Uitwerking puzzel 93-7 **Lieke de Rooij**
Bijzondere proniks en kwadraten **Wobien Doyer**

Deze puzzel was voor een groot deel gebaseerd op het uitgebreide onderzoek dat Frits Gobel heeft verricht over proniks: Getallen van de vorm $p(p + 1)$ met p geheel en positief. Daarvoor verdiende hij extra punten voor de ladder.

Allereerst zochten we 'primoriale' proniks $P(n) = n(n + 1)$, waarbij P het product is van een rijtje opvolgende priemgetallen, te beginnen bij 2. Tot en met $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ gaat dat goed, maar dat gaat niet zo door. De vraag was: Zijn er nog meer?

Opgave 1: Bepaal een grotere 'primoriale' pronik $P(n)$ en de bijbehorende n,

Dat was goed te doen met een gewone rekenmachine of zelfs zonder en is door alle inzenders gevonden: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 714 \cdot 715 = 510510$, dus $n = 714$.

Frits vond ook de grootste pronik met 10 verschillende cijfers: 9854632170, elk cijfer precies een keer, geen leidende 0. We bekijken alle mogelijke kwadraten en proniks die bestaan uit precies 10 verschillende cijfers, geen leidende 0. Stel we geven iemand van een van deze getallen, dus een kwadraat of een pronik, het cijfer dat staat op positie 0 (de eenheden). Kan hij dan weten of dat getal een pronik is of een kwadraat? Soms zal dat lukken, maar niet altijd. Gegeven was dat als alleen het cijfer op positie 0 bekend werd gemaakt je het niet kon weten. Wel nadat ook het cijfer op positie 1 bekend werd gemaakt.

Opgave 2: Weet je het ook en zo ja welke cijfers stonden op positie 0 en 1? Geef daarbij ook aan hoe je tot dat antwoord bent gekomen, en dat zonder computer of geavanceerde rekenmachine.

Iedereen wist te bepalen dat het cijfer op positie 0 alleen een 6 kon zijn geweest. Want alleen 0 of 6 kunnen de eenheden zijn van zowel een kwadraat als van een pronik. En het cijfer 0 op positie 0 kon worden uitgesloten, omdat een kwadraat eindigend op 0 altijd op minstens 2 nullen eindigt, dus geen 10 verschillende cijfers.
Dus er stond een 6 op positie 0.

Na bekendmaking van het cijfer van de tientallen zou je het volgens de vraagstelling moeten weten. Wat was dan dat cijfer op positie 1, met een 6 op positie 0?

Dit kunnen we berekenen:
Proniks op 6 zijn $(10a + 2) \cdot (10a + 3)$ of $(10a + 7)(10a + 8)$.
$(10a + 2).(10a + 3) = 100a^2 + 50a + 6$. Het cijfer op positie 1 wordt dan bepaald door de eenheden van $5a$, dus een 0 of een 5.
En dat geldt ook voor $(10a + 7)(10a + 8) = 100a^2 + 150a + 56$, waarbij de tientallen worden bepaald door $5a + 5$, dus op positie 1 staat ook een 0 of een 5.
Kwadraten met op positie 0 een 6 zijn $(10a + 4)^2$ of $(10a + 6)^2$.
$(10a + 4)^2 = 100a^2 + 80a + 16$, dus een oneven cijfer $(8a+1)$ op positie 1.
Ook met $(10a + 6)^2 = 100a^2 + 120a + 36$ is het cijfer op positie 1 $(12a + 3)$ oneven.

Conclusie: Het cijfer op positie 1 kon alleen een 0 of oneven zijn geweest.
Met een 0 was het een pronik. Met een 1, 3, 7 of 9 was het een kwadraat. Alleen met een 5 bestaat er nog twijfel. Dus die was het niet.

Harm Bakker zocht met de computer uit hoeveel cijfers je nog meer zou moeten weten als het getal eindigt op …56.
De kampioenen onzekerheid:
?????????6
???????56
??????256
?????8256
Nog steeds niet duidelijk of het een pronik of een kwadraat gaat worden.
Pas bij het vijfde cijfer van achteren splitst het universum:
19374**08256 = 44016**$^{\mathbf{2}}$ en 37190**48256 = 60984**$^{\mathbf{2}}$ zijn kwadraten;
30417**98256 = 55152 · 55153** is een pronik.

De volgende vraag was: Bestaan er kwadraten of proniks die slechts uit één soort cijfers bestaan, dus bijvoorbeeld enkel vieren: 444...44 ? We beperken ons dan tot getallen van meer dan één cijfer. Er zijn negen opties te onderzoeken (allemaal nullen telt niet mee).

Opgave 3
a: Onderzoek voor zowel kwadraten als voor proniks welke cijfers we daarbij kunnen uitsluiten en licht je antwoorden toe.

Proniks:
Proniks eindigen alleen op 0, 2 of 6. Allemaal nullen telt niet mee. Allemaal zessen? We zagen al dat een pronik die eindigt op een 6 altijd een oneven cijfer heeft op positie 1, dus geen 6. Blijft over allemaal tweeën.
Kwadraten:
We zagen al dat die eindigen op 0, 1, 4, 5, 6 of 9.
Allemaal nullen telt niet mee.
Allemaal enen kan niet: Kan zijn $(10a + 1)^2 = 100a^2 + 20a + 1$ of
$(10a + 9)^2 = 100a^2 + 180a + 81$. In beide gevallen is het cijfer op positie 1 even (de eenheden van $2a$ of van $8a + 8$), dus geen 1.
Allemaal vieren of negens kan niet: Gerard Bouwhuis redeneerde: Een getal met allemaal vieren of negens is te schrijven als een kwadraat (4 of 9) keer een getal met allemaal enen. En een getal met allemaal enen is geen kwadraat. Daarmee zijn vieren en negens ook uitgesloten.
Allemaal vijven kan niet: $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$. Het cijfer op positie 1 is dan altijd een 2, dus geen 5.
Blijft over een getal met allemaal zessen. Maar we zagen in opgave 2 al dat kwadraten op 6 een oneven cijfer hebben op positie 1, dus die kunnen we ook uitsluiten. Er blijft niets over.

Voor de cijfers die hierbij niet zijn uitgesloten is het wellicht mogelijk om een pronik of kwadraat te vinden die begint met een aantal (4) gelijke cijfers, en wel net zoveel als je zou willen. Wij bedoelden 4 gelijke cijfers op de posities 0 tot en met 3, dus de eenheden tot en met de 1000-tallen, maar sommigen interpreteerden dat anders. We hebben beide interpretaties goed gerekend.

3b: Bepaal (zo mogelijk) zowel voor kwadraten als voor proniks een voorbeeld waarbij op de eerste 4 posities gelijke cijfers staan. Toon aan hoe je dit hebt bepaald, want het is niet de bedoeling dat je dit programmeert met de computer of rekenmachine.

Kwadraten met 4 gelijke cijfers op posities 0 tot en met 3 hebben we al uitgesloten, en we zagen dat zulke proniks alleen kunnen eindigen op tweeën. Dus we hoeven alleen proniks te zoeken van de vorm …2222
Met de pronik $P = n(n + 1)$ moet dan gelden dat op positie 0 van n een 1, een 3 of een 6 moet staan. En dan blijkt dat de volgende cijfers van n op een unieke manier vastliggen. Meerdere inzenders deden dit door systematisch de verschillende mogelijkheden uit te werken. We geven hier als voorbeeld de uitwerking van Harm Bakker.
1) $n = 10a + 1$; p = $(10a + 1)(10a + 2) = 100a^2 +30a + 2$.
Het cijfer op positie 1 wordt gegeven door $(3a)$ mod 10.
Dit is een 2 als $a = 4$.
2) $n = 100b + 41$; $(100b + 41)(100b + 42) = 10^4b^2 + 8300b + 1722 =$
$10^4b^2 +1000(8b + 1) + 100(3b + 7) + 22$.
Het cijfer op positie 2 wordt gegeven door $(3b + 7)$ mod 10. Dat is een 2 als b mod 10 = 5.
3) $n = 1000c + 541$
$(1000c + 541)(1000c + 542) = 10^6b^2+ 1083000c + 293222 = 10^6b^2+ 10000(108c + 29) +$
$1000(3c + 3) + 222$ Het cijfer op positie 3 wordt gegeven door $(3c + 3)$ mod 10. Dat is een 2 als c mod 10 = 3. Waarmee we een waarde van P en n hebben gevonden die voldoet aan de eis: $P = 3541 \cdot 3542 = 12542222$, met $n = 3541$. Eén voorbeeld was genoeg.

Meerdere inzenders die begonnen o.a. met $P = (10a + 3)(10a + 4)$ of $P = (10a + 6)(10a + 7)$ vonden de mooie oplossingen $P= 3333 \cdot 3334 = 11112222$ of $P = 6666 \cdot 6667 = 44442222$. Dit geeft dan meteen een oplossing voor beide interpretaties van de opdracht: 4 gelijke cijfers aan het begin of eind van een pronik. Dat vonden trouwens meerdere mensen die eigenlijk op zoek waren naar vier gelijke cijfers aan de linkerkant van een pronik.

Frits stuurde ons ook een serie proniks die te genereren zijn met een machtsfunctie:
Gegeven de functie $f(n) = (k^n - 1)/4$. Voor $k = 9$ is $f(n)$ voor alle gehele positieve waarden van n een pronik. En bovendien geldt de recursie $f(n + 1) = 9 \cdot f(n) + s$.

Opgave 4
a: Bewijs dit en bepaal s.
b: Voor welke andere waarden van k geldt dit ook en welke s hoort daar bij?

We geven als voorbeeld direct een algemeen bewijs en oplossingen, zoals o.a. Jan Verbakel dat deed.

4a+4b
Gegeven: $f(n) = (k^n - 1)/4$. We tonen aan dat als $k = q^2$ met q en dus ook k oneven, dan is $f(n)$ een pronik. Dan geldt: $4 \cdot f(n)=q^{2n} - 1=(q^n - 1)(q^n + 1)$, dus $f(n)=(q^n - 1)/2 \cdot (q^n + 1)/2$. Omdat q oneven is zijn beide factoren geheel en verschillen 1. Dus $f(n)$ is dan een pronik. Dus het

geldt niet alleen voor $k = 9$, maar ook voor alle andere **oneven kwadraten**!

Bewijs van de recursie: $f(n+1) = k \cdot f(n) + s$ herschrijven we tot: $s = f(n+1) - k \cdot f(n)$:

$$s = \quad f(n+1) - k \cdot f(n) = \frac{k^{n+1}-1}{4} - k \cdot \frac{k^{n}-1}{4} = \frac{k^{n+1}-1-k(k^{n}-1)}{4} = \frac{k^{n+1}-1-k^{n+1}+k}{4} = \frac{k-1}{4}$$

Dus $s = (k - 1)/4$, waarbij k een oneven kwadraat.

Voor $k = 9$ hebben we dan $s = 2$.