Olympiadepuzzel

Euclides 93 nummer 2

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Kaartjes trekken

Opgave

In een hoge hoed zit 1 kaartje met het getal 1 erop, verder 2 kaartjes met het getal 2 erop, 3 kaartjes met het getal 3 erop, enzovoorts, tot en met 100 kaartjes met het getal 100 erop. Je trekt blind kaartjes uit de hoge hoed. Hoeveel kaartjes moet je minstens uit de hoed halen om zeker te weten dat je:

a) 10 kaartjes met hetzelfde getal hebt of 10 kaartjes met 10 verschillende getallen (of allebei);

b) zowel 10 kaartjes met hetzelfde getal hebt als 10 kaartjes met 10 verschillende getallen (dit hoeven niet per se 20 verschillende kaartjes te zijn; een kaartje kan meetellen voor beide categorieën)

Uitwerking

a) Met 81 kaartjes zou het kunnen dat je nog net niet 10 dezelfde getallen of 10 verschillende getallen hebt: je kunt namelijk 9 keer 100, 9 keer 99, ..., 9 keer 92 trekken. Met 82 kaartjes ben je er wel zeker van. Als je namelijk op dat moment 10 verschillende getallen hebt, ben je klaar; en zo niet, dan bevatten blijkbaar alle 82 kaartjes samen slechts 9 getallen. Wegens het ladenprincipe moet er dan een getal zijn dat op minstens 10 kaartjes staat. Dus ofwel er zijn 10 verschillende getallen, ofwel 10 kaartjes met hetzelfde getal. Conclusie: je moet minstens 82 kaartjes trekken.

b) Met 864 kaartjes zou het kunnen dat je nog net niet 10 dezelfde getallen hebt: je kunt namelijk 9 keer 100, 9 keer 99, ..., 9 keer 9 trekken en daarnaast nog alle kaartjes met 1 tot en met 8 erop. Totaal heb je dan $9 \cdot 92 + 8 + 7 + \ldots + 2 + 1 = 864$ kaartjes getrokken. Met 865 kaartjes gaat het wel zeker goed. Daar zitten namelijk maximaal 36 kaartjes bij met een 8 of lager erop, dus er zijn er minstens 829 met een 9 of hoger erop. Omdat er 92 verschillende getallen van 9 of hoger zijn en $829 > 9 \cdot 92$ is er volgens het ladenprincipe een getal dat minstens 10 keer voorkomt.
Daarnaast moeten we laten zien dat er minstens 10 verschillende getallen voorkomen in elke 865 kaartjes. Stel dat het hoogstens 9 zouden zijn, dan zou het totaal aantal kaartjes hooguit $100 + 99 + 98 + \ldots + 92$ zijn, want dat zijn de 9 grootste aantallen kaartjes van hetzelfde getal die voorkomen. Dit is samen $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (100 + 92) = 864$. We hadden echter 865 kaartjes, dus moeten er wel 10 verschillende getallen voorkomen. Conclusie: je moet minstens 865 kaartjes trekken.

Inzenders met een juiste uitwerking

M. van Bruchem, Ben Groot, Frans van Hoeve, Jorn van Hout (zijn VWO 6-klas en zijn Wiskunde D-klas van St. Ursula Horn), Hans Linders, Jan Meerhof, Jos Remijn en Monica Woldinga.

Winnaar van de kadobon

Ben Groot.