EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Statistiek met historische data

Vakoverstijging: prijselasticiteit wiskundig bekeken

In de voetsporen van Archimedes

Biljarten op een ronde tafel

NR.2

JAARGANG 94 - NOVEMBER 2018

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

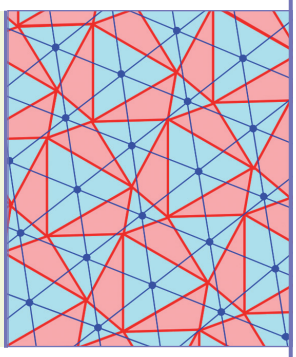
INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 94 NR.2

IN DIT NUMMER

DE WORTELS VAN DE WISKUNDE
Desiree van den Bogaart
4

DE STELLING VAN NAPOLEON
Martin Kindt
8



OVER MONDRIAAN
Jan Aarts
12

PRIJSELASTICITEIT
EEN ECONOMISCH BEGRIP WISKUNDIG BEKEKEN
Ab van der Roest
Wilco van Veldhuizen
13

PAST PRECIES II
Maarten van Hoven
Marten Klok
Gerardo Soto y Koelemeijer
16

DE HOEKSTREEP
GETALLETJES
Jan Beuving
18

VIJF VRAGEN AAN ..
Henk Rozenhart
19

WIS EN WAARACHTIG
21

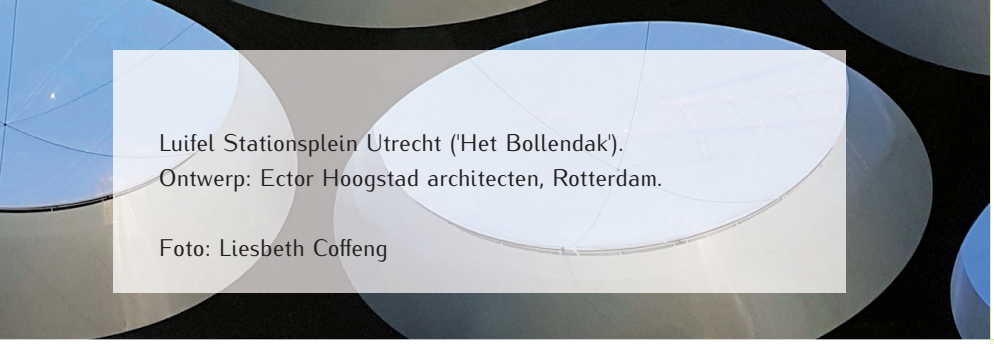
50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?
DEEL 2
Jos Remijn
22

ARCHIMEDES, OPPERVLAKTE EN INHOUD VAN DE BOL
Bert Boon
26

HET FIZIER GERICHT OP..
Mieke Abels
30

UIT DE PRAKTIJK
Hugo Duivesteijn
31

BOEKBESPREKING
EEN VERKENNING VAN KROMMEN
Jacques Jansen
32



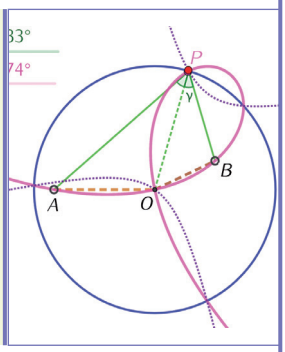
Luifel Stationsplein Utrecht ('Het Bollendak').
Ontwerp: Ector Hoogstad architecten, Rotterdam.

Foto: Liesbeth Coffeng

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

ZAAGTANDFUNCTIES
Jack van der Elsen
35

REFURBISHED BILJART
Fred Muijrers
37



WERELDWISKUNDEFONDS IN UGANDA
Johannes Holwerda
Jerry Dugdale
40

VERENIGINGSNIEUWS
NOTULEN VAN DE NVVW-JAARVERGADERING
42

KLEINTJE DIDACTIEK
Lonneke Boels
44

PUZZEL
Lieke de Rooij
Wobien Doyer
45

SERVICEPAGINA
46

Kort vooraf

Is de Riemann-hypothese nu wel of niet bewezen? De stand van zaken tijdens het schrijven van dit Kort Vooraf is dat Michael Atiyeh, een 89-jarige Britse wiskundige, een lezing hield in Heidelberg waarin hij claimde het bewijs te hebben gevonden. Een 'eenvoudig' bewijs zelfs. Maar hij gaf het nog niet prijs en dat zal toch echt moeten gebeuren, wil hij in aanmerking komen om in de rubriek Wis en Waarachtig vermeld te worden. En heeft het bollendak bij station Utrecht CS dat de omslag siert, de Nationale Staalprijs gewonnen? Bij het verschijnen van deze *Euclides* is dat inmiddels bekend. Ik gok op ja, al was het maar vanwege de prachtige wiskunde die in dit dak zit: 'Het project betreft een stalen dak van 430 ton, op circa 31 m boven maaiveld, gedragen door zeven ongeschoorde kolommen, die tevens zorgen voor de stabiliteit. Maximale afmetingen zijn 68 x 72 m, de grootste overspanning meet 32 m en de grootste uitkraging van het dak is maar liefst 18 m. Het dak overkapt in totaal zo'n 3.600 m^2 en weegt slechts 118 kg/m^2 doordat een monocoque systeem toegepast is.' Dit is te lezen op de website van de Nationale Staalprijs, waar ook alle bouwtekeningen zijn te vinden. Laat je eens inspireren om daar mooie (toets)opgaven van te maken... Henk Rozenhart, voorzitter van de redactie van de *Euclides* had een idee voor een nieuwe rubriek 'Vijf vragen aan ...'. We laten iemand vijf vragen beantwoorden en vragen hem of haar om het stokje door te geven. Uiteraard vroeg de redactie meteen: hoe stel je je dat dan voor? Vandaar dat Henk het spits afbijt in 'Vijf vragen aan ...'. Vast herkenbaar in tal van wiskundesecties: je komt met een plan en dan mag je het zelf uitvoeren. Deze stelling is overigens ook niet bewezen.

Tom Goris

WORTELS VAN DE WISKUNDE

Desiree van den Bogaart

11: HET DUIDEN VAN DATA

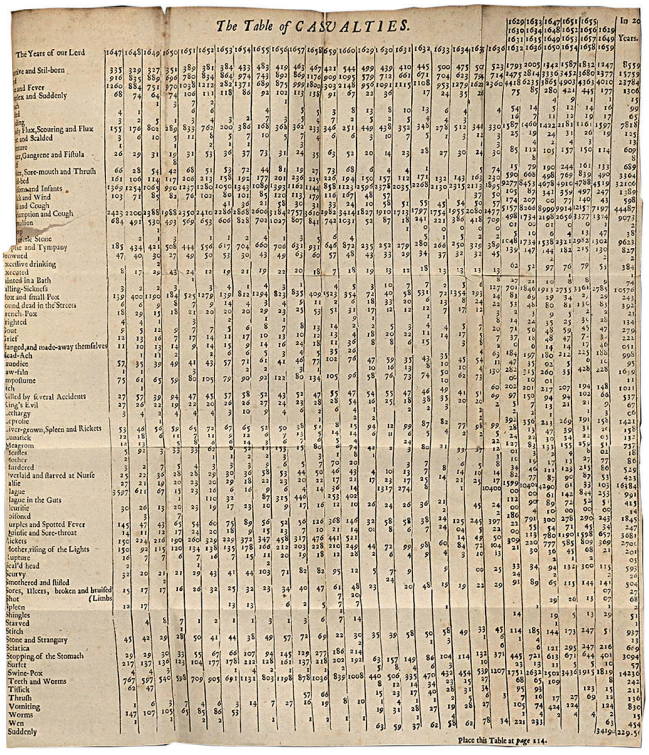
In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: statistiek aan de hand van oude gegevens.

Inleiding

In het meest recente examenprogramma havo/vwo dat een paar jaar geleden is ingevoerd, heeft een duidelijke verschuiving plaatsgevonden in het domein statistiek. Waar eerst de kansrekening een prominente plaats had, is het nu de interpretatie van datasets die een centrale plaats inneemt. Dit is een weerspiegeling van ontwikkelingen in de maatschappij, waarbij het belang van big data steeds groter wordt.
In de onderbouw havo/vwo en de bovenbouw van het vmbo is het werken met datasets ook niet onbekend. Het is een geliefd onderwerp voor bijvoorbeeld praktische opdrachten. Leerlingen kunnen zelf data verzamelen, bijvoorbeeld via een enquête of online, over een onderwerp dat hun interesse heeft, en die data grafisch weergeven en liefst ook een beetje interpreteren. Een klassieker in dit genre is de Nationale Doorsnee, een onderbouwproject uit 2000 dat door het Freudenthal Instituut is ontwikkeld en uitgevoerd in samenwerking met het CBS, waarmee de gemiddelde leerling in kaart werd gebracht. Een andere populaire context voor het bedrijven van statistiek is sport, en sinds een aantal jaar levert ook de Top 2000 (met dank aan Tom Goris) een schat aan data voor gebruik in de wiskundeles.

Sterftecijfers

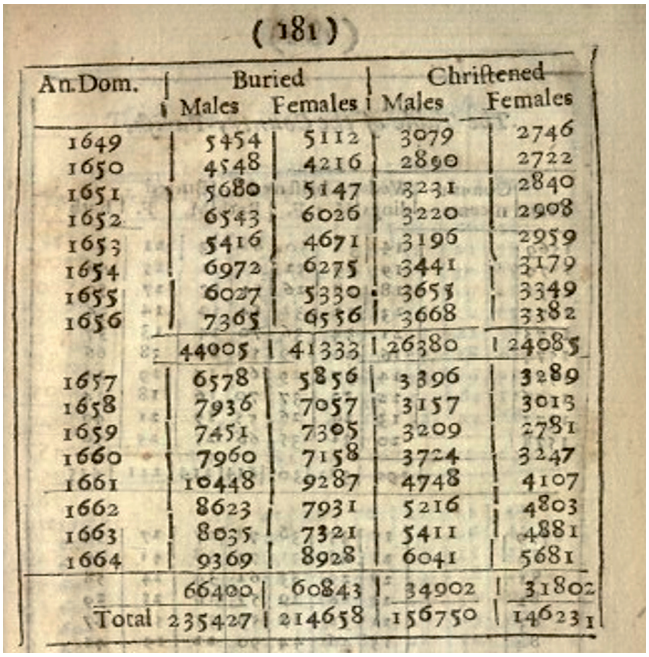
Historisch gezien waren de data waarmee het vakgebied statistiek is ontwikkeld een stukje grimmiger van aard. De eerste publicatie op het gebied van statistiek dateert uit de zeventiende eeuw en had betrekking op de sterftecijfers van de stad Londen. John Graunt schreef (in samenwerking met William Petty) *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*[1]. De eerste versie van dit boek is uit 1622, maar daarna zijn nog vele versies gepubliceerd, steeds aangevuld met de meeste recente cijfers. *De Bills of Mortality* waren lijsten die wekelijks en jaarlijks werden gepubliceerd in Londen (en later ook in andere grote steden), waarin de sterftecijfers en bijbehorende doodsoorzaken werden weergegeven op basis van de begrafenissen die in die periode hadden plaatsgevonden. In figuur 1 is een fragment van zo'n lijst te zien. Graunt vatte de lijsten samen in tabellen, zie als voorbeeld figuur 2, formuleerde patronen die hij waarnam en gebruikte de cijfers om een schatting te maken van het aantal inwoners van de stad Londen. Hij gebruikte daarbij ook geboortecijfers en een stadsplattegrond.


The Table of CASUALTIES.

figuur 1 *Bills of Mortality*, 17e eeuw

Gemiddelde mens

Het woord statistiek komt overigens van het woord staat: het was de wetenschap waarmee vanaf de achttiende eeuw de staat werd bestudeerd. In de negentiende eeuw vonden statistische methodes hun weg in de sociale wetenschappen. De Belg Adolphe Quetelet was een



(181)

An. Dom.	Buried Males	Buried Females	Christened Males	Christened Females
1649	5454	5112	3079	2746
1650	4548	4216	2890	2722
1651	5680	5147	3231	2840
1652	6543	6026	3220	2908
1653	5416	4671	3196	2959
1654	6972	6275	3441	3179
1655	6027	5330	3655	3349
1656	7365	6556	3668	3382
	44005	41333	26380	24085
1657	6578	5856	3396	3289
1658	7936	7057	3157	3013
1659	7451	7305	3209	2781
1660	7960	7158	3724	3247
1661	10448	9287	4748	4107
1662	8623	7931	5216	4803
1663	8035	7321	5411	4881
1664	9369	8928	6041	5681
	66400	60843	34902	31802
Total	235427	214658	156750	146231

figuur 2 Graunts *Observations*, vijfde editie uit 1676

pionier van deze activiteiten. Voor wie meer hierover wil lezen, zie onder andere Schets 22 van Wortels van de wiskunde[2]. Quetelet gebruikte de Gaussische verdeling, die ontwikkeld was om de verdeling van meetfouten weer te geven, om uitspraken te doen over de gemiddelde mens. Daarmee kreeg de naamgeving normale verdeling meteen een ongewenste lading, die het tot op de dag van vandaag nog steeds met zich meedraagt: als je te ver afwijkt van het gemiddelde, ben je niet normaal. Rekenen met lengte en gewicht van kinderen uit je eigen klas is altijd een beetje linke soep, hoewel het natuurlijk ook weer aanleiding kan geven tot interessante discussies over gezonde voeding en schoonheidsidealen. In plaats daarvan is het gebruiken van een oude tabel zoals in figuur 3 misschien veiliger.

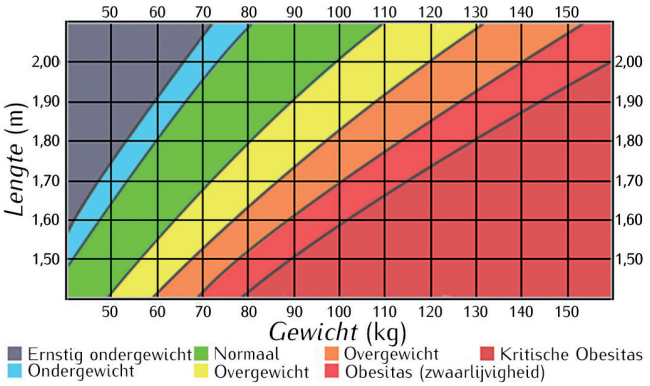
Zaken die je leerlingen bijvoorbeeld zouden kunnen opvallen aan deze tabel: de tabel begint bij de lengte en het gewicht bij geboorte; de lengte is in millimeters nauwkeurig en het gewicht in tientallen grammen; er zijn minima en maxima gegeven bij elke leeftijdscategorie. Ze kunnen ook zelf berekeningen uitvoeren met deze data, zoals centrum- en spreidingsmaten berekenen, en diagrammen maken.

In de vierde kolom *verhouding tussen gewicht en lengte* is simpelweg de deling van de eerste door de tweede uitgevoerd. Quetelet is ook de bedenker van de zogenaamde *Body Mass Index* (BMI), waarbij het gewicht wordt gedeeld door het kwadraat van de lengte, maar die berekening heeft hij hier dus nog niet toegepast. Je zou je leerlingen de BMI van de mannen uit de negentiende eeuw kunnen laten berekenen, en vergelijken met de (moderne) grafiek in figuur 4. Ook hier zie je weer een

Uebersicht des Wuchses und des Gewichts beim männlichen Geschlecht in den verschiedenen Lebensaltern.

Alter.	Wuchs.	Gewicht.	Verhältn. des Gewichts zu dem Wuchse.	Beobachteter Wuchs. Maxim.	Beobachteter Wuchs. Minim.	Beobachtetes Gewicht. Maxim.	Beobachtetes Gewicht. Minim.
	Meter.	Kilogr.		Meter.	Meter.	Kilogr.	Kilogr.
Geburt.	0,496	3.20	6,19	0,532	0,438	4,50	2,34
1 Jahr	0,696	10,00	14,20	0,750	0,682	11,00	9,00
2 Jahre	0,797	12.00	15,00	0,824	0,730	13,50	10,50
3 „	0,860	13,21	15,36	0,875	0,840	13,60	12,10
4 „	0,932	15.07	16,32	0,965	0,840	18,20	12,50
5 „	0,990	16.70	16,98	1,080	0,915	18,50	14,00
6 „	1,046	18,04	17,44	1,115	0,960	20,40	15,80
7 „	1,112	20,16	18,31	1,162	1,109	24,50	17,20
8 „	1,170	22,26	18,92	1,260	1,120	28,50	19,00
9 „	1,227	24.09	19,68	1,325	1,150	29,00	22,20
10 „	1,282	26,12	20,37	1,325 *)	1,163	32,00	22,70
11 „	1,327	27,85	21,58	1,405	1,215	33,80	25.00
12 „	1,359	31,00	22,80	1,450	1,270	36,30	25,00
13 „	1,403	35,32	25,30	1,490	1,300	39,50	34,60
14 „	1,487	40,50	27,49	1,630	1,330	45,00	37,00
15 „	1,559	46,41	29,88	1,658	1,380	61,50	37,00
16 „	1,610	53,39	33,00	1,730	1,430	61,50	40,00
17 „	1,670	57,40	34.25	1,790	1,467	65,50	45,00
18 „	1.700	61,26	35,67	1,790	„	67,00	45,00
19 „	1,706	63,32	37,00	1,800	„	70,00	48,20
20 „	1,711	65,00	37,99	1,838	„	72,70	„
25 „	1,722	68,29	39,66	1,890	„	98,50	„
30 „	1,722	68.90	40,02	„	„	„	„
40 „	1,713	68,81	40,03	„	„	„	„
50 „	1,674	67,45	40,14	„	„	„	„
60 „	1,639	65,50	40,01	„	„	„	„
70 „	1,623	63,03	38,83	„	„	„	49,1
80 „	1,613	61,22	37,96	1,820	1,467	83,0	49,7

figuur 3 Lengte en gewicht van mannen uit de negentiende eeuw[3]



figuur 4 Grafiek met indeling van BMI

voorbeeld van hoe het gebruik van data de interpretatie ervan kan veranderen. Quetelet introduceerde zijn BMI als *beschrijvende* statistiek, maar door er nu categorieën met labels als 'ondergewicht' en 'ernstig overgewicht' aan te hangen, krijgt het meer een *voorschrijvend* karakter.

Lichaamsmaten

De tweede bron die ik wil bespreken, is afkomstig van het beroemde onderzoek dat Freudenthal en Sittig uitvoerden in 1947 in opdracht van winkelketen De Bijenkorf. Er was behoefte aan een nieuw uniform maatsysteem voor de kleding. Bij een groep van 5001 vrouwen werden vijftien

TI-SmartView™ USB-stick

De TI-SmartView™ CE-software op USB-stick: direct klaar voor gebruik zonder installatie!

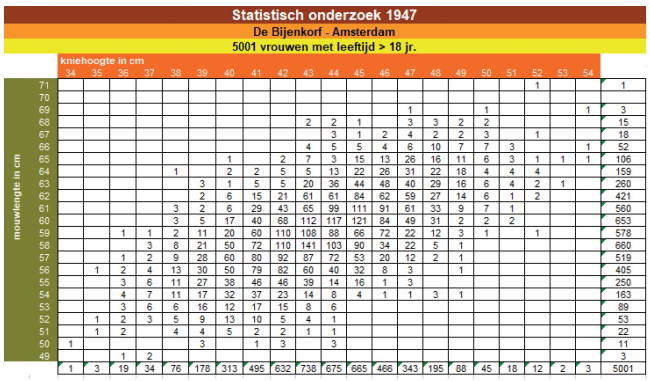
Gratis USB-stick met TI-SmartView™ CE Software

De TI-SmartView™ CE is de interactieve emulator software van de TI-84 Plus CE-T. Deze mobiele oplossing stelt leraren in staat de TI-SmartView™ CE software te gebruiken op elke computer zonder deze vooraf te installeren. Ideaal voor demonstratie van wiskundige concepten in de klas.

Alleen in 2018 nog gratis te bestellen op

education.ti.com/nederland

Texas Instruments

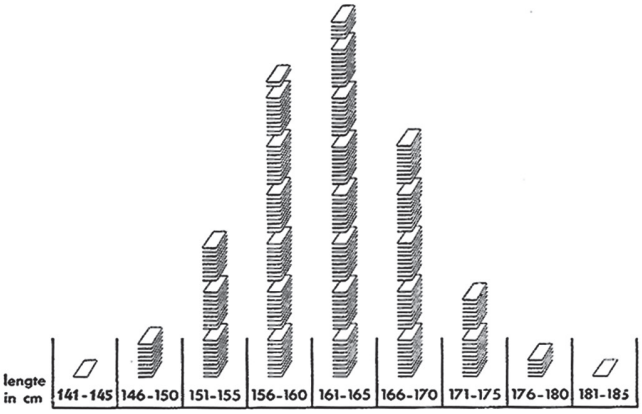


Statistisch onderzoek 1947
De Bijenkorf - Amsterdam
5001 vrouwen met leeftijd > 18 jr.

mouwlengte in cm \ kniehoogte in cm	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
71																			1			1
70																						
69														1			1				1	3
68										2	2	1		3	3	2	2					15
67											3	1	2	4	2	2	3		1			18
66										4	5	5	4	6	10	7	7	3			1	52
65							1		2	7	3	15	13	26	16	11	6	3	1	1	1	106
64					1		2	2	5	5	13	22	26	31	22	18	4	4	4			159
63						3	1	5	5	20	36	44	48	40	29	16	6	4	2	1		260
62						2	6	15	21	61	61	84	62	59	27	14	6	1	2			421
61					3	2	6	29	43	65	99	111	91	61	33	9	7	1				560
60					3	5	17	40	68	112	117	121	84	49	31	2	2	2				653
59			1	1	2	11	20	60	110	108	88	66	72	22	12	3	1		1			578
58				3	8	21	50	72	110	141	103	90	34	22	5	1						660
57			1	2	9	28	60	80	92	87	72	53	20	12	2	1						519
56		1	2	4	13	30	50	79	82	60	40	32	8	3		1						405
55			3	6	11	27	38	46	46	39	14	16	1	3								250
54			4	7	11	17	32	37	23	14	8	4	1	1	3	1						163
53			3	6	6	16	12	17	15	8	6											89
52		1	2	3	5	9	13	10	5	4	1											53
51		1	2		4	4	5	2	2	1	1											22
50	1					3		1	3		3											11
49			1	2																		3
	1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3	5001

figuur 5 Kruistabel van mouwlengte en kniehoogte van de vrouwen. Gegevens uit 1947

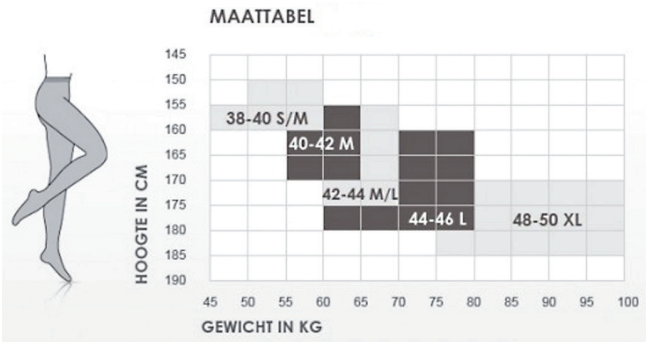
lichaamsmaten opgemeten (zoals gewicht, lengte en taille) en deze gegevens zijn statistisch geïnterpreteerd. Het ontworpen maatsysteem is helaas nooit gebruikt, maar de datacollectie is fantastisch. Waar in de tijd van Freudenthal werd gewerkt met ponskaarten, zijn nu Excelbestanden met gedeelten van de data beschikbaar. Zie figuur 5 afkomstig uit lesmateriaal van de Leergang Wiskunde[4].



figuur 6 Beelddiagram van de lengte van de vrouwen. Elk (pons)kaartje stelt 20 gemeten vrouwen voor

Niet alleen met Excel zijn er mooie plaatjes te genereren bij deze data, zoals figuur 6 laat zien. Dit is een beeld-diagram, waarin de frequentieverdeling van de lengte van de vrouwen is weergegeven. Het is afkomstig uit het artikel *De juiste maat* van Heleen Verhage in de *Nieuwe Wiskrant* van 2005[5]. Voor wie meer wil weten over het onderzoek van Freudenthal en Sittig en de mogelijkheden voor in de klas, raad ik dit artikel van harte aan.

Ook hier kan het leuk zijn om je leerlingen een vergelijking te laten maken met moderne diagrammen. Figuur 7 laat de indeling van panty's van een bepaald merk zien. Gebaseerd op de data uit 1947, hoe zou de verdeling van de maten panty's in een winkel optimaal zijn? Zou dat in



figuur 7 Maattabel voor panty

de tegenwoordige tijd nog steeds goed inkoopbeleid zijn? (De nylonpanty kwam overigens in 1967 pas op de markt, dus twintig jaar na het onderzoek van Freudenthal.)

Noten

[1] Graunt, J. (1662). *Natural and political observations made upon the bills of mortality.* London.

[2] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde.* Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

[3] Bron: de Duitse vertaling uit 1838 (door Rieck) van Quetelets boek *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale: Über den Menschen und die Entwicklung seiner Fähigkeiten.*

[4] Te downloaden van de *Euclides* site.

[5] Verhage, H. (2005) De juiste maat. Nieuwe *Wiskrant,* jaargang 25, nummer 1, p. 76-81. Te downloaden van de *Euclides* site.

Bronnen

Vlis, J. H. van der (1989). *Geschiedenis van kansrekening en statistiek.* Rijswijk: Pandata Uitgeverij.

Op de site *opendata.cbs.nl* zijn nog meer datasets te vinden met historische gegevens, denk bijvoorbeeld aan de weergegevens van weerstation De Bilt van 1800.
Een mooie bron voor sportstatistiek is *https://miriamenstatistiek.wordpress.com*

vakbladeuclides.nl/942bogaart

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

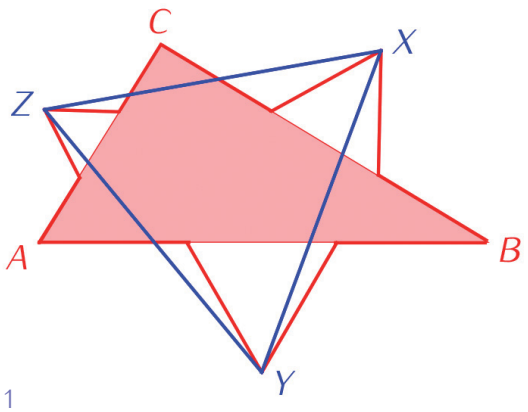
DE STELLING VAN NAPOLEON

Martin Kindt

In de afgelopen zes decennia is ons meetkundeonderwijs voortdurend veranderd. Na de oude planimetrie en stereometrie kwamen onder meer transformatie-, vector-, ruimte- en afstandsmeetkunde, elk met haar eigen methodiek. Nu beleven we in de bovenbouw een revival van de analytische meetkunde. Maar wat heeft Napoleon hiermee te maken?

Wiskundig wapenfeit

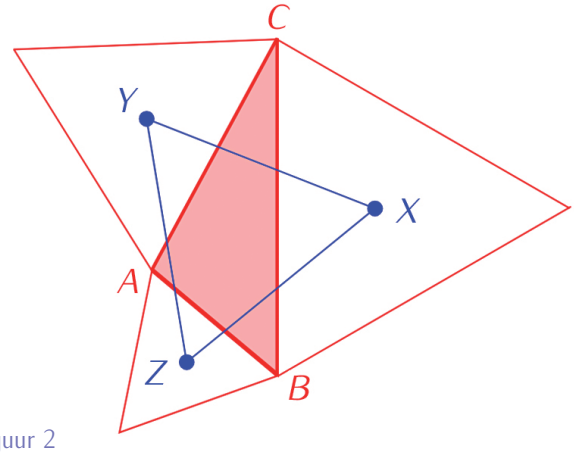
Zou Napoleon een verdienstelijk amateur-wiskundige zijn geweest? In elk geval is er een mooie meetkundestelling die zijn naam draagt en die ik dan maar als wiskundig wapenfeit van de keizer-generaal beschouw. Ik vermeld hier drie varianten van Napoleons stelling.
Eerste variant:



figuur 1

De zijden van driehoek ABC zijn elk in drie gelijke stukken verdeeld. Op de middelste segmenten zijn buitenwaarts gelijkzijdige driehoeken geplaatst met toppen X, Y, Z. Die toppen zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

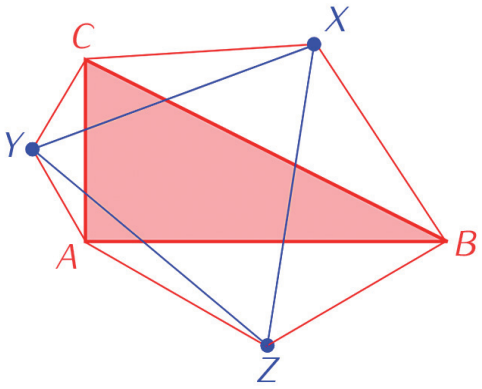
Tweede variant:



figuur 2

Op de zijden van driehoek ABC zijn buitenwaarts gelijkzijdige driehoeken geplaatst. De zwaartepunten X, Y en Z van die driehoeken zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Derde variant:



figuur 3

Op de zijden van driehoek ABC zijn buitenwaarts gelijkbenige driehoeken geplaatst met een tophoek van 120°. De toppen X, Y en Z van die driehoeken zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Ik heb hier tekeningen gemaakt voor een scherp-, stomp-, en rechthoekige driehoek. Dat in elk van de drie tekeningen de twee andere varianten dezelfde punten *X*, *Y* en *Z* opleveren, moet natuurlijk wel worden nagegaan. Ik merk nog op dat in elk van de drie varianten 'buitenwaarts' vervangen mag worden door 'binnenwaarts', ook dan ontstaat een gelijkzijdige driehoek *XYZ*.

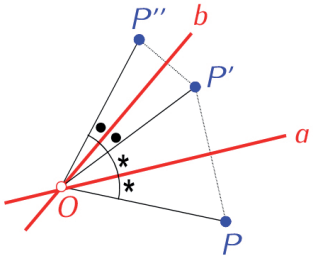
Transformatiemeetkunde

Het bewijs van de stelling met klassieke middelen is niet zo simpel en het is niet bekend óf en hoe Napoleon een bewijs heeft geleverd. Op internet kun je diverse bewijzen vinden, vaak met goniometrisch geweld. Ik kwam de stelling voor het eerst tegen als reclame voor de transformatiemeetkunde. Dat was zo'n 50 jaar geleden,

toen de New Math in het centrum van de belangstelling van leerplanontwikkelaars stond.[1] Met als leus 'weg met Euclides' - sloeg natuurlijk niet op dit vakblad - propageerden een aantal wiskundigen in binnen- en buitenland een opbouw van de vlakke meetkunde door middel van lijnspiegelingen. Het nagestreefde ideaal was om te onderwijzen dat de groep van isometrieën van het platte vlak wordt voortgebracht door de (lijn)spiegelingen in dat vlak.
Ofwel dat *rotaties*, *translaties* en *glijspiegelingen* producten van achtereenvolgens twee, twee en drie spiegelingen zijn. In België en Frankrijk ging men hierin vrij ver. In ons land werd al gauw ervaren dat de stijl van bewijzen in de transformatiemeetkunde voor veel leerlingen te hoog was gegrepen. Inmiddels was de klassieke stijl van bewijzen, steunend op congruentie van driehoeken, geschrapt uit de schoolboeken. Met als gevolg dat de eeuwenlang gekoesterde bewijscultuur nagenoeg verdween uit het Nederlandse (meetkunde)onderwijs.

Echter, interessante meetkundige stellingen zoals die van Napoleon, vragen om een bewijs! Het adequate instrument in dit geval is het verband dat er bestaat tussen rotaties en spiegelingen.
Het na elkaar uitvoeren van twee spiegelingen (in figuur 4 zijn dat eerst S_a daarna S_b) waarvan de assen a en b elkaar snijden in O, heeft hetzelfde effect als een rotatie om O over een hoek gelijk aan het dubbele van de hoek tussen a en b.

$S_a(P)=P'$
$S_b(P')=P''$
$\downarrow$
$OP=OP'=OP''$
en
$\angle POP'' = 2\cdot\angle(a,b)$

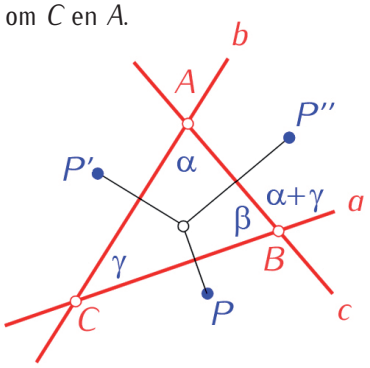


figuur 4

Als intermezzo een toepassing in het Oxy-vlak. Neem voor a en b respectievelijk de x-as en de lijn door (0, 0) en (1, 1). S_a verandert de y-coördinaat in zijn tegengestelde en S_b verwisselt de x- en de y-coördinaat, zodat:

$$(x,y) \xrightarrow{S_a} (x,-y) \xrightarrow{S_b} (-y,x)$$

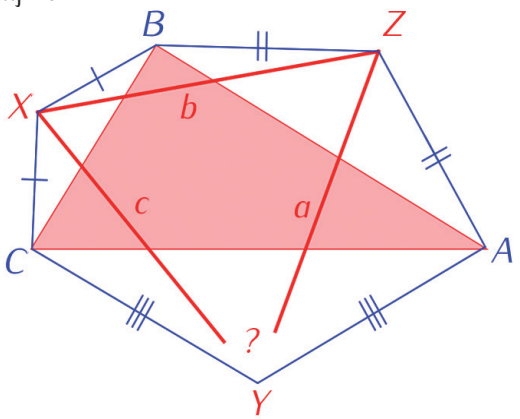
Gevolg: de vectoren met kentallen (x, y) en ($-y$, x) staan loodrecht op elkaar. Een karakteristiek element van de transformatiemeetkunde is het idee dat je elke rotatie - en wel op oneindig veel manieren! - kunt 'ontbinden' in twee spiegelingen, waarbij dan de hoek tussen de assen gelijk is aan de helft van de draaihoek van die rotatie. Daaruit volgt dat het product van twee rotaties met verschillende centra - zeg C en A – en waarvan de draaihoeken - zeg 2γ en 2α - niet samen 0^o of 360^o zijn,[2] een rotatie is met een derde punt (B) als centrum en als draaihoek $2\alpha + 2\gamma$. Je bewijst dit door de beide rotaties te ontbinden in twee spiegelingen waarbij één spiegeling in beide producten optreedt, één keer als tweede component en één keer als eerste component. In figuur 5 fungeert b twee keer als spiegelas. Het product van de vier spiegelingen heeft het snijpunt B van a en c als invariant punt, dat is het centrum van de resulterende rotatie. De rotatiehoek is het dubbele van de buitenhoek in B van driehoek ABC, en is daarom gelijk aan $2\alpha + 2\gamma$, de som van de hoeken van de rotaties om C en A.



$$R_{C,2\gamma} = S_b S_a \text{ en } R_{A,2\alpha} = S_c S_b$$
$$\downarrow$$
$$R_{A,2\alpha} R_{C,2\gamma} = S_c S_b S_b S_a = S_c S_a = R_{B,2\alpha+2\gamma}$$

figuur 5

Dit kan nu worden toegepast om de (derde variant van) de stelling van Napoleon te bewijzen. Bekijk figuur 6. De driehoeken CBX, BAZ en ACY zijn gelijkbenig en hebben een tophoek van 120^o. De rotaties $R_{X,120^o}$ en $R_{Z,120^o}$ beelden in volgorde C af op B en B op A. Het product van die twee is een rotatie die C afbeeldt op A en waarvan de draaihoek 240^o is. Het centrum van die rotatie is het snijpunt ? van de lijnen c en a die hoeken van 60^o maken met de lijn $b = XZ$.

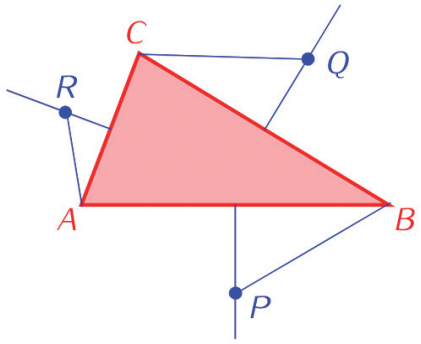


figuur 6

De inverse van die rotatie heeft een draaihoek van 120^o en beeldt A af op C. Maar dat is juist de rotatie over 120^o met centrum Y. Met andere woorden: ? = Y en driehoek XYZ is gelijkzijdig!

Analytische meetkunde

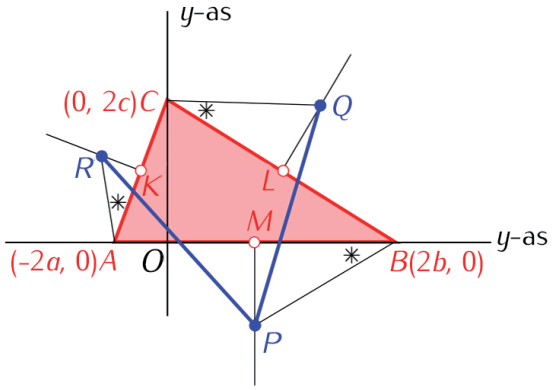
Dat het bewijzen met transformatiemeetkunde moeilijk is voor het gros van onze leerlingen zal duidelijk zijn.
Je kunt het hier getoonde bewijs heus wel uitleggen aan leerlingen en hen ook bij de opbouw ervan betrekken. Maar het blijft dan toch typisch zo'n '*ik-snap-het-wel-maar-ik-had-'t-nooit-zelf-kunnen-vinden-bewijs*'. Sinds kort staat de analytische meetkunde weer op het schoolmenu en een natuurlijke vraag is of de stelling van Napoleon ook hierin zou kunnen passen.
Om die vraag bevestigend te beantwoorden, kijk ik naar een vierde variant van de stelling:



figuur 7

Buiten een niet-gelijkzijdige driehoek ABC liggen op de middelloodlijnen van de zijden AB, BC en CA de punten P, Q en R zodat ∠PBA = ∠QCB = ∠RAC. Driehoek PQR is gelijkzijdig als en alleen als die hoeken gelijk zijn aan 30°

Merk op dat dit door de toevoeging 'en alleen als' een 'plus-variant' van de stelling van Napoleon is. Het ideaal van analytische meetkunde op school zou naar mijn idee moeten zijn dat je die gebruikt in situaties die niet 'analytisch-voorgekookt' zijn. Ik bedoel daarmee dat de leerling zelf een handig coördinatenstelsel moet kiezen voordat hij aan de algebra begint.
Bij deze Napoleon-variant merk ik op dat je, gelet op de symmetrie in de situatie, en in het geval dat $AC \neq BC$, kunt volstaan met te bewijzen dat de lijnstukken PQ en PR even lang zijn onder de gestelde voorwaarde.



figuur 8

Ik kan nu met een gerust hart de driehoek in een Oxy-stelsel situeren zoals in figuur 8 en me toeleggen op het bepalen van de afstanden PQ en PR. Verder stel ik: $\tan\angle PBA = \tan\angle QCB = \tan\angle RAC = t$
De middens van K, L en M van respectievelijk AC, BC en AB hebben de coördinaten $(-a, c)$, (b, c) en $(b - a, 0)$. De vector $\overrightarrow{KR}$ staat loodrecht op AC en heeft de kentallen $t(-c, a)$. De coördinaten van R zijn dan: $(-a - ct, c + at)$. Net zo heeft Q de coördinaten: $(b + ct, c + bt)$ en P de coördinaten $(b - a, -at - bt)$. De kentallen van de vector $\overrightarrow{PR}$ zijn nu: $(-b - ct, c + 2at + bt)$. En die van $\overrightarrow{PQ}$ zijn dan: $(a + ct, c + at + 2bt)$.
Het aan elkaar gelijkstellen van de kwadraten van de lengten van de vectoren $\overrightarrow{PR}$ en $\overrightarrow{PQ}$ levert op:

$$(b + ct)^2 + (c + 2at + bt)^2 = (a + ct)^2 + (c + at + 2bt)^2$$

Ik werk graag met verschillen van twee kwadraten en vervang de vergelijking daarom door:

$$(b + ct)^2 - (a + ct)^2 = (c + at + 2bt)^2 - (c + 2at + bt)^2$$

Nu kan ik mooi ontbinden in factoren:

$$(b - a)(b + a + 2ct) = t(b - a)(2c + 3at + 3bt)$$

Uit $AC \neq BC$ volgt $b - a \neq 0$, zodat er komt:

$$b + a + 2ct = 2ct + 3(a + b)t^2$$

Dus: $t^2 = \frac{1}{3}$ en met $t > 0$ volgt $t = \tan 30^\circ$.

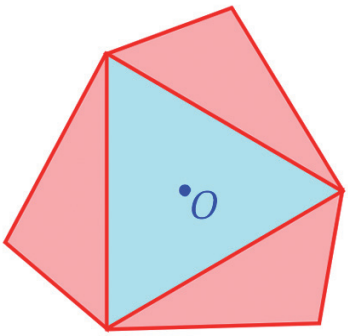
Opmerkingen:

1. De deelbaarheid van beide leden door $b - a$ in de voorlaatste vergelijking was op meetkundige gronden voorspelbaar!
2. De negatieve oplossing van $t^2 = \frac{1}{3}$ leidt tot de 'binnenwaartse stelling van Napoleon'.
3. In het geval $AC = BC \neq CA$ gaat de vlieger niet op deze wijze op, maar is het een kwestie van de driehoek anders plaatsen in het assenstelsel: C op de x-as, samen met A (of met B).
4. Over de organisatie van het algebrawerk ben ik zelf tevreden, maar er zijn ook andere verstandige aanpakken. Het lukt bijvoorbeeld ook goed met gebruik van complexe getallen.

Tegeltjes(be)wijs(baar)heid

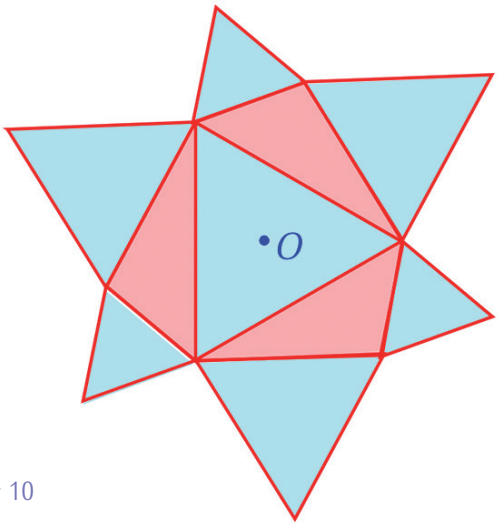
Zo'n analytisch bewijs overtuigt als je in algebra gelooft, maar je kunt niet volhouden dat het inzicht geeft en het is niet aanschouwelijk. In haar prachtige proefschrift bepleitte Dina van Hiele-Geldof ooit het gebruik van tegelvloeren bij aanvankelijk meetkundeonderwijs.[3]
Nu ik terugblik, vind ik het onbegrijpelijk dat bij het denken over de invoering van transformatiemeetkunde

op school, zo weinig is gedaan met het idee om tegelpatronen met hun symmetrieën te onderzoeken. Als staaltje 'tegeltjeswijsheid' volgt hier een aanschouwelijk bewijs van de (buitenwaartse) stelling van Napoleon. Ik begin met een gelijkzijdige driehoek en plak drie congruente driehoeken tegen de zijden, figuur 9.



figuur 9

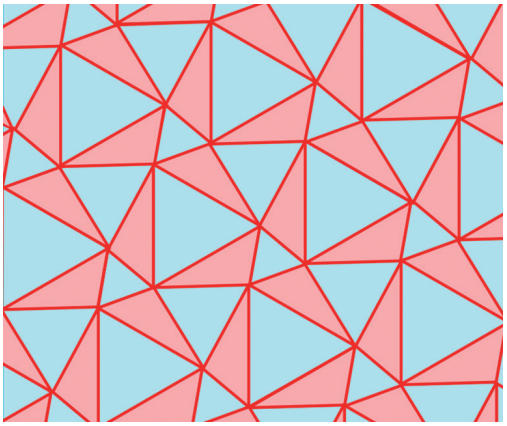
De totale figuur is duidelijk draaisymmetrisch om het zwaartepunt *O* van de gelijkzijdige driehoek. Bij elk van de drie rode driehoeken, plak ik gelijkzijdige driehoeken aan de twee andere zijden.



figuur 10

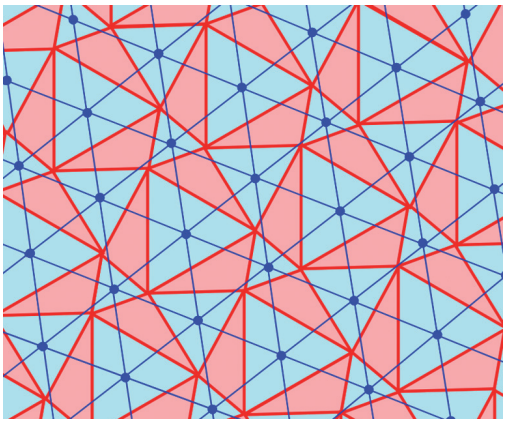
Zo ontstaat een nieuwe draaisymmetrische figuur, met hetzelfde centrum *O*. Deze figuur kan op zijn beurt weer worden uitgebreid door kopieën van de rode driehoek op geschikte wijze aan de gelijkzijdige driehoeken te plakken, en aan deze weer gelijkzijdige driehoeken, enzovoort. Er ontstaat dan een fraaie betegeling van het vlak, zie figuur 11.

In elk knooppunt ontmoeten drie gelijkzijdige driehoeken elkaar, zodat er 180° overblijft voor de drie verschillende hoeken van de rode tegels. Intuïtief is duidelijk dat dit (oneindige) patroon draaisymmetrisch is en ook dat elk zwaartepunt van een gelijkzijdige driehoek een symmetriepunt is van de orde 3. Door alle symmetriepunten met elkaar te verbinden ontstaat een draaisymmetrisch net van congruente driehoeken, zie figuur 12. Elk knooppunt van dit net is een symmetriepunt (orde 3) en daaruit volgt dat de driehoeken van dit net gelijkzijdig zijn!



figuur 11

Desgewenst kan uit dit verhaal een formeel bewijs worden gedistilleerd, maar dan verliest het veel aan charme. Daarom laat ik het hierbij.



figuur 12

Noten

[1] Een opzienbarende experimentele methode in die tijd was *Transformatiemeetkunde* ontworpen door J. Bulens, A.J. de Groot, A.N. Haberman en R. Troelstra.

[2] Als de draaihoeken tegengesteld zijn (of samen 360° zijn) is het product van de rotaties een translatie.

[3] Hiele-Geldof, D. van (1957). *De didactiek van de meetkunde in eerste klas van het v.h.m.o.* Universiteit Utrecht.

Over de auteur

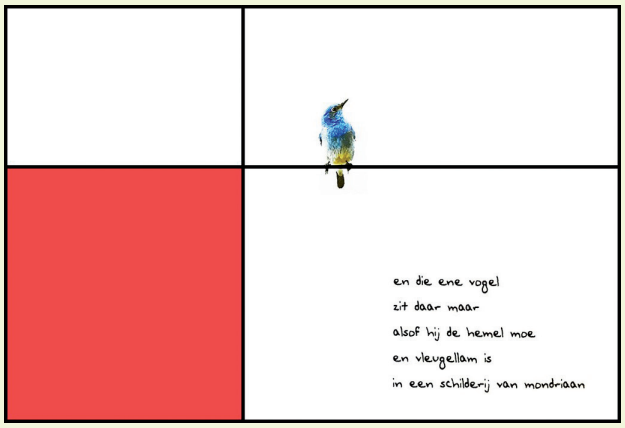
Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

OVER MONDRIAAAN

Jan Aarts

Jan Aarts gaf hoofdredacteur Tom Goris voorjaar 2018 een A4-tje over Mondriaan. 'Kijk maar eens of zoiets ook geschikt is voor *Euclides*, we hebben het er nog wel over …' Deze zomer overleed Jan en moest Tom meteen aan dat A4-tje denken. Een eerbetoon aan een creatieve en aimabele wiskundige.

Jan hield van kunst en ik ook. We hebben ooit nog eens in De Pont in Tilburg een voordracht georganiseerd waarin hij met Jan Andriesse, die hij goed kende, de verborgen wiskunde in diens werk duidde. Logisch dus dat we Jan vroegen of hij het een mooi idee vond om bijdragen te schrijven voor *Euclides* in het kader van 100 jaar De Stijl. Zo kwamen we in het voorjaar terecht bij de zoon en zus van Willem Kloppers, in verband met het artikel dat Jan aan het schrijven was voor *Euclides* 93-6. Na afloop gaf Jan me een kleurrijk mapje met daarin een A4-tje. Hieronder volgt de tekst die Jan schreef onder de afbeelding van het vogeltje in het schilderij van Mondriaan.



Afbeelding gemaakt door Jan Aarts

'*Een gegeven rechte zoo te verdeelen, dat de rechthoek, omvat door de heele rechte en een der deelen, gelijk is aan het vierkant op het andere deel*' (Euclides van Alexandrië (ca. 325-265 vC) in het tweede boek van zijn *Stoicheia*)

De gulden snede geldt als een absolute richtlijn van schoonheid, die sinds de Griekse oudheid alle stormen heeft getrotseerd. Behalve in alle soorten van kunst-uitingsvormen zoals in de muziek, architectuur, poëzie, schilderkunst komt deze verhouding veelvuldig in de natuur voor. Vooraf moet ik duidelijk stellen dat Mondriaan iedere wiskundige berekening voor kunst afwees: 'toeval moet even veraf zijn als berekening', schreef hij ooit. Als je de gulden snede in Mondriaans werk aantreft, dan zijn die verhoudingen dus ontstaan door voortdurend experimenteel met lijnen en vlakken schuiven tot het beeld voor hem bevredigend was.

Aangezien ik geen kunstenaar ben met een schoonheids-gevoel zoals Mondriaan heb ik wel die 'gulden snede' toegepast zodat de vlakverdeling een bevredigend resultaat geeft.

De rechthoek is gewoon een rechthoek en een lijn gewoon een lijn en rood gewoon rood. Niets meer of minder dan dat. Daar is niets abstracts aan. Mondriaan was daarin op zoek naar ultiem evenwicht en harmonie.

Het vogeltje is een Chimalis (Native American Bluebird), Blauwe Lijster. Deze lijster 'find the bluebird and you will find happiness' is in Europa bekend geworden door Maurice Maeterlinck met zijn toneelsprookje 'L'oiseau Bleu' (1908).

ach vogeltje
wat zit jij daar verloren
in een plaat van mondriaan
straks voel jij je herboren
zing het uit en vlieg eruit
't is mei als nooit tevoren!

De tekst ten slotte suggereert een zeer menselijke stemming, een combinatie van hoop en verlorenheid. Echter blijft altijd de mogelijkheid voor dit drie-dimensionale vogeltje om uit het platte plaatje te vliegen.

Over de auteur

Jan Aarts (1938 – 2018) was hoogleraar wiskunde (TU Delft). Hij schreef o.a. *Meetkunde, facetten van de planimetrie en stereometrie* (2000) en het stripboek *Topologie door zien* (2009).

PRIJSELASTICITEIT

EEN ECONOMISCH BEGRIP WISKUNDIG BEKEKEN

Ab van der Roest
Wilco van Veldhuizen

In dit artikel nemen Ab van der Roest en Wilco van Veldhuizen een economisch begrip wiskundig onder de loep: de prijselasticiteit. De beschrijving van deze thematiek in het beschikbare lesmateriaal deed de wenkbrauwen fronsen bij de docent economie en dit bleek de basis voor een goed gesprek met zijn collega van het vak wiskunde.

Onwaar of niet?

In het bij ons op school bij economie gebruikte boek (*Praktische economie*, uitgeverij Malmberg) staat dat bij een prijselasticiteit van -1 het gevolg van een prijsstijging niet merkbaar is in de omzet: de omzet blijft gelijk, omdat de verkoop met hetzelfde percentage toeneemt.
Deze opmerking was voor de docent economie aanleiding in gesprek te gaan met de wiskundedocent. Hij was van mening dat dit pertinent onwaar is. Heeft hij een punt?
Je begint dan natuurlijk eerst door eens naar de definitie te kijken en een getallenvoorbeeld te berekenen.
De prijselasticiteit e_v is gedefinieerd als

$$e_v = \frac{\%\,verandering\,Q_v}{\%\,verandering\,P},$$

waarbij Q_v de gevraagde hoeveelheid is en P de prijs. e_v is vrijwel altijd negatief, want een verhoging van de prijs heeft een daling van de gevraagde hoeveelheid tot gevolg en omgekeerd.

Iso-elastisch

Als $e_v = -1$, dan noemen we dit iso-elastisch.
De gevraagde hoeveelheid verandert procentueel evenveel als de prijs.

Een voorbeeld: Neem een gevraagde hoeveelheid $Q_v = 100$ en een prijs $P = 100$ en $e_v = -1$.
De omzet wordt in de economie meestal Totale Omzet (*TO*) genoemd. We berekenen die met $TO = P \times Q_v = 100 \times 100 = 10.000$.
Verlagen we de prijs met 10 %, dan stijgt de gevraagde hoeveelheid met 10%. De omzet daalt: $TO_{nieuw} = P_{nieuw} \times Q_{nieuw} = 0{,}9P \times 1{,}1Q_v = 90 \times 110 = 9.900$. Verhogen we de prijs met 10 % dan daalt de gevraagde hoeveelheid met 10 % en de omzet wordt ook nu 9.900. De omzet blijft dus niet gelijk. Eén tegenvoorbeeld is genoeg, maar ook algemeen is het makkelijk direct te bewijzen:

$$TO_{nieuw} = (1-\frac{p}{100})P\,(1+\frac{p}{100})Q_v =$$

$$(1-\frac{p^2}{10.000})PQ_v = (1-\frac{p^2}{10.000})TO_{oud}.$$

Er is dus een daling van de omzet met $\frac{p^2}{100}\%$.

Elke wiskunde A leerling zal deze redenering kunnen volgen en de bewering in het boek onderuit kunnen halen.

Elastische situatie

Interessant is het probleem ook wanneer $e_v \neq -1$. We bekijken het geval $e_v < -1$, een elastische situatie.
Volgens de theorie zal bij een prijsdaling de gevraagde hoeveelheid in verhouding meer toenemen en daardoor zal de omzet ook toenemen. (Opgemerkt kan worden dat het geval $-1 < e_v < 0$ op een gelijksoortige wijze geredeneerd kan worden.) Eerst een getallenvoorbeeld om grip op het probleem te krijgen. We nemen weer gevraagde hoeveelheid $Q_v = 100$ en prijs $P = 100$ en nu $e_v = -3$. Dat betekent dat als de prijs met 10 % daalt, de gevraagde hoeveelheid met 30 % toeneemt. We kunnen een tabel maken van P, Q_v en TO, zie tabel 1.

prijs P	aantal Q_v	omzet TO
100	100	10.000
90	130	11.700
80	160	12.800
70	190	13.300
60	220	13.200
50	250	12.500
40	280	11.200
30	310	9.300
20	340	6.800

tabel 1

Uit tabel 1 blijkt dat de theorie houdbaar is tot een prijsdaling van ongeveer 65 %. Wat dus als een wetmatigheid gepresenteerd wordt, of wat ik als een wetmatigheid interpreteerde, blijkt een wetmatigheid tot een bepaalde grens te zijn. Overigens gebeurt dit niet alleen in de schoolboeken. Hier kan de wiskunde weer helpen. Voor het gemak kijken we eerst weer naar het voorbeeld $e_v = -3$. Een prijsdaling van p % betekent dus een stijging van de gevraagde hoeveelheid met $3p$ %. De omzet wordt dan

$$TO = (1-\frac{p}{100})P(1+\frac{3p}{100})Q_v = (1+\frac{2p}{100}-\frac{3p^2}{10.000})PQ_v .$$

De omzet verandert dus met $(2p-\frac{3p^2}{100})$ %.

Deze verandering, zeg s, is op te vatten als een functie met als variabele p.

De functie $s(p)=2p-\frac{3p^2}{100}$ is van de tweede graad en heeft als grafiek een bergparabool. De functiewaarde is positief als $0 < p < 66\frac{2}{3}$. Niet zo'n grote opgave om die grens te bepalen. Wat we meteen ook in de schoot geworpen krijgen, is dat de omzet maximaal is als $p = 33\frac{1}{3}$. We moeten de prijs dus met 33,3 % laten dalen. Dat is meteen in te zien als we de nulpunten berekenen of de afgeleide gelijk aan nul stellen.

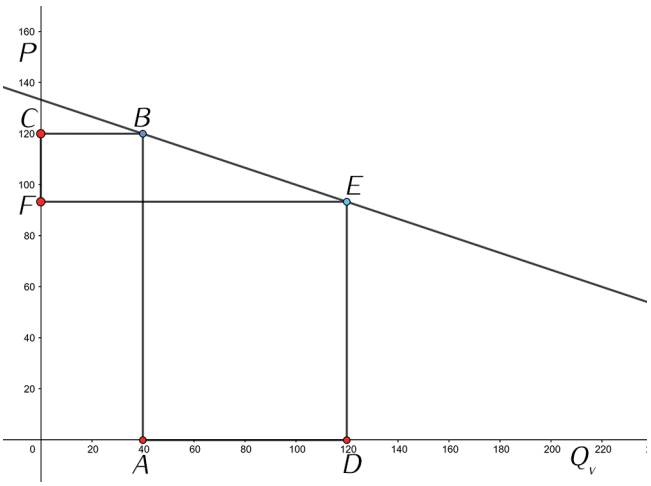
Oorzaak en gevolg

Dit laatste geeft inzicht hoeveel we de prijs moeten laten dalen om de omzet maximaal te krijgen. Dit is natuurlijk ook een belangrijk punt, want we streven misschien naar maximale omzet. Maar hier maak ik als wiskundige een grote denkfout. Het blijkt dat de elasticiteit verschillend is voor de plek op de vraagcurve. De theorie lezend, lijkt het dat de elasticiteit een vaste waarde is. Oorzaak en gevolg worden in het boek verwisseld (zie tabel 2). Niet de elasticiteit beïnvloedt de omzet, maar een prijsverandering heeft als gevolg een verandering in de gevraagde hoeveelheid en daardoor verandert de omzet. De verhouding tussen deze relatieve veranderingen is de elasticiteit. Je stuurt niet met een elasticiteit, het is een gevolg. Het is dus zinloos om uit te gaan van een elasticiteit, omdat de elasticiteit een gevolg is van de verandering van de prijs.

'HET IS GOED OM MET EEN KRITISCH EN SCHERP OOG NAAR HET LESMATERIAAL TE KIJKEN.'

Vraagcurve

De elasticiteit is mooi inzichtelijk te maken met de vraagcurve. Een punt op die lijn, zijn projectie op de x-as, de projectie op de y-as en de oorsprong zijn de hoekpunten van een rechthoek. De oppervlakte van deze rechthoek is gelijk aan de omzet: $TO = PQ_v$. Schuif met een punt op de lijn en je kunt precies zien of de oppervlakte toe- of afneemt, zie figuur 1.



figuur 1

Als we starten met de prijs behorend bij C, dan representeert de oppervlakte van rechthoek $OABC$ de omzet. Verlagen we de prijs tot punt F, dan wordt de omzet gegeven door de oppervlakte van rechthoek $ODEF$. Het is meteen in te zien dat deze oppervlakte groter is. Verschuiven we punt F richting O, dan is natuurlijk ook meteen weer te zien dat er op een zeker moment een rechthoek ontstaat met

Bij een...	is de ...	Dat betekent dat...	Dus bij een...	zal de omzet...
prijselastische vraag	kleiner dan -1.	de Q_v procentueel **meer** verandert dan de prijs.	prijsverlaging	stijgen
			prijsverhoging	dalen
prijsinelastische vraag	tussen de 0 en de -1.	de Q_v procentueel **minder** verandert dan de prijs.	prijsverlaging	dalen
			prijsverhoging	stijgen

tabel 2

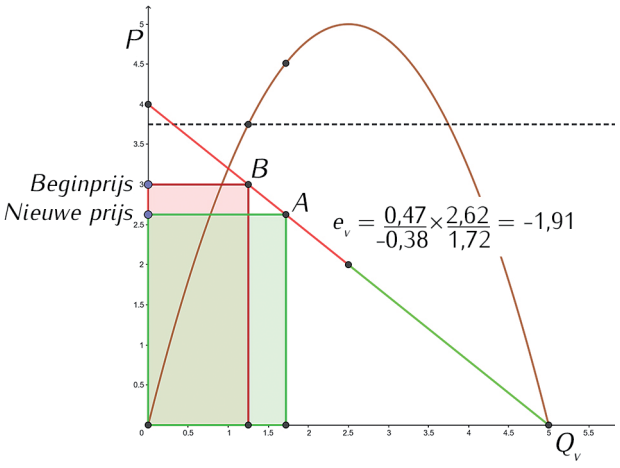
een kleinere oppervlakte dan *OABC*. Waar nu het omslagpunt ligt, of het punt voor de maximale omzet, is iets lastiger te bepalen, maar niet erg.

Hier is gekozen voor de lijn $P = -\frac{1}{3}Q_v + 133\frac{1}{3}$.
We kiezen het punt (100, 100) op de lijn. Neem nu een willekeurige P. De bijbehorende gevraagde hoeveelheid is $-\frac{1}{3}Q_v + 133\frac{1}{3}$ en de bijbehorende omzet

$TO = -\frac{1}{3}Q_v^2 + 133\frac{1}{3}Q_v$.

Maximaliseren van de omzet is de afgeleide gelijkstellen aan nul en deze vergelijking oplossen.
Dit geeft $Q_v = 200$ en de bijbehorende prijs $P = 66{,}7$.
Met andere woorden: de prijs moet met 33,3 % verlaagd worden om maximale omzet te bereiken.

Zoals eerder vermeld is de plaats op de vraagcurve belangrijk voor de elasticiteit. Dit is duidelijk te maken met de grafiek in figuur 2.



figuur 2

figuur 2 *B* is beginpunt. Als *B* op het rode deel van de vraagcurve ligt, dan $e_v < -1$

Je ziet hier een lineaire vraagcurve en de bijbehorende *TO*-functie. Uiteraard een bergparabool. De maximale omzet ligt precies boven het midden van het lijnstuk tussen de snijpunten met de Q_v-as en de P-as. In dit punt is $e_v = -1$. Linksboven dit punt is $e_v < -1$ en rechtsonder is $-1 < e_v < 0$. In de economie spreken we over het begrip puntelasticiteit:
In een formule is de puntelasticiteit als volgt gedefinieerd: $e_{pv} = \frac{dQ_v}{dP} \times \frac{P}{Q_v}$.

Merk op dat $\frac{\Delta Q_v}{\Delta P}$ vervangen is door $\frac{dQ_v}{dP}$ omdat we naar $\lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q_v}{\Delta P}$ kijken.

Formule voor elasticiteit

Ondanks het feit dat de elasticiteit geen sturingsinstrument is, gaan er wel veel vragen over een gegeven elasticiteit. Het is dan verleidelijk hier weer een formule voor af te leiden.
Dit is geen grote opgave:

$$TO_{nieuw} = (1+\frac{p}{100})P(1+\frac{e_v p}{100})Q_v =$$

$$(1+\frac{p+e_v p}{100}+\frac{e_v p^2}{10000})P\,Q_v = (1+\frac{p+e_v p}{100}+\frac{e_v p^2}{10000})TO_{oud}$$

De procentuele verandering van de omzet is dus

$$p(1 + e_v) + \frac{e_v p^2}{100}\%.$$

Dit kunnen we weer beschouwen als een functie van p. Omdat e_v altijd negatief is, is de grafiek een bergparabool en vinden we het maximum door de afgeleide gelijk aan 0 te stellen. De maximale opbrengst kan natuurlijk ook zonder de elasticiteit te gebruiken berekend worden. Je berekent de afgeleide, de marginale opbrengst, en stelt deze gelijk aan 0.
Dit geeft $1 + e_v + \frac{2e_v p}{100} = 0$, met als oplossing $p = \frac{-50-50e_v}{e_v}$. Uit eerder genoemde voorbeeld bleek dat bij $e_v = -3$ volgde dat de prijs met 33,3 % verlaagd moet worden voor de maximale omzet. Dit volgt nu ook uit de algemene formule. Verder volgt uit de formule meteen dat $p = 0$ als $e_v = -1$. Als de elasticiteit gelijk aan -1 is, dan is de totale omzet maximaal. De prijs moet dan niet veranderen.

Tot slot kunnen we zeggen dat het goed is om met een kritisch en scherp oog het lesmateriaal te bekijken en te gebruiken. Misvattingen in het boek kunnen niet alleen leiden tot onduidelijkheid bij de leerlingen, maar ook tot mooie en interessante gesprekken met collega's en tot een dieper begrip van de materie. Het is daarbij goed om verder te kijken dan waar het vak lijkt te eindigen en samenwerking te zoeken met collega's van andere vakken. Hiermee kunnen we als collega's complementair zijn aan elkaar. Dit zorgt niet alleen voor een beter begrip bij docenten én leerlingen, maar hiermee nemen we ook een mogelijke frustratie weg.

Over de auteurs

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*
Wilco van Veldhuizen is docent economie aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *vld@ichthuscollege.nl*

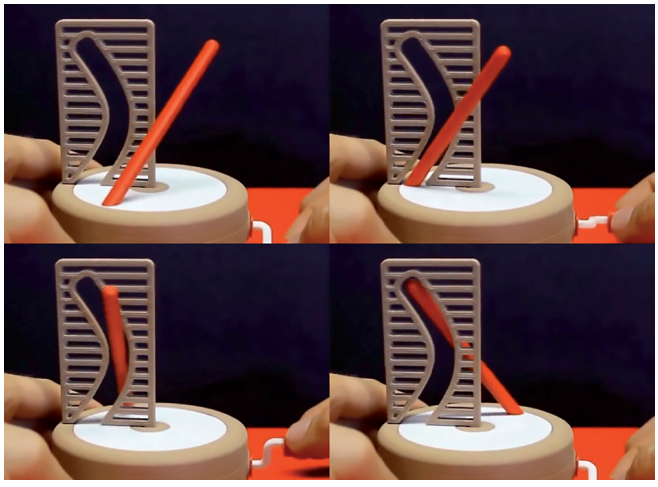
PAST PRECIES II

Maarten van Hoven
Marten Klok
Gerardo Soto y Koelemeijer

Een verrassend filmpje dat 'viral' ging, was de aanleiding voor Maarten van Hoven, Marten Klok en Gerardo Soto y Koelemeijer om dit verschijnsel wiskundig te beschrijven in *Euclides* 93-3. Maar het beantwoorden van de vraag riep nieuwe vragen op. Daarom een vervolg op het eerdere artikel.

Inleiding

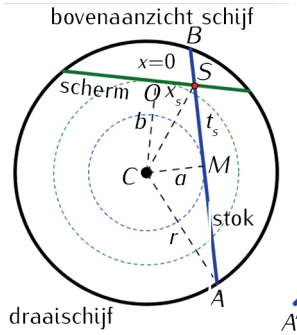
Enkele maanden geleden dook op internet een gifje[1] op van een ronddraaiende schijf, waarop een recht stokje, dat niet verticaal staat, maar onder een bepaalde hoek met het grondvlak en ten opzichte van het middelpunt van de schijf, is bevestigd. Verticaal op de schijf is een rechthoekig scherm geplaatst (links van het midden). Het scherm bevat een gat in de vorm van een kromme. Als nu de schijf met daarop het stokje ronddraait, past het stokje precies door de kromme, wat verrassend is aangezien het stokje toch echt recht is. De vraag die rees is, of deze beweging te modelleren is en of we kunnen aantonen welke vorm de kromme heeft. In het decembernummer van *Euclides* vorig jaar hebben we dit probleem op twee manieren opgelost; de beweging is te beschrijven met goniometrische formules en de uiteindelijke kromme is een hyperbool. In dit artikel generaliseren we de situatie door het scherm op een andere plek te laten staan; niet meer van het midden naar de rand, maar op een willekeurige andere plek. We zullen drie gevallen onderscheiden en weer de vraag beantwoorden welke vorm de kromme heeft in elk afzonderlijk geval.



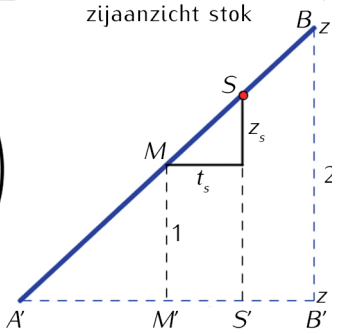
figuur 1 Als de schijf ronddraait past het stokje precies door de kromme opening in het schermpje

Modellering

In figuur 1 is het rode stokje bevestigd op de witte schijf die ronddraait. Het stokje past precies door de kromme opening. Om een mooi symmetrisch figuur te krijgen zullen we het scherm twee keer zo groot maken. In figuur 1 loopt het scherm van de rand van de schijf tot het midden. Wij zullen het scherm vanuit het midden doortrekken naar de rechterrand van de schijf, zodat er een vlak ontstaat, loodrecht op de schijf. De uitbreiding in dit artikel ten opzichte van figuur 1 is dat we niet meer eisen dat het scherm door het midden van de schijf gaat, maar dat het op een willekeurige plek mag staan. Zonder verlies van algemeenheid trekken we het scherm door, zodat beide uiteinden van het scherm dezelfde afstand hebben tot het middelpunt, zoals getoond in het volgende bovenaanzicht en zijaanzicht, zie figuur 2 en figuur 3.



figuur 2



figuur 3

Het middelpunt van de draaischijf noemen we C. De stok beweegt rond een cirkel met straal a. Dit is de kortste afstand tussen het middelpunt C en het midden van het stokje M (van bovenaf gezien). Punt A en punt B, de uiteinden van het stokje, bevinden zich op afstand r van het middelpunt C van de draaischijf, en bewegen langs de cirkel met straal r. Het stokje heeft hoogte 2, en loopt van $z = -1$ tot $z = 1$. We kunnen het geheel in figuur 2 zo roteren dat punt O precies boven middelpunt C ligt.

Dat punt $O(0, 0, 0)$ is tevens de oorsprong van ons coördinatenstelsel. De kortste afstand tussen het middelpunt C en het midden van het scherm O is gelijk aan b. S is het snijpunt van het scherm met het stokje. M', S', O' en B' zijn de loodrechte projecties op het grondvlak van respectievelijk M, S, O en B. Er geldt dat $O'S' = x_s$ en $M'S' = t_s$. De hoogte van snijpunt S is aangegeven met z_s, met $-1 \le z_s \le 1$.
Met behulp van de stelling van Pythagoras kunnen we aantonen dat
$AM' = M'B' = \sqrt{r^2-a^2}$, en dus $AB' = 2\sqrt{r^2-a^2}$.

Er geldt nu dat:

$CS'^2 = x_s^2 + b^2$ en $CS'^2 = t_s^2 + a^2$, en dus

$x_s^2 + b^2 = t_s^2 + a^2$ of $x_s^2 - t_s^2 = a^2 - b^2$.

Er geldt ook, zie figuur 3, dat $\frac{z_s}{t_s} = \frac{2}{2\sqrt{r^2-a^2}}$, of

$t_s = \sqrt{r^2-a^2} \cdot z_s$.

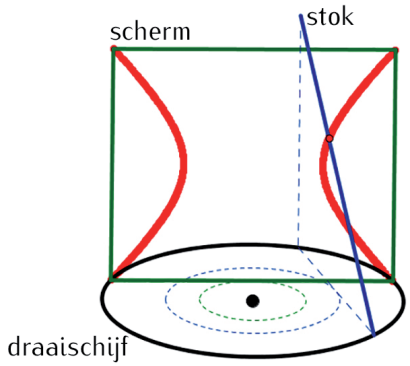
Dit impliceert dat $x_s^2 - z_s^2(r^2-a^2) = a^2 - b^2$ oftewel

$\frac{x_s^2}{a^2-b^2} - \frac{z_s^2(r^2-a^2)}{a^2-b^2} = 1$ voor $a^2 - b^2 \neq 0$.

We zullen nu drie gevallen onderscheiden:
1. $b < a$
2. $b > a$
3. $b = a$

Merk op dat figuur 1 een speciaal geval is van geval 1. Er geldt in figuur 1 namelijk dat $0 = b < a$. Ter visuele ondersteuning van het probleem hebben we een GeoGebra applet[2] gemaakt, waarin de positie van het scherm en de stok (de waarden van a en b) handmatig aangepast kunnen worden.

Geval 1



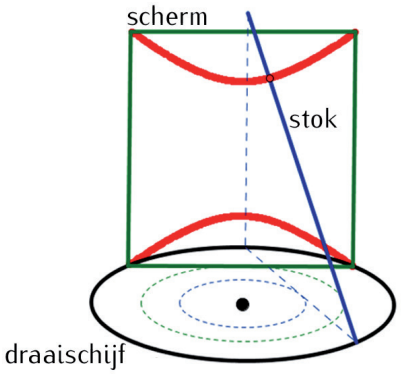
figuur 4

Als $b < a$, dan geldt $x_s^2 - z_s^2(r^2-a^2) = a^2 - b^2$, oftewel

$\frac{x_s^2}{a^2-b^2} - \frac{z_s^2(r^2-a^2)}{a^2-b^2} = 1$.

We krijgen het volgende resultaat, zie figuur 4. Hoe dichter b bij a ligt, hoe sterker de kromming van de hyperbolen zal zijn.

Geval 2



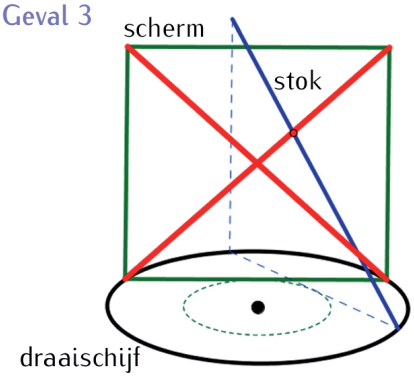
figuur 5

We bekijken nu het tweede geval: $b > a$, zie ook figuur 2. Als $b > a$ dan geldt $(r^2-a^2) - z_s^2 = b^2 - a^2$,

oftewel $z_s^2(r^2-a^2) - x_s^2 = b^2 - a^2$

We krijgen het volgende resultaat, zie figuur 5. In tegenstelling tot geval 1 lopen de curves niet meer verticaal, maar horizontaal. Ook hier geldt dat de kromming sterker is naarmate b en a dichter bij elkaar liggen.

Geval 3



figuur 6

Wanneer $b = a$, dan kunnen we de formules van geval 1 of 2 niet meer gebruiken, vanwege de deling door $a^2 - b^2$
In plaats daarvan gebruiken we de oorspronkelijke gelijkheid $x_s^2 - z_s^2(r^2-a^2) = a^2 - b^2$,
die in dit geval reduceert tot $x_s^2 - z_s^2(r^2-a^2) = 0$.

Dit impliceert dat $z_s = \frac{\pm x_s}{\sqrt{r^2-a^2}}$.
Dit is een rechte lijn door het scherm van rechtsboven naar linksonder. Op een bepaald moment valt het stokje

precies samen met het scherm. We krijgen dan een rechte lijn van rechtsonder naar linksboven, zie figuur 6. Dit wordt ook wel een ontaarde hyperbool genoemd. Het is interessant om te zien dat de verticale hyperbolen van geval 1 via kruisende lijnen veranderen in horizontale hyperbolen.

Noten

[1] Voor het gifje zie: *http://imgur.com/gkp04Gc*
[2] De GeoGebra applet is te vinden op *https://www.geogebra.org/m/AEtdH3Dy*

Over de auteurs

Maarten van Hoven is wiskundedocent aan de TU Delft
E-mailadres: *m.b.vanhoven@tudelft.nl*
Marten Klok is Hoofd Risk Control bij een bedrijfspensioenfonds. Hij schrijft dit artikel op persoonlijke titel. E-mailadres: *marten@ie-design.nl.*
Gerardo Soto y Koelemeijer is wiskundedocent aan het Stedelijk Gymnasium Leiden en postdoc bij het ICLON Leiden. E-mailadres: *g.soto@gymnasiumleiden.nl*

DE HOEKSTREEP

GETALLETJES

Jan Beuving

Hoewel mijn eigen naam op ING eindigt, is het niet bepaald mijn bank. Ze kregen een aantal weken geleden een boete van 775 miljoen euro opgelegd, in verband met niet-gesignaleerde witwaspraktijken op door hen beheerde rekeningen. In Nieuwsuur werd die avond gesproken over een 'miljoenenboete'. Daar veerde ik even van op. Hoewel het wiskundig correct is, voelde het toch raar aan. Een miljoenenboete is voor mijn gevoel 5 miljoen, 10 miljoen, of misschien 25 miljoen. Maar 775 miljoen, dat is geen miljoenenboete meer. Dat is net zoiets als een boete van één miljard een miljoenenboete noemen. Het klopt, maar ergens klopt iets niet. Probleem is dat je een miljard ook weer geen miljardenboete kunt noemen. In het Journaal werd de straf voor ING een megaboete genoemd, wat beter is, al wees iemand mij erop dat 'mega' toch ook refereert aan zes nullen.

We zien hier dat de wiskunde zich niet altijd leent voor taalgebruik. Taal heeft geen euclidische axioma's – het blad voor docenten Nederlands heet in elk geval geen *Euclides*, maar vast *Awater* of *Persoonsvorm*. (Of *Kommaneukers*, hoewel dat ook prima een wiskundeblad zou kunnen zijn.) Aan wiskundige begrippen kun je niet altijd sjorren. Je kunt wel zeggen dat je een miljoentje per jaar verdient (niet als je leraar bent, helaas). En waar ligt dan de grens van dat miljoentje? Ergens bij 950.000? Daaronder is het al snel 'ruim negen ton'. Een marge van 5 procent dus, heeft een miljoentje. Als we dat even als grens nemen, is het logisch dat je elf eieren geen dozijntje kunt noemen. Maar je zou 143 eieren wel voor een grosje kunnen laten doorgaan, maar ook dat voelt gek. Net zo min heeft een leerling die een 9,7 haalt een tientje gekregen. Getallen, en woordaanduidingen voor getallen, zijn soms heel strikt. Helemaal vaag wordt het als het over *x*'jes en *y*'tjes gaat – iets wat vooral uit de mond van alfa's nogal eens klinkt als ze proberen algebra te duiden. Iets wat onbekend is, verkleinen met een onduidelijke factor. Hoeveel is dan 10 *x*'jes? 9,5*x*? En is een grosje dozijntjes meer of minder dan 1600?

Zesjescultuur is daarentegen een perfect woord. Het gaat immers om mensen die met een 5,6 genoegen nemen. Let wel: hier is de grens van 'zesje' dus blijkbaar 6 2/3 procent. Zou er een nog hoger percentage te vinden zijn dat binnen de marge van een eenvoudige verkleining met '(t)je' valt? Kunnen we een salaris van 92.000 euro een tonnetje noemen? Dan hebben we al een marge van 8%. Als de slager bij 1085 gram half-om-half vraagt of het een onsje meer mag zijn, is het 15%! Ik daag u uit om een nog groter voorbeeld te vinden. Met een getal of getalaanduiding erin, want als je een hapje van een mars neemt, kan die rustig al 20 procent kwijt zijn.Ondertussen mijmer ik nog even over die 775 miljoen. Daar kun je alle actieve leraren wiskunde in Nederland tot hun pensioen ongeveer 600 euro per maand extra voor geven. (Uitgaande van 5000 leraren die gemiddeld nog 20 jaar tot hun pensioen moeten en 13 maanden worden uitbetaald.) Hoe heet zoiets? Een honderdenbonus? Bij Nieuwsuur zouden ze het waarschijnlijk een centenmeevaller noemen.

Over de auteur

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier.
Vanaf 1 september speelt hij zijn nieuwe voorstelling *Rotatie*. Kijk voor de speellijst op *www.janbeuving.nl.*

VIJF VRAGEN AAN...

Henk Rozenhart

In de nieuwe rubriek Vijf vragen aan ... leren we docenten wiskunde beter kennen. Waarom hebben ze voor het vak gekozen? Wat inspireert hen? Hebben ze nog tips voor collega's? Deze keer vijf vragen aan Henk Rozenhart voorzitter van de redactie van *Euclides* en 44 jaar wiskundedocent.

1 Wie hebben jou geïnspireerd om te kiezen voor het beroep van wiskundeleraar?

'Los van het feit dat er een zekere mate van toeval aanwezig is bij mijn beroepskeuze moet ik de namen noemen van Ben Knip en Joop van Dormolen. Zij waren het die in de jaren zeventig van de vorige eeuw een brutaal stelletje studenten, die didactiek maar onzin vonden, tot inzicht brachten. Ben was didactiekdocent aan de UvA en worstelde met een groep studenten die dachten dat didactiek voor watjes was. Ben nodigde Joop uit voor een college over echte wiskunde. Na een werkelijk prachtig college met een mooi wiskundeprobleem raffelde Joop het laatste stukje bewijs even snel af voor de pauze en de arrogante studentjes waren het spoor volkomen bijster. Veel discussie in de koffiepauze leidde tot het inzicht dat het niet echt handig was van Joop om het zo af te raffelen. Het kwartje was gevallen.
De boodschap was natuurlijk: "Denk na over lesgeven en gebruik het aangeleverde materiaal en dus ook didactische principes om je eigen professionaliteit te vervolmaken." Uit deze groep kwam een aardig aantal bekwame wiskundeleraren.'

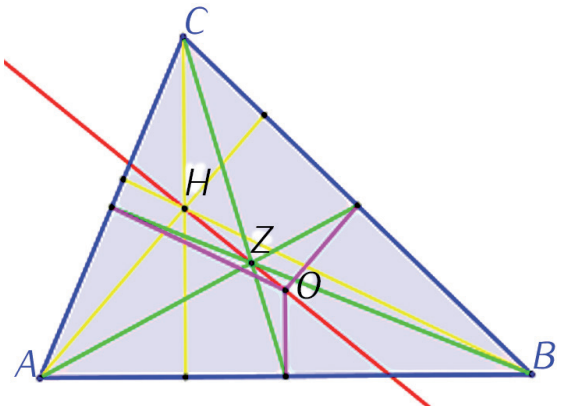
figuur 1 Joop van Dormolen, *Didactiek van de Wiskunde* (1974)

2 Welk fictieboek over wiskunde raad jij je collega's aan?

'Het laatste verhaal van Miguel da Torres van Thomas Vogel. Het speelt in Portugal en geeft aan de hand van de reeks van Fibonacci een prachtig verhaal over grote thema's als liefde, de magie van getallen en de relatie tussen fictie en werkelijkheid.'

3 Welke stelling heeft voor jou schoonheid en verrassing?

'Het mooiste is natuurlijk een stelling die eenvoudig en elegant is. Het eerste wat mij te binnen schiet is de stelling van Thales vanwege zijn eenvoud. Maar zelf heb ik veel genoegen beleefd aan de stelling over de rechte van Euler, die bewijst dat de drie belangrijke punten in een driehoek, namelijk het zwaartepunt, het hoogtepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op een lijn liggen. Het was voor mij iets wat ik op dat ogenblik niet wist en waarvan het bewijs mij zeer aansprak.'



figuur 2 De rechte van Euler. Zwaartepunt, hoogtepunt en middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek liggen op een rechte lijn

4 Welk kunstwerk moet elke wiskundeleraar zien?
'Dat kan niet anders zijn dan het prachtige plafond van Andrea del Pozzo in de kerk van Ignacio de la Loyola in Rome. Liggend op de grond had ik hier een ultieme ervaring. Ook de koepel achter in de kerk geeft nog een prachtig trompe-l'oeil effect.'

5 Welk advies geef jij je collega's?
'Blijf jezelf en onthoud goed dat het op school in die klas moet gebeuren. Dus deur dicht en lesgeven. En word geen slaaf van je methode, leg dat boek af en toe eens weg.'

figuur 3 Plafondschildering van Andrea del Pozzo (1642 – 1709) in de kerk Sant'Ignazio in Rome

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Stap nu over op een mentale wachtwoordmanager

Een 'mentaal algoritme' om wachtwoorden te reproduceren is verrassend makkelijk te leren. Na Kennislinks eerste publicatie hierover, in 2016, is er nu een speciale website, Safe Passwords, met instructies en filmpjes die het nog simpeler maken om zo'n mentaal algoritme aan te leren. Wiskundige Samira Samadi testte drie varianten van zulke mentale algoritmes ook uit met groepen proefpersonen, met goede resultaten. Voor meer informatie: *https://www.nemokennislink.nl/publicaties/een-wachtwoordmanager-in-je-hoofd/*
Bron: Wiskunde PersDienst

Fields Medals voor vier wiskundigen

Iedere vier jaar wordt tijdens het Internationale Congress of Mathematicians de *Fields Medal* toegekend aan jonge wiskundigen (maximaal 40 jaar). Op 1 augustus jl. ontvingen vier wiskundigen deze prijs, vaak de Nobelprijs van de wiskunde genoemd.
De 30-jarige professor Peter Scholze van de Universiteit Bonn was één van de jongste die ooit deze prijs kreeg. Jean-Pierre Serre was 27 toen hij in 1954 als jongste ooit de Fields Medal kreeg.
Andere winnaars dit jaar: Caucher Birkar (40) van Cambridge University, Alessio Figalli (34) van het Zwitsers Federaal Instituut van Technologie in Zürich en Akshay Venkatesh (36) van Princeton en Stanford University. Caucher , een voormalig vluchteling van Koerdisch Iraanse afkomst, heeft maar kort van zijn medaille kunnen genieten. Zijn tas met daarin onder meer de 14 karaats gouden medaille werd enkele minuten na de ceremonie gestolen. De tas werd later teruggevonden, zonder medaille...
Bron: *https://www.nytimes.com/2018/08/02/world/europe/fields-medal-theft-caucher-birkar.html*

Modelleren in Singapore

Bij de Singapore International Mathematics Challenge 2018, een tweejaarlijkse modelleerwedstrijd in teamverband voor bovenbouwleerlingen, zijn twee Nederlandse scholen dit jaar verrassend in de prijzen gevallen: de teams van Colegio Arubano uit Oranjestad en Lorentz Casimir Lyceum uit Eindhoven wisten allebei een zogenoemde commendation award in de wacht te slepen, in een veld met voornamelijk topscholen op het gebied van wiskunde en science uit alle delen van de wereld.
Van 20 tot en met 26 mei was de campus van de National University of Singapore plaats van handeling. Tijdens de drie wedstrijddagen mochten de leerlingen 32 uur aan de opgave werken, desgewenst non-stop maar tussendoor slapen was toegestaan.
Het wedstrijdgedeelte werd afgesloten met een schriftelijke rapportage en diverse mondelinge presentaties. Daarmee is SIMC eigenlijk een XL versie van een Wiskunde Alympiade of B-dag, waaraan beide havo/vwo-scholen ook al vele jaren fanatiek deelnemen. Naast de wedstrijd stonden de leerlingen deze week bedrijfsbezoeken, diverse colleges en een uitgebreid cultureel en toeristisch programma te wachten.
Het Lorentz Casimir Lyceum was voor de vierde keer vertegenwoordigd bij SIMC, voor Colegio Arubano was het de tweede deelname. Hoofdsponsor van de zesde editie van dit evenement was het Singaporese ministerie van onderwijs. Winnaar van SIMC 2018 werd gastheer NUS High School uit Singapore. Voor de opgaven verwijzen we naar http://nushigh.edu.sg/simc.
Bron: Bas Friesen, docent aan het Lorentz Casimir Lyceum

Arubaanse en Eindhovense vwo-leerlingen in SIMC 2018 met hun docenten Bas Friesen (LCL), links en Ricky Quant (CA), rechts

Jan Aarts overleden

Op 14 juni jl. overleed Jan Aarts, emeritus-hoogleraar van de TU Delft, op 80-jarige leeftijd. Jan heeft veel betekend voor het wiskundeonderwijs. Gedurende een aantal jaren was hij het gezicht van de vakantiecursus voor docenten wiskunde, die jaarlijks in augustus/september wordt gegeven in Amsterdam en in Eindhoven. Ook schreef hij een aantal boeken voor het wiskundeonderwijs. Bij Epsilon verschenen bijvoorbeeld *Christiaan Huygens: Het Slingeruurwerk*, *Topologie door zien*, *Meetkunde*, *Complexe Functies* en (samen met Swier Garst) het zebraboekje *Een verkenning van krommen*. Jan was jarenlang lid van de programmaraad van de Nationale Wiskunde Dagen. Elders in deze *Euclides* staat, ter nagedachtenis, een bijzondere bijdrage van Jan Aarts.

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?

DEEL 2

Jos Remijn

In september 2018 bestaat Cito 50 jaar. In dit tweede artikel over de rol die Cito heeft gespeeld bij de wiskunde-examens, bespreekt Jos Remijn de wijze waarop examens gemaakt worden en hoe Cito de constructie en de normering ondersteunt.

Inleiding

Toen Cito in 1968 werd opgericht, is in datzelfde jaar de Mammoetwet ingevoerd. Met de komst van de Mammoetwet maakten de schooltypen (m)ulo, hbs en gymnasium plaats voor mavo, havo en vwo (atheneum en gymnasium). Waar voor die tijd naast het schriftelijke eindexamen ook een mondeling examen werd afgenomen door de eigen docent, vergezeld door een gecommitteerde, werd toen een systeem ingevoerd waarbij 50% van het eindcijfer van een vak werd bepaald door het cijfer van het Centraal Schriftelijk Eindexamen en 50% door het gemiddelde van de door de school gemaakte schoolonderzoeken. Vakken als algebra, stereometrie, goniometrie en analytische meetkunde verdwenen van het toneel.
Er kwam één vak wiskunde, bestaand uit een combinatie van algebra en meetkunde, op alle schooltypen. Alleen op het vwo kwamen twee vakken wiskunde: Wiskunde I (analyse en kansrekening/statistiek) en Wiskunde II (vectormeetkunde). De examens wiskunde van mavo 3 en mavo 4 werden tot 1985 in twee zittingen afgenomen, één zitting met uitsluitend meerkeuzevragen en één zitting met open vragen. Vanaf 1971 raakte Cito betrokken bij de constructie van examenopgaven: de meerkeuzevragen werden onder verantwoordelijkheid van Cito gemaakt.

Rol van Cito in de jaren '70

In de jaren '70 werden de centrale eindexamens vastgesteld door de Commissie Vaststelling Opgaven (CVO) in opdracht van het ministerie van Onderwijs en Wetenschappen. De CVO werd geholpen door een adviescommissie van docenten (ACD). De leden werden aanvankelijk door de NVvW voorgedragen. De NVvW riep ook jaarlijks docenten op om examenopgaven te maken en in te zenden naar de ACD. Zie figuur 1.
Cito had een adviserende stem in de CVO. In 1981 werd de financiële beloning voor het inzenden van examenopgaven door docenten in het veld afgeschaft. Dat leidde snel tot het opdrogen van deze stroom van opgaven.

OPROEP

aan docenten werkzaam bij het vwo, havo en mavo zich aan te melden als inzender van examenopgaven voor de cursus 1976–1977.
Aanmelding dient te geschieden vóór 1 februari 1976 bij de secretaris van de NVW, drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132 te Den Haag, telefoon: 070-687998 of 070-687670.
Als iemand na de aanmelding wordt uitgenodigd opgaven in te zenden ontvangt hij of zij tevens alle nodige aanwijzingen. De indiening van een compleet stel examenopgaven wordt beloond met een bedrag gelijk aan drie vacaties (momenteel driemaal *f* 60,–).

figuur 1 *Euclides, 51*(5), januari 1976

De ACD veranderde toen in een door een Cito-vakdeskundige begeleide werkgroep, later constructiegroep genoemd. De leden van de constructiegroep werden via advertenties geworven. Tegen een vergoeding construeerden zij examenopgaven en stelden examenconcepten voor, samen met de Cito-vakdeskundige.

Deze werkwijze bestaat tot op de dag van vandaag. De naam van de vaststellingscommissie CVO is in de loop der jaren veranderd, van CEVO via CvE tot het huidige CvTE. De constructie van examenopgaven wordt voor elk wiskundevak gedaan door een groep van drie à vier docenten die lesgeven in examenklassen. Zij mogen het werk in de constructiegroep maximaal negen jaar doen. Deze docenten worden voor circa een dag per week vrijgesteld van lestaken en (meestal) gedetacheerd vanuit de school bij Cito. Bijna elk schooljaar worden in kranten en in de WiskundE-brief door Cito sollicitanten voor de constructiegroepen opgeroepen. Om de docentenparticipatie nog verder te vergroten, is vanaf het jaar 2018 voor vmbo wiskunde gt een zogenoemde 'constructiegroep-op-afstand' gestart. Hierin hebben twaalf docenten zitting. Zij leveren conceptexamenopgaven met correctievoorschrift aan via een beveiligde internetsite van Cito. De gemaakte opgaven worden na onderlinge feedback doorgegeven

aan de reguliere constructiegroep. Met deze laatste uitbreiding van het aantal docent-constructeurs komen we langzamerhand weer terug bij de situatie in de jaren '70, waarin iedere actieve docent mee mocht doen met het maken van examenopgaven.

Psychometrie van Cito

Omdat Cito zich vanaf de oprichting bezighield met onderzoek op het gebied van toetsing, werd Cito al snel verantwoordelijk voor de statistische rapportages van de examenresultaten. Cito gaf vanaf de jaren '70 jaarlijks een in boekvorm gebundeld examenverslag uit met toets- en itemanalyses.
In *Euclides* werden delen van deze analyses besproken. Bijvoorbeeld bij het meerkeuze-examen mavo 3 uit 1977 publiceerde Cito de resultaten van alle vragen. Zie figuur 2 voor een voorbeeld. In de marge staan de percentages leerlingen die het betreffende antwoord hadden gekozen, onderaan staat tussen haakjes de zogenoemde *rit*-waarde, in dit voorbeeld *rit* = 0,38. Dit werd destijds als volgt toegelicht:

"*Correlatie tussen een vraag en de totale toets (rit). De rit drukt de discriminerende waarde van een vraag uit. Een hoge rit geeft aan dat de vraag goed discrimineert, d.w.z. 'goede' kandidaten maken de betrokken vraag goed en 'slechte' kandidaten maken de betrokken vraag fout. Een positieve lage rit betekent: zowel 'goede' als 'slechte' kandidaten konden de vraag wel (of niet) maken. De toetsconstructeurs trachten voor examens items te construeren met bij voorkeur een rit-waarde > 0,30 en een p-waarde die in de buurt van 60 ligt. Items die hieraan voldoen zijn vanuit psychometrisch oogpunt optimaal aangepast aan de populatie die de vragen moet beantwoorden.*"

8. Welke van onderstaande relaties is *geen* functie?

48	A	$\{(x, y) \mid x = 2\}$
24	B	$\{(x, y) \mid y = 2\}$
8	C	$\{(x, y) \mid x + y = 2\}$
20	D	$\{(x, y) \mid x - y = 2\}$
(38)		

figuur 2 *Euclides, 53*(5), januari 1978

Tot het examenjaar 2015 werden door medewerkers van Cito de examenresultaten in de eerste *Euclides* van het nieuwe schooljaar, het *Examennummer*, in detail besproken. Er werd, zeker in het begin, uitgebreide uitleg gegeven over de statistische getallen en hun betekenis. Tegenwoordig publiceert Cito alle gegevens rondom de examens op de internetsite van Cito. Op de website *www.cito.nl* wordt ook veel achtergrondinformatie gegeven over de technieken en procedures rondom de examens.
Het examennummer van *Euclides* wordt tegenwoordig vooral gevuld met ervaringen en opiniërende beschouwingen over de examens, geschreven door docenten.
Veel docenten en leerlingen denken wellicht dat Cito verantwoordelijk is voor de normering (de bepaling van de N-termen) van de examens. Niet geheel vreemd, want de publicatie van de N-termen vindt elk jaar op de internetsite van Cito plaats. Toch zijn de N-termen niet van Cito. De beslissingen hierover worden door het CvTE genomen en Cito heeft een adviserende rol.
De jarenlange expertise van Cito draagt ertoe bij dat er steeds betere instrumenten worden gebruikt om de waarde van een diploma over de jaren heen constant te houden. Eén van de voorbeelden hiervan is de zogenoemde *pretest* van examenopgaven. Elk jaar worden in het geheim op een flink aantal scholen conceptexamenopgaven aan leerlingen van examenklassen voorgelegd.
Met de informatie die Cito van de docent-correctoren terugkrijgt, kan een nauwkeurig beeld worden gevormd van de moeilijkheidsgraad van een toekomstig examen. Door het gebruik van vaste ankeropgaven die elk jaar weer worden gebruikt, wordt ook informatie over eventuele vaardigheidsverschillen van de examenkandidaten over de jaren verzameld.

Mavo-examens: meerkeuze en open vragen

Volgens A.D. de Groot, grondlegger van Cito, waren de beoordelingen van toetsen en examens in het verleden te subjectief. Cito ging hier vanaf de oprichting mee aan de slag en ontwikkelde veel expertise op het gebied van meerkeuzetoetsen, waarmee een objectievere beoordeling werd beoogd. Vanaf 1971 ontwikkelde Cito de meerkeuze-examens voor mavo 3/4. Deze examens bestonden volledig uit meerkeuzevragen. Toen het ministerie rond 1978 het voornemen uitsprak om de twee examenzittingen op de mavo (meerkeuze / open vragen) te vervangen door één examenzitting van twee uur met uitsluitend meerkeuze-vragen, tekende de NVvW namens het onderwijsveld daar bezwaar tegen aan. Een citaat uit de jaarrede 1979 van voorzitter Theo Korthagen:

'Het houden van één zitting met meerkeuzevragen achten wij onderwijskundig gezien zeer dubieus. Het is de vraag of het wel mogelijk is bepaalde leerdoelen met behulp van meerkeuzevragen te toetsen. Er zal zeker een negatieve invloed uitgaan van deze wijze van examineren op de kwaliteit van het wiskundeonderwijs bij het mavo.'

Het werd uiteindelijk toch één examenzitting op de mavo, vanaf 1986 met 60 punten voor de meerkeuzevragen en 30 voor de open vragen (met 10 punten vooraf). Cito heeft

de invoering van de gecombineerde examens mavo en de correlaties tussen de leerlingprestaties op beide onderdelen onderzocht. In een publicatie uit 1988[1] hierover bleek dat het deel met meerkeuzevragen makkelijker was geworden dan vroeger en het deel met open vragen moeilijker. Docenten bleven erg kritisch over de te grote rol van de meerkeuzevragen, die men ongeschikt vond om het denkproces bij complexere problemen te toetsen. Leerlingen zouden zich ook meer richten op de meerkeuzevragen die vooraan in het examen stonden en daardoor de open vragen afraffelen. Er kwam een aanpassing: vanaf 1990 werd het 44 punten voor de meerkeuzevragen en 46 voor de open vragen. Het laatste examen mavo-D oude stijl was het tweede tijdvak uit 1998, waarvan in figuur 3 een voorbeeld van twee 'klassieke' vragen te zien is.

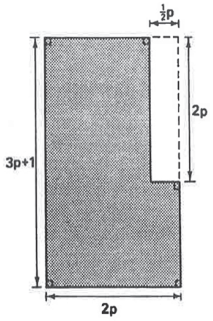
'DE N-TERMEN ZIJN NIET VAN CITO. DE BESLISSINGEN HIEROVER WORDEN DOOR HET CVTE GENOMEN EN CITO HEEFT EEN ADVISERENDE ROL.'

Havo- en vwo-examens

Voor havo en vwo zijn nooit meerkeuze-examens gemaakt. Een onderzoek van Cito in 1980[2] naar de correctievoorschriften bij open vragen in de examens en de mate waarin docenten dezelfde scores aan de vragen toekenden, leverde voor wiskunde een gunstig beeld op. De correctievoorschriften waren behoorlijk gedetailleerd en zorgden er in ruim voldoende mate voor dat de beoordeling betrouwbaar en dus voldoende objectief was. Hoe anders was dit nog in het havo-examen 1973-2, zie figuur 4. Daarin is te zien dat het correctievoorschrift bij veel vragen uitsluitend het maximaal aantal te behalen punten aangaf en de beoordeling van onvolledige en deels onjuiste antwoorden aan de correctoren overliet.

2p **22** ■ Bereken $3\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$.
Het antwoord is

A $\begin{pmatrix}4\\-18\end{pmatrix}$
B $\begin{pmatrix}20\\-18\end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$
D $\begin{pmatrix}20\\1\end{pmatrix}$
E $\begin{pmatrix}20\\6\end{pmatrix}$



Op de bijlage bij vraag 33 staat een rechthoekige figuur (grijs). De lengten van de zijden zijn uitgedrukt in p.
6p **33** □ Druk de oppervlakte van de grijze figuur uit in p. Laat zien hoe je aan het antwoord komt.

22 ■ **E**

Maximumscore 6

33 □	voor de oppervlakte van de grote rechthoek is $2p(3p + 1)$	1
	voor de uitwerking tot $6p^2 + 2p$	1
	voor de oppervlakte van de kleine rechthoek is $\frac{1}{2}p \cdot 2p$	1
	voor de uitwerking tot p^2	1
	voor de oppervlakte is $6p^2 + 2p - p^2$	1
	voor het antwoord $5p^2 + 2p$	1

Indien als eenheden bijvoorbeeld cm² gebruikt, niets aftrekken.
Indien is genoteerd $2p \cdot 3p + 1 - \frac{1}{2}p \cdot 2p$, maar goed uitgewerkt tot $5p^2 + 2p$, 1 punt aftrekken.

figuur 3 Uit: Examen en Correctievoorschrift vbo-mavo D wiskunde oud programma 1998-2

2. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$.
en de lijnen l : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

m : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

a. Bewijs dat de lijn l de cirkel c raakt.
b. Op de cirkel c liggen punten waarvan de afstand tot l gelijk is aan de afstand tot m. Bereken de coördinaten van deze punten.

Voor elk onderdeel worden maximaal de volgende aantallen punten toegekend:
2. voor *a*: 7 punten;
voor *b*: 8 punten.

figuur 4 Uit: Examen en Correctievoorschrift havo wiskunde 1973-2

In 1990 werd gestart met experimentele examens wiskunde voor het nieuwe mavo-programma, waarin meer aandacht kwam voor contextrijke wiskunde en minder voor formele wiskunde. In 1997 werden landelijk voor de eerste keer examens mavo C/D volgens het nieuwe programma afgenomen, vanaf dan uitsluitend met open vragen gegroepeerd rondom zes à zeven realistische contexten.

De ideeën van A.D. de Groot hebben dan wel niet geleid tot meerkeuzevragen in havo/vwo-examens, maar leidden wel tot de ontwikkeling van gedetailleerde correctievoorschriften, waarin de stappen punt-voor-punt worden benoemd. Docenten geven in vragenlijsten en bij examenbesprekingen aan dat ze in grote lijnen goed uit de voeten kunnen met de huidige detaillering in de correctievoorschriften bij wiskunde. Cito onderzoekt regelmatig of er nog verbeteringen mogelijk zijn. Vanaf ongeveer 1977 nam Cito jaarlijks een enquête af bij de docenten die naar de examenbesprekingen, georganiseerd door de NVvW, kwamen. Daarin werd de mening van de docenten gevraagd over het betreffende examen wiskunde. In het bijzonder werd gevraagd naar eventuele tijdnood, de moeilijkheidsgraad, het taalgebruik en de hanteerbaarheid van het correctievoorschrift. Deze reacties uit het veld werden ook gedeeld met het CVO,

later CEVO, en ze speelden een rol bij de normering van de examens. Nog steeds wordt de mening van het veld jaarlijks door Cito verzameld, daar wordt nu de Quick Scan van het programma WOLF voor gebruikt.

Verder lezen

Wie meer wil weten over de constructie en de normering van de examens kan terecht op de Cito-website[3]. Hier vind je veel informatie over de examens van de laatste jaren alsmede achtergrondinformatie over statistiek en psychometrische methoden. Overigens zal in de vierde aflevering van deze serie over het Cito aandacht besteed worden aan de toets- en itemanalyse, die zich ook baseert op de gegevens die door Cito jaarlijks via WOLF direct na de examens worden ingewonnen.
Ten slotte is de zoekfunctie van het digitaal archief van *Euclides*, te vinden op de NVvW-website[4], een uitstekend hulpmiddel om examenbesprekingen en artikelen van docenten en van CEVO/CvTE over examens en de correctie ervan terug te vinden en te lezen. Een bron van vermaak. Veel meningen over de examens, de prestaties van de leerlingen en de rol van Cito en Cv(T)E blijken tijdloos!

In de volgende aflevering kijken we meer naar de toekomst en de digitale ontwikkelingen die daar een rol in spelen. Uiteraard gaan we niet voorbij aan de ontwikkelingen die er in dit kader de afgelopen jaren bij de wiskunde-examens en toetsen zijn geweest.

Noten

[1] Kreeft, H.P.J. & Luijten, A.J.M. (1988). *Gesloten vragen en open vragen in de C- en D-examens.* Arnhem: Cito.
[2] A.J.M. de Jong (1980). *Correctievoorschriften voor de beoordeling van open vragen en interbeoordelaarsbetrouwbaarheid.* Arnhem: Cito.
[3] *https://www.cito.nl/onderwijs/voortgezet-onderwijs/centrale-examens-voortgezet-onderwijs/tools-en-expertise*
[4] *https:/archief.vakbladeuclides.nl*

Over de auteur

Jos Remijn is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *jos.remijn@cito.nl*

ARCHIMEDES, OPPERVLAKTE EN INHOUD VAN DE BOL

Bert Boon

De formules voor de oppervlakte en de inhoud van een bol kennen we allemaal. Maar hoe Archimedes die formules heeft afgeleid en waarom hij daar de hefboomwet bij gebruikte, dat is minder bekend. Bert Boon treedt in de voetsporen van Archimedes.

Inleiding

Archimedes (287 – 212 v. Chr.) wordt algemeen gezien als de grootste wiskundige van de Griekse oudheid. In zijn boek *Over de bol en de cilinder I* leidt hij als eerste formules af voor de oppervlakte en de inhoud van de bol.

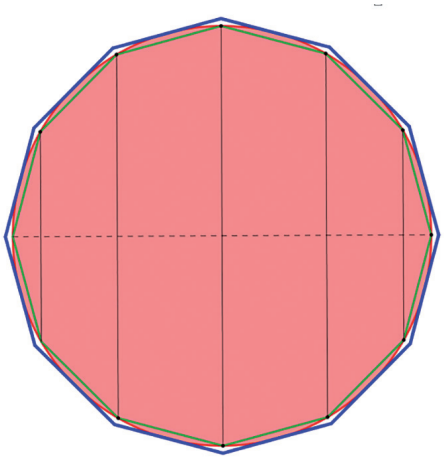
De oppervlakte van een bol is gelijk aan vier maal de oppervlakte van een grote cirkel van de bol.
De inhoud van een bol is gelijk aan vier maal de inhoud van een kegel met een grote cirkel van de bol als grondvlak en de straal als hoogte.

De afleiding van die formules bevat interessante meetkunde, die ook toegankelijk is voor leerlingen van havo en vwo.
In dit artikel volgen we Archimedes in zijn afleiding van deze formules. Daarna laten we aan de hand van zijn eigen boekje *De Methode* zien hoe Archimedes op het idee voor de formule voor de inhoud van een bol kwam. Om de leesbaarheid te verhogen vervangen we 'de oppervlakte van een grote cirkel van de bol' door de ons bekende formule πr^2, met r de straal van de bol.

Oppervlakte van een afgeknotte kegel

Archimedes bewijst zijn stelling door een grote cirkel van de bol in te sluiten tussen een regelmatige ingeschreven n–hoek en een regelmatige omgeschreven n-hoek, met n deelbaar door 4, zie figuur 1. Wentel je de veelhoeken om een middellijn van de cirkel, dan krijg je lichamen die zijn samengesteld uit twee kegels en een aantal afgeknotte kegels. Zowel de oppervlakte als de inhoud van de bol ligt dan in tussen respectievelijk de oppervlakten en de inhouden van de in- en omgeschreven lichamen.

Voordat we verder gaan, hebben we dus de formules voor de oppervlakte en de inhoud van de kegel en de afgeknotte kegel nodig. Nu was de inhoud van de kegel al bekend uit *De elementen* van Euclides (± 300 v.Chr.) waar in boek 12, stelling 10, staat dat die inhoud gelijk is aan één derde van de inhoud van een cilinder met hetzelfde

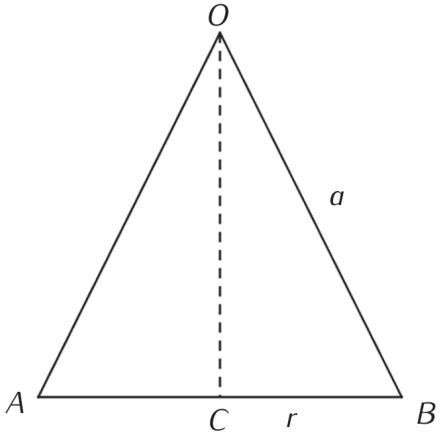


figuur 1

grondvlak en dezelfde hoogte. Die oppervlakteformules behandelt Archimedes in de stellingen 14 en 16.

Stelling 14

De oppervlakte van een kegelmantel is gelijk aan de oppervlakte van een cirkel met straal $\sqrt{ar}$, met a het apothema en r de straal van de grondcirkel, zie figuur 2.

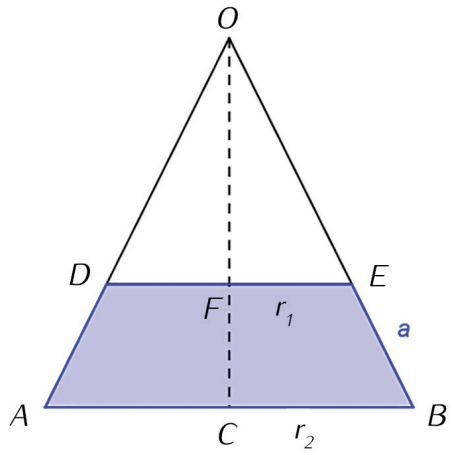


figuur 2

In onze notatie: de oppervlakte van een kegelmantel is πar. Omdat deze formule algemeen bekend is, laten we het bewijs achterwege.

Stelling 16

De oppervlakte van een afgeknotte kegelmantel is gelijk aan de oppervlakte van een cirkel met straal $\sqrt{a(r_1+r_2)}$ met a het apothema, r_1 en r_2 de straal van boven - en ondervlak, zie figuur 3.



figuur 3

Bewijs

De oppervlakte van de afgeknotte kegel $ABED$ is het verschil tussen de oppervlakten van de kegels OAB en ODE, dus

$\pi \cdot OB \cdot r_2 - \pi \cdot OE \cdot r_1$ (1).

Omdat $\Delta OCB \sim \Delta OFE$ is $OB : OE = r_2 : r_1$, dus

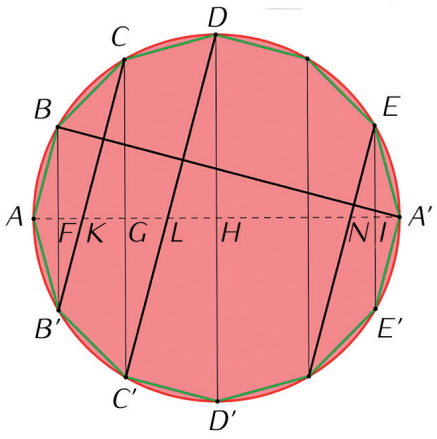
$OB \cdot r_1 = OE \cdot r_2$ (2).

Vervang je in (1) OB door $OE + a$, en daarna $OE \cdot r_2$ door $OB \cdot r_1$, dan vind je

$$\begin{aligned}\pi \cdot OB \cdot r_2 - \pi \cdot OE \cdot r_1 &= \pi \cdot OE \cdot r_2 - \pi \cdot a \cdot r_2 + \pi \cdot OE \cdot r_1 \\ &= \pi \cdot OB \cdot r_1 + \pi \cdot a \cdot r_2 - \pi \cdot OE \cdot r_1 \\ &= \pi \cdot (OB - OE) \cdot r_1 + \pi \cdot a \cdot r_2 \\ &= \pi \cdot a \cdot r_1 + \pi \cdot a \cdot r_2 = \pi \cdot a \cdot (r_1 + r_2)\end{aligned}$$

Oppervlakte van een bol

Een bol B ontstaat door een cirkel C te wentelen om een middellijn. De oppervlakte van het lichaam V, $O(V)$ dat ontstaat door een ingeschreven regelmatige n-hoek, n deelbaar door 4, te wentelen om een middellijn van de cirkel is de som van de oppervlakten van de twee kegels aan de uiteinden en de tussenliggende afgeknotte kegels. (Ter illustratie is in figuur 4 een ingeschreven twaalfhoek getekend.)



figuur 4

In formule:

$O(V) = \pi \cdot (AB \cdot BF + BC \cdot (BF + CG) + CD \cdot (CG + DH) + \ldots + EA' \cdot EI)$

Noem je de lengte van een zijde van de n-hoek z_n, dan wordt de formule:

$O(V) = \pi \cdot (z_n \cdot BF + z_n \cdot (BF + CG) + z_n \cdot (CG + DH) + \ldots + z_n \cdot EI) =$

$\pi \cdot z_n (BF + BF + CG + CG + DH + \ldots + EI) =$

$\pi \cdot z_n (BB' + CC' + \ldots + EE')$

Dus $O(V) = \pi \cdot z_n (BB' + CC' + \ldots + EE')$

Met behulp van evenredigheden bewijst Archimedes dat $z_n (BB' + CC' + \ldots + EE') = AA' \cdot A'B$.

Bewijs

De omtrekshoeken $BB'C$, $B'CC'$, $CC'D$, ... staan op gelijke bogen, dus zijn ze gelijk. Daarom zijn

- de lijnen CB', DC', ... evenwijdig
- de driehoeken AFB, KFB', KGC, ... gelijkvormig.

Daaruit volgt:

$BF : FA = B'F : FK = CG : GK = \ldots = E'I : IA'$ en dus

$(BF + FB' + \ldots IE') : (AF + FK + \ldots + IA') = BF : FA$

of $(BB' + CC' + \ldots EE') : AA' = BF : FA$.

Omdat $\Delta AFB \sim \Delta ABA'$, is $BF : FA = A'B : BA$.

Dus $(BB' + CC' + \ldots) : AA' = A'B : BA = A'B : z_n$

en $z_n (BB' + CC' + \ldots + EE') = AA' \cdot A'B$.

Is r de straal van de cirkel (en dus van de bol), dan is $AA' = 2r$ en $A'B < 2r$ en

$O(V) = \pi \cdot (AA' \cdot A'B) < \pi \cdot 2r \cdot 2r = 4\pi r^2$.

Evenredigheden

Archimedes gebruikt de volgende eigenschap van evenredigheden:

Als $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, dan $(a_1 + a_2) : (b_1 + b_2) = a_1 : b_1$.

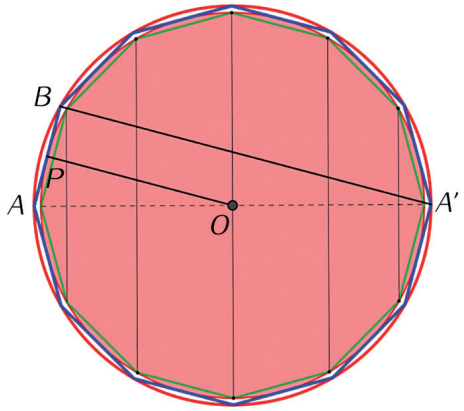
Bewijs: Uit $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ volgt $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

Uit $(a_1 + a_2) : (b_1 + b_2) = a_1 : b_1$ volgt $a_1 b_2 + a_2 b_1 = a_1 b_1 + a_1 b_2$ of $a_1 b_2 = a_2 b_1$. De eigenschap valt voort te zetten voor een keten van evenredigheden.

Als $(a_1 : b_1) = (a_2 : b_2) : \ldots : (a_n : b_n)$ dan

$(a_1 + \ldots + a_n) : (b_1 + \ldots + b_n) = a_1 : b_1$

$O(W)$ is de oppervlakte van het omwentelingslichaam W, dat ontstaat door een omgeschreven regelmatige n-hoek, n deelbaar door 4, om de middellijn te wentelen.
Archimedes toont aan dat $O(W) > 4\pi r^2$.
Omdat de omgeschreven n-hoek op zijn beurt ook weer een ingeschreven n-hoek is van de cirkel door zijn hoekpunten, is $O(W) = \pi \cdot AA' \cdot A'B$. De loodlijn uit O op AB snijdt deze in P. $OP = r$.
$A'B = 2OP = 2r$ en $AA' > 2r$, dus $O(W) > 4\pi r^2$.
Zie figuur 5.



figuur 5

De rest van het bewijs bestaat uit het creëren van een tegenspraak.

Stelling 33: de oppervlakte van de bol met straal r is $4\pi r^2$.

Bewijs

Stel dat de $O(B) > 4\pi r^2$.
Stel de verhouding $O(B) : 4\pi r^2 = b : c$ en laat $d^2 = bc$ (dus $c < d < b$).
Neem dan gelijkvormige regelmatige n-hoeken, n deelbaar door 4, om- en ingeschreven in een grote cirkel van de bol, zo dat de verhouding van de zijden kleiner is dan $b : d$.
Dan geldt voor de oppervlakten van de omwentelings-lichamen
$O(W) : O(V) < b^2 : d^2 = b^2 : bc = b : c = O(B) : 4\pi r^2$.
En dat is onmogelijk omdat $O(W) > O(B)$ en $O(V) < 4\pi r^2$, dus $O(B)$ is niet groter dan $4\pi r^2$.
Analoog bewijst Archimedes dat $O(B)$ niet kleiner is dan $4\pi r^2$, dus moet gelden $O(B) = 4\pi r^2$.

Inhoud van de bol

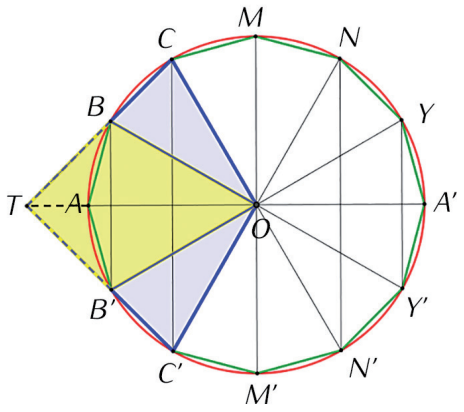
Om een formule voor de inhoud van een bol te vinden, bewandelt Archimedes dezelfde weg: hij leidt eerst formules af voor de inhoud van V en W. Vervolgens laat hij zien dat de inhoud van V kleiner is dan 4 maal de inhoud van een kegel met de grote cirkel als grondvlak en de straal als hoogte, in onze notatie $I(V) < 4 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$, en de inhoud van W groter.

Nadat hij heeft aangetoond, dat $I(B)$ noch kleiner, noch groter kan zijn dan $\frac{4}{3}\pi r^3$, concludeert hij dat $I(B) = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Interessant in het verhaal is vooral de berekening van $I(V)$.

Inhoud van V

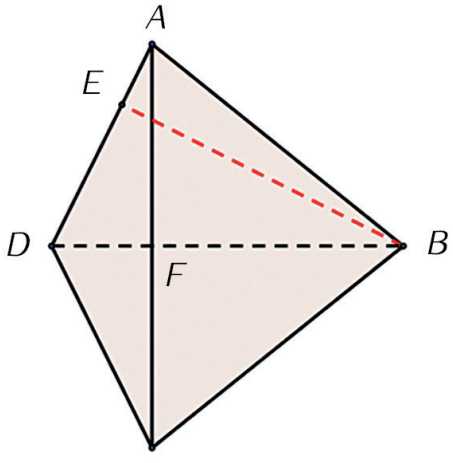
De inhoud van V wordt opgesplitst in:
- de inhoud van de gewentelde vlieger $OBAB'$ +
- de inhoud van de gewentelde sector OBC +
- de inhoud van de gewentelde sector OCM +
  enzovoort.

De inhoud van het lichaam dat ontstaat door de sectoren OBC en $OB'C'$ te wentelen is het verschil van de inhouden van de lichamen die ontstaan door de vliegers $OCTC'$ en $OBTB'$ te wentelen. Zie figuur 6.



figuur 6

De inhoud van een gewentelde vlieger is de som van de inhouden van twee kegels.



figuur 7

Noem je $AF = s$, dan is de inhoud van de gewentelde vlieger:
$\frac{1}{3}\pi s^2 \cdot DF + \frac{1}{3}\pi s^2 \cdot BF = \frac{1}{3}\pi s^2 \cdot BD$ (3)
Met deze formule kan Archimedes niet zoveel. Hij toont aan dat de inhoud ook gelijk is aan de inhoud van een

kegel met als grondvlak een cirkel met de oppervlakte van de mantel van de ene kegel, vermenigvuldigd met de afstand van de top van de andere kegel tot de beschrijvende van de eerste kegel.
Kort genoteerd:
$\frac{1}{3}$ · (*oppervlakte kegelmantel van kegel ACD*) × *BE*,
waarin *BE* de afstand is van *B* tot *AD*. Zie figuur 7.
Het bewijs is niet lastig.
Uit de gelijkvormigheid (hh) van de driehoeken *DEB* en *DFA* volgt:
BD : *BE* = *DA* : *FA* of ook *BD* · *s* = *BE* · *DA*, dus

$$BD = \frac{BE}{s} \cdot DA .$$

Substitutie in (3) geeft voor de inhoud van de gewentelde vlieger: $\frac{1}{3}\pi s \cdot BE \cdot DA$ en daarin is $\pi s \cdot DA$ precies de oppervlakte van de mantel van kegel *DAC*.
Pas je deze vondst toe, dan vind je bijvoorbeeld voor de inhoud van de gewentelde sector *OBC* :
$\frac{1}{3}$· *mantelopp kegel TCC'* · *d*(*O*, *BC*) –

$\frac{1}{3}$· *mantelopp kegel TBB'* · *d*(*O*, *BC*) =

$\frac{1}{3}$· *mantelopp afgeknotte kegel BCC'B* · *d*(*O*, *BC*)

Omdat de afstand van *O* tot alle zijden van de veelhoek gelijk is, zeg *d*, vind je uiteindelijk:

$$I(V) = \frac{1}{3} d \cdot O(V) .$$

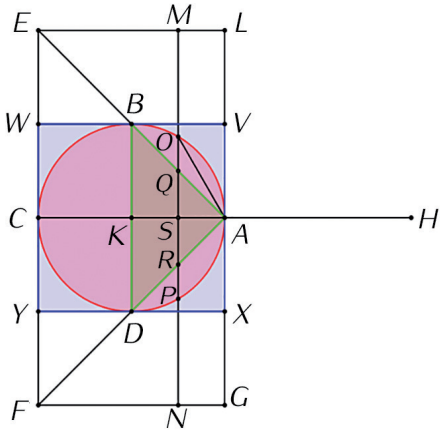
En, omdat $d < r$ en al bewezen is dat $O(V) < 4\pi r^2$, volgt

$I(V) < \frac{1}{3} r \cdot 4\pi r^2$. Zie nogmaals figuur 6.

Methode

In wiskundige artikelen zie je zelden langs welke paden de auteur gegaan is om tot zijn theorie te komen. Bij Archimedes is dat anders. In zijn boekje *De methode*, gericht aan zijn mede-wiskundige Eratosthenes, doet hij uit de doeken hoe hij aan zijn ideeën kwam.
Dat was langs natuurkundige weg. Hij vond zijn formules met behulp van door hem geformuleerde hefboomwet.
Als voorbeeld laten we zien hoe hij langs deze weg de formule voor de inhoud van een bol op het spoor kwam.

In figuur 8 is *CH* de hefboom met *A* als draaipunt. *CA* = *AH*. Verder zie je een cirkel met middelpunt *K* en straal *AK* = *r*, een driehoek *ABD* en een vierkant *YXVW*. Wentel je de gekleurde figuren om de as *CH*, dan krijg je respectievelijk een bol, een kegel en een cilinder.
Te bewijzen is dus: *I*(*B*) = 4 · *I*(*kegel ABD*)
Archimedes toont aan dat als het 'gewicht' van de bol en de kegel *AEF* zich in *H* bevindt en het 'gewicht' van de cilinder *FGLE* in *K*, de hefboom in evenwicht is. Daaruit trekt hij de conclusie: *I*(*cilinder FGLE*) · *AK* = *I*(*bol* + *kegel AEF*) · *AH* Omdat *AH* = 2*AK*:
I(*cilinder FGLE*) = 2 · *I*(*bol*) + 2 · *I*(*kegel AEF*)
Omdat *I*(*cilinder FGLE*) = 3 · *I*(*kegel AEF*), volgt 2 · *I*(*bol*) = *I*(*kegel AEF*) = 8 · *I*(*kegel ABD*) en dus *I*(*bol*) = 4 · *I*(*kegel ABD*).



figuur 8

Voor de liefhebbers nog de redenering waarmee Archimedes dat evenwicht aantoont. Hij gebruikt dat de 'gewichten' van twee cirkels zich verhouden als hun oppervlakten.
Een vlak loodrecht op *CH*, in de tekening door de lijn *MN*, geeft als doorsnede met de cilinder *FGLE*, de kegel *AEF* en de bol cirkels met respectievelijk stralen *MS*, *QS* en *OS*. De oppervlakten van die cirkels verhouden zich als MS^2, QS^2 en OS^2.
Omdat *MS* = *AC* en *QS* = *AS*, geldt *MS* · *QS* = *AC* · *AS*.
Uit Δ*ASO* ~ Δ*AOC* (hh) volgt *AS* : *AO* = *AO* : *AC* en *AC* · *AS* = AO^2
Maar $AO^2 = OS^2 + QS^2$ (stelling van Thales). En, omdat *AH* = *AC* geldt: *AH* : *AS* = *AC* : *AS* = *MS* : *QS* = MS^2 : *MS* · *QS* = MS^2 : (OS^2 + QS^2)
Of ook: *AH* : *AS* = (*opp cirkel in cilinder*) : (*opp cirkel in bol* + *opp cirkel in kegel*).
Of ook: *AH* · (*opp cirkel in cilinder*) = *AS* · (*opp cirkel in bol* + *opp cirkel in kegel*)
Daarom is de cirkel in de cilinder op de plaats waar hij staat, in evenwicht met de beide andere cirkels, geplaatst in *H*. Dat geldt voor elke doorsnede van een vlak loodrecht *AH*. Al die cirkels samen vormen de cilinder, bol en kegel, dus zal de cilinder op de plaats waar hij staat in evenwicht zijn met de bol en de kegel samen, geplaatst in *H*. Omdat *K* het zwaartepunt is van de cilinder zal gelden: *AK* · *I*(*cilinder FGLE*) = *AH* · *I*(*bol* + *kegel AEF*).

Bron

Heath, T.L. (2002). *The Works of Archimedes, On the sphere and the cylinder* I. Dover: Dover publications inc.

Over de auteur

Bert Boon was 40 jaar docent wiskunde aan het Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag.
E-mailadres: *aw.boon@casema.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

SOS CAS TOA

Mieke Abels

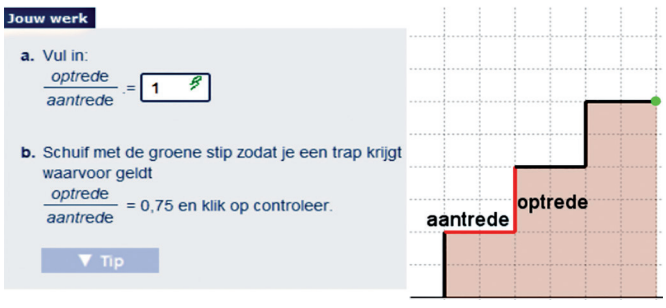
In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut of de Freudenthal Group for research into the didactics of mathematics een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk.
In deze aflevering beschrijft Mieke Abels een informele introductie van de tangens met behulp van de DWO.

Inleiding

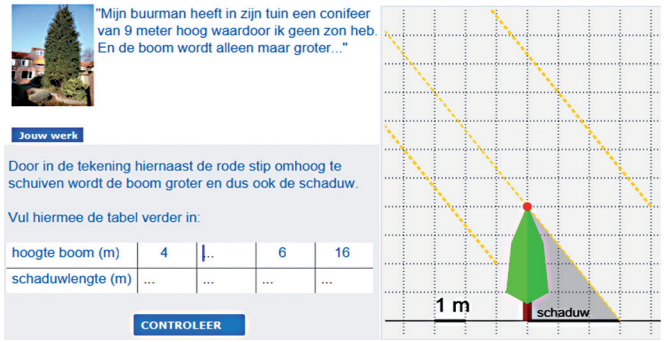
Mijn havo/vwo-leerlingen worstelden vaak met de begrippen overstaande en aanliggende rechthoekszijde en met het feit dat de tangens van een hoek in een rechthoekige driehoek een verhouding is. Dat zie je niet wanneer je met een rekenmachine opzoekt hoe groot de tangens van een hoek is. En een volgend struikelblok is de berekening die dan nodig is om het gevraagde antwoord te vinden. Met een nieuwe applicatie die dit jaar in de DWO (Digitale Wiskunde Omgeving) is ontwikkeld, zie ik mogelijkheden om een leerlijn te ontwerpen voor goniometrie, bestaande uit veel interactieve opdrachten, beginnend met een informele introductie over de tangens.

Contexten

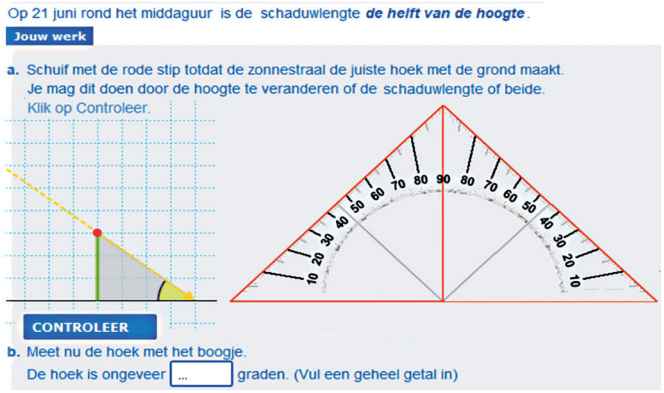
Trappen en zon en schaduw spelen de hoofdrol in de eerste twee series opdrachten. De leerlingen vergelijken trappen, (welke trap is het steilst?), en maken trappen met een gegeven steilheid, zie figuur 1. Ook het begrip 'hellingshoek van een trap' wordt geïntroduceerd.
Bij zon en schaduw krijgen de leerlingen gelijkvormige driehoeken te zien. Wanneer de ene boom twee keer zo hoog is als de andere, dan is de schaduw van die ene boom twee keer zo lang. De leerlingen gebruiken verhoudingstabellen om hoogte en schaduwlengte te berekenen, zie figuur 2. Ook in deze context worden hoeken gemeten met behulp van een geodriehoek, zie figuur 3.



figuur 1



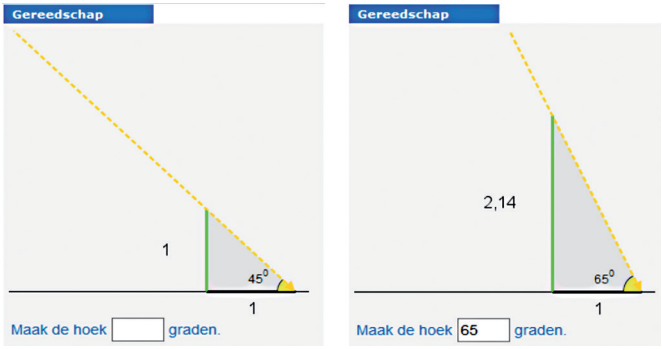
figuur 2



figuur 3

Gereedschap

In de derde serie opdrachten gaan de leerlingen een belangrijk stuk gereedschap gebruiken. Het is een rechthoekige gelijkbenige driehoek met rechthoekszijden 1, zie figuur 4 (links). Wanneer 65 wordt ingevuld, blijft de horizontale rechthoekszijde gelijk aan 1 en de lengte van de verticale rechthoekszijde is gelijk aan ..... Inderdaad! Zie figuur 4 (rechts).



figuur 4

Wanneer op dat moment de schaduwlengte van een boom 4,5 meter is, dan kan de hoogte van de boom berekend worden. De leerlingen gaan dit gereedschap ook gebruiken in de context van trappen. Voor het maken van de berekeningen worden twee manieren aangeboden: het gebruik maken van vergroten (verkleinen) en het gebruik van een verhoudingstabel.

Ervaringen

Deze series opdrachten zijn op kleine schaal uitgeproberd. De reacties van twee zwakke leerlingen uit 3 vmbo t waren eerst negatief (ik snap niets van hoeken ...), maar geleidelijk aan kregen ze meer zelfvertrouwen.

Een 2 vwo-leerling had even moeite met de verhouding optrede : aantrede. Deze was 0,4 (nul-komma-4). 'Kun je dit ook anders uitspreken?,' vroeg ik. 'Nee', was het antwoord. 'En 0,1 (nul-komma-één)?' 'Oh, één tiende.' Het rekenwerk verliep bij alle leerlingen goed. Ze gebruikten het liefst een verhoudingstabel en vonden het heel leuk dat je kon slepen met de figuren.

En hoe nu verder?

In een volgende serie opdrachten die ontwikkeld zal worden, staan de rechthoekige driehoeken niet meer in een stand waarbij de rechthoekszijden horizontaal en verticaal staan. De leerlingen kunnen de driehoeken draaien tot ze in de 'vertrouwde' stand staan. Vervolgens gaan ze met de tangens-knop op een rekenmachine voor het gereedschapsdriehoekje de hoogte zelf invullen en oefenen met het berekenen van zijden en hoeken in verschillende situaties. Het ontwikkelwerk is nog niet af! In een volgend artikel kun je lezen hoe het verder gaat, met daarbij natuurlijk of en hoe de leerlingen met dit onderwerp vorderingen maken.

Over de auteur

Mieke Abels is ontwikkelaar / onderzoeker bij het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *M.J.Abels@uu.nl*

UIT DE PRAKTIJK

LAAT ZIEN DAT...

Hugo Duivesteijn

In mijn paar jaar voor de klas in het vmbo heb ik ieder jaar wel een keer eenzelfde soort voorval. In het boek staat meer dan één opdracht in de vorm: Laat zien dat de omtrek van de driehoek 16 cm is. Elk jaar gaat er wel een keer een vinger de lucht in die ervoor zorgt dat je naar een leerling toe gaat die met zo'n vraagstuk bezig is, om vervolgens doodleuk te horen: 'Kijk, meneer, die omtrek is 16 cm.'

Een leuk grapje, vaak ook nog gemaakt door leerlingen die goed zijn in wiskunde. Maar in het onderwijs is geen dag hetzelfde, zo ook het hoofdstuk meetkunde met klas 3 techniek vmbo-basis. Het is een drukke dinsdagochtend en de leerlingen werken in groepjes. Het uitzicht op het sportveld zorgt ook voor de nodige afleiding. Ik heb mijn handen vol aan het aan het werk houden van de klas. Het groepje van Benjamin is ook druk, maar wel aan het werk, waardoor ik wel zie dat Benjamin afgeleid is door zijn schoenen, maar er geen aandacht aan besteed. Als ik een ander groepje tot werken maan, gaat Benjamins vinger de lucht in. Omdat zijn groepje ongeveer het enige groepje is dat die deze les goed met wiskunde aan de gang is, ga ik er snel heen om zijn vraag te beantwoorden. 'Kijk meneer, die omtrek is 16 cm'. 'Ook dat nog', denk ik. Ik lach even om het grapje en wil weer door, maar dan houdt Benjamin me tegen. 'Kijk meneer', hij laat zijn schrift zien en heeft de driehoek op ware grootte nagetekend. Zijn schoenveter ligt op het papier. Met uiterste precisie legt hij de veter om de driehoek. Daarna gaat de veter langs de liniaal. '16 cm.'

Dit maakt lesgeven zo mooi. Laat zien... Dan ga je anders kijken.

BOEKBESPREKING

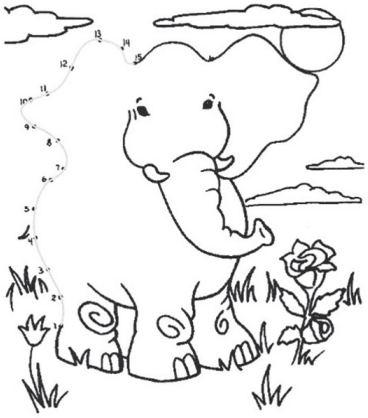
EEN VERKENNING VAN KROMMEN

Jacques Jansen

Titel: Een verkenning van krommen
Ondertitel: nu met GeoGebra
Auteurs: Jan Aarts en Swier Garst
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2017)
ISBN: 978-90-5041-162-2, 64 pagina's (softcover)
Prijs: € 10,00

Inleiding

In dit Zebraboekje word je meegenomen naar het land van de krommen. De eerste kromme die je tegenkomt is een olifant, maar wel in een assenstelsel. Daarvoor moet je punten die van getallen zijn voorzien, in de juiste volgorde met elkaar verbinden. Dát is het voorschrift, zie figuur 1.

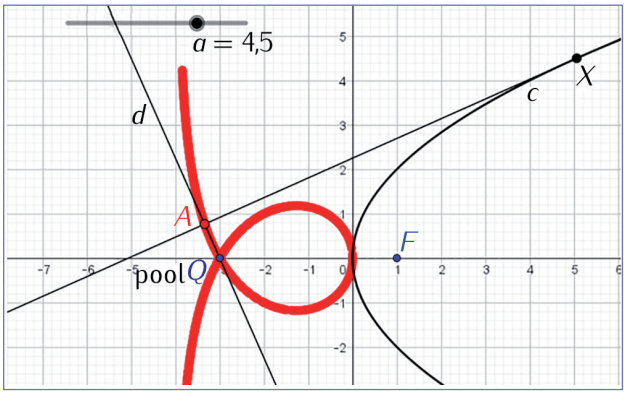


figuur 1 Een tekening van olifant als kromme in een assenstelsel

In het vervolg komt er voor een kromme een ander voorschrift: $K:\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$ waarbij $f(t)$ en $g(t)$ functies zijn en t een interval van de getallenlijn doorloopt, aldus de auteurs. Een verrekijker heb je op deze reis niet nodig, maar wel het computerprogramma GeoGebra. GeoGebra in beweging, en daar wordt in dit boekje veel aandacht aan besteed. Je leert onder andere werken met een schuifknop, invoeren van een parametervoorstelling, een animatie maken en meetkundige plaatsen construeren. Als je krommen wilt zien ontstaan, zullen de auteurs hebben gedacht, dan zul je je eerst allerlei GeoGebra-vaardigheden eigen moeten maken. En aan dat zich eigen maken wordt in het begin van het boekje veel aandacht besteed.

Welke krommen worden er gemaakt?

Een van de eerste krommen is een lus die geconstrueerd wordt uit een gegeven parabool en een speciaal vast punt



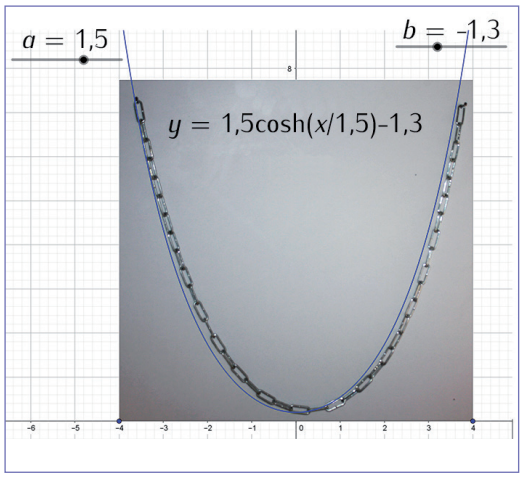
figuur 2 Constructie van een kromme uit een parabool en een vast punt Q

Q dat *pool* wordt genoemd. Op de parabool wordt een willekeurig punt X met raaklijn c genomen. Vanuit de pool wordt een loodlijn d neergelaten op de raaklijn waarbij in het voetpunt het *spoor* wordt aangezet. Dit spoor is een voetpuntenkromme van de gegeven parabool. Zie figuur 2 voor het resultaat, let op het spoor dat bij punt A hoort. Een paar meetkundige eigenschappen van deze voetpuntenkromme worden meegedeeld. Meegedeeld? Ja, maar ze worden niet bewezen.
Opgemerkt dient te worden dat *voetpuntenkrommen* een belangrijk onderwerp is in dit boekje.
Vervolgens maak je kennis met figuren van Lissajous, zoals je ze ook tegenkomt in de schoolboeken. En verder vind je op je pad goniometrische en hyperbolische functies. Bijvoorbeeld de grafiek van de kettinglijn:

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

In opgave 3.2 leer je een afbeelding op *Wikipedia* van een hangend touwtje in GeoGebra in te voeren om dan met een schuifbalk en de vergelijking $y = a\cosh(\frac{x}{a}) + b$ de waarden van a en b te bepalen. Maar waarom wordt er een foto van internet geplukt? Koop bij een bouwmarkt een ijzeren kettinkje van ongeveer één meter. Een plank

(of een stuk karton met punaises) met twee spijkertjes en klaar ben je als docent. In de klas zijn genoeg mobieltjes, laat de leerlingen foto's nemen en vervolgens kunnen ze zelf de afbeelding in GeoGebra invoeren en ermee aan de slag gaan, zie figuur 3.



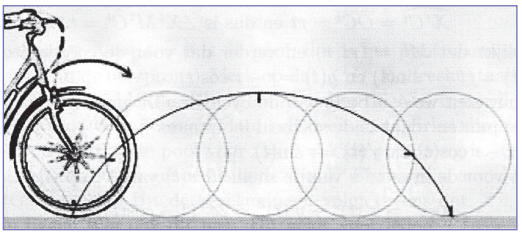
figuur 3 Foto van een zelfgemaakte kettinglijn ingevoerd in GeoGebra

Waar zijn die krommen nu voor nodig?

Op pagina 18 wordt verteld dat veel krommen ontwikkeld zijn om naast constructies met passer en liniaal te gebruiken. Je komt nu echt in een oerbos terecht, het terrein van de klassieke meetkunde waar je wordt gewezen op de drie grote problemen betreffende constructies met passer en liniaal.

1. *De trisectie van de hoek*: hoe verdeel je met passer en liniaal een gegeven hoek in drie gelijke hoeken?
2. *De verdubbeling van de kubus*: hoe construeer je de ribbe van een kubus waarvan de inhoud twee keer die van een gegeven kubus is?
3. *De kwadratuur van een cirkel*: hoe construeer je de zijde van een vierkant waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven cirkel?

Nu wordt pas het nut duidelijk van de voetpuntenkromme van de parabool van pagina 7: de trisectrix van Maclaurin. En als je daar echt meer over wilt weten, verwijst een voetnoot naar het boek *Meetkunde* van J.M. Aarts[1], één van de auteurs. In dit zebraboekje wordt vaker verwezen naar deze goede bron. Problemen (1) en (3) komen we ook tegen bij het onderwerp 'spiralen'. Je vervolgt je weg en ontmoet de kegelsneden ellipsen, hyperbolen en parabolen die geanimeerd worden in GeoGebra. Dan bereik je het land van de lemniscaten. Je komt ze niet alleen tegen met de vorm van een lint of strik, maar ook via bewegende stangen bij het ontwerpen van stoommachines (James Watt 1736 - 1819). Het laatste gebied dat je gaat verkennen is het land van de roulettes. Een roulette is een kromme die wordt beschreven door een punt, de pool, dat is vastgemaakt aan een gegeven kromme, de voortbrenger. De voortbrenger op zijn beurt rolt langs een vaste kromme, de richtkromme. Een bekend voorbeeld is de cycloïde. De voortbrenger is een cirkel en de richtkromme een rechte lijn.
In het boekje wordt het beeld gegeven van de baan van een ledlampje, bevestigd aan het ventiel van een fietswiel, zie figuur 4.



figuur 4 Baan van een ledlampje dat is bevestigd aan een fietswiel

Kanttekeningen tijdens het verkennen

Krommen zijn we in de Zebrareeks al eerder tegengekomen: deel 38 *SpiroSporen*[2]. Is het toeval dat beide boekjes dezelfde kleur hebben? Hierbij was de spirograaf meer dan een speels hulpmiddel. Op de voorkant van dit boekje staat ook niet voor niets 'nu met GeoGebra' en dat is een uitstekende keuze. Het tekenen van krommen kan heel bewerkelijk zijn en met inzet van GeoGebra valt er wel wat te ontdekken aan mooie meetkundige eigenschappen. En daar hebben we een belangrijk didactisch punt of is het een kwestie van smaak? De vraag is dus: 'hoe zet je GeoGebra in?' Bijvoorbeeld bij de cycloïde op pagina's 46, 47 en 48. We zien hier eerst twee pagina's met soms lastig te controleren beweringen en dan volgt een dynamische cycloïde in GeoGebra. Je kunt het ook andersom doen. En naar mijn smaak nog beter door er een geïntegreerd verhaal van te maken. Laat de leerlingen zelf eigenschappen ontdekken, gebruik makend van de dynamiek van GeoGebra.

Hoofdstuk 3 met titel 'Hyperbolische functies' detoneert met de andere hoofdstukken: het gaat om de grafieken van functies. In plaats van dit hoofdstuk kun je het ook hebben over niet-geparametriseerde krommen zoals bijvoorbeeld de sneeuwvlokkromme van Koch die ook interessante meetkundige eigenschappen heeft. Spiralen van hoofdstuk 4 zijn echter een veel interessanter onderwerp. En zeker als je voorbeelden, zoals de nautilusschelp laat zien of toepassingen in de techniek. Dat had best wat meer mogen zijn. Denk bijvoorbeeld bij lemniscaten aan de bewegingen van hijskranen. Heel summier in het lemniscatenhoofdstuk wordt er iets gezegd, zonder een plaatje toe te voegen, over inversie, spiegelen in een cirkel.
Een verwijzing naar Zebraboekje 45 was op zijn plaats geweest. Hoofdstuk 7 Roulettes is een pittig hoofdstuk

waarbij hulp van de docent onmisbaar lijkt. Maar daar zijn de echte uitdagingen voor de leerling te vinden. (Druk)Foutjes en onbekende notaties? Nauwelijks. In de zevende regel onder figuur 5.7 ontbreekt een exponent 2 bij d(X, l). De notatie van een boog, op pagina 46, was mij onbekend.

Ten slotte

Samengevat vind ik dat dit boekje er mag zijn, en dat de leerlingen van vwo 5 met alleen wiskunde B, maar zeker met wiskunde D, er snel mee aan de slag kunnen gaan. Een volgende uitdaging voor de auteurs is misschien een verkenning van krommen in de ruimte. Er kan bijvoorbeeld gedacht worden aan helix of schroeflijn, krommen op een bolvormig oppervlak of algemener, banen in de ruimte.

Bronnen

[1] Aarts, J.M. (2000). *Meetkunde. Facetten van de planimetrie en stereometrie*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

[2] Broek, L. van den & Berendonk, S. (2013). *SpiroSporen tekenen met de spirograaf*. Zebra 38. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

[3] Jansen, J. (2015). *Inversie, spiegelen in lijn en cirkel*. Zebra 45. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*.

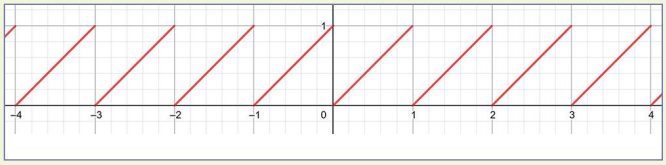
ZAAGTANDFUNCTIES

Jack van der Elsen

Zaagtandfuncties spelen een rol in de elektriciteitsleer. Je kunt ze maken met behulp van een oneindige recursie van absolute-waarde-functies. Maar het kan veel eleganter met één functie van entier-functies. Jack van der Elsen laat zien hoe dat gaat en bewijst zijn stelling.

Inleiding

In 4 vwo worden grafieken behandeld van functies met in het functievoorschrift een absolute waarde, bijvoorbeeld de functie $f(x) = |x + 4|$. In GeoGebra wordt de absolute waarde ook wel aangeven met Abs( ). Grafieken van dergelijke functies vertonen een 'knik', zijn continu, maar in de knik niet differentieerbaar. Een extreme vorm van een grafiek met 'knikken' is een zaagtanding.
Een relevante functie is $h(x) = x - \text{Floor}(x)$, waarbij de Floor( ) functie voorkomt in GeoGebra en Floor(x) het grootste gehele getal voorstelt dat kleiner of gelijk is aan x, beter bekend als de 'entier-functie'. Echter, $h(x) = x - \text{Floor}(x)$ is niet continu, zie figuur 1.

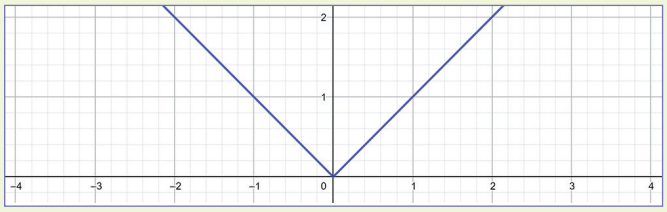


figuur 1 $h(x) = x - \text{Floor}(x)$

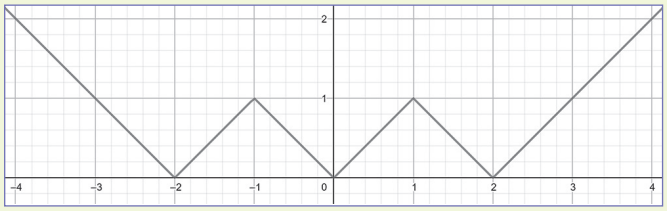
Om een functie te maken van een echte zaagtanding, zou een Abs( ) functie of een Floor( ) functie deel kunnen uitmaken van het functievoorschrift.

Absolute waardes

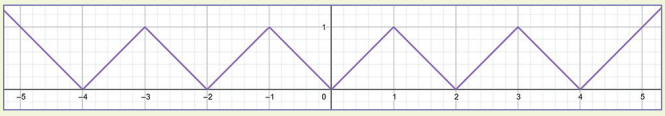
Bekijk de volgende functies voor $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 0)$, $x \in \mathbb{R}$:
$f_0(x) = |x|$
$f_{n+1}(x) = |1 - | 1 - f_n(x)||$
Dit recursieve functievoorschrift leidt tot de functies f_1 , f_2 , f_3 ,etc. In de volgende figuren staan de grafieken van de functies f_0 , f_1 en f_2 , geproduceerd met GeoGebra:
De f_n functies beginnen steeds meer te lijken op een echte zaagtanding die langer is naarmate n groter is.
De volgende lemma's zijn van toepassing op de f_n functies en eenvoudig te bewijzen met het principe van volledige inductie. De lemma's zijn ook 'af te lezen' uit de grafieken van de f_n functies.



figuur 2 $f_0(x) = |x|$



figuur 3 $f_1(x) = |1 - |1 - |x|||$



figuur 4 $f_2(x) = |1 - | 1 - | 1 - |1 - |x|||||$

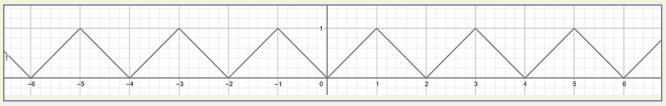
Lemma 0:
$f_n(x) = f_n(-x)$

Lemma 1:
Voor alle $x \geq 2n$: $f_n(x) = x - 2n$
Of: Voor alle $k \geq 0$: $f_n(2n + k) = k$

Floor functies

Bekijk de volgende functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)} (x - \text{Floor}(x) - ½)$

De grafiek, ook weer met GeoGebra, van de functie g staat in figuur 5:



figuur 5 $g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)} (x - \text{Floor}(x) - ½)$

De volgende lemma's hebben betrekking op de functie g en zijn op verschillende manieren te bewijzen. Ze zijn ook af te lezen uit de grafiek van g.Lemma 2:
Voor alle $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = g(-x)$

Lemma 3:
Voor alle $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq g(x) \leq 1$

Lemma 4:
Voor alle $x \in \mathbb{R}$: $g(x + 1) = 1 - g(x)$
(en dus: $g(x + 2) = g(x)$)

Lemma 5:
g is continu op $\mathbb{R}$

Je ziet uit de grafieken dat de functies f_n en de functie g voor een deel samenvallen. Naarmate n groter is, vallen f_n en g meer samen. Het zal je dan ook niet verbazen dat met behulp van bovenstaande lemma's de volgende stelling te bewijzen is:

Voor alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ met $|x| \leq 2n + 1$:
$g(x) = f_n(x)$
De bewijzen van de lemma's en de stelling zijn te vinden op de *Euclides* website.
Als voorproefje het bewijs van lemma 5:
Voor het bewijs onderscheiden we twee gevallen:
$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ en $x \in \mathbb{Z}$.

Geval 1: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ is er een $m \in \mathbb{Z}$ zodat $m < x < m + 1$ en dus $\text{Floor}(x) = m$.
Dan $g(x) = ½ + (-1)^{\text{Floor}(x)} (x - \text{Floor}(x) - ½) = ½ + (-1)^m (x - m - ½)$ voor $x \in <m, m + 1>$.
Dit is een gewone lineaire functie op $<m, m + 1>$ dus continu op $<m, m + 1>$.

Geval 2: $x \in \mathbb{Z}$.
Blijft dus over om aan te tonen dat g continu is voor $x \in \mathbb{Z}$.
Dan $\text{Floor}(x) = x$ en $g(x) = ½ + (-1)^x(x - x - ½) = ½ + (-1)^x(- ½)$.
Zij $\delta \in \mathbb{R}$ en $\delta > 0$.
$\lim_{\delta \to 0} g(x + \delta) =$
$\lim_{\delta \to 0} ½ + (-1)^{\text{Floor}(x + \delta)}(x + \delta - \text{Floor}(x + \delta) - ½)$
$= ½ + (-1)^x(x - x - ½) = ½ + (-1)^x(- ½) = g(x)$
$\lim_{\delta \to 0} g(x - \delta) =$
$\lim_{\delta \to 0} ½ + (-1)^{\text{Floor}(x - \delta)}(x - \delta - \text{Floor}(x - \delta) - ½)$
$= ½ + (-1)^{x - 1}(x - (x - 1) - ½)$
$= ½ + (-1)^{x - 1} \cdot ½ = ½ + (-1)^x(- ½) = g(x)$.

De bewijzen van de verschillende lemma's zijn te vinden op de website.

www.vakbladeuclides.nl/942elsen

MEDEDELING

MATHEKALENDER 2018: ONLINE WISKUNDEWEDSTRIJD

De Mathekalender is een digitale adventskalender die de adventsperiode van 1-24 december bestrijkt, maar die in plaats van allerlei zoete lekkernijen achter haar luikjes uitdagende wiskundepuzzels verbergt. Soms zijn de wiskundevraagstukken pittig, zeg van het niveau van de nationale wiskundeolympiade, maar altijd leuk ingekleed in de sprookjesachtige sfeer van de kerst met vaak de kerstman met zijn kerstkabouters in de hoofdrol. De vraagstukken zijn meerkeuzevraagstukken; geen bewijzen, geen toelichtingen. Opgeven, spelregels en archief van oude opgaven: *https://www.4tu.nl/ami/en/mathekalender/*
Om mee te kunnen doen moet je je vooraf registreren.

Dat kan vanaf 1 november. Vragen? Mail naar *4tuami-ewi@tudelft.nl*

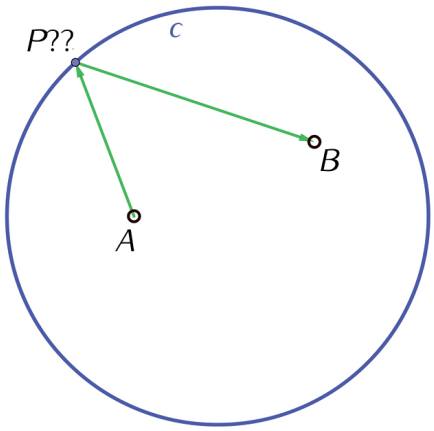
REFURBISHED BILJART

Fred Muijrers

Hoek van inval is hoek van uitval. Dat is de basiskennis van iedere biljarter. Maar wat nu als we de vorm van het biljart veranderen? Hoe bepaal je dan de richting van je stoot? Fred Muijrers berekent dat voor cirkelvormige biljarten.

Inleiding

In de wetenschapskalender van januari stond een eenvoudig lijkende vraag. Op een cirkelbiljart liggen twee ballen A en B. Hoe moet je A via de kant stoten opdat die B raakt? Waar ligt het mikpunt P? Zie figuur 1.

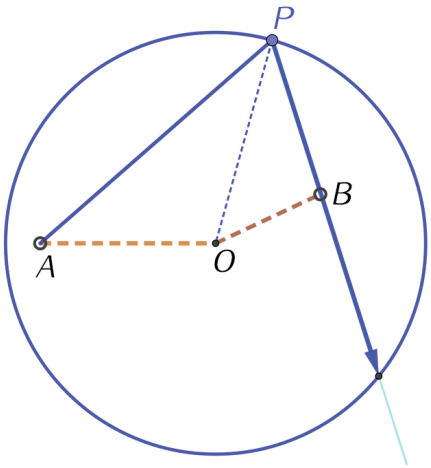


figuur 1

Eenvoudig ja, lijkt het. Beetje spiegelen zoals bij een 'gewoon' biljart en dan ben je er. Niet dus. Probeer maar. Dit oude probleem is ooit aangepakt door Ibn al-Haytham (965-1040) en met zijn naam komt het voor in de literatuur.[1]

Probleemanalyse

Een aanpak, die met enige meetkundige kennis ook in het vo kan, volgt hierna. Spiegelen zoals bij een rechthoekig biljart is niet de route. Met GeoGebra vind je wel snel een mikpunt. Er geldt dat te P de hoek van inval gelijk is aan de hoek van uitval en bij een cirkel geldt dan: $\angle APO = \angle BPO$, als O het middelpunt van de cirkel is. Schuif met het punt P op de cirkel en zorg dat die hoeken kloppen. Dat gaat lukken als de gespiegelde van lijn PA in lijn PO door B gaat. We hebben een mikpunt, zie figuur 2.

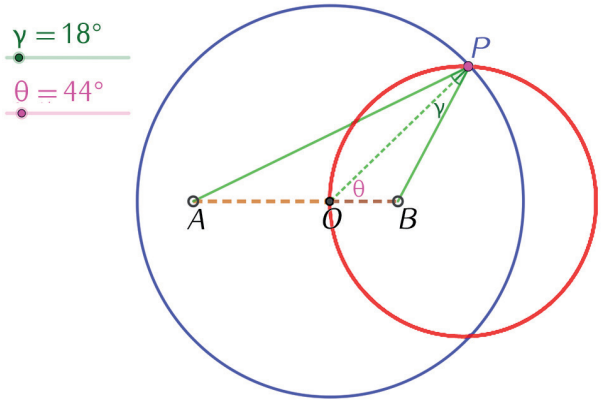


figuur 2

Er blijken vier liggingen voor een mikpunt P te zijn, soms echter maar twee als A en B anders liggen. Hoe zit dat? De uitdaging is nu de ligging van zulke punten te vinden maar niet met behulp van schuiven. Het punt O is wel goed om in het verhaal te houden: PO is altijd de bissectrice van $\angle APB$.

Eerste situatie:
Als A-O-B collineair zijn, op één lijn liggen, en $|AO| = |BO|$ dan zijn we snel klaar. Mik op één van de snijpunten van de middelloodlijn van AB met de cirkel. De redenering dat dat klopt is simpel.

Tweede situatie:
A-O-B zijn weer collineair, maar $|AO| > |BO|$.
In het meetkundeprogramma zat ooit de zogenaamde bissectricestelling: $|AO| : |BO| = |AP| : |BP|$ als PO de bissectrice is en dat is zo.
De vraag is nu: waar liggen punten P zodat et cetera. Dat is een bekend vraagstuk en stond ook in een Zebra-boekje over Sangaku's[2]: de punten P liggen op een cirkel van Apollonius, zie figuur 3.



figuur 3

Bij gegeven lengtes $|AO|$ en $|BO|$ is die cirkel te construeren en we vinden twee mikpunten mits er snijpunten met de gegeven startcirkel zijn natuurlijk.

Derde situatie:

A-O-B zijn niet collineair, maar wel $|AO| = |BO|$. Dit is aan de lezer. Er zijn twee mikpunten en in feite is het een variant van de eerste situatie.

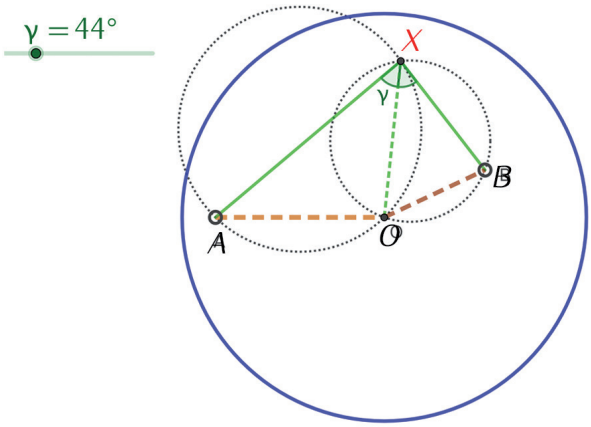
Vierde situatie:

A-O-B zijn niet collineair en $|AO| > |BO|$ of kleiner dan, maar dat is niet wezenlijk anders. Dit lijkt de meest algemene situatie. Lastig want het enige houvast is dat $\angle APO = \angle BPO$.

Een aanpak die werkt is: kies een hoekgrootte γ. Lijnstuk *AO* moet onder hoek γ te zien zijn, dus *P* op een cirkel met koorde *AO* en omtrekshoek γ.

Lijnstuk *BO* moet ook onder hoek γ te zien zijn dus *P* op een cirkel met koorde *OB* en omtrekshoek γ.

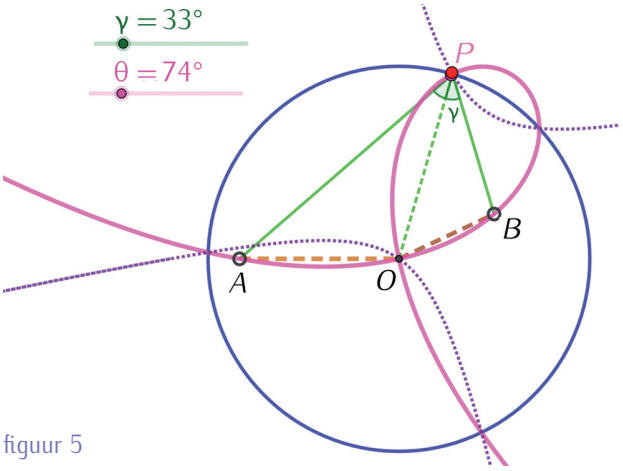
Een snijpunt van die twee cirkels geeft een punt *X* maar dat ligt niet altijd op de startcirkel, zie figuur 4.



figuur 4

Barrowkromme

De meetkundige plaats van de punten *X* bij variatie van γ geven een zogenaamde Barrowkromme.[3] Je ziet de (in dit geval) vier mikpunten meteen als snijpunten van de cirkel met de kromme. Eén snijpunt is getekend als mikpunt voor de route *A-P-B*, zie figuur 5.



figuur 5

Het is een ingewikkelde kromme als *A* en *B* liggen zoals in figuur 5. Zie het kader.

Cirkel

De kromme is te vinden door eerst een handig assenstelsel in te voeren. Noem $|AO| = p$ en $|BO| = q$. Met *O*(0, 0) en *A*(-*p*, 0) en α de hellingshoek t.o.v. de *x*-as van lijn *OB* krijgen we: $B(q \cdot \cos(\alpha), q \cdot \sin(\alpha))$. De basispunten zijn nu goed vastgelegd. Net als bij figuur 4 wordt verder verondersteld: $1 > p > q > 0$. De cirkel krijgt vergelijking: $x^2 + y^2 = 1$.

Een punt *X* heeft poolcoördinaten (r, θ) met $OX = r$.

Door tweemaal de sinusregel te gebruiken, zowel in driehoek *AXO* als driehoek *BXO* waarbij geldt dat $\angle AXO = \angle BXO$, krijgen we:

$$r = p \cdot q \cdot \frac{\sin(2\theta - \alpha)}{p \cdot \sin(\theta) - q \cdot \sin(\theta - \alpha)} \qquad [*]$$

Met $\alpha = 0^\circ$ wordt dit:

$$r = \frac{p \cdot q \cdot \sin(2\theta)}{p \cdot \sin(\theta) - q \cdot \sin(\theta)} = \frac{2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(\theta)}{(p - q)}.$$

A, *O* en *B* zijn nu dus collineair.

Dit is inderdaad een poolvoorstelling van een cirkel met

diameter $\frac{2 \cdot p \cdot q}{(p - q)}$, met $p > q > 0$.

Om de snijpunten met de startcirkel te vinden stellen we gewoon: $r = 1$.

Dat leidt vanuit [*] tot een vergelijking in θ:

$p \cdot q \cdot \sin(2\theta - \alpha) = p \cdot \sin(\theta) - q \cdot \sin(\theta - \alpha)$.

Bij $\alpha = 0^\circ$ zijn er oplossingen mits $\frac{2 \cdot p \cdot q}{(p - q)} > 1$.

Constructie van oplossingen

Oplossingen voor hoek θ, maximaal vier, geven de ligging van de punten P op de cirkel. Die oplossingen zijn bij gegeven p, q en α numeriek wel te vinden. Er is niet altijd een constructie met passer en liniaal (p & l) van θ. Bij bijzondere keuzen natuurlijk wel: voor bijvoorbeeld (p, q, α) = (½, ¼√3, 30°) is er een punt P met poolcoördinaten (r, θ) = (1, 60°). En zo zijn er meer te vinden.
Bij $p = q$ krijgen we θ = 90°+ α/2. Dat is ook eenvoudig meetkundig in te zien: de bissectrice van $\angle AOB$ (= 180° - α) geeft de gevraagde punten P. Nu is een p & l-constructie uiteraard mogelijk.

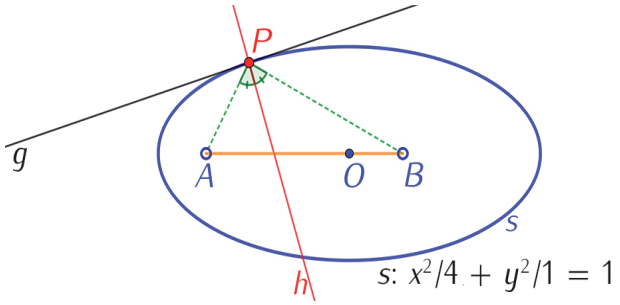
Opmerkelijk is nog dat bij inversie van de kromme in de startcirkel een orthogonale hyperbool ontstaat. Zie weer het kader. Daaruit volgt bijvoorbeeld dat te O de Barrowkromme zichzelf loodrecht snijdt. Dat is ook in te zien doordat de binnen- en buitenbissectrice van ∠AOB raken aan de kromme. Punten op een inversiecirkel blijven invariant bij inversie dus de gevraagde mikpunten van het oorspronkelijke biljartprobleem zijn ook de snijpunten van de hyperbool met de startcirkel. Dat zijn fraaie resultaten.

Hyperbool

Inversie van een punt $P(r, \theta)$ met vergelijking [*] in de cirkel met straal 1 geeft een punt P' met poolcoördinaten $(s, \theta) = (1/r, \theta)$.
Herschrijving vanuit [*] geeft: $s = \dfrac{p \cdot \sin(\theta) - q \cdot \sin(\theta - \alpha)}{p \cdot q \cdot \sin(2\theta - \alpha)}$.
Overstappen op cartesische coördinaten via $s \cdot \cos(\theta) = X$ en $s \cdot \sin(\theta) = Y$ geeft:
$p \cdot q \cdot \sin(\alpha) \cdot X^2 + q \cdot \sin(\alpha) \cdot X + 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(\alpha) \cdot XY + (p - q \cdot \cos(\alpha)) \cdot Y - p \cdot q \cdot \sin(\alpha) \cdot Y^2 = 0$.
Dit is een kegelsnede in de algemene vorm geschreven:
$a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot XY + d \cdot Y + e \cdot Y^2 + f = 0$
Omdat geldt dat $c^2 - 4 \cdot a \cdot e > 0$ betreft het hier een hyperbool.[3]
Er geldt bovendien: $a + e = 0$. Daarmee is het de vergelijking van een orthogonale hyperbool.

En nog meer…

Uiteraard dient zich een volgend biljartprobleem(pje) aan. De biljarttafel is ellipsvormig. Hoe is nu de aanpak? We hebben er een zorgpunt bij: de normaal voor de hoek van inval en uitval gaat nu niet altijd door het middelpunt van de ellips.
In het algemeen is dit vrij lastig maar als A-O-B collineair zijn dan blijft het een interessant en hanteerbaar probleem met enige kennis van analytische meetkunde. Zie figuur 6 voor één situatie.
Als A en B de locaties van de brandpunten zijn, dan is het resultaat bekend: alle richtingen waarin vanuit A gemikt wordt, zorgen voor een route door B. Nou ja, alle: het moet via de kant. De lezer kan de uitdaging aangaan. Wat een meesterlijk probleem…
Zie [4] voor een meer algemene aanpak.



figuur 6

Noten

[1] Zie *https://en.wikipedia.org/wiki/Book_of_Optics*
[2] Breeman, J. & Lint, H. van (2015). *Sangaku's.* Zebra 42. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
Zie *http://www.epsilon-uitgaven.nl/Z42.php*
[3] Zie o.a. *https://lcc.ctc.edu/faculty/rswee/Math150/Conics.htm*
[4] Zie *http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2014 15-4-264.pdf*
In dit artikel behandelt prof. Steenbrink genoemd probleem voor een ellipsbiljart.

Over de auteur

Fred Muijrers was docent en coördinator van de eerstegraadsopleiding tot leraar wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Nu is hij gepensioneerd.
E-mail: *fmuijrers@yahoo.com*

WERELDWISKUNDEFONDS IN UGANDA

Johannes Holwerda
Jerry Dugdale

In 2017 en 2018 heeft het WwF geld ter beschikking gesteld aan de wiskunde-afdeling van de Wobulenzi Town Academy in Wobulenzi, Luwero District, Uganda. Bij beide projecten ging het om een bedrag van ongeveer 3000 euro. De projecten werden aangevraagd door de liefdadigheidsinstelling *Serve Direct* in Engeland, mede opgericht door Jerry Dugdale. Contactpersoon was Johannes Holwerda.

Onderwijssysteem

Het basisonderwijs in Uganda is over het algemeen gratis, ofschoon veel ouders een aanvullend bedrag moeten betalen, zelfs op een overheidsschool. Het vervolgonderwijs is niet gratis, alhoewel er een beperkt programma is van door de overheid gesteunde *Secondary places*.
Als gevolg daarvan is het percentage uitvallers hoog.
Wobulenzi Town Academy is een gemengde, middelbare school; het is een privéschool vlakbij Wobulenzi in het Luwero District in Centraal Uganda.
In 2017 zijn er 626 leerlingen ingeschreven, waarvan 453 intern en 176 extern. Daarvan zijn 76 leerlingen op het hogere A-niveau. De leerlingen starten op Senior 1 (S1) niveau en doen eindexamen op O-niveau in Senior 4 (S4), of opteren voor examens op A-niveau en blijven dan om hun Senior 6 (S6) te halen.
Leerlingen moeten slagen voor Engels en wiskunde om een redelijke baan te krijgen en om door te gaan naar een hoger opleidingsniveau. Wiskunde is van onschatbare waarde als toegangspoort naar alle drie exacte vakken, ook verplicht op O-niveau.

Wobulenzi Town Academy (WTA)

WTA werd opgericht in 2006 voor leerlingen uit Noord-Uganda die in de kampen voor intern ontheemden (Internally Displaced Persons) leven.
Tegenwoordig komt 90% van de leerlingen uit gezinnen met een laag of geen inkomen. Er zijn leerlingen uit het hele land, maar nog steeds komen veel leerlingen uit het noorden. Alle leerlingen betalen iets voor hun scholing, al naar gelang de financiële middelen van het gezin.

figuur 1 Leerlingen van Wobulenzi Town Academy

Serve Direct

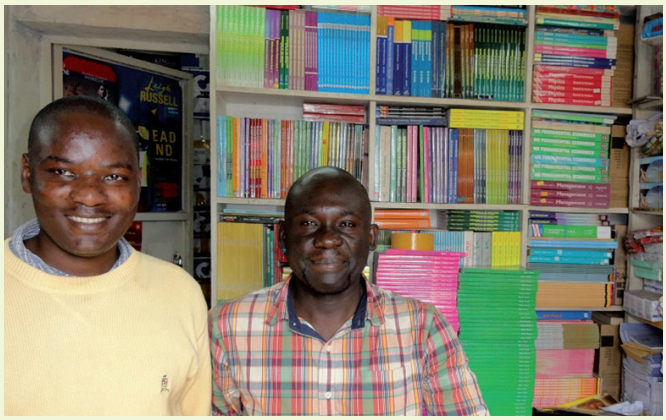
De instelling Serve Direct werkt sinds 2006 samen met WTA om de school te helpen bij het geven van goed onderwijs tegen een betaalbare prijs. In 2011 verhuisde de school naar een nieuw gebouw, gefinancierd door Serve Direct. De samenwerking met Serve Direct stelt de school in staat het schoolgeld laag te houden. Bijvoorbeeld: het gemiddelde schoolgeld per termijn voor een leerling op O-niveau is 100.000 UGX (±26 euro) voor een externe leerling en 322.000 UGD (± 84 euro) voor een interne leerling. Serve Direct werkt samen met het senior management op WTA aan een continue verbetering van de faciliteiten en de onderwijskwaliteit op de school. Ze helpt ook bij fondsenwerving voor specifieke verbeteringen en neemt de verantwoordelijkheid op zich om het gebruik van de externe fondsen te controleren en er verslag over uit te brengen. Serve Direct brengt geen kosten in rekening, ze werkt volledig met vrijwilligers.

> 'TOT NU TOE WAREN ER TE WEINIG BOEKEN EN MOESTEN DE LERAREN DE HOOFDSTUKKEN UIT HET BOEK OVERSCHRIJVEN OP HET BORD.'

Aanvraag bij het WwF zomer 2017 voor de secondary school

- Aankoop van 50 S3 Maths text books en 50 S4 Maths books.
- Aankoop van 100 'O'-niveau standaard rekenmachines die tegen de helft van de prijs aan de leerlingen worden verkocht.
- Aanstelling van een voormalige 'A'-niveau leerling om kleine studiegroepen en buitenschoolse wiskunde-lessen te leiden voor S3 and S4 (O-niveau) gedurende het schooljaar 2017.
- Aankoop van een tweedehands laptop voor de wiskun-destudiegroepen en ondersteuning bij wiskunde.
- Internetkosten voor buitenschoolse sessies/ voorbereiding.
- Basiskosten om twee keer in de vakantie studie-groepen te leiden. In de vakantie kan de school dan herhaalsessies voor de examenklassen aanbieden.
- Kosten om twee UNEB senior examinatoren uit te nodigen in de school voor training van leraar en leerling.
  (UNEB staat voor Uganda National Examination Board en is de officiële examencommissie voor Uganda)

Het totale gevraagde bedrag is 11.320.000 UGB (ongeveer 2950 euro)



figuur 2 Links: Master Benon, de deputy head teacher en wiskundeleraar van Wobulenzi Town Academy

Verslag project 2017

Vanaf de zomer tot en met oktober hebben we gewerkt aan de uitvoering van het project. We zijn nu bezig met de derde en laatste termijn van het schooljaar. Tussen elke termijn zitten meestal vier weken vakantie.
In ons voorstel stond dat we de rekenmachines wilden doorverkopen aan de leerlingen voor de helft van de prijs. We zijn hierop teruggekomen. Als we dat zouden doen nemen de leerlingen uiteindelijk de rekenmachines mee naar huis. We brengen nu de rekenmachines onder in de bibliotheek en merken ze. Als de wiskundeleraar ze nodig heeft, kan hij ze ophalen. Mocht een leerling er gebruik van willen maken, dan kan hij of zij de rekenmachine in de bibliotheek lenen. Hierdoor kunnen ze op school nog vele jaren profijt van de rekenmachines hebben. We waren ook tot de ontdekking gekomen dat er veel namaakreken-machines in omloop zijn. Deze zien er precies zo uit als de echte maar hebben veel minder functies. We hebben nu de originelen gekocht. Uiteindelijk 76 stuks en niet de honderd zoals in de aanvraag is vermeld. Wel hebben we de honderd lesboeken kunnen kopen.
Tijdens de vakantie is er een programma geweest om bijles te geven aan de leerlingen die dat wilden. Deze lessen werden door oud-leerlingen verzorgd die het afgelopen jaar als hulpdocent op school hebben gewerkt.
Door het gebruik van de aangeschafte laptop, de boeken, de rekenmachines, de training en de extra lessen is er een grote impuls gegeven aan de wiskundeafdeling van de school en hebben de leerlingen ook een geweldige kans gekregen om met moderne middelen te werken.

Verslag project 2018

Deze keer werden boeken en rekenmachines aangevraagd. Het schooljaar begon in februari na een lange vakantie van twee maanden. Samen met de wiskundeleraar Benon zijn we naar Kampala geweest en daar hebben we de boeken en rekenmachines kunnen kopen. We hebben het exacte bedrag besteed dat door het WwF was overgemaakt. We kwamen iets tekort voor het transport, maar dat hebben we intern geregeld.
De boeken zijn, nadat ze zijn gelabeld, in de bibliotheek geplaatst. Leraren kunnen ze als ze ze nodig hebben afhalen in de bibliotheek. Leerlingen kunnen ze in de avond gebruiken in de bibliotheek of tussen de lessen door. Tot nu toe waren er te weinig boeken en moesten de leraren de hoofdstukken uit het boek overschrijven op het bord en de leerlingen moesten het dan overschrijven in hun schriften. Dat is nu verleden tijd door de onder-steuning van het WwF. Tijdens de lessen heeft nu elke leerling een boek.
Namens de schoolleiding, de studenten en Serve Direct willen we u hartelijk bedanken voor de ondersteuning van de wiskundeafdeling van Wobulenzi Town Academy.

Over de auteurs

De verslagen zijn van Johannes Holwerda. Johannes en zijn vrouw Gé hebben van april 2017 tot april 2018 als vrijwilliger gewerkt op WTA. Jerry Dugdale en zijn vrouw zijn medeoprichters van Serve Direct.
Meer achtergrond en informatie over de school en Serve Direct is te vinden op *www.servedirect.org*
Juliëtte Feitsma verzorgde de vertaling uit het Engels van de informatie die Jerry Dugdale gaf.

NOTULEN VAN DE NVVW-JAARVERGADERING

ZATERDAG 4 NOVEMBER 2017, VEENENDAAL

Kees Garst

Opening

De voorzitter, Swier Garst, heet iedereen welkom, in het bijzonder de aanwezige ereleden, afgevaardigden van andere vakinhoudelijke verenigingen en van de FvOv. De ereleden Wim Kuipers en Jan Maassen hebben de secretaris gemeld dat ze helaas niet bij de vergadering en studiedag aanwezig kunnen zijn.

Jaarrede

In de jaarrede wordt een aantal lopende ontwikkelingen aangestipt, waaronder:

- Het maken van een visiestuk op wiskundeonderwijs in de nabije toekomst, dat als input moet gaan dienen voor het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde in het kader van curriculum.nu.
- De hoop en verwachting dat ook het vmbo curriculum in dat kader de aandacht krijgt die zo hard nodig is.
- De presentatie van de vmbo-special van *Euclides*, met veel praktische onderwerpen om in de dagelijkse lespraktijk toe te passen.
- De verwachting dat OCW binnen afzienbare tijd de resultaten van het overleg tussen NVvW en OCW over een alternatief voor de rekentoets naar buiten zal brengen.
- De zorg om het grote tekort aan wiskundeleraren.
- De stroperigheid waarmee het lerarenregister opgetuigd wordt.
- De constructieve overleggen met de CvTE over de examens.
- De introductie van de *Euclides*-app, waarmee *Euclides* gelezen kan worden inclusief animaties bij artikelen.
- De nieuwe website van de vereniging (onder eigen beheer), die op deze dag gelanceerd wordt en waaraan Heleen van der Ree en Erik van den Hout met veel enthousiasme hebben gewerkt.
- De Facebookgroep die veel docenten uitnodigt om een lesidee of mening te posten.

De voorzitter maakt gebruik van de gelegenheid om Grada Fokkens te bedanken voor haar jarenlange inzet bij de organisatie van de jaarlijkse centrale examenbesprekingen, en Marian Kollenveld krijgt het eerste exemplaar aangeboden van het 50e Zebra boekje.

Notulen van de jaarvergadering van 5 november 2017

Deze worden vastgesteld, met dankzegging aan de secretaris.

Jaarverslagen

De jaarverslagen 2016-2017 van de NVvW en van *Euclides* worden vastgesteld. (zie v*akbladeuclides.nl/932nvvw* en *vakbladeuclides.nl/932euclides*)

Financieel jaarverslag

Jaarrekening 2016-2017

De penningmeester geeft een toelichting op de beknopte jaarrekening 2016-2017 en merkt onder meer op:

- M.b.t. de balans: er worden middelen gereserveerd voor vervanging van computers op termijn en voor reservering voor het 100-jarig jubileum.
- Er wordt licht ingeteerd op het eigen vermogen.
- Enkele werkgroepen, zoals de werkgroep geschiedenis en de werkgroep vrouwen en wiskunde hebben nog gelden uit het verleden die nu beheerd worden door de vereniging.
- Het boekjaar wordt afgesloten met een tekort van ruim € 5.700.

Exploitatierekening over boekjaar 2016-2017

Aan de kant van de baten:

- Symposia worden niet begroot. Met de inschrijfgelden houden we inkomsten en uitgaven in evenwicht.
- Een gedeelte van de inkomsten uit advertenties in *Euclides* vloeien direct terug naar ons vakblad door nummers uit te brengen met extra bladzijden.
- De verkoop van Zebraboekjes levert de NVvW voor elk boekje inkomsten op.

Aan de kant van de lasten:
– Onder 'promotie' valt het maken van de nieuwsbrief.
– De kosten voor onderhoud van de website vallen aanmerkelijk lager uit doordat we dit in eigen beheer uitvoeren.

Begroting boekjaar 2018-2019
De begroting laat zien dat we € 290 proberen over te houden.
Verslag kascommissie
De kascommissie, bestaande uit de heren Goverde en Barneveld hebben de jaarrekening over het boekjaar 2016-2017 gecontroleerd en geconstateerd dat het geheel op de juiste wijze is verantwoord. Zij stellen voor de penningmeester te dechargeren voor het gevoerde financiële beleid. Hiermee wordt met applaus ingestemd.
Vaststelling contributie
De koepelorganisatie CMHF heeft besloten een andere verdeelsleutel te hanteren voor de, bij de FvOv aangesloten, vakverenigingen. Dit betekent dat de NVvW structureel rekening dient te houden met minder inkomsten uit die hoek. Tezamen met een zo 'zuinig' mogelijke begroting en om de vereniging in staat te stellen om de werkzaamheden en activiteiten op het huidige niveau voort te zetten, stelt de penningmeester een contributieverhoging voor volgens onderstaande tabel.

€ 87,50	gewoon lid met *Euclides*
€ 55,-	gewoon lid zonder *Euclides*
€ 40,-	studenten tot en met 27 jaar
€ 45,-	gepensioneerden
€ 160,-	instituten
€ 90,-	personen die alleen *Euclides* ontvangen
€ 65,-	leden van zustervereningingen en KWG-leden
€ 20,-	los nummer van *Euclides*

Het voorstel is aldus aangenomen.
De penningmeester dankt Peter en Heleen van der Ree voor de nauwkeurige administratieve werkzaamheden.
Benoeming nieuwe kascommissie
De nieuwe kascommissie bestaat uit de heren Erik van Barneveld en Peter Kop.

Bestuursverkiezing

Ebrina Smallegange en Kees Garst worden herkozen voor een tweede termijn. Hester Vogels wordt benoemd als nieuw bestuurslid. Swier Garst neemt afscheid na drie jaar voorzitterschap van de vereniging. In het dankwoord, uitgesproken door een van de bestuursleden, wordt gememoreerd op welke wijze de voorzitter in overleggen met de pers, de politiek, OCW en bij andere contacten de vereniging en het wiskundeonderwijs onder de aandacht bracht. Van de leden krijgt Swier een abstract tuinbeeld aangeboden.

Rondvraag en sluiting

De vicevoorzitter, Ebrina Smallegange, merkt op dat er geen rondvraag is binnengekomen, wenst alle aanwezigen een leerzame studiedag toe en sluit daarmee de jaarvergadering.

Jaarverslagen NVvW en Euclides

Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 3 november 2018** staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van *Euclides* jaargang 94 nummer 2.

vakbladeuclides.nl/942nvvw, vakbladeuclides.nl/942euclides

Vakbond FvOv

Toelichting op het professioneel statuut.

vakbladeuclides/fvov

KLEINTJE DIDACTIEK

Lonneke Boels

LINEAIR PROGRAMMEREN – HET VINDEN VAN DE ONGELIJKHEDEN

Bij zowel wiskunde A als wiskunde C hebben verschillende methoden als keuzeonderwerp lineair programmeren gekozen. Bij *Mathplus* (editie 2017-2018) is dit hoofdstuk 15 in 5 vwo A en C, *Getal en Ruimte* (11e editie) heeft hoofdstuk K in deel 2 (ongeveer halverwege het schooljaar dus) eveneens voor 5 vwo A en C. *Moderne Wiskunde* (11e editie) heeft dit als keuze-onderwerp bij wiskunde D, in hoofdstuk 8.

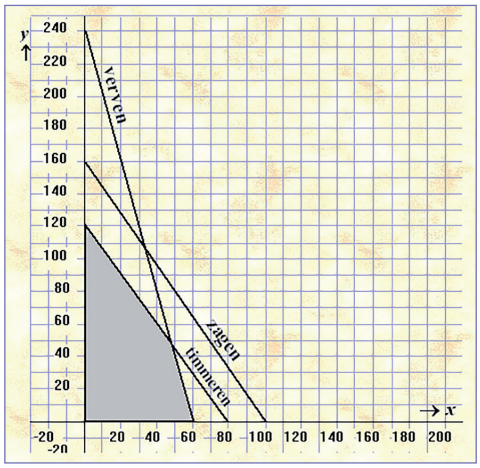
Stappenplan

Het merendeel van de methoden behandelt lineair programmeren als een stappenplan: stel de ongelijkheden en de doelfunctie op, teken het toelaatbare gebied, bepaal waar het maximum zit (minimum kan ook maar komt niet in alle methoden voor) met niveaulijnen of de randwandelmethode en bereken dit maximum/minimum van de doelfunctie door de snijpunten van twee lijnen te berekenen. Dit stappenplan geeft geen antwoord op de vraag van leerlingen: hoe vind je de ongelijkheden bij lineair programmeren? Helaas voor leerlingen gaat het juist bij deze eerste stap uit dit stappenplan vaak mis, waarna ze helemaal vastlopen. Terwijl de ingrediënten eenvoudig en vaak al vanaf de tweede klas geoefend zijn: lineaire formules en ongelijkheden opstellen en in een grafiek zetten. Het nieuwe onderdeel is dat het meerdere lijnen zijn en dat leerlingen moeten uitzoeken welke van alle mogelijke snijpunten het optimale punt is.
Hoe kunnen we onze leerlingen daarbij helpen?

Betekenis geven

Het antwoord is verrassend eenvoudig en ik ben niet de eerste die dat heeft bedacht. Daarover zo meer. Wat ik in mijn lessen doe, is dat ik begin met op te schrijven waar de beperkingen zitten. Waarvan hebben we niet genoeg of moeten we juist een bepaald minimum hebben? Vaak is dat: geld, hoeveelheid ingrediënten, aantal vrachtwagens (transport), tijd, ruimte, voldoende eten of drinken voor alle gasten, enzovoorts. Uit deze beperkingen volgen je ongelijkheden. Ik schrijf dit voor de ongelijkheid op en neem het daarna over in de grafiek. Er zijn meer docenten die dit doen. In figuur 1 staat een voorbeeld van de site van collega Hofstede (te vinden bij de module rand-wandeling[1]).

Door bij de lijnen te zetten wat de beperking is, krijgen de lijnen meer betekenis. Voor leerlingen die moeite hebben met het kiezen van hun variabelen, heeft Herman Hofstede nog een andere tip, namelijk: Vraag je af wat je kunt kiezen. Dat levert je de twee variabelen op. Tot slot vertaalt hij 'teken het gebied' naar leerlingentaal: arceer de goede kant. Bij de module 'doelstelling' staat nog een mooie animatie van de niveaulijnen. Bovendien zijn veel van zijn oefenopgaven praktische toepassingen, of liggen



figuur 1

daar dicht tegen aan. Meer praktische toepassingen die deze doelgroep mogelijk aanspreken, zijn te vinden bij *Math4all* (zorg en winst).[2] Verder kan de Exceloplosser worden gebruikt voor het oplossen van complexere LP-problemen.[3]

Links

[1] *http://www.hhofstede.nl/modules/randwandeling.htm*
[2] *www.math4all.nl/kaart/bekijk/betere-en-betaalbare-zorg-met-behulp-van-wiskunde/311*
[3] *http://math4allview.appspot.com/view?comp=vd-k1&subcomp=vd-k13&repo=m4a2015&parent=www.math4all.nl/overzichten/keuzeonderwerpen/45*

Bronnen

- *https://www.math4all.nl/kaart/bekijk/kan-het-nog-beter/102*
- *https://schooltv.nl/video/wiskunde-voor-de-tweede-fase-kan-het-nog-beter/* (eerst een voorbeeld van vliegtuigen die bepaalde routes vliegen, daarna van winst op vliegtickets en partnerkeuze)

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@chrlyceumdelft.nl*

PUZZEL 94-2

LEGE POLYGONEN IN EEN GRAAF

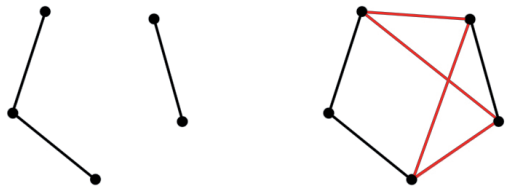
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Wellicht dat doorgewinterde grafen-specialisten hun kennis kunnen gebruiken bij deze puzzel, maar eigenlijk is er weinig hogere wiskunde nodig en moet er door iedereen gewoon handig worden gepuzzeld. Zoals gewoonlijk zijn er makkelijke en moeilijke vragen die allemaal evenveel punten opleveren.

Opgave 1 gaat over grafen zonder 'lege' driehoeken ('lege' driezijdige polygonen). We hebben steeds n punten die al of niet met elkaar worden verbonden. De bedoeling is om met zo min mogelijk lijnen (= verbindingen) een figuur (graaf) te creëren waarin tussen elke combinatie van drie punten minstens één lijn wordt getrokken. Zo verkrijgen we een graaf zonder 'lege' driehoeken. Bij opgave 2 doen we hetzelfde, maar nu zonder 'lege' vierzijdige polygonen. Voor elke combinatie van vier punten moet er in elk van de drie vierhoeken die daarmee zijn te maken minstens één zijde worden getekend, zodat we een graaf krijgen zonder 'lege' vierhoeken. Weer met zo min mogelijk lijnen.

Voor kleine n is dit eenvoudig, maar naarmate n toeneemt wordt het allengs moeilijker.

Voorbeeld, zie figuur 1:



figuur 1
De graaf links, met $n = 5$, is geen oplossing omdat er een 'lege' vierzijdige polygoon in zit: de rode polygoon rechts.

Opgave 1: Grafen zonder 'lege' driehoeken.
a) Bepaal voor $n = 3$ tot en met $n = 10$ het minimum aantal benodigde lijnen en geef daarbij voor elk de verkregen figuur (graaf). Dat kan met een tekening of een tabel. Het zou leuk zijn als je daarbij je zoekstrategie kunt beschrijven.
b) Soms zijn er met het aantal lijnen dat je bij vraag a hebt gevonden meerdere verschillende grafen zonder 'lege' driehoeken mogelijk. Bepaal voor $n = 6$ of dat het geval is en zo ja, geef dan ook die andere grafen.

Opgave 2: Grafen zonder 'lege' vierhoeken.

a en **b)** Idem, maar nu voor $n = 4$ tot en met $n = 10$.

Extra: Kun je een formule of methode bedenken waarmee je voor elke n exact (of een bovengrens) het aantal benodigde lijnen kunt bepalen? En dan zo mogelijk een geheel of gedeeltelijk bewijs.
Hier is wel het een en ander over bekend, maar zover wij weten niet in alle gevallen.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij je idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 19 november 2018 binnen zijn.

vakbladeuclides.nl/942puzzel

TOP 10 LADDERSTAND

Stand na 93-7	
K. Vugs	149
M. Woldinga	135
F. van Hoeve	121
F. Göbel	114
R. Stolwijk	98
B. Groot	94
G. Bouwhuis	94
M. Rijnierse	89
H. Bakker	74
L. Cizkova	61

We feliciteren Kees Vugs van harte met de ladderprijs.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallengange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2018

vr 3/11 — **Veenendaal**
Jaarvergadering / studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

2019

za 12/1 — **UTRECHT**
Wintersymposium: Is statistiek wel betrouwbaar?
Organisatie: KWG

21/1 t/m 31/1 — **LANDELIJK**
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

vr 1/2 t/m 2/2 — **VELDHOVEN**
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

wo 6/2 — **LANDELIJK**
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

di 12/3 — **NIJKERK**
Examenconferentie
Organisatie: NVvW

di 23/4 t/m 24/4 — **VELDHOVEN**
Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie: KWG en PWN

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 94

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	18 december 2018	15 oktober 2018
4	29 januari 2019	19 november 2018
5	19 maart 2019	7 januari 2019
6	7 mei 2019	4 maart 2019
7	25 juni 2019	29 april 2019

ClassPad.net

De toekomst van het wiskundeonderwijs begint nu

ClassPad.net is een unieke online tool van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

All-in-one online software

- Werkt op alle tablets en pc's
- Werkt met de browsers MS Edge, FireFox, Chrome en Safari
- Toegang is zowel mogelijk op school als thuis
- Applicaties voor alle wiskundelessen
- Eenvoudig en intuïtief te gebruiken

Zin om ClassPad.net te proberen?
Ga dan naar www.classpad.net, bekijk de video en probeer ClassPad.net vrijblijvend als bezoeker of met een kosteloze registratie.

Vragen?
Jim van Bekhoven helpt je graag verder.
Telefoon: 06 553 454 62, E-mail: jvanbekhoven@casio.nl

Demonstratie op school?
Neem contact op met Jim van Bekhoven.
Hij komt graag bij jullie langs.

CASIO®

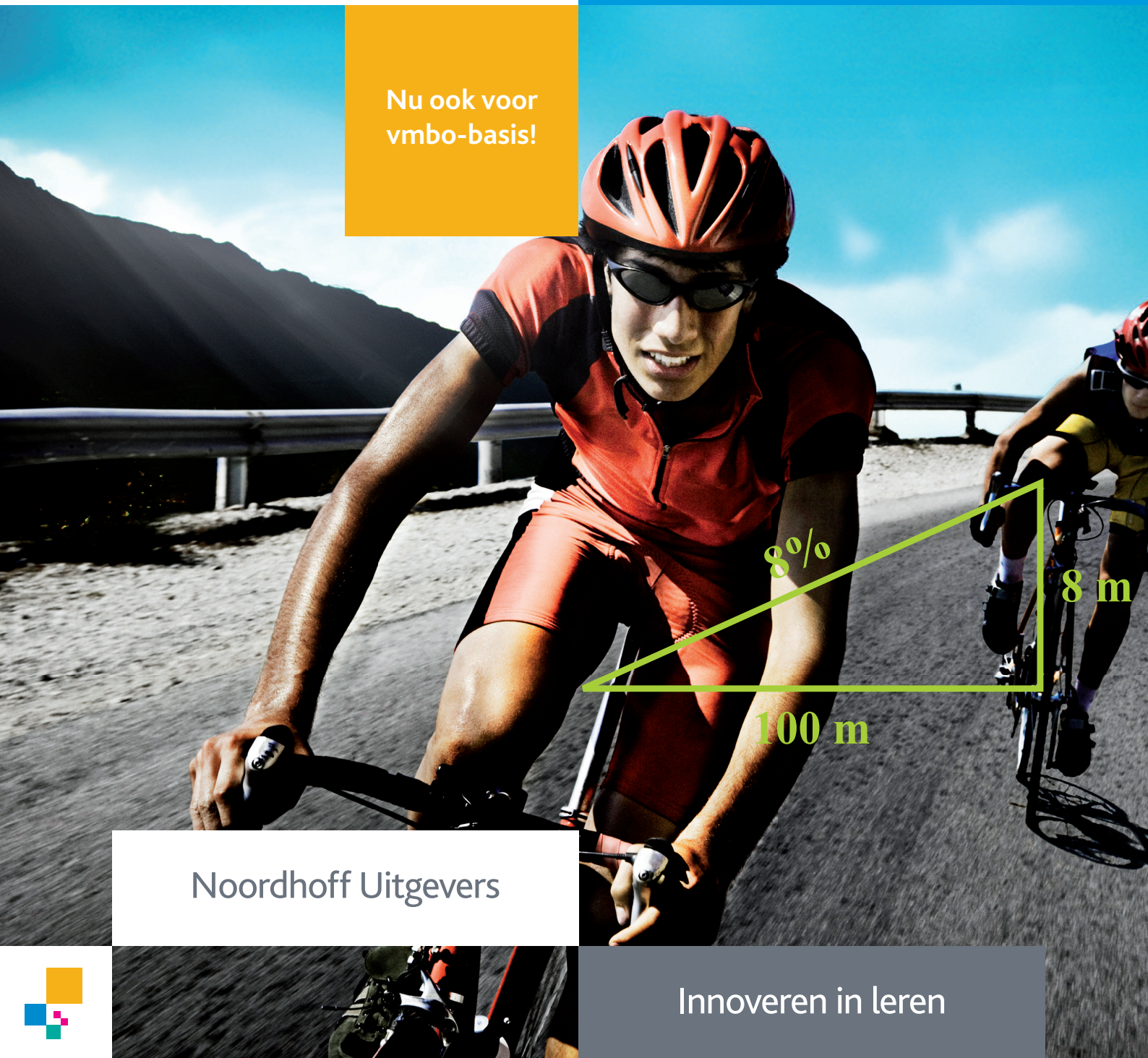
MODERNE WISKUNDE

Nieuw!
Ontdek de 12e editie onderbouw:

- Drie leerroutes: elke leerling werkt op eigen niveau
- Kies hoe u wilt werken: boek, digitaal of beide
- Rekenen is opgenomen in het werkboek en online

Bestel uw beoordelingsmateriaal op:
modernewiskunde.noordhoff.nl

Nu ook voor vmbo-basis!



Noordhoff Uitgevers

Innoveren in leren