens de dag) over het verloop van de dag en of er nog ziekmeldingen zijn. Die zijn er niet - welke leerling zou immers deze dag willen missen? Om 9 uur stipt wordt de dag afgetrapt met een korte plenaire inleiding. Alle leerlingen van 5 vwo hebben zichzelf in groepjes van vier verdeeld (19 Alympiade-groepjes en 16 Bdag-groepjes) en zijn aanwezig in de voor deze wiskundedag vrijgehouden aula. Om 10 over 9 is het doodstil... iedereen is de opdracht aan het lezen, en nauwelijks een half uur later zitten de leerlingen al volop in de opdracht.

figuur 1 Ingespannen de opdracht lezen

De aanwezige docenten (inclusief ondergetekende) lopen rond, beantwoorden niet-inhoudelijke vragen ('Wat is een grafische weergave?', 'Is er ook ruitjespapier?', 'Heeft u een verlengsnoer?') en zien de leerlingen aan de slag met histogrammen, grafieken, pijldiagrammen en verhalende herschrijvingen van de gegeven tekst.

'DAT WAT JE NET ZEI, ZOU IK WEL OPSCHRIJVEN, WANT JE HEBT EROVER NAGEDACHT'

De leerlingen hebben overigens de keuze om het verslag aan het eind van de dag handgeschreven of digitaal in te leveren - de meesten kiezen voor digitaal en hebben per groepje minstens één laptop meegebracht.

10.12 uur

De afdelingsleider komt even langs om de sfeer te proeven. We leggen hem meteen maar even uit dat de opdracht (met als titel *Bewust vaccineren*[1]) gaat over het feit dat je niet een hele populatie hoeft te vaccineren om toch de hele populatie te kunnen beschermen tegen een besmettelijke ziekte. Aan de hand van een aantal verkenningsopdrachten wordt eerst het verschijnsel 'besmetting' onderzocht en (letterlijk) in beeld gebracht - vandaar die grafische weergave.
Daarna volgt een deel waarin het begrip 'dekking' aan de orde komt, en tot slot moet er gekeken worden hoe een beperkte hoeveelheid vaccins zo goed mogelijk kan worden ingezet om zo veel mogelijk personen te beschermen.

figuur 2 Verkenningsopdracht

10:33 uur

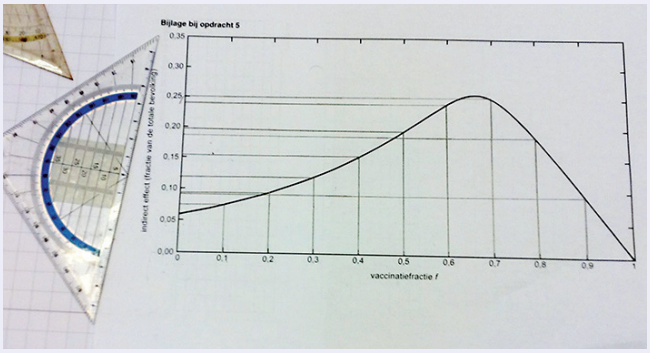
De rondlopende docenten 'beantwoorden' vragen van de leerlingen... dat bestaat er vooral uit dat ze de leerlingen laten vertellen wat ze aan het doen zijn, meestal bevestigen dat ze de ingeslagen weg consequent moeten vervolgen, soms dingen zeggen als 'dan moet je een keuze maken' en vooral aangeven 'dat wat je net zei zou ik wel opschrijven want je hebt er over nagedacht'. Immers, zoals ook in de van tevoren door de docenten uitgedeelde aanwijzingen voor de leerlingen staat: 'Een enkele keer moet je zelf keuzes maken. Zelf alternatieven zoeken, een creatieve oplossing vinden of verder gaan dan het antwoord geven op de vraag wordt natuurlijk beloond.'

11:19 uur

Enkele groepjes proberen enige kansrekening in het probleem toe te passen, omdat (zoals ze het zelf zeggen) 'alle mogelijkheden uitschrijven niet te doen is'. Beter kun je het nut van modelleren wellicht niet omschrijven... Ondertussen wordt er uiteraard ook gepauzeerd (al werken sommige groepjes onverstoorbaar door), en door de docenten wordt thee geserveerd - met door de leerlingen meegebrachte pepernoten, snoep, koeken, chocola, cake, zoute stengels, et cetera.

12.35 uur

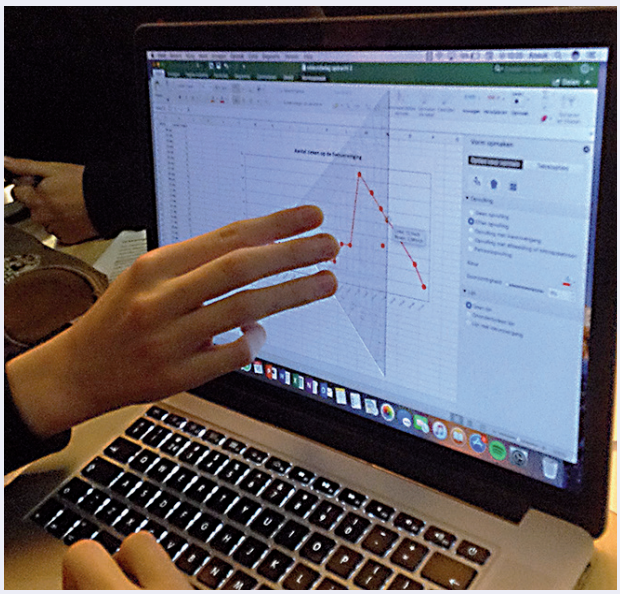
Zo hier en daar wordt met behulp van de regressiefunctie op de GR gezocht naar een goed passende formule bij de grafiek die bij opdracht 5 staat, zie figuur 3. Er wordt ijverig afgelezen, punten genoteerd en met Excel geprobeerd vat op de grafiek te krijgen. Er zijn ook leerlingen die niet weten wat ze met die grafiek aan moeten... even zwijgend wijzen op het rekenvoorbeeld dat er onder staat blijkt te helpen! Inmiddels zijn de leerlingen al drie en een half uur hard aan het werk en loopt de temperatuur in de aula gestaag op.



figuur 3 Een passende formule zoeken bij de grafiek

13.30 uur

Na een verplichte pauze van 40 minuten (een verstandige keuze!) gaan alle groepjes aan de slag met de twee eindopdrachten. De link met de eerdere opdrachten is niet altijd even duidelijk, soms moet er door de docenten even op gewezen worden dat de opdracht natuurlijk wel één geheel vormt.
En dat je er met één enkel voorbeeld als oplossing niet bent. Groepjes die hiermee aankomen en vinden dat ze daarmee wel klaar zijn, krijgen te horen 'hoe weet je nu dat deze oplossing de best mogelijke is' en gaan vervolgens op zoek. 'Probeer eens een andere verdeling', 'Kijk nog eens naar je resultaten uit de eerdere opdrachten', 'Is evenredig verdelen wel echt het beste?', 'Probeer eens een extreme situatie', dat soort vragen kunnen leerlingen aan het denken zetten zonder dat ze echt een aanwijzing hebben gekregen. En uiteraard zijn er ook groepjes die op slinkse wijze concretere aanwijzingen los proberen te peuteren!



figuur 4 Met Excel vat proberen te krijgen op de grafiek

15.00 uur

De eerste groepjes naderen het eindpunt - niet altijd omdat het werk echt goed af is, maar ook wel uit vermoeidheid. Een hele dag wiskunde is immers niet niks. Voor 15.00 uur mogen de leerlingen op het Mendelcollege overigens niet weg, er moet wel serieus tijd aan besteed worden. De Alympiade (en de B-dag) is op het Mendelcollege dan ook een verplicht onderdeel, waar een PO-cijfer (dat meetelt binnen het PTA) voor wordt gegeven.

figuur 5 Om 16.00 uur heeft iedereen alles ingeleverd

15.30 uur

De laatste loodjes... er wordt druk geschreven en geprint, soms met lichte paniek ('de printer doet he-le-maal niets!'), maar uiteindelijk heeft om 16.00 uur iedereen alles netjes ingeleverd. En een enkele leerling bedankt zelfs voor de leuke dag - en dat is toch zeker ook heel wat waard!

Volgende voorronde

De eerstvolgende voorronde wordt gehouden op vrijdag 22 november 2019. Omdat de deelnemende docenten aangaven dat de beschikbare tijd om werkstukken te selecteren om in te sturen 'voor de wedstrijd' erg kort werd gevonden, is deze termijn aangepast: je hebt tot na de kerstvakantie de gelegenheid om werkstukken in te sturen en zo jouw leerlingen kans te bieden om mee te doen aan de internationale finale in maart.
Zie verder de website van de Alympiade[2].

vakbladeuclides.nl/947stolwijk

Noten

[1] De opdracht verschijnt pas een jaar later op de Alympiade-site zodat scholen die niet aan de wedstrijd deelnemen zelf hun Alympiadedag kunnen kiezen. *Bewust vaccineren* staat nu al wel op de *Euclides*-site.

[2] *https://wiskundeinteams.sites.uu.nl/wiskunde-a-lympiade/*

Over de auteur

Ruud Stolwijk is voorzitter van de Alympiadecommissie.
E-mailadres: *ruud.stolwijk@cito.nl*

MEER MET MINDER?

Gerard Koolstra

Goede columns zetten je aan tot nadenken. Dat overkwam Gerard Koolstra na het lezen van *De Hoekstreep* uit nr 5 van deze jaargang. Zou het geschetste probleem te veralgemeniseren zijn? Het heeft er alle schijn van.

In zijn column De Hoekstreep in *Euclides* 94-5 besteedde Jan Beuving aandacht aan het opmerkelijke feit dat pincodes van vier cijfers soms moeilijker te kraken zijn als er minder verschillende bekende cijfers in zitten. Als je weet dat 1, 6, 8 en 9 er in voorkomen, dan is het aantal mogelijkheden 24 (4!). Als alleen 1, 6 en 8 er in voorkomen, dan is het aantal mogelijkheden 50% hoger: 36. In *de Volkskrant* van 13 april jl. kwam deze kwestie ook al aan de orde in de column 'Ionica Smeets zag een getal', naar aanleiding van hun gezamenlijke optreden op de NWD.
De berekening van de 36 mogelijkheden in beide stukjes leent zich niet zo goed voor veralgemenisering, maar gelukkig is de kwestie hoeveel codes met lengte n er te maken zijn met behulp van m verschillende symbolen die allemaal gebruikt worden, een bekend (en al lang opgelost) probleem. Het gaat in feite om het *aantal surjecties* van een verzameling met n elementen (de lengte van de code) op een verzameling van m elementen (het aantal verschillende tekens dat wordt gebruikt). Een surjectie is volgens afspraak een afbeelding waarbij elk element van de beeldverzameling ook gebruikt wordt, eventueel meerdere malen. Hieruit volgt dat: $m \leq n$.
Voor het aantal surjecties wordt vaak de notatie $\left|\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right|$ gebruikt. Hoewel er een directe formule bekend is voor $\left|\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right|$, is het soms, zoals bij gebruik van Excel, handiger om te werken met de betrekking:

$$\left|\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right| = m \cdot \left(\left|\begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} n-1 \\ m-1 \end{matrix}\right| \right).$$

Zoals eenvoudig te zien is geldt $\left|\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right| = 1$.

Als bekend is dat een bepaald teken als enige is gebruikt in de code (en de lengte van de code bekend is) valt er weinig te gokken. In het stukje van Jan Beuving kwam al ter sprake dat ook

$\left|\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right| = n!$ niet moeilijk in te zien is.

We weten dus dat $\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right| = 1$ en $\left|\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}\right| = 2$.

Het is trouwens ook niet moeilijk om te begrijpen waarom $\left|\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right| = 2^n - 2$.

We weten dus ruim voldoende om tabel 1 te genereren.

'OP HET EERSTE GEZICHT IS HET MISSCHIEN VERRASSEND DAT HET NIET GEBRUIKEN VAN TEKENS TOT MEER MOGELIJKHEDEN KAN LEIDEN'

Alle vetgedrukte getallen gaan over de surjecties (n, m) die voor dezelfde n een hogere uitkomst opleveren dan $n!$ (ofte wel n,n). n! staat cursief gedrukt .

Zo te zien neemt het aantal mogelijkheden aanzienlijk toe wanneer niet alle tekens worden gebruikt. Bij codes met lengte 10 waarbij alle cijfers (0 t/m10) gebruikt worden zijn er zo'n 3,6 miljoen mogelijkheden. Wanneer enkele cijfers niet gebruikt worden stijgt het aantal mogelijkheden spectaculair, ook als bekend is welke cijfers niet gebruikt worden. Zelfs een tiencijferige code waarvan bekend is dat alleen de vijf cijfers 0 t/m 4 zijn gebruikt is lastiger te kraken (door stelselmatig te proberen) dan een even lange code waarvan bekend is dat alle cijfers 0 t/m 9 gebruikt zijn. Uiteraard is voor het kraken van de code het ongunstigst de situatie waarbij totaal onbekend is welke cijfers gebruikt worden. Maar dat was nu juist in het verhaal van Jan Beuving het aardige, de afgesleten toetsen gaven veel informatie.

m / *n*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	6	14	30	62	126	254	510	1022
3			*6*	**36**	**150**	540	1806	5796	18150	55980
4				*24*	**240**	**1560**	**8400**	**40824**	186480	818520
5					*120*	**1800**	**16800**	**126000**	**834120**	**5103000**
6						*720*	**15120**	**191520**	**1905120**	**16435440**
7							*5040*	**141120**	**2328480**	**29635200**
8								*40320*	**1451520**	**30240000**
9									*362880*	**16329600**
10										*3628800*

tabel 1 Alle vetgedrukte getallen gaan over de surjecties (n, m) die voor dezelfde n een hogere uitkomst opleveren dan n! (oftewel n,n). n! staat cursief gedrukt.

Op het eerste gezicht is het misschien verrassend dat het niet gebruiken van tekens tot meer mogelijkheden kan leiden. Toch is vrij eenvoudig in te zien dat het weglaten van één teken (bijna) altijd tot winst leidt. Immers, als de code de lengte n heeft en er ook precies n verschillende tekens gebruikt mogen worden is het totaal aantal mogelijkheden $n!$. Het weglaten van één van de n tekens betekent in eerste instantie dat het aantal mogelijkheden n keer zo klein wordt. We hebben nu nog maar $(n-1)!$ mogelijke codes met lengte $n-1$. Echter, er kan vervolgens op $n-1$ manieren gekozen worden welk teken dubbel voorkomt. Dit teken kan op n manieren gecombineerd worden met de code met lengte $n-1$. Een voorbeeld ter toelichting:
Voor $n = 4$ zijn er 4! codes waarbij de letter A B C D ieder één keer gebruikt worden. Als we de D niet gebruiken kunnen we zes (3!) drielettercodes maken, bijvoorbeeld BCA. Wanneer we nu de A kiezen als letter die dubbel gebruikt mag worden zijn er vier mogelijkheden om BCA aan te vullen tot een vier lettercode: ABCA BACA BCAA en BCAA. Echter de laatste twee codes zijn natuurlijk identiek. Dit geldt in feite voor elke code waarin een teken (bijvoorbeeld A) twee keer voor komt. Daarvoor moet uiteraard gecorrigeerd worden. Resumerend: het aantal mogelijkheden wordt: $\frac{n!}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n! \cdot \frac{(n-1)}{2}$ en dit is altijd groter dan $n!$ voor $n > 3$.

Zoals tabel 1 laat zien, of althans suggereert, kan dit resultaat voor grotere waarden van n verbeterd worden door nog minder tekens te gebruiken. Voortzetting van de tabel suggereert dat het maximum bereikt wordt voor $m \approx \frac{3}{4}n$, maar het lijkt me lastig om hier preciezere uitspraken over te doen.

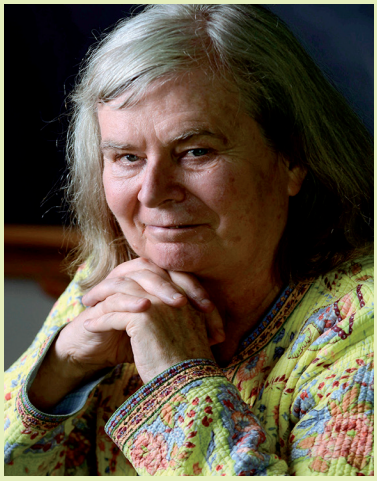
Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundE-brief.
E-mailadres: *gerardk@xs4all|.nl*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Abelprijs gaat voor het eerst naar een vrouw



Karen Uhlenbeck

De 76-jarige Karen Uhlenbeck werd eind maart de eerste vrouwelijke winnaar van de Abelprijs, de 'Nobelprijs voor de wiskunde'. Uhlenbeck won de prijs voor het baanbrekende werk waarmee ze twee verschillende wiskundedisciplines aan elkaar knoopte. Bovendien staat ze bekend als groot voorvechter voor meer diversiteit in de wiskunde. Uhlenbeck verwierf haar faam in de wiskunde onder meer door haar onderzoek naar 'ijktheorieën', een discipline die van groot belang bleek bij het opstellen van het standaardmodel van de deeltjesfysica. Die natuurwet vangt alle deeltjes en hun onderlinge interacties in een formule die past op een T-shirt of koffiemok. Zonder het werk van Uhlenbeck hadden we een stuk minder begrepen van de manier waarop de werkelijkheid op deeltjesniveau in elkaar steekt. 'Ik verloor mijn hart aan de structuur, de elegantie en de schoonheid van de wiskunde', zei ze in het boek *Mathematicians: An Outer View of the Inner World* (2009).
Toch raakte Uhlenbeck pas op de universiteit in de ban van de getallen en formules. Ze vroeg zich lange tijd af of ze wel thuishoorde in het vak. 'Zelfs toen ik al vijf jaar mijn doctorstitel had. Ik kon mezelf niet volledig als een succesvolle wiskundige zien. Het leek of ik van buiten naar binnen keek', zei ze in 1997. Haar worsteling kwam gedeeltelijk door het feit dat in de wiskunde sterke vrouwelijke rolmodellen ontbreken. Sindsdien werpt Uhlenbeck zich op als voorvechter voor meer diversiteit in het vakgebied.

Toen ze in 2007 de Steele-prijs van het Amerikaans wiskundig genootschap won, gebruikte ze dat podium om te stellen dat het kleine aantal vrouwen in hoge functies binnen de wiskunde te wijten was aan de heersende cultuur in de wiskundegemeenschap. Volgens haar was de cultuur veranderen 'een veel grotere taak' dan de 'bescheiden bijdrage' die ze zou hebben geleverd aan het vakgebied, schrijft populair-wetenschappelijk tijdschrift *New Scientist* in een profiel. Fysicus en BBC-presentator Jim Al-Khalili roemt daarin Uhlenbecks bijdrage aan de wiskunde, waarmee ze de wereld meer over de fundamentele grondslagen van de natuurkunde leerde.
Bron: *de Volkskrant 20 maart 2019*

Eremetaal bij Olympiades

Van links naar rechts: Floor Beks, Hanne Snijders, Siëna van Schaick en Ana Mekerishvili.

De zeventienjarige Floor Beks uit Grou heeft bij de achtste European Girls' Mathematical Olympiad, die begin april in Kiev (Oekraïne) plaatsvond, een zilveren medaille gewonnen met een score van 22 punten. Haar teamgenoten Hanne Snijders (16) uit Rotterdam en Siëna van Schaick (17) uit Woerden behaalden beiden een bronzen medaille met 19, respectievelijk 16 punten. Ook het vierde teamlid, Ana Mekerishvili (16) uit Den Haag, ging niet met lege handen naar huis: zij kreeg een eervolle vermelding voor het foutloos oplossen van één van de zes opgaven en haalde 8 punten.
Tijdens de sluitingsceremonie op 12 april nam het Nederlandse team niet alleen de drie medailles in

ontvangst. Het Oekraïense team droeg hier ook de officiële EGMO-vlag over aan het Nederlandse team. Nederland heeft namelijk de eer om in 2020 de negende EGMO te organiseren. Hiervoor worden in april 2020 zo'n 250 getalenteerde jonge meisjes uit Europa en daarbuiten in Egmond aan Zee verwacht.

Van links naar rechts: Szavi Buzogany, Tim Vogels en Richard Wols

Enkele weken daarna vond de Benelux Wiskunde Olympiade plaats in Valkenswaard. Hier heeft het Nederlandse team drie zilveren en vier bronzen medailles in de wacht gesleept.
Richard Wols uit Meppel behaalde met 22 punten een zilveren medaille. Ook was er zilver voor Tim Vogels uit Wageningen en Szavi Buzogany uit Amersfoort, beiden met 20 punten. Brons was er voor Jonathan Zandee uit Rotterdam (16 punten), Liam van den Berg uit Emmen (12 punten) Tjeerd Morsch uit Amersfoort (11 punten) en Jelle Bloemendaal uit Nijkerk (10 punten). Charlie Tang uit Eindhoven, kreeg geen medaille, maar loste wel een van de vier opgaven foutloos op. Hij scoorde 8 punten. Het Nederlandse team werd gecompleteerd door Rafaël Houkes uit Leiden (7 punten) en Kati Overbeeke uit Eindhoven (4 punten).
De totaalscore van het Nederlandse team was hiermee 130 punten. Dat was ruim meer dan het team uit Luxemburg, dat in totaal 32 punten behaalde. België, dat drie gouden medailles in de wacht sleepte, scoorde in totaal net wat beter dan Nederland, met 153 punten. België was daarmee voor het eerst in het elfjarig bestaan van deze drielandenstrijd de beste. Eén deelnemer uit België, Tijs Buggenhout, loste alle opgaven foutloos op en behaalde hiermee de maximale score van 28 punten. Het Nederlandse team is via vier voorrondes geselecteerd uit ongeveer 9.000 deelnemers. De laatste voorronde bestond uit een selectietraining waaraan 31 leerlingen deelnamen. Jelle Bloemendaal (15 jaar) uit Amersfoort, de benjamin van het team, had zich dit schooljaar voor het eerst voor deze selectietraining geplaatst, maar had geen last van zenuwen voor de wedstrijd: 'Nee, ik ben niet zenuwachtig. Ik heb er vooral heel veel zin in!' En dit enthousiasme bleek, samen met een aantal goede deeloplossingen voor de vier opgaven, goed genoeg voor brons.
Bron: *http://wiskundeolympiade.nl, resp. persbericht*

Derde machten en het getal 33

Wat krijg je als je drie derde machten bij elkaar optelt? Dat is een vraag die wiskundigen al eeuwenlang bezighoudt. In 1825 bewees wiskundige S. Ryley dat elke breuk geschreven kan worden als de som van drie breuken tot de derde macht. In de jaren vijftig vroeg wiskundige Louis Mordell zich af of hetzelfde mogelijk was voor gehele getallen: kun je elk geheel getal k schrijven als $k = x^3 + y^3 + z^3$, waarbij x, y en z ook geheel zijn? Het antwoord is nee: er zijn getallen waarvan we zeker weten dat dit onmogelijk is, waaronder 4, 5, 13 en 14. Maar het blijft een uitdaging om oplossingen te vinden voor getallen waarbij het wel kan.
Andrew Booker (Universiteit van Bristol) heeft voor 33, het tot nog toe laagste getal waarvoor nog geen oplossing bekend was, met behulp van een computerprogramma ontdekt dat we 33 wel kunnen schrijven als som van drie gehele derde machten: $33 = 8.866.128.975.287.528^3 + (-8.778.405.442.862.239)^3 + (-2.736.111.468.807.040)^3$.
Om de benodigde rekentijd te beperken heeft het programma bepaalde combinaties van getallen buiten beschouwing gelaten. 'Bijvoorbeeld, als x, y en z allemaal grote positieve getallen zijn, dan is het onmogelijk dat $x^3 + y^3 + z^3$ een klein getal oplevert', aldus Booker. Zelfs met deze beperkingen had het vinden van de oplossing één computer vijftien jaar aan rekentijd gekost.
In werkelijkheid duurde het drie weken om tot een resultaat te komen.
Voor sommige getallen is het vinden van een oplossing voor de vergelijking $k = x^3 + y^3 + z^3$ eenvoudig, maar bij andere gaat het om enorme getallen. 'Het is heel simpel om oplossingen te vinden voor 29. We weten ook een oplossing voor 30, maar die is pas in 1999 gevonden en

Workshop onderzoekend leren in het bètaonderwijs

Inclusief TI-Nspire™ CX II-T (CAS) handheld

T³ NEDERLAND

Voor docenten exacte vakken

Doe mee aan deze educatieve workshop voor docenten en breng exacte vakken nog meer tot leven in de klas! In deze compacte workshop maakt u kennis met een vernieuwde didactiek wiskunde en natuurkunde (en programmeren). Verken de grenzen van het bètaonderwijs en zet Texas Instruments technologie in om wetenschappelijke concepten te visualiseren.

Ludovic Wallaart en Frank van den Berg van het T³ Nederland-netwerk van docenten introduceren in een dagdeel de ins & outs om creatief TI-technologie in de klas toe te passen.

Ontdek hoe uw leerlingen op een interactieve manier wiskundige en natuurkundige processen kunnen onderzoeken en begrijpen.

Informatie en boeken

U boekt een workshop van een dagdeel al vanaf 369 euro per school, inclusief één handheld per deelnemer. Stuur een e-mail naar **info@t3nederland.nl** om te boeken of voor meer informatie. Wij verzorgen ook trainingen of workshops op maat.

www.t3nederland.nl

T³ Nederland kan niet garanderen dat de training wordt uitgevoerd volgens alle verzoeken van scholen. De trainingen worden per aanvraag geboekt en bevestigd. De TI-Nspire™ CX II-T (CAS) die is inbegrepen in de training, kan tijdens de training worden afgeleverd of na de training naar de school worden gestuurd.

©2019 Texas Instruments.

de benodigde getallen zijn in de miljoenen', zegt Booker. 'Een ander voorbeeld is het getal 3, dat in ieder geval twee eenvoudige oplossingen heeft: $3 = 1^3 + 1^3 + 1^3 = 4^3 + 4^3 + (-5)^3$. Maar tot op de dag van vandaag weten we nog steeds niet of er meer oplossingen zijn', aldus Booker. Pas in 2016 vonden we de oplossing voor 74. Met de oplossing voor 33 is er voor de getallen onder de 100 alleen nog geen oplossing voor 42. Onder de 1000 zijn er nog 12 getallen zonder oplossing.
Bron: *https://newscientist.nl/ieuws/wiskundige-lost-oud-probleem-op-over-het-getal-33/*

Emma Haruka Iwao

Pi-dag vieren met een nieuw record

Op 14 maart, Pi-dag, kwam Google-medewerkster Emma Haruka Iwao met een nieuw record. Met behulp van Googles cloud computing service slaagde zij erin de eerste 31 biljoen ('trillion') decimalen van π te berekenen. Tot nu toe waren slechts 22 biljoen decimalen bekend. De berekening gebruikte 170 TB aan data, 25 virtuele machines hadden 121 dagen nodig om de berekening te voltooien. In een video die te vinden is in ondergenoemde bron vertelt Haruka Iwao waarom men zoveel decimalen van π zou willen berekenen. En let vooral ook even op de lengte van die video ☺.
Bron: *https://plus.maths.org/content/celebrating-pi-day-new-record*

HP Prime Grafische Rekenmachine

Waarschijnlijk gebruikt u op school een rekenmachine die al 30 jaar hetzelfde in gebruik is, terwijl de wereld om ons heen verder is gegaan. Smartphones, tablets en snelle PC's zijn niet meer uit het dagelijks leven van uw leerlingen weg te denken.

Waarom dan niet ook eindelijk een rekenmachine die daar bij aansluit?

De HP Prime laat niet alleen op snelheid de concurrentie ver achter zich, ook qua bediening is dit de enige rekenmachine die aansluit bij de wensen van leerlingen.

Met een touchscreen bediening werkt de HP Prime net zo intuïtief als een smartphone of tablet en wordt werken met een grafische rekenmachine ineens geen zoektocht meer dan de juiste menufunctie!

- **Met goedgekeurde examenstand**
- **Opname in Getal & Ruimte en Moderne Wiskunde**
- **Nederlands docententeam voor ondersteuning**
- **YouTube kanaal met Nederlandse lesvideo's**

Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

I SEE WHAT YOU MEAN

CROSSING LANGUAGE BARRIERS IN DUTCH MATH CLASSROOMS

Jana Dean

Jana Dean is een Amerikaanse docent die onderzoek doet op het Freudenthal Instituut. Ze bezoekt veel scholen voor tweetalig onderwijs en ontdekt wat er te leren valt van lesgeven in een tweede taal. We durven het aan om haar observaties onvertaald te plaatsen.

Introduction

Sometimes I learn from what I see. In one class a boy gently taps his head on his desk as his teacher explains (again) how to solve an equation. Another lays his right cheek down as the teacher says, 'It's easy. It's the same rule.' Two girls quietly talk through what the teacher is explaining until he tells them to listen instead. Meanwhile a boy compares his paper and the board, looking back and forth. His forehead hits the desk and stays there when the teacher moves on before the boy can sort out a mistake for himself. In another class, a girl explains to her friend how the equation they are solving matches a figure they have drawn. As one talks the other nods her head. The teacher has said very little. Instead, he quietly walks around the room as the students problem solve together. These differences can't just be the difference between a teacher who talks and one who walks. If that were the case, students would learn in our silent ambling presence.

To learn more about what is happening, I interview teachers. My best informants have been teachers who are teaching in English which is a second language to them. They teach in diverse settings: in urban and suburban schools, in pre-vocational and college-bound courses. They teach students of mostly Dutch descent and students who are immigrants and children of immigrants. They are aware of language, both as learners and as teachers. Their students, who have chosen bilingual Dutch-English education, are too. Three of these teachers shared similar stories: Teaching in English changed the way they teach, and they hold onto those changes even when they return to teaching in their native language.

Patrick de Boer teaches lower secondary school and runs a professional development company, CLIL Media. CLIL stands for 'Content and Language Integrated Learning' and consists of strategies that specifically support the development of language while learning academic content.

figure 1 Patrick de Boer (standing)

CLIL changed the way Patrick teaches, even in Dutch. 'I can't go back. It is so much better. A lot of students need help with language in a lesson. Skipping it hurts their understanding.' Erik Atsma, who also teaches lower secondary students told me, 'Language is important. That is something you only notice when you are teaching in English (a second language.) I think, why don't I do the same thing in Dutch? My teaching has changed a lot in the last ten years.' A third teacher, Michelle Kuijt explained, 'Now I put what I do in my English class into my Dutch math classes. It really helps.' Her bilingual students help her see what is hard to understand linguistically. 'I really get creative with my English because when students don't understand, they tell me, so that helps me knowing what to do in my Dutch classes as well.'

These teachers differ from many of their colleagues in that they do not always teach from their textbooks. They create tasks to engage students in speaking and writing. They revoice what students say. They provide

models so that students can see as well as hear the math. Most importantly, they foreground concepts instead of procedures. This is not a coincidence: they know that the precious words they use must be as productive as possible. Procedures are dense in sequential details and prepositional phrases, and thus difficult to follow. The explanation of long division on Wikipedia provides an example of this density. It is riddled with prepositions (down, underneath, above and below, to and from) necessary for explaining how to move back and forth between subtraction and multiplying, all while dividing. It is all clear if you already understand English and the algorithm but a novice listener can easily get lost after missing a single step, even with something visual to follow.

When teachers focus on language that students can understand, instruction shifts away from the procedural toward the conceptual. I have seen such concept-rich math instruction for the youngest newcomers who are learning Dutch as well as for bilingual middle school students like Patrick's, Erik's and Michelle's who are learning English.

In it together with newcomers

Near Utrecht, there is a small elementary school serving families who are new to the Netherlands. The youngest children join their age-alike peers all day to learn language alongside all the other subjects. Newcomer children aged seven to eleven get language instruction for half days so that they can join their age-similar peers all day as soon as possible. Teachers for both groups, like the bilingual teachers, use visual representations, facilitate children's talk, and foreground concepts.

With her younger students, Miranda is teaching addition and subtraction. She explained to me that she had pulled this group together because of their level of Dutch. Instead of explaining a procedure to them (that would be linguistically too detail-heavy for these beginning Dutch speakers) she shows them a model called a *rekenrek*, see figure 2.

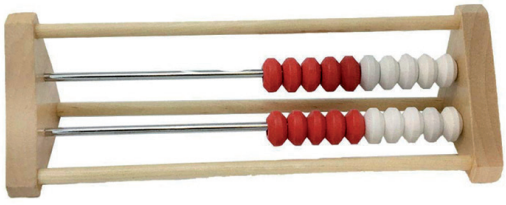


figure 2 The *rekenrek*

This model allows students to connect what they know about numbers to what they can see in their hands. For example, five reds (one hand) plus two whites (the other hand) is seven.

Miranda shows a part (five) and then asks how many need to be added in order to get to seven (two.) Next she shows them parts (four and five) and asks the children to put them together and name the size of the whole (nine.) Miranda is very precise in her words, and by using the model to show the relationships she does not need to talk very much. She shows several problems and she is patient and quiet while the children think, allowing them time to find the words to explain what they understand. She challenges them to move backward and forward, from parts to the whole and back again. Instead of following a procedure, these children make sense of something much deeper: They are learning to visualize taking numbers apart and putting them back together again.

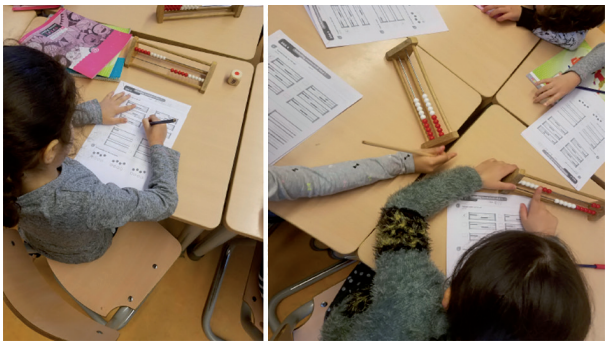


figure 3 *Rekenrek* tasks

When it comes time to practice, they bring whatever language they have to explain the math to themselves, their teacher and to each other. Two girls get the same model their teacher used and talk together. Another goes to a number line on the windowsill. A boy steadily works his way through the problems moving his lips as though talking to himself. Miranda has carefully provided access to the math by focusing her language on big ideas instead of procedural details and by making space for the children to make sense for themselves.

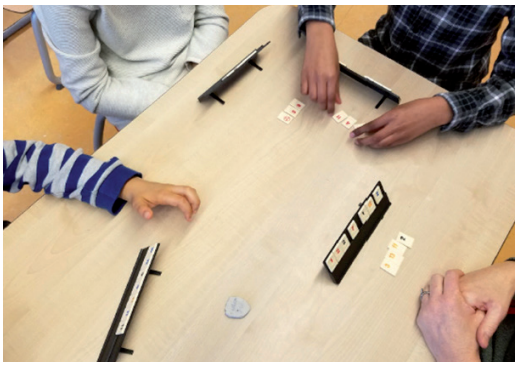


figure 4 Playing Rummikub

In the language class for the 7 to 11 year-olds, the focus is more on language than math, but still Hanneke's approach gives students access to describing big ideas. She uses the game Rummikub to help the children learn

to count, play together and to describe patterns. In this game, colored numbers on tiles create sets (3333) and runs (3456). First, she explains the rules. This involves a bit of dense step-by-step language, however, she moves the pieces so that the children can see what she means. As the children play, initially, she talks for them, modeling the language they need to talk about the game: 'I have a run.' 'Do you have a run?' 'These are all the same.' 'How many do you have?' 'My turn now.' After ten minutes, the children also invent new ways to find patterns and they explain their strategies to me, to Hanneke and to each other. Hanneke leans in and listens to every new idea, affirming without correcting their Dutch. Instead she revoices what they say. Hanneke also counts the tiles over and over again until the children count out loud themselves. She remarks, 'I scaffold. Then I move away and they don't need me anymore.' She gestures to a group of older children playing a similar game on the other side of the room. 'See,' she says, 'they are playing on their own, and in Dutch.'

Showing, then telling each other

In Amsterdam, I sat in Erik Atsma's class of first-, second- and third-generation immigrants. While they learn in English, they all speak a language other than Dutch or English at home. Erik, like Miranda and Hanneke, provided visual representations to avoid procedural detail-dense language, and he oriented students to each other.

For his thirteen year-olds, Erik used a visual representation of multiplication to show how the distributive property could be used to simplify an equation. This representation reminds me of an area model, and it is also reminiscent of multiplication tables students encounter much younger. In the figure 5, the two tables show how to multiply the expressions $2k + 3$ and $k + 7$ by 5 and 2 respectively. Instead of using preposition-heavy descriptions to indicate distribution of multiplication over addition you can see how $5(2k + 3)$ equals the product $10k + 15$ and $2(k+7)$ equals $2k + 14$.

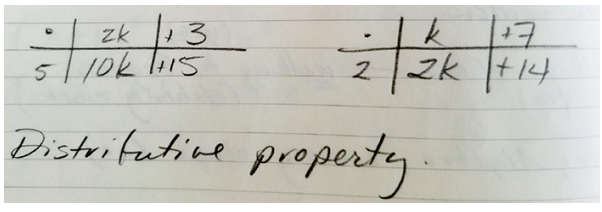


figure 5

Being able to show instead of tell not only reduced reliance on detail-dense step-by-step explanation, it connected the lesson to the bigger idea of multiplication. Erik did not need to say much about the table, except that it represented the multiplication of one quantity by another.

Next, he provided students with a puzzle. Here, his language was straight-forward: match solutions to equations. If they were correctly matched, the puzzle would form a ring. He directed students to take turns doing the writing as they problem-solved so that everyone would have a chance to do the thinking.

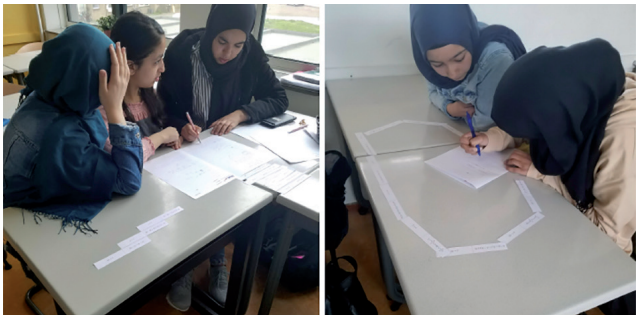


figure 6 Solving the Ring Puzzle

As students worked together, Erik circulated. When students got stuck they usually turned to each other for help instead of turning to him. The materials also allowed students to take different approaches to problem-solving. If they got stuck on a problem, they could try another one. Sometimes students worked together on one problem. Sometimes they split the work and then checked solutions with each other. By the end of class, most of them had made significant progress on the puzzle and all of them had been engaged in talking about math and reasoning the whole time.

Showing and knowing you don't yet understand

Michelle Kuijt teaches in a Culemborg bilingual program which includes prevocational to university preparatory tracks. Both Michelle and her students know language matters. Most of them speak Dutch at home, although a handful don't. For them, English may be a third or fourth language. In her class of twelve year olds, she opened by saying, 'We are going to have to understand some words if this is going to make any sense to us.'

Like Erik, Michelle made ideas accessible by showing rather than telling. Rather than providing a word-heavy explanation, her presentation featured color coded graphs and a lot of co-created discussion. If she had tried to explain step-wise how to work with a coordinate graph, her language would necessarily have become much more laden with details.

The day of my visit, Michelle's students gave her the gift not being satisfied with partial understandings. When a student provided a definition of a graph early in the discussion, she moved on. Then five minutes later, another raised his hand to say, 'I don't really understand what a coordinate grid is.' Michelle accepted the cue and slowly, through discussion, supported students to see elements

of the grid (the axes, the label, the grid itself) and what goes into making a graph, (plotting coordinate pairs.)

If I say it, they will get it

In contrast, in many monolingual classrooms, I see well-meaning teachers provide students with difficult-to-follow procedural explanations. The teachers carefully repeat themselves, providing set-by-step instructions for 'getting the letters on the left' and 'getting the numbers on the right.' When students ask questions, teachers repeat themselves. In these classrooms, during their work time, cell phones dominate. Students may try the math but then give up. Teachers circulate and answer questions, but too few are asking. And those who do get another explanation of the rules. When I interview these patient teachers, they tell me the process they were teaching that day is one of the hardest for students. They give many reasons for this, but none are the about the nature of the language they use to teach it.

Kerslake[1] helped me see procedures as hard-to-understand language. She observed that the children's talk about fractions was cluttered with meaningless phrases. They would suggest 'flipping fractions over,' or 'canceling' numbers randomly to make them less 'top-heavy.' She noted that step-wise procedural language creates nonsense. I infer that learning through this kind of language means more cognitive load to follow along, and less time for learning what the fractions mean. This reminds me of attempts early in my career to explain long division to my students. I would say where to put each number in relation to the others, describing an interplay of multiplication and subtraction, all while dividing. This must have been very challenging for many of my students learning in a second language or struggling with mathematics.

For a long time, I have known the importance of a classroom in which students are doing the thinking, yet these Dutch classrooms have helped me see the central role of language in turning over that thinking to students. From these generous teachers, I have learned the language-building importance of:

- patiently waiting for students to find their words;
- letting models and diagrams augment words as vehicles for communication;
- using puzzles and games to orient students to each other;
- telling students that learning math means learning language;
- recognizing the importance of teacher and students' mutual understanding;
- co-creating understanding through dialog;
- modeling language while supporting students to speak what makes sense to them;
- realizing the challenge of following step-by-step procedural language.

The teachers of language learners have the gift of learning with students who know they are learning language and math at once. The focus for both students and teachers is to understand each other. They can't resort to the rules, in confidence that 'the rules are easy.' They aren't. The teachers have learned to augment even their native-language teaching with multimodal communication that says far more about the math they expect students to learn. As Patrick de Boer writes, '(When) I had to teach some classes in Dutch again I noticed the language aspect of activities helped students. It... seemed to make mathematics easier.' Thanks to his attention for language, all his students have more space to speak a simple, 'aha.'

Literature

[1] Kerslake, D. (1991). The language of fractions. Language in mathematical education: Research and practice, 85-94.

About the author

Jana Dean is a middle school teacher at Olympia School District 111, Olympia, Washington State, USA and a teacher-researcher at the Freudenthal Institute (Fulbright Distinguished Teacher Fellow 2019).
See *www.mathbetweenus.org*.
E-mailadress: *jdean@reachone.com*

HET FIZIER GERICHT OP...

ONDERZOEKEND WISKUNDE LEREN IN NEDERLAND EN CHINA

Luhuan Huang
Michiel Doorman
Wouter van Joolingen

In FIzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut of de Freudenthal Group for research into the didactics of mathematics een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze editie doen Luhuan Huang, Michiel Doorman en Wouter van Joolingen verslag van hun onderzoek naar *inquiry-based learning* (IBL) in Nederland en China.

Inleiding

Wiskundigen verwerven vaak nieuwe inzichten door probleemsituaties uitgebreid te verkennen en te onderzoeken. Deze vorm van kennisverwerving heeft tijd nodig en de motivatie om lang aan een probleem te werken. Daardoor laat die zich moeilijk vertalen naar de dagelijkse lespraktijk op de middelbare school. Desondanks zouden we toch elementen van de werkwijze van een wiskundige in de lessen een plek kunnen geven. Een van de uitgangspunten bij onderzoekend leren is dat leerlingen ook probleemsituaties kunnen verkennen en onderzoeken, net zoals wiskundigen dat doen. Deze vorm van kennis-verwerving verdient aandacht in het onderwijs om leerlingen ook te laten ervaren dat ze iets kunnen uitzoeken in situaties waar geen standaard oplosmethode voor handen is. De benadering van onderzoekend leren (IBL – inquiry-based learning) geeft leerlingen de mogelijkheid om verantwoordelijkheid te nemen in het leerproces, vragen te stellen, procedures te ontwerpen, onderzoeken uit te voeren, ideeën uit te leggen en te communiceren met hun medeleerlingen[1].

Verschillen en overeenkomsten?

In deze FIzier gaan we in op enkele resultaten van een vergelijkend onderzoek in China en Nederland naar het gebruik van onderzoekend leren in de wiskundeles. Uitgangspunt voor dit onderzoek is dat het onderwijssysteem waarbinnen je werkt van invloed is op je overtuigingen en ideeën over het gebruik van IBL in je lespraktijk. Wij waren geïnteresseerd in verschillen en overeenkomsten tussen wiskundeleraren uit Nederland en China omdat de systemen in deze landen erg verschillend lijken. In Nederland geven we veel keuzevrijheid aan mondige leerlingen, terwijl het onderwijs in China erg hiërarchisch en streng gestructureerd lijkt te zijn. Kortom, het lijkt alsof IBL makkelijker in Nederland te implementeren is, omdat leerlingen hier sneller eigen verantwoordelijkheid nemen en samen aan een probleem gaan werken. In China zou dit lastiger kunnen zijn, omdat leerlingen daar gewend zijn om te wachten op instructies van hun docent en geen 'fouten' willen maken. We onderzochten deze vermoedens door 19 Nederlandse docenten met 442 leerlingen te bevragen en 30 Chinese docenten met 867 leerlingen.

Werkwijze

Via een vragenlijst konden leerlingen aangeven of zij klassenactiviteiten met betrekking tot IBL hebben ervaren (bijvoorbeeld: 'We hebben de mogelijkheid om vragen te formuleren waaraan we gaan werken', 'De docent laat ons in tweetallen of in kleine groepen werken om gezamenlijke oplossingen te vinden'). De wiskundeleraren werden geïnterviewd over hun begrip en gebruik van IBL met open vragen (bijvoorbeeld: 'Wat is uw kennis van IBL?') en voorbeeldopdrachten voor discussies (bijvoorbeeld: 'Welke van de twee versies van deze opdracht heeft uw voorkeur, en waarom?'). Kaders 1 en 2 tonen twee versies van een opdracht (van het Primas-project[2]) die we in de interviews hebben gebruikt als gelegenheid om na te denken over IBL-opdrachten en hoe die in lessen te gebruiken. We stelden de vragen: Aan welke geef je de voorkeur, en waarom? Hoe kun je de twee versies gebruiken om IBL-activiteiten in je les te implementeren?

Kader 1

Deze calculator wordt gebruikt op websites om volwassen te helpen om erachter te komen of ze overgewicht hebben. Welke waardes van de BMI geven aan of een volwassene overgewicht of ondergewicht heeft?

Body Mass Index (BMI) Calculator
Enter values for height and weight.

Height: 1.83 metres
Weight: 80 kilograms
BMI: 23.9
You are in the Ideal weight category

Body mass index (BMI) is measure of body fat that applies to adult men and women.

Onderzoek hoe de calculator de BMI berekent aan de hand van lengte en gewicht.

Kader 2

De BMI-berekening wordt bij volwassen gebruikt om te kijken of ze overgewicht hebben.

1 Stel de lengte in op 2 meter – een zeer lang persoon!
Vul de onderstaande tabel verder in en teken een grafiek om jouw resultaten weer te geven.

Gewicht (kg)	60	70	80	90	100	110	120
BMI							

(a) Wat is de grootste BMI-waarde waarmee iemand ondergewicht heeft?
(b) Wat is de kleinste BMI-waarde waarmee iemand overgewicht heeft?
(c) Wanneer je het gewicht verdubbelt, wat gebeurt er dan met de BMI?
(d) Kun je een regel vinden om het BMI bij een bepaald gewicht te berekenen?

2 Zet het gewicht op 80 kilogram en probeer te variëren met de lengte.
(a) Wanneer je de lengte verdubbelt, wat gebeurt er dan met de BMI?
(b) Kun je een regel vinden om de BMI bij een bepaalde lengte te berekenen?
(c) Teken een grafiek om het verband tussen de lengte en de BMI te tonen.

Bevindingen

In onze resultaten vonden we een aantal overeenkomsten, maar ook verschillen met onze vermoedens die we hadden gebaseerd op algemene indrukken. Zoals verwacht noemden Chinese leerlingen relatief minder ervaring met groepswerk. Onverwacht noemden ze echter meer ervaring met de meeste IBL-gerelateerde klassenactiviteiten dan Nederlandse leerlingen, vooral wat betreft het formuleren van vragen om mee aan de slag te gaan.
Zoals verwacht benadrukten Chinese leraren het belang van de begeleiding door de docent bij IBL, terwijl Nederlandse leraren het belang van exploreren benadrukten vóórdat je leerlingen een uitleg geeft (illustratief is een citaat van een Nederlandse docent hieronder). In tegenstelling tot onze verwachtingen benadrukten Chinese leraren ook de verkenning door leerlingen (zie het citaat van de Chinese docent hieronder), en de Nederlandse leraren waren het onverwacht eens met Chinese leraren over de moeilijkheden in relatie tot gebrek aan tijd en geschikte opdrachten voor IBL.
Een Nederlandse docent: 'Je liet de leerlingen nadenken over dingen, zodat ze ervaren wat het is om iets (...) zelf op te lossen, je geeft ze niet alleen informatie en zegt dat dit het is, ga ervoor. Maar je laat ze het ervaren, zodat ze het zelf kunnen uitzoeken.'
Een Chinese docent: 'Ik denk dat IBL is dat ik een vraag aan leerlingen moet geven om over na te denken, ik leg er weinig over uit en laat voldoende ruimte voor leerlingen om eraan te werken.' (vertaling van: 我觉得就是抛出问题让学生去想, 我少说,然后给学生足够的发挥空间)

Tot slot

Deze bevindingen suggereren dat de twee onderwijssystemen eigenlijk minder verschillen dan we aanvankelijk verwachtten. De bevinding dat Nederlandse leerlingen nauwelijks aangaven dat ze betrokken zijn bij het stellen van vragen om aan te gaan werken, kan verband houden met de rol van schoolboeken in ons systeem. Schoolboeken lijken een prominentere rol te hebben in de onderwijspraktijk in Nederland dan in China.
Voor de volgende stap zijn we van plan om Nederlandse en Chinese wiskundemethodes te analyseren om na te gaan in welke mate zij IBL-mogelijkheden bieden voor docenten en leerlingen. We zijn ook van plan om de daadwerkelijke onderwijspraktijk te observeren om een dieper inzicht te

krijgen in de situatie rond IBL in de twee landen.
Tot slot, de twee opdrachten in kader 1 en 2 kunnen de indruk wekken dat IBL-opdrachten ongestructureerd moeten zijn zonder aanwijzingen over het oplosproces (kader 1). Maar dan is de vraag hoe de leerlingen te ondersteunen en te voorkomen dat de meerderheid gefrustreerd raakt? Kader 2 kan ook worden gebruikt voor IBL als er expliciet met de leerlingen gereflecteerd wordt op de volgorde van de deelvragen. Of haal eens de deelvragen uit elkaar en vraag de leerlingen wat een nuttige volgorde van deelvragen zou zijn om het probleem aan te pakken. Dat is ook een manier om de werkwijze van een wiskundige aan de orde te stellen in een 'gewone' les.

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld Doorman, M., Jonker, V. & Wijers, M. (2014). Het FIzier gericht op ... Wiskunde in beroepen. *Euclides*, 89(7).

[2] Het Primas-project: het bevorderen van onderzoekend leren (IBL) in wiskunde en de bèta-vakken in heel Europa (*https://primas-project.eu/*).

Over de auteurs

Luhuan Huang is aio bij het Freudenthal Instituut. Haar promotieonderzoek gaat over onderzoekend leren bij wiskunde en dan in het bijzonder de verschillen en overeenkomsten tussen ervaringen in China en in Nederland. E-mailadres: *l.huang@uu.nl.*
Michiel Doorman en Wouter van Joolingen begeleiden Luhuan bij haar onderzoek. Michiel is wiskundedidacticus en lid van het bestuur van de NVvW.
E-mailadres: *m.doorman@uu.nl.*
Wouter is hoogleraar didactiek van wiskunde en natuurwetenschappen en heeft een persoonlijke interesse in modelleren in het bèta-onderwijs.
E-mailadres: *w.r.vanjoolingen@uu.nl.*

VERSCHENEN

WISKUNDE VOOR BACHELOR EN MASTER, DEEL 4

Titel: Wiskunde voor bachelor en master, deel 4
Ondertitel: Vectorrekening en matrixrekening
Auteur: Anne Kaldewaij
Uitgever: Syntax media, Utrecht
ISBN: 978-94-9176-431-8
Prijs: € 29,00
(255 pagina's; paperback)

De eerste vijf hoofdstukken van deel 4 bevatten de basiskennis die nodig is om effectief met vectoren en matrices te kunnen rekenen. Hoofdstuk 1 tot en met 3 betreffen de vectorrekening: vectoren in het vlak, in de ruimte en in hogere dimensies. Naast de gebruikelijke notaties komen inproduct, uitproduct, oppervlakte, inhoud en oriëntatie uitgebreid aan de orde. Stelsels lineaire vergelijkingen komen in hoofdstuk 4 aan bod. Als oplossingsmethoden komen de eliminatiemethode en de regel van Cramer aan de orde. De matrixrekening is het onderwerp van hoofdstuk 5. Lineaire afbeeldingen worden hierbij als basis gebruikt. Het gebruik van determinanten, eigenwaarden en eigenvectoren wordt besproken met als belangrijke toepassing eigenwaarde-decomposities.
In de laatste twee hoofdstukken (hoofdstuk 6 en 7) wordt deze kennis toegepast op verschillende gebieden. Hoofdstuk 6 bevat twee keuzeonderwerpen die onafhankelijk van elkaar zijn. Het eerste onderwerp is meetkunde (orthogonale afbeeldingen), een basis die bijvoorbeeld nodig is bij technische aspecten van robotica. Het tweede onderwerp gaat over lineaire systemen in de praktijk, zoals modellen voor toestandsovergangen.
Een combinatie van differentiaalrekening en vectorrekening komt in hoofdstuk 7 aan bod. Dit hoofdstuk is technisch van aard en met name bedoeld voor de bètastudies. Onderwerpen zijn vectorfuncties, banen, parametriseringen, lijnintegralen en vectorvelden.

Alle stof wordt toegankelijk uitgelegd en toegelicht. Het boek bevat veel voorbeelden en een grote collectie opgaven om mee te oefenen. In het boek zijn de antwoorden van de opgaven opgenomen. Volledige didactische uitwerkingen van alle opgaven staan in een apart uitwerkingenboek, zie *deel 4 Uitwerkingen.*

VASTGEROEST

EEN DOT VAN EEN KANS

Ab van der Roest

Wiskundige denkactiviteiten die je overkomen. Je moet ze dan wel herkennen en vooral meenemen naar de bijeenkomst van je docent-ontwikkelteam (dot). Het overkwam Ab van der Roest.

Denkactiviteiten

In *Euclides* past natuurlijk geen beschouwing over het woord 'dot'. Maar in de omgeving waar ik opgroeide werd de uitdrukking 'een dot van een kans' soms gebruikt om aan te geven dat het om een heel mooi buitenkansje ging. Iets wat je zomaar overkomt en waar je snel gebruik van moet maken.

Deze gedachte kwam in me op toen we met ons dot bij elkaar waren. Met negen collega's van verschillende scholen uit Wageningen en omgeving vormen we een dot: een docentontwikkelteam, en de deelname hieraan is een dot van een kans. Nadat we een tweetal jaargangen nadachten over het organiseren van denkactiviteiten zijn we tot het inzicht gekomen dat denkactiviteiten je ook vaak overkomen. Je kunt goed nadenken over de inhoud en vooral over het begin van je les, maar daarna overkomen je veel dingen. Hierbij aansluiten geeft mogelijkheden tot denkactiviteiten. Sinds dit jaar ruimen we op onze bijeenkomsten tijd in om zulke 'hoogtepunten' uit onze lessen met elkaar te bespreken. Dit zijn zeker niet de slechtste momenten van onze bijeenkomst.

Stelling van een leerling

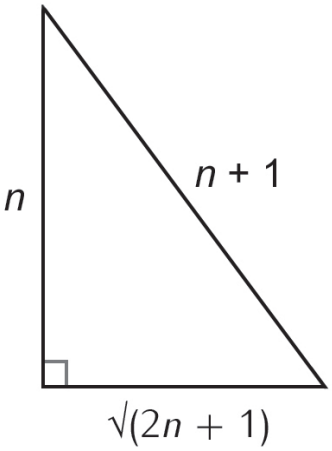
Een voorbeeld van Niels hield ons wel even bezig. Een leerling had tegen hem gezegd, toen hij met de stelling van Pythagoras bezig was: 'Mijnheer je hoeft toch helemaal niet te kwadrateren, je kunt gewoon optellen en dan de wortel trekken'. Dit veroorzaakte een denkactiviteit. In plaats van $c=\sqrt{a^2+b^2}$ krijg je dan $c=\sqrt{a+b}$. Pas op, je moet wel goed kijken wat je als a en b moet kiezen.

Dat kan niet goed zijn, is je eerste gedachte. Maar, hoe komt die leerling dan aan deze uitdrukking? Wel, hij gaf een paar voorbeelden: $3=\sqrt{4+5}$ en $5=\sqrt{12+13}$. Geef de leerling maar ongelijk.

Hoe je dit aanpakt is dan het onderwerp van gesprek. Een tegenvoorbeeld is snel gevonden: (8, 15, 17) of (6, 8, 10) voldoen aan Pythagoras, maar niet aan de stelling van de leerling. Je kunt dan stoppen, of de dot van de kans aangrijpen om wat algebra te doen. Wanneer klopt de stelling van de leerling?

Wanneer klopt het?

Een manier om pythagoreïsche drietallen te vinden kan met de afbeelding in figuur 1.



figuur 1

Noem een rechthoekszijdezijde n en de hypothenusa $n + 1$. Met de stelling van Pythagoras vind je dat de andere rechthoekszijde $\sqrt{2n+1}$ moet zijn. Beschouw nu de oneven kwadraten en je krijgt pythagoreïsche drietallen. Bijvoorbeeld als $2n + 1 = 121$, dan is $n = 60$ en je vindt dan (60, 61, 11). Hier klopt de stelling van de leerling weer, want $11=\sqrt{60+61}$.

Maar merk nu meteen op dat $\sqrt{n+n+1}=\sqrt{2n+1}$. Hiermee tonen we aan dat de stelling van de leerling altijd klopt voor de op deze manier gevonden drietallen.

Een iets ander bewijs gaat als volgt. Noem $\sqrt{2n+1}=a$, dan is $a^2 = 2n + 1$ en $n = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$. Gebruik nu de stelling van de leerling: neem de wortel van de som van twee zijdes: $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}+1 = a^2$ en constateer dat je na worteltrekken de derde zijde hebt.

Blijft over: zijn er andere Pythagoreïsche drietallen dan $(n, n + 1, \sqrt{2n+1})$ en zo ja hoe vinden we die? Ook dat is niet zo moeilijk te ontdekken, maar tijdens onze dot-bijeenkomst hebben we dat laten liggen.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

OLYMPIADEPUZZEL 94-7

DELEN MET REST

In deze jaargang vind je in nummers 1, 3, 5 en 7 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. We moedigen je daarom aan om de puzzel ook met je klas te proberen: met enig doorzettingsvermogen zal een groepje leerlingen deze puzzel misschien ook wel kunnen oplossen.

Birgit van Dalen
Quintijn Puite

Jan heeft een geheel getal van vijf cijfers in zijn hoofd (dus tussen de 10.000 en de 99.999). Dit getal heeft de volgende bijzondere eigenschappen als je gaat delen met rest:

- Als je het getal deelt door 20, houd je rest 18 over;
- Deel je het getal juist door 18, dan houd je rest 16 over;
- Deel je het getal juist door 16, dan houd je rest 14 over;
- Deel je het getal juist door 14, dan houd je rest 12 over;
- Deel je het getal juist door 12, dan houd je rest 10 over;
- Deel je het getal juist door 10, dan houd je rest 8 over;
- Maar als je het deelt door 22, dan gaat de deling wel op (rest 0).

Welk getal heeft Jan in zijn hoofd?
Stuur je oplossingen uiterlijk 1 augustus naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel 94-3

Voor de puzzel *Trap verven* hebben we acht inzendingen ontvangen. Bij deze puzzel ging het erom het aantal mogelijkheden te bepalen om een trap met de kleuren rood, wit en blauw te verven, waarbij geen twee opeenvolgende treden dezelfde kleur mochten hebben en bovendien gold: als drie opvolgende treden drie verschillende kleuren hadden, moest dit in de volgorde rood-wit-blauw. Wat bijna alle puzzelaars hadden opgemerkt, was dat de combinatie rood-wit-blauw maximaal één keer kon voorkomen. Voor een trap met drie kleuren waren hierdoor precies 12 mogelijkheden; voor een trap met twee kleuren waren er precies 6. Dit geeft in totaal dus 18 mogelijkheden.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de zeven inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Hans Linders.

vakbladeuclides.nl/947olympiadepuzzel

Verenigingsnieuws

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2019

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 2 november 2019.**
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.15 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.

Thema van de studiedag: Technieken in de wiskundeles

Bij het thema *Technieken in de wiskundeles* denk je misschien aan technieken als haakjes wegwerken, vergelijkingen oplossen en differentiëren. We leren dit soort technieken al decennialang aan onze leerlingen. Apparaten kunnen nu veel technieken overnemen. Wie leert er bijvoorbeeld nog het algoritme voor worteltrekken aan de leerlingen? Wat verandert er allemaal door die apparaten? En hoe kan een rekenmachine eigenlijk 2^{10} of $\sin 45^{\circ}$ uitrekenen?

Voor iedere techniek die we leerlingen willen leren, hebben we zelf een techniek nodig. De techniek van het vinden van een balans tussen oefenen en beheersen aan de ene kant en begrijpen, herkennen en toepassen in nieuwe situaties aan de andere kant. Dat zou je didactische technieken kunnen noemen. Denk ook aan flipping the classroom, gamification en formatief toetsen. Wat betekenen dergelijke technieken voor het wiskundeonderwijs? Tijdens de studiedag hopen we op inspirerende voorbeelden van docenten over nieuwe werkvormen, vormen van toetsen of didactische benaderingen. En dan kun je bovendien nog denken aan technologie in de wiskundeles en aan techniek als context voor het leren van wiskunde.

Heb je een idee voor een werkgroep en wil je een bijdrage aan de studiedag leveren?
Schroom dan niet en neem contact op met Lidy Wesker (*l.wesker@nvvw.nl*) of Michiel Doorman (*m.doorman@nvvw.nl*).

(Concept) Agenda jaarvergadering

10.00-11.00 uur – Jaarvergadering

1 Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange
2 Jaarrede van de voorzitter
3 Notulen van de jaarvergadering 2018
4 Jaarverslagen 2018/2019
  4.1 Jaarverslag van de NVvW
  4.2 Jaarverslag van *Euclides*
5 Financiën
  5.1 Jaarrekening en balans 2018/2019
  5.2 Verslag kascommissie en decharge van de penningmeester
  5.3 Vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6 Bestuursverkiezing
  Aftredend zijn: Erik van den Hout en Desiree van den Bogaart
  Desiree stelt zich herkiesbaar voor een nieuwe termijn.
  Het bestuur is op zoek naar twee à drie nieuwe bestuursleden. Belangstellenden kunnen informatie verkrijgen en/of hun belangstelling kenbaar maken bij de secretaris (*secretaris@nvvw.nl*)
7 Rondvraag
8 Sluiting

Programma studiedag (Tijdstippen onder voorbehoud)
11.00 – 11.15 Inleiding op de studiedag
11.15 – 12.00 Plenaire lezing
12.00 – 12.15 Pauze
12.15 – 13.05 Workshopronde 1A/lunch en markt
13.05 – 13.15 Wisseltijd
13.15 – 14.05 Workshopronde 1B/lunch en markt
14.05 – 14.15 Wisseltijd
14.15 – 15.05 Workshopronde 2
15.05 – 15.30 Wisseltijd
15.30 – 16.15 Plenaire voordracht en afsluiting

Iedereen volgt een workshop in ronde 1A óf 1B. De tijdsindeling van de studiedag biedt deelnemers ruim de gelegenheid voor lunch en marktbezoek.

Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 2 november 2019

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op 2 november 2019. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree (e-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*)

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2019

vr 23/8 t/m 24/8 vr 30/8 t/m 31/8

AMSTERDAM en EINDHOVEN

Vakantiecursus 'Deep Learning'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

vr 13/9

EINDHOVEN

Finale wiskunde olympiade 2019

za 02/11

VEENENDAAL

Jaarvergadering / studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 95

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	10 september 2019	17 juni 2019
2	29 oktober 2019	26 augustus 2019
3	17 december 2019	14 oktober 2019
4	28 januari 2020	18 november 2019
5	17 maart 2020	06 januari 2020
6	05 mei 2020	02 maart 2020
7	23 juni 2020	27 april 2020

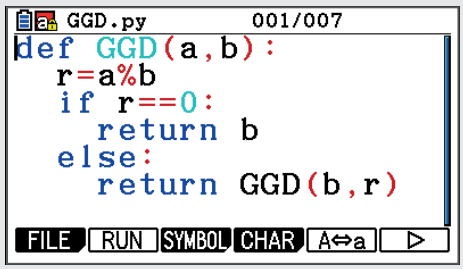
CASIO

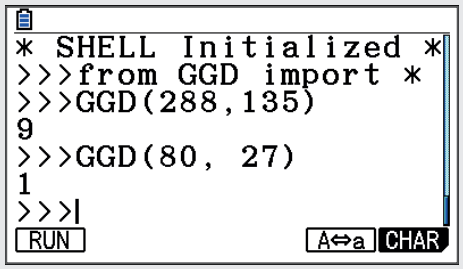
Casio fx-CG50

Vertrouwde functionaliteit, betrouwbaar en intuïtief te gebruiken

De Casio fx-CG50 heeft een moderne vormgeving, beschikt over een kleurendisplay met hoge resolutie en is voorzien van een makkelijk te gebruiken examenstand. Naast de vertrouwde toepassingen kunt u uw grafische rekenmachine nu ook gebruiken met een extra functionaliteit: programmeren in Python. Hiervoor hoeft u uw Casio fx-CG50 alleen te updaten naar OS versie 3.20. U vindt de update op edu.casio.com.

Programmeer in Python met de Casio fx-CG50





Bestel direct uw docentenexemplaar voor maar € 39,50*

Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer.

* Inclusief btw en verzending

GETAL & RUIMTE

Met gemak elke dag weer een effectieve maar leuke les geven?

Om alles uit de methode te halen organiseert Getal & Ruimte dit voorjaar gratis gebruikers-bijeenkomsten bij u in de buurt! Kijk voor meer informatie op noordhoffuitgevers.nl/gebruikers-bijeenkomstengetalenruimte.

Liever een gratis beoordelingspakket aanvragen? Ga naar **getalenruimte.noordhoff.nl**

Al 50 jaar bewezen kwaliteit

Noordhoff Uitgevers

Iedereen leert