Bijlage bij het artikel Zaagtandfuncties

Jack van der Elsen

Lemma 0

$f_n(x) = f_n(-x)$

Bewijs:

Met volledige inductie:

$f_0(x) = |x| = |-x| = f_0(-x)$.

Stel bewezen tot en met n.

Dan $f_{n+1}(x) = |\ 1 - |\ 1 - f_n(x)|\ | = |\ 1 - |\ 1 - f_n(-x)|\ | = f_{n+1}(-x)$.

Lemma 1

Voor alle $x \geq 2n$: $f_n(x) = x - 2n$

Gevolg: Voor alle $k \geq 0$: $f_n(2n + k) = k$

Bewijs:

Met volledige inductie:

Voor $n = 0$: $f_0(x) = |x| = x = x - 2 \cdot 0$.

Stel bewezen tot en met n.

Te bewijzen: Voor alle $x \geq 2(n + 1)$: $f_{n+1}(x) = x - 2(n + 1) = x - 2n - 2$.

$f_{n+1}(x) = |\ 1 - |\ 1 - f_n(x)|\ | = |\ 1 - |\ 1 - (x - 2n)|\ | = |\ 1 - |\ 1 - x + 2n|\ | = (1 - x + 2n \leq 0) =$

$|1 - (-1 + x - 2n)| = |\ 2 - x + 2n| = x - 2n - 2$.

$g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)} (x - \text{Floor}(x) - ½)$

Lemma 2

Voor alle $x \in$ R: $g(x) = g(-x)$

Bewijs:

Voor het bewijs onderscheiden we twee gevallen: $x \in$ Z en $x \in$ R \ Z.

Geval 1: $x \in$ Z.

Dan $g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)} (x - \text{Floor}(x) - ½) = ½ + (-1)^x (x - x - ½) =$

$½ + (-1)^x (- ½)$.

En $g(-x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(-x)}$ ($-x$ – Floor($-x$) – ½) = ½ + $(-1)^{-x}$ ($-x$ – ($-x$) – ½) =

½ + $(-1)^{x}$ (– ½). Dus $g(x) = g(-x)$.

Geval 2: x ε R \ Z.

Dan is er een n ε Z zodat $n < x < n + 1$ en dus ook $-n - 1 < -x < -n$.

$g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)}$ (x – Floor(x) – ½) = ½ + $(-1)^{n}$ ($x - n$ – ½) =

½ + $(-1)^{n-1}$ ($-x + n$ + ½) = ½ + $(-1)^{-n-1}$ ($-x + n + 1$ – ½) =

½ + $(-1)^{\text{Floor}(-x)}$ ($-x$ – Floor($-x$) – ½) = $g(-x)$.

<u>Lemma 3</u>

Voor alle x ε R: $0 \le g(x) \le 1$

Bewijs:

Er geldt dat $0 \le x$ – Floor(x) < 1. En dus geldt dat – ½ ≤ x – Floor(x) – ½ < ½.

En dus zeker: -½ <= $(-1)^{\text{Floor}(x)}$ (x – Floor(x) – ½) ≤ ½.

Dan ook: 0 ≤ ½ + $(-1)^{\text{Floor}(x)}$ (x – Floor(x) – ½) ≤ 1. Dus $0 \le g(x) \le 1$.

<u>Lemma 4</u>

Voor alle x ε R: $g(x + 1) = 1 - g(x)$ (en dus: $g(x + 2) = g(x)$)

Bewijs:

$g(x + 1)$ = = ½ + $(-1)^{\text{Floor}(x+1)}$ ($x + 1$ – Floor($x + 1$) – ½) =

= ½ - $(-1)^{\text{Floor}(x)}$ (x – Floor(x) – ½) = 1 - ½ - $(-1)^{\text{Floor}(x)}$ (x – Floor(x) – ½) =

= 1 – (½ + $(-1)^{\text{Floor}(x)}$ (x – Floor(x) – ½)) = $1 - g(x)$.

Verder is dan $g(x + 2) = 1 - g(x + 1) = 1 - (1 - g(x)) = g(x)$.

<u>Lemma 5</u>

g is continu op R

Bewijs:

Voor het bewijs onderscheiden we twee gevallen: x ε R \ Z en x ε Z.

Geval 1: x ε R \ Z.

Voor elke x ε R \ Z is er een m ε Z zodat $m < x < m + 1$ en dus Floor(x) = m.

Dan $g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)}$ (x – Floor(x) – ½) = ½ + $(-1)^{m}$ ($x - m$ – ½) voor x ε < m, m + 1>.

Dit is een gewone lineaire functie op < m, m + 1> dus continu op < m, m + 1>.

Geval 2: x ε Z.

Blijft dus over om aan te tonen dat g continu is voor x ε Z.

Dan Floor(x) = x en $g(x) = ½ + (-1)^x (x – x – ½) = ½ + (-1)^x (– ½)$.

Zij ∂ ε R en ∂ > 0.

lim (∂ -> 0) $g(x + ∂)$ = lim (∂ -> 0) $½ + (-1)^{\text{Floor}(x+∂)} (x + ∂ – \text{Floor}(x + ∂) – ½)$ =

$½ + (-1)^x (x – x – ½) = ½ + (-1)^x (– ½) = g(x)$.

lim (∂ -> 0) $g(x - ∂)$ = lim (∂ -> 0) $½ + (-1)^{\text{Floor}(x-∂)} (x - ∂ – \text{Floor}(x - ∂) – ½)$ =

$½ + (-1)^{x-1} (x – (x – 1) – ½) = ½ + (-1)^{x-1} . ½ = ½ + (-1)^x (– ½) = g(x)$.

<u>Stelling</u>

Voor alle x ε R, n ε N met $|x| ≤ 2n + 1$:

$g(x) = f_n(x)$

Bewijs:

Volgens Lemma 0 ($f_n(x) = f_n(-x)$) en lemma 2 ($g(x) = g(-x)$) is het voldoende de stelling te bewijzen voor $x ≥ 0$.

Dus te bewijzen: $g(x) = f_n(x)$ voor x ε R met $0 ≤ x ≤ 2n + 1$.

Het bewijs kan gaan met volledige inductie.

$n = 0$: $f_0(x) = |x| = x ≤ 1$.

Stel $x < 1$. Dan $g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)} (x – \text{Floor}(x) – ½) = ½ + (-1)^0 (x – 0 – ½) = ½ + x – ½ = x = f_0(x)$.

Stel $x = 1$. Dan $g(1) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(1)} (1 – \text{Floor}(1) – ½) = ½ + (-1)^1 (1 – 1 – ½) = ½ + ½ = 1 = f_0(1)$.

Stel bewezen tot en met n.

Te bewijzen: Voor alle $0 ≤ x ≤ 2n + 3$ geldt $g(x) = f_{n+1}(x)$.

Voor $x < 2n + 1$:

$g(x) = f_n(x)$ en

$f_{n+1}(x) = | 1 - | 1 - f_n(x)|| = |1 - | 1 – g(x)|| =$ (lemma 3: $0 ≤ g(x) ≤ 1$) $= | 1 – (1 – g(x))| =$

$|g(x)| =$ (lemma 3) $= g(x)$.

Voor $2n + 1 ≤ x < 2n + 2$:

Volgens lemma 1:

$f_{n+1}(x) = | 1 - | 1 - f_n(x)|| = |1 - | 1 – (x – 2n)|| = |1 - |2n + 1 – x|| = |1 – (-2n –1 + x)| =$

$|2n + 2 - x| = 2n + 2 - x$.

$g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)} (x - \text{Floor}(x) - ½) = ½ + (-1)^{2n+1} (x - (2n + 1) - ½) = ½ - (x - 2n - 1 - ½) = 2n + 2 - x$.

Voor $2n + 2 \leq x < 2n + 3$:

Volgens lemma 1:

$f_{n+1}(x) = x - 2(n + 1) = x - 2n - 2$.

$g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)} (x - \text{Floor}(x) - ½) = ½ + (-1)^{2n+2} (x - (2n + 2) - ½) = ½ + (x - 2n - 2 - ½) = x - 2n - 2$.

Voor $x = 2n + 3$:

Volgens lemma 1:

$f_{n+1}(x) = x - 2(n + 1) = 2n + 3 - 2n - 2 = 1$.

$g(x) = g(2n + 3) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(2n+3)} (2n + 3 - \text{Floor}(2n+3) - ½) = ½ - (- ½) = 1$.