

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Lesson study in Japan

Digitale examens vmbo

Puzzelen met priemfactoren

Wiskunde en kunst op de NVvW-dag

Babylonische vergelijkingen

NR. 4

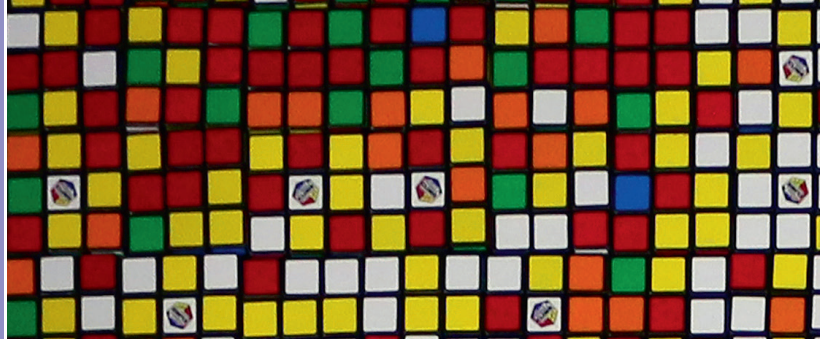
JAARGANG 93 - FEBRUARI 2018



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 93 NR. 4



IN DIT NUMMER

LEER UW NIEUWE VOORZITTER KENNEN
HARM JAN SMID

4

WAAR EEN MERKWAARDIG PRODUCT TOE LEIDT...
NARTIN KINDT

8

GETUIGEN
DANNY BECKERS

12

LESSON STUDY IN JAPAN
GERRIT ROORDA
SUI LIN GOEI

14



VOETBALLERS SELECTEREN
LAMMERT WESTERDIJK

26

WORTELS VAN DE WISKUNDE
JEANINE DAEMS

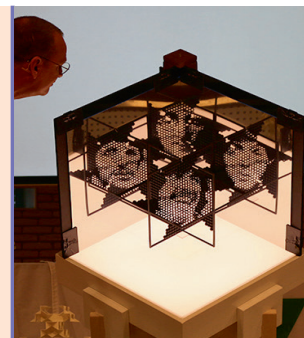
29

DE DYNAMIEK VAN GETALLEN
PAUL DURENKAMP

33

WISKUNDE UIT DE KUNST
NVVW-DAG
AB VAN DER ROEST

36



KLEINTJE DIDACTIEK
LONNEKE BOELS

19

WIS EN WAARACHTIG

18

HOE MAKEN WE DE NEDERLANDSE PORTEMONNEE
LICHTER?
SEBASTIAAN BREEDVELD

20

DIGITALE CENTRALE EXAMENS WISKUNDE VMBO
MELANIE STEENTJES
PAUL VAN DER MOLEN
MARJOLEIN NIEUWENHUIZEN

23

EXAMENOPGAVE MEETKUNDE, HERGEBRUIKT
TON LECLUSE

38

MEER RUIMTE VOOR
HET FESTIVAL
DÉDÉ DE HAAN

40



Foto: pixel-art: portret van Martin Kindt, gemaakt met
400 Rubiks kubussen tijdens de NVvW dag.
Ontwerp: Tom Goris.
Uitvoering: Kasper Koster en Tijmen van der Ree.
Fotograaf: Marjolein Koster

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

VERENIGINGSNIEUWS JAARREDE 2017

SWIER GARST



43

PUZZEL
BIRGIT VAN DALEN
QUINTIJN PUITE

45

SERVICEPAGINA

46

Kort vooraf

Deze eerste *Euclides* van 2018 zou je bijna een NVvW-dag special kunnen noemen. Tijdens die dag hield Swier Garst zijn laatste jaarrede. Iedereen wist eigenlijk wel dat hij opgevolgd zou worden door Ebrina Smallegange, maar dat kon niet eerder formeel bekend gemaakt worden. Harm Jan Smid was toen al bij Ebrina op bezoek geweest om een interview te houden, hetgeen resulteerde in een mooi portret van onze nieuwe voorzitter waar we deze editie graag mee willen openen. Ab van der Roest hebben we gevraagd om zijn persoonlijke impressie van de dag in een artikel te verwoorden. Een feest van herkenning voor degenen die er waren en hopelijk een bron van inspiratie voor de thuisblijvers om er volgend jaar ook te zijn. Dan zal er ook weer een winnaar van de NVvW Ontwerpprijs zijn, dit jaar was dat Paul Durenkamp die meteen de vraag kreeg om over zijn ontwerp het artikel 'De dynamiek van getallen' te schrijven, ook in dit nummer. Op de cover zie je het Rubiks-kubusportret van Martin Kindt dat Kasper Koster en Tijmen van der Ree tijdens de NVvW-dag hebben gemaakt van maar liefst 400 kubussen. Zet deze *Euclides* ergens rechtop tegenaan en neem vervolgens afstand: dat is het effect van pixel art, de blokjes vloeien ineen tot een beeld. En daarmee is de cirkel van deze Kort vooraf gesloten: van Martin Kindt is er een bijdrage om je wiskundige scherpte op de proef te stellen onder de titel 'Waar een merkwaardig product toe leidt...'

Op het moment dat ik dit schrijf is Nederland officieel in de ban van een griepepidemie. Dat roept meteen de vraag op wanneer bij ons de examenkoorts weer begint te komen. Misschien wel na het lezen van het artikel 'Digitale Centrale Examen Wiskunde vmbo' van een aantal Cito- en CvTE-medewerkers!

Tom Goris

LEER UW NIEUWE VOORZITTER KENNEN

Harm Jan Smid

EBRINA SMALLEGANGE: DOORZETTER MET HART VOOR HET VMBO

Zaterdag 4 november werd Ebrina Smallegange in het bestuur van de NVvW herkozen, en vervolgens is ze op de eerstvolgende bestuursvergadering verkozen als voorzitter. Ze is tweedegraads docente wiskunde, maar ook landbouwkundig ingenieur. Ze is bovendien een zij-instromer, en had al een heel leven achter de rug voor ze in het onderwijs terecht kwam. Ebrina is nog niet zo heel lang actief binnen de vereniging, en voor veel leden zal ze tamelijk onbekend zijn. Over die onbekende kanten van de nieuwe voorzitter gaat dit portret, een interview door Harm Jan Smid.



Ebrina Smallegange. Foto: Marjolein Koster

Op school

Toen Ebrina in 1977 vanuit Den Helder naar Wageningen vertrok, om daar aan de – toen nog – Landbouw Hogeschool te gaan studeren, was dat niet haar eerste verhuizing. Haar vader was onderofficier-instructeur in het leger, en dat betekende dat hij regelmatig werd overgeplaatst. Al snel na haar geboorte verhuisde de familie naar Rilland-Bath in Zeeland. Toen ze halverwege de tweede klas van de lagere school zat (nu groep vier), verhuisde het gezin al weer naar Elburg. Daar maakte ze de lagere school af. Ze heeft nauwelijks herinneringen aan de lagere school in Rilland-Bath, wel aan de lagere school in Elburg. Het onderwijs was in haar herinnering erg ouderwets, maar degelijk. Over zichzelf in die tijd zegt ze:

Ik was vooral heel braaf en volgzaam. Ik hield me een beetje gedeisd omdat ik altijd de antwoorden wist, en dat wordt dan een beetje vervelend. Ik stak dus maar niet meer mijn vinger op, maar ja, toen kreeg ik nooit meer een beurt en kon ik nooit meer een goed antwoord geven! Maar verder was ik vooral heel, heel braaf, en ik kon me niet voorstellen dat je niet je best deed. Het was ook leuk, die sommen maken, vooral als ze goed uitkwamen!

Ze ging daarna naar het vwo in Zwolle. Dat was een hele onderneming, twintig kilometer verderop met de bus. Haar oudere zus was een paar jaar eerder op advies van de lagere school naar de mavo in Elburg gegaan. Die school signaleerde gelukkig onmiddellijk dat ze niet daar, maar op het vwo thuishoorde, en toen zij die stap eenmaal had gezet, was ook voor Ebrina de gang naar Zwolle wat makkelijker. Haar levendigste herinnering is misschien nog wel dat ze in de eerste klas de rekenliniaal moesten gebruiken; er hing zo'n enorm ding in het lokaal en ze moesten er ook allemaal eentje zelf hebben. Een jaar later was dat al weer voorbij en moest ze een rekenmachientje aanschaffen. Dat was een dure grap: 150 gulden maar liefst!

Halverwege de tweede klas verhuisde het gezin nog een keer, nu naar Den Helder. De school waar ze daar naartoe ging, het voormalige Johannes College, zat nog in een noodgebouw, maar al snel verhuisde die naar een gloednieuw gebouw, waaruit een, zeker voor die tijd, zeer moderne onderwijsvisie sprak.

*We hadden daar leerpleinen, wonderbaarlijk!
De school was samengesteld uit vier vleugels, ieder met een eigen kleur, en de wiskundevleugel was gebouwd rond een centraal instructielokaal met daaromheen ruimtes voor zelfwerkzaamheid.
Als een leraar dacht: nu moet ik toch echt iets klassikaal uitleggen, dan moest hij het instructielokaal bespreken, en als hij dan na zo'n twintig minuten of zo het gevoel had dat het begrepen was, dan gingen de leerlingen in de werkruimtes zelf aan de slag.*

Ze genoot ervan! Ze vond het fantastisch dat je zelf met de problemen aan het werk kon, en dat je als je vast liep om hulp kon vragen. Toch speelde ook bij deze manier van werken de leraar wel degelijk een rol, wat bleek toen ze moest kiezen wat ze na het vwo zou gaan doen. Ze aarzelde over een aantal opties, en overwoog zelfs serieus om voor goudsmid te kiezen. Maar dat werd door haar ouders uit haar hoofd gepraat, want dan werd je zelfstandig ondernemer en dat was maar niks: kiezen voor zekerheid, dat was het motto thuis. In het gesprek met de decaan kwam ook wiskunde aan de orde. Ze wilde, zo

vertelde ze hem, in de tweede, vierde en zesde klas voor wiskunde kiezen. Toen de decaan haar vroeg waarom ze dat in die andere klassen dan niet had gewild, realiseerde ze zich dat dat te maken had met die leuke en stimulerende docent die ze in de tweede, vierde en zesde gehad had. Ze trok daaruit een opmerkelijke conclusie: als het kennelijk meer samenhang met de docent dan met het vak, kon ze toch maar beter geen wiskunde gaan studeren. Ze koos voor biologie, het andere vak van haar voorkeur. Maar ook die keus stuitte op bezwaren van thuis, want wat was bioloog nu voor een beroep? Toen haar ouders in hun jeugd in Zeeland woonden, vonden daar grootscheepse ruilverkavelingen plaats, waar landbouwkundig ingenieurs een belangrijke rol in vervulden. Ingenieur, dat was ten minste een echt beroep, en in Wageningen had dat ook met de natuur te maken. Het werd dus de Landbouw Hogeschool.

Wageningen en de wijde wereld in

Ebrina kwam niet uit een gezin waarin een universitaire studie gewoon was. Haar vader was onderofficier, haar moeder had na de lagere school niet meer dan enkele klassen huishoudschool gevolgd, maar vond dat

meisjes tegenwoordig wel meer konden bereiken. Ebrina heeft zelf het gevoel dat haar neiging tot doorzetten en vasthouden aan de taak die je op je hebt genomen, duidelijk aan de invloed van haar moeder is te danken. Die eigenschap had ze ook wel nodig in Wageningen. Hoewel ze daar al spoedig heel wat minder braaf werd dan thuis, had haar studie daar niet onder te lijden. En dat was eigenlijk opmerkelijk, want de studie was niet wat ze zich ervan had voorgesteld. Biologie was voor haar natuur, en ze was geïnteresseerd in wat je nu duurzaamheid zou noemen, maar Wageningen bracht haar vooral celbiologie. Maar opgeven of omzwaaien was geen optie, want als je ergens aan begon zette je door. Ze koos uiteindelijk voor Landbouwtechniek met als afstudeervak ergonomie, zonder dat ze daar nu zo veel mee had.

Hoe dan ook, na zes jaar had ze een ingenieursdiploma. In Wageningen was ze verliefd geworden op een medestudent, die tropische veeteelt studeerde. Hij studeerde eerder af dan zij, en ging in ontwikkelingslanden werken. Ze trouwden, en Ebrina volgde haar man naar de tropen. Ze woonden achtereenvolgens in Jemen, Sri Lanka, Mali en Benin. Dat klinkt mooi, maar in werkelijkheid was het leven als 'de vrouw van' wat

minder idyllisch. Het was moeilijk voor haar om zelf werk te vinden, en als ze dat vond, bijvoorbeeld in Sri Lanka bij voorlichting voor boeren, of in Mali als secretaresse, was dat toch ook niet

'ZE ONTDEKTE DAT HAAR HART VOORAL UITGING
NAAR DE ZORG AAN ZWAKKE LEERLINGEN OP HET
GEBIED VAN REKENEN/WISKUNDE.'

echt haar ding. In Benin kwam ze tot de conclusie dat het zo niet verder kon. Ze ging via de Open Universiteit informatica op hbo-niveau studeren, met de gedachte daar zelf iets mee te kunnen doen. Maar er gebeurde in Benin ook iets heel anders: haar huwelijk liep spaak. Uiteindelijk belandde ze als alleenstaande moeder met drie kinderen, met een alimentatie op bijstandsniveau, weer in Nederland. Ze had dan wel een academische opleiding, maar dat vak nooit bijgehouden, en ook verder nauwelijks werkervaring. Wat nu?

Het onderwijs in

Ze besloot voor het onderwijs te kiezen, en dan ook voor haar oude liefde: wiskunde. Ze had in haar studie vooral analyse en statistiek gehad, voor haar tweedegraads moest ze dat aanvullen met vakken als structuren en meetkunde. Er was ook veel tijd voor vakdidactiek, waar ze veel aan heeft gehad. Maar één ding kan een lerarenopleiding natuurlijk niet bieden: ervaring. En die heb je, zeker op het vmbo waarop de didactische uitdagingen misschien wel het allergrootst zijn, het meest nodig. Ze begon in een vervangingsbaan. Die eerste tijd was niet makkelijk.

HP zet de toon met innovatieve technologie

HP Prime



Wiskunde ontdekken door het gebruik van technologie zal uw leerlingen direct aanspreken. Laat ze eens werken met een rekenmachine die wél aansluit bij hun verwachtingen.



De HP Prime is de enige grafische rekenmachine met technieken van deze tijd: een snelle processor, touchscreen, intuïtieve app-bediening, 3D grafieken en meer. Uiteraard wordt ook gedacht aan de eisen van het huidige onderwijs, met een veilige en gemakkelijke examenstand, video's en lesmateriaal bij de methodes en ondersteuning door wiskunde docenten.

Wij bieden u de HP Prime voor dezelfde prijs als de concurrentie, maar daarvoor krijgt u zoveel meer.

Beoordeel dit nu zelf door met uw leerlingen te werken met de Prime. Zonder kosten, zonder verplichtingen, maar wel mét alle ondersteuning. U ontvangt een aantal Primes van ons en kunt uw leerlingen zelf de proef op de som laten nemen.

Wedden dat ze nooit meer anders willen?



Download een gratis HP Prime-app

voor smartphone, tablet en PC:



Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een workshop, demo-units of een schoolofferte neemt u contact op via **info@hp-prime.nl**

Het ging helemaal niet vanzelf. Ik had een studiegenoot waar iedereen van zei: dat is een echte leraar, nou, dat was ik helemaal niet. Ik heb het helemaal moeten leren, en in de eerste drie jaar was het echt zwoegen. Maar ik ben een doorzetter, en bovendien: er moest brood op de plank komen, dus ik moest wel. Maar ik kreeg het niet vanzelf!

Gelukkig werd ze op die eerste school wel goed begeleid. Daarna werkte ze op twee grote scholengemeenschappen in de onderbouw. Ze kreeg het vak onder de knie, maar kreeg ook te maken met omstandigheden die het werk niet makkelijker maakten. Op de ene school waren de verhoudingen tussen onderbouw- en bovenbouwleraren toentertijd moeizaam, de andere school was ambitieus, maar dan met name gericht op talen met weinig aandacht voor leerlingen die moeite met wiskunde hadden. Aan remedial teaching voor wiskunde wilde die school niets doen, en dus besloot Ebrina dat zelf aan te pakken.

Ze volgde voor eigen tijd en rekening een opleiding voor remedial teacher, wat uiteindelijk leidde tot een master *special educational needs*. Jammer genoeg was ook die opleiding vooral op talen gericht, dus volgde ze nog een masteropleiding, nu gericht op leerlingen met rekenproblemen en dyscalculie. Daarna werkte ze ook nog acht jaar mee aan de vmbo-versie van *Moderne Wiskunde*. Dat alles hielp haar ook te ontdekken waar haar hart vooral naar uitging: het bieden van zorg aan zwakke leerlingen op het gebied van rekenen/wiskunde.

Ze stapte acht jaar geleden over naar een school waar ze volop de kans kreeg om daar iets mee te doen: Pantarijn in Kesteren, een kleine school met een kleine havo/vwo onderbouw en een flinke vmbo-afdeling. Het was een andere wereld en het betekende een flinke overgang, maar het was wel wat ze wilde. Naast het geven van gewone wiskundelessen kon ze daar ook als specialist op het gebied van rekenen en dyscalculie aan de slag.

En de NVvW dan?

Ebrina had in Kesteren na een tijdje haar plek gevonden, maar bepaald nog niet binnen de NVvW. Ze vond dat die vereniging onvoldoende aandacht schonk aan het vmbo, in *Euclides* kon ze maar weinig van haar gading vinden en ze dacht: waarom blijf ik eigenlijk nog lid van die club? Ze ontmoette op een bijeenkomst een bestuurslid van de NVvW en vertelde hem over haar twijfels. 'Waarom ga je er zelf niet wat aan doen?' was zijn reactie, en voor iemand met het plichtsbesef van Ebrina was een dergelijke uitdaging niet iets om naast je neer te leggen. Ze bleef lid, liet zich kandidaat stellen voor het bestuur en werd in 2014 gekozen.

In datzelfde jaar werd Swier Garst voorzitter. Dat was, ook door hemzelf, bedoeld als een tijdelijke oplossing

voor drie jaar. Al heel snel na de entree van Ebrina in het bestuur drong het tot de andere bestuursleden door dat ze met haar eigenlijk de nieuwe voorzitter hadden binnengehaald. Nadat ze ook Ebrina daarvan hadden overtuigd, werd ze in 2015 benoemd tot vicevoorzitter, een nieuw gecreëerde functie om haar de kans te geven zich op het voorzitterschap voor te bereiden. Met name de vragen rond het eerstegraads onderwijs waren haar niet vanuit haar werk bekend, maar ze werkte zich snel en grondig in. Vanaf 15 november is ze officieel voorzitter: Ebrina Smallegange, iemand met een schat aan kennis en ervaring op allerlei gebied, maar vooral met hart voor de leerlingen om wie het allemaal draait.

Over de auteur

Harm Jan Smid was leraar wiskunde en lerarenopleider. De geschiedenis van het wiskundeonderwijs heeft zijn speciale interesse. Hij is de auteur van het jubileumboekje ter gelegenheid van het 90-jarig bestaan van de NVvW: *Zestig jaar hart voor wiskundeonderwijs. Een geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs in 10 portretten*. E-mailadres: harmjansmid45@gmail.com

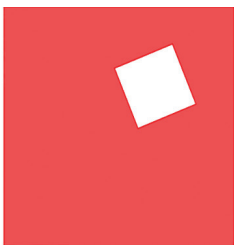
WAAR EEN MERKWAARDIG PRODUCT TOE LEIDT...

Martin Kindt

Drie merkwaardige producten zijn terug van weggeweest in de schoolboeken. Gelukkig maar, vindt Martin Kindt. De regel waarin het verschil van twee kwadraten een rol speelt, krijgt in zijn artikel een uitbreiding naar een verrassende identiteit voor speciale functies.

Kwadraat min kwadraat

Uit een (rood) vierkant is een vierkantje weggesneden, zoals in onderstaande figuur:



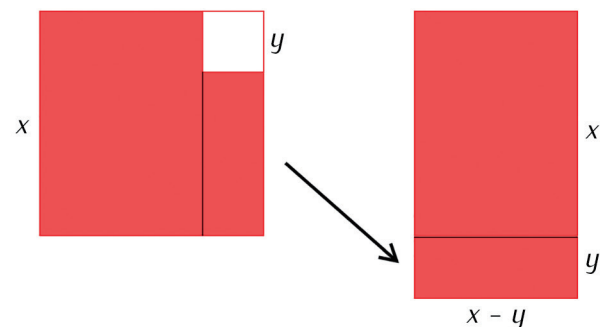
Vraag: construeer (passer en liniaal) een rechthoek (geen vierkant), waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van het resterende vlakdeel.

Voor wie de algebraregels gesneden koek zijn, is dit misschien een eitje. Noem de zijde van het grote vierkant x en die van het kleine vierkant y . De oppervlakte van het rode gebied is dan $x^2 - y^2$. Een 'merkwaardig product' zegt dat dit gelijk is aan $(x + y)(x - y)$ en een rechthoek met zijden $x + y$ en $x - y$ is bij gegeven lengten x en y met passer en liniaal te construeren. Dat er oneindig veel andere rechthoeken zijn die ook aan de vraag voldoen, laat ik hier verder rusten.

Maar een meetkundig probleem vraagt ook om een meetkundige oplossing. Een goede aanpak kan dan zijn om het witte vierkantje te draaien zo dat de zijden parallel zijn aan die van het grote vierkant en het vervolgens te verplaatsen naar een van de vier hoeken.



De rode figuur ('gnomon') kan via knippen en plakken worden omgevormd tot een rechthoek.



Er zijn nog andere knip-en-plak-oplossingen, maar deze lijkt de meest voor de hand liggende. De figuur geeft een visueel bewijs voor mijn (favoriete) merkwaardig product. Met de restrictie dat dit 'bewijs' slechts valide is voor het geval x en y positieve getallen zijn en $x > y$. Voor het algemene geval zul je toch een beroep willen doen op de 'uitgebreide distributieve wet' die zegt dat je bij het product van twee veeltermen alle termen van de ene veelterm vermenigvuldigt met alle termen van de andere en vervolgens alle zo verkregen producten optelt. In het prachtige boek *Vision in Elementary Mathematics*^[1] gebruikt W.W. Sawyer bij de uitvoering van die wet de tabelvorm – als een abstract vervolg op het 'rechthoek-model' – en dat geeft hier:

·	x	y
x	x^2	xy
$-y$	$-xy$	$-y^2$

Twee producten heffen in dit geval elkaar op, vandaar de tweeterm als uitkomst.

Tegenwoordig (eigenlijk sinds 1958) beperken we ons in de schoolalgebra tot de drie bekende kwadratische merkwaardige producten. Maar dat is wel eens anders geweest. Als leerling werd ik nog getraakteerd op:

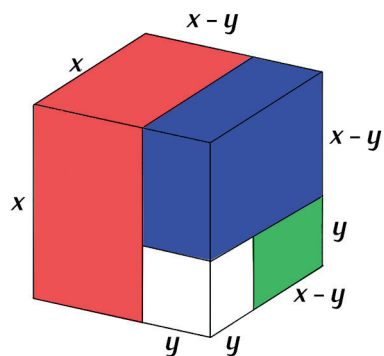
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

De distributieve wet in werking!

Ik merk op dat de deelbaarheid van $x^3 - y^3$ (of $x^3 + y^3$) door $x - y$ (of $x + y$) niet verwonderlijk is als je bedenkt dat beide vormen nul zijn als $x = y$ (of $x = -y$). Dit type redenering, gebaseerd op de zogeheten factorstelling, dat is wat je noemt 'volbloed' algebra.

De eerste identiteit - 'kubus min kubus = ...' - kan ook worden begrepen via deze ruimtefiguur:



$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Een merkwaardig gonio-product

Door professor Van der Blij werd ik ooit attent gemaakt op een verrassende identiteit:

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

Goede oefening voor leerlingen die bij gonio zojuist de bekende 'somformules' hebben geleerd! Kijk maar:

$$\begin{aligned} &(\sin x \cos y + \sin y \cos x)(\sin x \cos y - \sin y \cos x) \\ &\quad \text{merkwaardig product} \downarrow \\ &(\sin x \cos y)^2 - (\sin y \cos x)^2 = \\ &\sin^2 x (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y (1 - \sin^2 x) = \\ &\sin^2 x - \sin^2 y \end{aligned}$$

Mooi toch?!

Begin je met het rechterlid, dan kun je de formules van Simpson en de verdubbelingsformule toepassen:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin^2 y &= (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = \\ 2\sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) &2\sin \frac{1}{2}(x-y) \cos \frac{1}{2}(x+y) = \\ &\underbrace{\sin(x-y)}_{\sin(x+y)} \end{aligned}$$

De vraag die ik mij onlangs stelde was: zijn er meer functies, zoals de sinus, die net zo'n identiteit toelaten? Met andere woorden: kan ik meer functies f vinden, met de eigenschap dat voor alle (reële) x en y geldt:

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x) - f^2(y) \quad (\text{FV})$$

of gelijkwaardig hieraan:

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = [f(x) + f(y)] \cdot [f(x) - f(y)]$$

(FV) gebruik ik nu voor deze 'functionaalvergelijking'.

Bij Wiskunde-olympiade finales kom je dit type opgaven wel tegen en een eerste aanpak kan dan zijn om eigenschappen van f op te sporen via slimme substitutie.

Neem eerst $x = y = 0$. Er komt: $f(0) \cdot f(0) = 0$ dus $f(0) = 0$. Nu vul ik alleen $x = 0$ in. Dit leidt tot:

$f(y) \cdot f(-y) = -f^2(y)$. Ik wil hieruit concluderen dat $f(-y) = -f(y)$ voor alle y , dus f is een *oneven functie*.

Dit is geoorloofd, tenzij ... er een y bestaat met $f(y) = 0$ en $f(-y) \neq 0$. Gelukkig, dit donderwolkje kan ik laten verdwijnen.

Want uit de substitutie $x = -y$ in (FV) volgt:

$0 = f^2(-y) - f^2(y)$, dus $f(-y) = f(y)$ of $f(-y) = -f(y)$.

Ik ga op zoek naar oneven functies die voldoen aan (FV).

Neem bijvoorbeeld $f(x) = x^3$.

Er zou voor alle x, y -waarden moeten gelden:

$$(x+y)^3 \cdot (x-y)^3 = (x^3 + y^3) \cdot (x^3 - y^3)$$

Ofwel

$$(x^2 - y^2)^3 = x^6 - y^6$$

Helaas. Voor andere machten met oneven exponent, wordt het duidelijk niet beter. Lineaire combinaties van oneven machten misschien? Aan het product van de hoogste machten kun je meteen zien dat met dergelijke polynoomfuncties niet kan worden voldaan aan (FV). Ook quotiënten van zulke polynomen kunnen geen oplossing leveren. Buiten de zuivere lineaire functies, dat wil zeggen functies van het type $f(x) = ax$, zijn er geen rationale functies die aan (FV) voldoen.

Drie families

Voor mogelijk andere oplossingen zal ik moeten vissen in de vijver van de oneven transcendente functies. Na de sinus dan de tangens proberen? Een exercitie met gonioformules leert dat dit ook vergeefse moeite is. Misschien iets met e -machten? Een voorbeeld van een oneven functie is: $f(x) = e^x - e^{-x}$. En ja, ik heb beet!

$$\begin{aligned} &(e^{x+y} - e^{-x-y})(e^{x-y} - e^{-x+y}) = \\ &e^{2x} - e^{2y} - e^{-2y} + e^{-2x} = \\ &(e^{2x} + e^{-2x}) - (e^{2y} + e^{-2y}) = \\ &(e^{2x} + e^{-2x} - 2) - (e^{2y} + e^{-2y} - 2) = \\ &(e^x - e^{-x})^2 - (e^y - e^{-y})^2 \end{aligned}$$

Nu doet het verschil van die twee e -machten de lezer misschien denken aan de sinushyperbolicus. Er geldt, om precies te zijn, $e^x - e^{-x} = 2\sinh(x)$.

Omdat de somformules voor de hyperbolische functies $\sinh$ en $\cosh$ analoog zijn aan die voor $\sin$ en $\cos$, is dit resultaat niet zo verrassend als men misschien op het eerste gezicht zou denken.^[2] Eigenlijk heb ik nu al drie families van oplossingen te pakken. Want als $x \rightarrow f(x)$ een oplossing is van (FV), is iedere functie

$x \rightarrow c \cdot f(ax)$ – met a en c willekeurige constanten – dat ook. Dit volgt direct uit de distributieve wet. Zo krijg ik dan de drie oplossingsfamilies:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow ax \\x &\rightarrow c \cdot \sin(ax) \\x &\rightarrow c \cdot (e^{ax} - e^{-ax})\end{aligned}$$

Machtreeksen

Ik wil nu weten of er buiten deze drie families nog meer ‘nette’ oplossingen zijn. Met een nette oneven functie bedoel ik dan een functie die correspondeert met een oneven (formele) machtreeks.^[3] Zoals:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\end{aligned}$$

Laat f zo’n functie zijn, waarbij ik – voor het gemak – de beginterm de coëfficiënt 1 geef. Zeg:

$$f(x) = x + A_1 x^3 + A_2 x^5 + A_3 x^7 + \dots$$

Ik merk eerst op dat de machtreeksen $f(x+y) \cdot f(x-y)$ en $f^2(x) - f^2(y)$ beide deelbaar zijn door $x^2 - y^2$. Voor de eerste vorm is dat direct te zien, want $f(x+y)$ is deelbaar door $x+y$ en $f(x-y)$ is deelbaar door $x-y$. Voor de tweede vorm is het handig om naar het product $[f(x) + f(y)] \cdot [f(x) - f(y)]$ te kijken.

Er geldt:

$$f(x) + f(y) = x + y + A_1(x^3 + y^3) + A_2(x^5 + y^5) + \dots$$

Omdat $x^3 + y^3$, $x^5 + y^5$, $x^7 + y^7$, enzovoort, deelbaar zijn door $x+y$ is $f(x) + f(y)$ dat ook.

Evenzo is $f(x) - f(y)$ deelbaar door $x-y$.

Ik kijk nu eerst naar de machtreeks bij

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \cdot \frac{f(x-y)}{x-y}$$

en gebruik daarbij deze tabel. In de vakjes is de graad van de deelproducten ingevuld:

$\times$	1	$A_1(x+y)^2$	$A_2(x+y)^4$	$A_3(x+y)^6$
1	0	2	4	6
$A_1(x-y)^2$	2	4	6	
$A_2(x-y)^4$	4	6		
$A_3(x-y)^6$	6			

De begintermen van de productreeksen in x en y , gerangschikt naar graad, zijn hieronder uitgerekend. Omdat de reeks symmetrisch is in x en y , heb ik de termen die je krijgt door ‘spiegelen’ (= verwisselen van x en y) van eerdere termen, vervangen door drie puntjes.

Gr	term
0	1
2	$A_1[(x+y)^2 + (x-y)^2] = 2A_1x^2 + \dots$
4	$A_2[(x+y)^4 + (x-y)^4] + A_1^2(x^2 - y^2)^2 = (A_2 + A_1^2)x^4 + (12A_2 - 2A_1^2)x^2y^2 + \dots$
6	$A_3[(x+y)^6 + (x-y)^6] + A_1A_2(x^2 - y^2)^2(2x^2 + 2y^2) = (2A_3 + 2A_1A_2)x^6 + (30A_3 - 2A_1A_2)x^4y^2 + \dots + \dots$

Ik ga deze termen vergelijken met die van de machtreeks die correspondeert met

$$\frac{f(x)+f(y)}{x+y} \cdot \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Bij de uitwerking daarvan laat ik weer spiegelbeeldige termen weg. Verder gebruik ik de identiteit:

$$(x^m - y^m)(x^k + y^k) + (x^m + y^m)(x^k - y^k) = 2(x^{m+k} - y^{m+k})$$

naast de ‘merkwaardige producten’^[4]

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

$$x^5 \pm y^5 = (x \pm y)(x^4 \mp x^3y + x^2y^2 \mp xy^3 + y^4)$$

enzovoort

Zo komt er:

$\times$	1	$A_1 \frac{x^3 + y^3}{x+y}$	$A_2 \frac{x^5 + y^5}{x+y}$	$A_3 \frac{x^7 + y^7}{x+y}$
1	0	2	4	6
$A_1 \frac{x^3 - y^3}{x-y}$	2	4	6	
$A_2 \frac{x^5 - y^5}{x-y}$	4	6		
$A_3 \frac{x^7 - y^7}{x-y}$	6			

Gr	term
0	1
2	$A_1(x^2 + xy + y^2 + x^2 - xy + y^2) = 2A_1x^2 + \dots$
4	$A_2(2x^4 + 2x^2y^2 + \dots) + A_1^2[(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2] = (A_2 + A_1^2)x^4 + (2A_2 + A_1^2)x^2y^2 + \dots$
6	$A_3(2x^6 + 2x^4y^2 + \dots) + 2A_1A_2[(x^8 - y^8)/(x^2 - y^2)] = (2A_3 + 2A_1A_2)x^6 + (2A_3 + 2A_1A_2)x^4y^2 + \dots$

De eerste twee termen van de 'rode' en 'blauwe' machtreeks zijn alvast identiek. Ik kijk nu naar de termen van de graad 4 en 6. Die zijn dan en alleen dan identiek als

$$\begin{aligned} 12A_2 - 2A_1^2 &= 2A_2 + A_1^2 \\ 30A_3 - 2A_1A_2 &= 2A_3 + 2A_1A_2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$A_2 = \frac{3}{10} \cdot A_1^2$$

$$A_3 = \frac{3}{70} \cdot A_1^3$$

Ik check dit even voor de machtreeks bij $\sin x$. Daar geldt

$A_1 = -\frac{1}{3!}$. De twee zojuist gevonden verbanden leveren op:

$$A_2 = -\frac{1}{5!} \text{ en } A_3 = -\frac{1}{7!}.$$

Dat geeft de burger moed!

Als je het vermenigvuldigen en identiek stellen van de 'rode' en de 'blauwe' machtreksen nader beschouwt, kun je inzien dat er een recursief mechanisme optreedt, waarbij elke term volgend op A_1 eenduidig vastligt en kan worden uitgedrukt in de daaraan voorafgaande termen en bijgevolg ook in A_1 .

Kortom: de keuze van A_1 in

$$f(x) = x + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 + \dots$$

bepaalt volledig een machtreeks die voldoet aan (FV).

Ik stel nu $A_1 = \frac{1}{3!}\lambda$, zodat $A_2 = \frac{1}{5!}\lambda^2$ en $A_3 = \frac{1}{7!}\lambda^3$.

Zo ontstaat het vermoeden dat de reeks

$$x + \frac{\lambda x^3}{3!} + \frac{\lambda^2 x^5}{5!} + \frac{\lambda^3 x^7}{7!} + \dots$$

voor elke reële (of als je wilt complexe) waarde van λ een oplossing van (FV) is.

Merk op dat de reeks voor $\lambda = 0, -1, 1$ respectievelijk de functies $x \rightarrow x$, $x \rightarrow \sin x$ en $x \rightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ voorstelt.

Er kan nu worden aangetoond dat de reeks voor *iedere* λ een oplossingsfunctie representeert.

Ik maak dan onderscheid tussen $\lambda > 0$ en $\lambda < 0$.

In het eerste geval bekijk ik:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}})$$

De machtreeks hierbij is die van mijn hypothese, dus:

$$x + \frac{\lambda x^3}{3!} + \frac{\lambda^2 x^5}{5!} + \frac{\lambda^3 x^7}{7!} + \dots$$

Voor $\lambda < 0$ neem ik $\mu = -\lambda$ en bekijk

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(x\sqrt{\mu})$$

De machtreeks hierbij is:

$$x - \frac{\mu x^3}{3!} + \frac{\mu^2 x^5}{5!} - \frac{\mu^3 x^7}{7!} + \dots$$

en bij vervanging van μ door $-\lambda$ vind ik opnieuw de door mij gewenste λ -reeks.

Op grond van het feit dat de coëfficiënten recursief bepaald zijn door de keuze van de coëfficiënt van x^3 , weet ik zeker dat de drie eerdergenoemde families, de enige oneven functies zijn die aan (FV) voldoen!

Noten

- [1] Het boek *Vision in Elementary Mathematics*, waarin tal van inspirerende voorbeelden staan, is online te vinden. Uit het jaar 1969 dateert een Nederlandse vertaling, uitgegeven bij het Spectrum onder de titel *Aanschouwelijk Algebra*.
- [2] Als we als domein voor de vergelijking (FV) de complexe functies nemen, is indachtig een befaamde formule van Euler, namelijk $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, de oplossingsfunctie met e -machten natuurlijk ook niet echt verbazingwekkend.
- [3] Zie [2]: Als we... , dan is 'net' synoniem met 'analytisch'.
- [4] Waarom zouden we in ons algebraonderwijs niet wat meer aandacht besteden aan dergelijke series voortschrijdende formules met een te herkennen patroon? Voorspellen en verifiëren, is dat niet een prima denkactiviteit?

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee over het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

Moeder van alle wetenschappen

Het Wiskundig Genootschap te Leiden werd in 1785 opgericht door een groep Leidse burgers, onder de zinspreuk: *Mathesis Scientiarum Genitrix* (wiskunde is de moeder van alle wetenschappen). Het was één van de genootschappen die indertijd aan de wiskunde was toegewijd. Leden van dit, en gelijksoortige genootschappen, waren onderwijzers, kooplieden, boekhouders en ingenieurs. Zij veronderstelden dat een bredere verbreding van kennis van wiskunde het economisch ongunstige tijt waarin de Nederlanden verkeerden, kon helpen keren. Daarom richtten zij genootschappen op, om ter plaatse de zegeningen van de wiskunde te verkondigen. Praktisch deden ze dat door middel van lezingen, het uitgeven van een tijdschrift, openbare presentaties en onderwijs. Onder andere door kinderen van genootschapsleden wiskundeles te geven zorgde men ervoor dat mensen kennis namen van dit fantastische vak. Wiskunde was tenslotte nog geen verplicht vak. In Leiden werd al snel een aantal studenten en hoogleraren van de universiteit betrokken bij het genootschap, en zij gaven de Leidse genootschapsleden een serieus cachet – inclusief een zinspreuk in het Latijn.

'Goddelijke afkomst'

Het beeld van wiskunde dat deze groep uitdroeg, betrof een achttiende-eeuws kennisideaal. In dat beeld van de 'mathematische konsten' waren rekenen, meetkunde en algebra het fundament voor een groot aantal 'gemengde' wiskundige bezigheden. Mechanica en hemelmechanica vormden het hoogst bereikbare doel, omdat in beide vakgebieden volgens wiskundige regels de schepping werd beschreven. Dichter bij de wetten die God zelf had ingesteld kon men niet komen. Een vak dat je dicht bij de wetten van God bracht, moest wel in meerdere opzichten nuttig en eerbiedwaardig zijn. Rekenkunde, techniek, vestingbouw en technisch tekenen waren vakken

die eveneens door wiskundige regels werden beheerst. Het waren juist die vakken die landmeters en kooplieden hun bestaan opleverden, dat wil zeggen: zij meenden dat zij hun bestaan dankten aan de zekerheid van hun op wiskunde gebaseerde uitkomsten. Dat was de wiskunde waar voorzitter en medeoprichter van het Leidse genootschap Pieter van Campen aan dacht toen hij haar omschreef als:

die voortreffelijke hemeltelg, van goddelijke afkomst, geteeld uit Waarheid en Weldaadigheid, gezoogd aan den borsten der Menschenliefde, onderweezen in de schoole der onvermoeide standvastigheid, opgevoed in het oorlogsveld van Mars, en verkeerende in de raadzaal der Goden.



figuur 1 Rekenboek van Pieter van Campen

Logische samenhang

In 1788 verzorgde deze zelfde Van Campen het rekenboekje dat werd gebruikt aan de school van Mathesis. Een tweede deel verscheen in 1801, zie figuur 1. Van Campen was landmeter en wiskundedocent, en men kan zich voorstellen hoe zijn geëxalteerde kijk op wiskunde mede ten grondslag heeft gelegen aan het vaandel van het genootschap, waarvan je in figuur 2 een afbeelding ziet. Het vaandel diende om bij openbare gelegenheden te worden getoond. En het waren niet de minsten die zich tot de wiskunde aangetrokken voelden: prins Willem Frederik van Oranje (1772-1843), de latere koning Willem I, zou vlak voor zijn studie in Leiden de beschermheer van het genootschap worden. De kennelijke behoefte aan het verspreiden van de wiskunde kreeg in Leiden een bijzondere vorm. De school van Mathesis stond niet alleen open voor de kinderen van de genootschapsleden, maar ook voor een paar leerlingen van de naburige school voor weeskinderen. Met name de technische toepassingen waren voor deze kinderen relevant, omdat ze daarmee later hun brood konden verdienen. Zij kregen dezelfde inleiding tot de reken- en wiskunde die ook de kinderen van de Leidse genootschapsleden moesten leren. Dat was nieuw voor die tijd. Wiskundeles was tot 1800 veelal beperkt tot diegenen die in hun latere beroep

‘EEN VAK DAT JE DICT BIJ
DE WETTEN VAN GOD BRACHT.’

als verplicht vak invoerde in zijn koninkrijk. Daarbij zal hij ongetwijfeld eerder aan de economische voorspoed gedacht hebben, die deze wiskunde zou brengen, dan aan de waarheid en weldadigheid van Mathesis.

Trots op het vak

Met de opkomst van wiskunde als verplicht vak werd de genootschapsschool voor de leden minder belangrijk. De school veranderde in een technische school. In 1935, bij het 150-jarig bestaan van de school, zamelden de oudleerlingen geld in voor een plaquette. Die hing tot 1966 op de buitenmuur van het schoolgebouw, aan de Pieterkerksgracht. Met dank aan de stichting MSG hangt de plaquette sinds 2010 weer op dezelfde plek. Naast deze plaquette, een verzameling boeken en de inmiddels in ROC Leiden gefuseerde technische school van Mathesis, is het vaandel een van de tastbare restanten van het bestaan van het genootschap. Vandaag de dag is het nog steeds te bewonderen in de collectie van museum De Lakenhal te Leiden. Een prachtige illustratie van een beeld van wiskunde dat niet langer opgeld doet. Maar wel een wiskunde die werd uitgedragen door wiskundedocenten, trots op hun vak en met een bezieling die gedragen werd door een rotsvast vertrouwen in de goddelijke herkomst van de regels die ze hanteerden. Ziet u zichzelf al met een vaandel over straat marcheren?



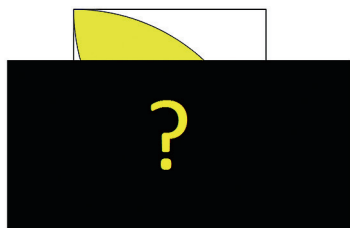
figuur 2
Het MSG vaandel (bron: Museum De Lakenhal te Leiden)

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

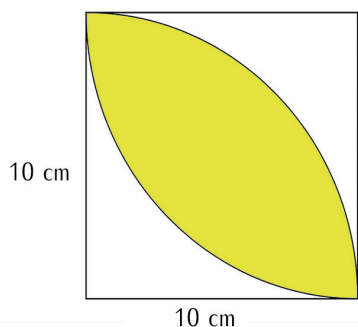
In juni 2016 werd in Japan door Tokyo Gakuai Universiteit het IMPULS (International Math-teacher Professionalization Using Lesson Study) programma georganiseerd. In dit artikel beschrijven Gerrit en Sui Lin hun ervaringen uit Japan en mogelijke implicaties voor het wiskundeonderwijs in Nederland.

De onderzoeksles in groep 8 op de Sugekari Elementary School, in een buitenwijk van Tokyo, start. Dertig kinderen staan op, groeten de leraar en gaan weer zitten. Om de klas heen staan en zitten bijna 60 observatoren waaronder 35 deelnemers en begeleiders van het IMPULS Programma en 20 leraren van de school. Het onderwerp van de vorige les was de oppervlakte van cirkels. Heel kort herhaalt de leraar de oppervlaktes van een hele en een halve cirkel met straal 10. De hele cirkel was $10 \times 10 \times 3,14 = 314 \text{ cm}^2$, de halve cirkel was $10 \times 10 \times 3,14 : 2 = 157 \text{ cm}^2$. Dan pakt de leraar een zwart mapje met een groot geel vraagteken op de voorkant, de zogenaamde *mystery box*. Vandaag gaat het over het volgende probleem. Heel langzaam haalt de leraar iets uit de *mystery box*, zie figuur 1.



figuur 1 De opdracht komt langzaam uit de *mystery box*

Overall schieten vingers omhoog. Maar, hoe verder de gele figuur uit de *mystery box* komt hoe meer vingers weer naar beneden gaan. Uiteindelijk is de hele figuur zichtbaar.



figuur 2 Het probleem: wat is de oppervlakte van de gele citroen?

Wat is een lesson study?

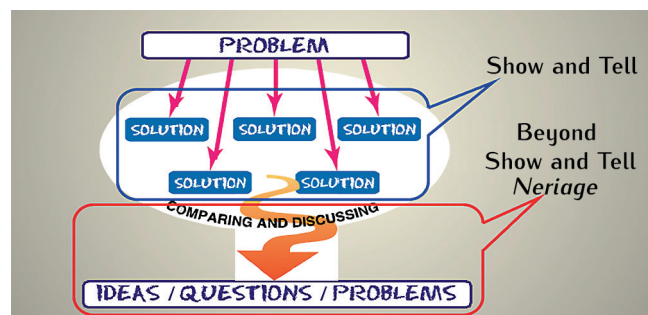
In een *Lesson Study* [3] doorlopen leraren in teamverband een cyclus met verschillende stappen om het leren van een specifiek onderwerp door leerlingen te verbeteren.

De *Lesson Study*-cyclus start met een oriëntatie op het thema. De docenten zoeken een onderwerp voor de onderzoeksles op basis van een gesignaleerd leerprobleem. Informatie wordt verzameld via het bestuderen van bijvoorbeeld leerlingresultaten, bestaande curricula, schoolboeken en onderzoeksartikelen. In fase twee wordt een onderzoeksles ontworpen met een duidelijk vastgesteld doel. De planning van de les wordt gedetailleerd uitgewerkt. Vervolgens wordt de onderzoeksles uitgevoerd door een teamlid en observeren andere teamleden de leerlingen. Soms worden leerlingen ook nog geïnterviewd. In de vierde fase wordt de les nabesproken en worden de verzamelde gegevens gezamenlijk geanalyseerd en consequenties besproken. In de vijfde fase wordt de les zo nodig bijgesteld en opnieuw uitgevoerd. In de laatste fase wordt vastgesteld wat geleerd is door leerlingen en docenten, en worden de opbrengsten gedeeld.

De eerste vraag: Hoe gaan we deze figuur noemen? Een leerling vindt: 'de gele citroen'. De tweede vraag: Kun je de oppervlakte van de gele citroen berekenen? De leerlingen gaan individueel aan het werk, de observatoren lopen de klas in en kijken mee hoe de leerlingen de opdracht aanpakken.

Het presenteren van een opdracht waarvoor de leerlingen zelf eerst een oplossing moeten vinden is kenmerkend voor de aanpak *Teaching Through Problem Solving* [1] of zoals we het verder in dit artikel noemen: *Wiskunde onderwijzen door probleemoplossen* (WOdP). Het gaat er bij deze opdracht om dat de leerlingen een aanpak bedenken waarmee het probleem wordt opgelost. Alle oplossingen zijn welkom. Het probleem is zorgvuldig gekozen in een leerlijn van een bepaald onderwerp. De bedoeling is dat in het vervolg van de les de verschillende oplossingen

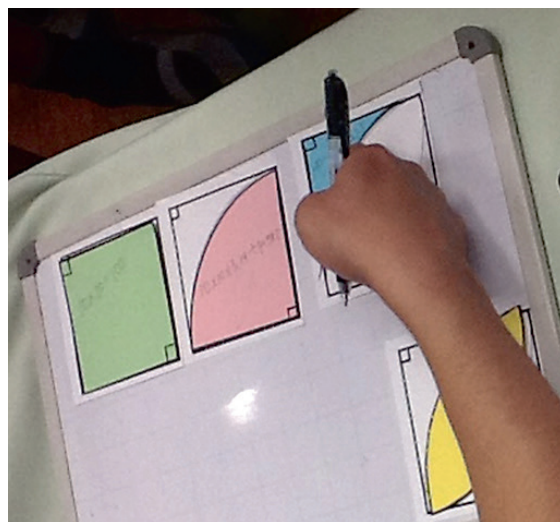
van de leerlingen besproken en bediscussieerd worden, zie figuur 3. In Japan wordt deze laatste fase *neriage* genoemd.



figuur 3 Het principe van WOP (afbeelding uit Takahashi, Lewis, & Perry, 2013)

Zoeken van oplossingen

De leraar loopt door de klas en inventariseert welke oplossingen in de schriften verschijnen. De *Lesson Study*-observatoren kijken mee en proberen door gerichte observaties inzicht te krijgen in hoe leerlingen werken aan de opdracht. Na enige minuten mogen de leerlingen die geen idee hebben hoe ze moeten beginnen voorin de klas komen. Ze krijgen enkele vormen die zouden kunnen helpen om de opdracht op te lossen, zie figuur 4. Als ze, door het bekijken van de vormen bedacht hebben hoe ze de opdracht kunnen oplossen, mogen ze terug naar hun plek om de opdracht verder op te lossen. De leerlingen zijn geconcentreerd aan het werk.



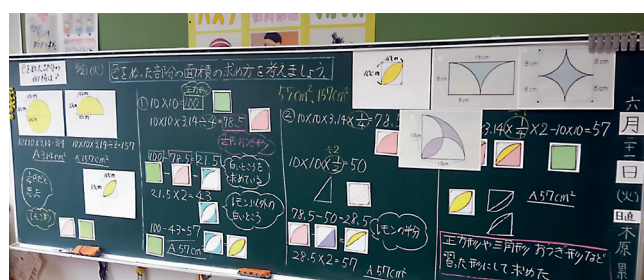
figuur 4 Vormen die helpen om de oplossing te vinden

Het *Lesson Study*-team dat deze onderzoeksles heeft voorbereid, had vooraf voorspeld welke oplossingen leerlingen in deze klas waarschijnlijk kunnen gaan gebruiken. De leraar probeert tijdens het rondlopen inzicht te krijgen of de voorspelde oplossingen ook in de schriften zichtbaar worden. Dit gebruikt de leraar in de volgende fase van de onderzoeksles. Dit is een centraal kenmerk van de *Lesson Study*-aanpak: het *Lesson Study*-

team probeert reacties van leerlingen te voorspellen en bedenkt in de lesplanning hoe ze op voorspelde reacties in kunnen gaan om het lesdoel te behalen.

Bespreken van oplossingen

De leraar vraagt nu aandacht van de klas en de bespreking van de oplossingsmethoden begint. Om inzicht te geven in de opbouw van dit deel van de les, is in figuur 5 een foto van het bord aan het eind van de les weergegeven. Aan de hand van deze foto beschrijven we nu globaal de stappen die de docent in de les heeft gemaakt. De leraar schrijft op het bord de eerste oplossing (de tweede kolom). Steeds mag een leerling zijn berekening noemen, en mogen andere leerlingen uitleggen wat het doel van de berekening is. Vervolgens plakt de docent plaatjes op het bord die passen bij de berekening.



figuur 5 Het schoolbord na afloop van de les

Oplossing 1 begint met $10 \times 10 = 100$. Dat is dus de oppervlakte van het hele (groene) vierkant. Vervolgens $10 \times 10 \times 3,14 : 4$, de roze kwartcirkel dus. Het groene vierkant min de roze kwartcirkel is een blauw 'restje'. Het hele vierkant min twee blauwe 'restjes' levert de oppervlakte van de gele citroen.

Daarna komt oplossing 2 (derde kolom). Een leerling heeft een hulplijn getrokken en daarmee een driehoek gecreëerd. 'Een kwartcirkel min de driehoek is een halve gele citroen'. Alles wordt stap voor stap opgebouwd en leerlingen moeten veel uitleggen en aanvullen. Ten slotte blijkt één leerling nog een snellere weg gevonden te hebben (deels zichtbaar in kolom 4). Twee kwartcirkels min een vierkant. De plaatjes helpen weer om te begrijpen waarom het werkt.

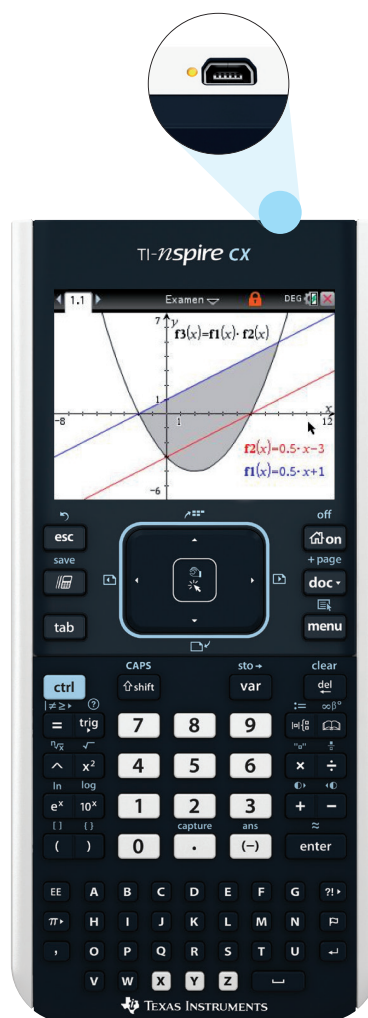
De leraar voert nog een kort nagesprek over de drie oplossingsmethoden en benoemt het doel van de les. Bij onbekende vormen kun je soms de oppervlakte vinden door te kijken hoe je bekende figuren kunt gebruiken waarvan je de oppervlakte wel weet. De leerlingen krijgen als uitdaging nog nieuwe opdrachten om thuis verder over te denken (zie rechtsboven op het bord).

De onderzoeksles verliep vrijwel geheel volgens het lesplan dat de leraren hadden opgesteld. Ook het plan voor hoe het bord zou worden ingedeeld was vooraf opgenomen in de lesvoorbereiding. Het is niet vanzelfsprekend dat de les precies verloopt volgens plan, want het hangt ervan af of de leerlingen ook de voorspelde oplossingen gebruiken. Het kan natuurlijk voorkomen dat er

De Nederlandse examenstand. Nu beschikbaar.



TI-84 Plus CE-T



TI-Nspire CX



Alle instellingen volledig klaargezet voor
het Nederlandse wiskunde-examen.

Stel de examenstand in met



andere oplossingen voorkomen, maar ook dat er foute oplossingen gebruikt worden. Dit maakt het geven van een *Lesson Study*-onderzoeksles uitdagend, omdat je zoveel mogelijk de lesvoorbereiding volgt, maar ook moet kunnen improviseren als het anders loopt.

Nabespreking

Meteen na afloop wordt de onderzoeksles in het gehele team, met de observatoren, nabesproken.

Eerst lichten de leraar en het *Lesson Study*-team toe hoe zij terugkijken op de les. Vervolgens zijn er reacties van diverse leraren. Vragen die aan de orde komen gaan over of de les geschikt was voor alle leerlingen, of de leerlingen die geen oplossing wisten niet te snel geholpen werden, of er nog andere oplossingen waren gezien. Ten slotte is er een reactie van een hoogleraar in de rol van de zogenaamde *knowledgeable other*.^[2] Die plaatst de onderzoeksles in een breder perspectief van eindtermen, 'cito'-uitslagen en pisa-testen. Hij benadrukt het belang van het onderwerp en geeft suggesties ter verbetering.

Bruikbaar in Nederland?

De ervaringen die we opdeden in Japan gingen in de eerste plaats over authentieke Japanse *Lesson Study*. Wij bezochten zeven reken- en wiskundelessen in diverse scholen die waren voorbereid door een *Lesson Study*-team. Het belangrijkste doel van Japanse *Lesson Study* is om gedeelde kennis tussen professionals te bewerkstelligen en niet om, zoals vaak wordt gedacht, een perfecte les te ontwerpen. De Japanners hebben zelf lange tijd niet geweten dat *Lesson Study* een bijzondere aanpak is omdat het vanzelfsprekend was dat leraren op deze manier samenwerken. Ook in de Nederlandse context lijkt *Lesson Study* waardevol als middel om als docenten samen te professionaliseren.^[3] ^[4] Er zijn veel positieve ervaringen beschreven in verschillende contexten in Nederland, zowel in vo als po.^[5] Belangrijk is dat er goede randvoorwaarden zijn voor de groep leraren die hiermee willen werken, zoals tijd, roostering, en steun van de schoolleiding.^[4]

In de tweede plaats zagen we lessen die waren opgebouwd volgens het WOdP-principe. Belangrijke uitgangspunten zijn onder andere dat:

- het leren van rekenen/wiskunde zich moet richten op het ontwikkelen van concepten en procedures door probleemoplossen, redeneren en discussie;
- de leerlingen wiskunde leren door te exploreren en door het oplossen van reken/wiskunde problemen binnen contexten;
- de rol van de leraar is om de leerlingen te betrekken in taken die redeneren en probleemoplossen uitlokken en de discussie faciliteren die de leerlingen brengt naar een gedeeld begrip van rekenen/wiskunde.

In het huidige Nederlandse voortgezet onderwijs lijkt er aandacht te zijn voor probleemoplossen in de vorm van Wiskundige Denkactiviteiten (WDA). Echter, WDA-lessen

en WDA-opdrachten kunnen soms als een soort extra lessen worden gezien, naast het op het examen gerichte curriculum. Kenmerkend voor WOdP is dat het probleemoplossen integraal onderdeel is van de wiskundelessen, juist bij het leren van nieuwe concepten en vaardigheden. Om WOdP succesvol te laten zijn moet er verder worden nagedacht over doorlopende leerlijnen waarbij probleemoplossen ten dienste staat van het leren van nieuwe concepten en vaardigheden.

Ten slotte, de ervaringen in Japan waren zeer inspirerend. Voor ons beiden draagt deze ervaring er sterk aan bij dat wij ons verder willen inzetten voor het organiseren en valideren van *Lesson Studies* en waar mogelijk ook voor verdere integratie van wiskunde en rekenen onderwijzen door probleemoplossen.

Meer informatie over het IMPULS Immersion Programma is te vinden op <http://www.impuls-tgu.org/en/news/page-132.html>.

Noten

- [1] Takahashi, A., Lewis, C., Perry, R. (2013). A US lesson study network to spread teaching through problem solving. *International Journal of Lesson and Learning Studies*, 2, 237-255.
- [2] Takahashi, A. (2014) The Role of the Knowledgeable Other in Lesson Study: Examining the Final Comments of Experienced Lesson Study Practitioners. *Mathematics Teacher Education and Development*, 16(1), 4-21.
- [3] Vries, S. de, Verhoef, N., & Goei, S. L. (2016). *Lesson Study: een praktische gids voor het onderwijs*. Antwerpen/Apeldoorn: Garant Publishers.
- [4] Vries, S. de, Roorda, G., & Veen, K. van (2017). *Lesson Study: Effectief en bruikbaar in het Nederlandse onderwijs?* Retrieved October, 26, 2017, van www.nro.nl/kb/405-15-726.
- [5] Goei, S.L., Verhoef, N., Coenders, F., Vries, S. de & Vugt, F. van (2015). Een Lesson Study team als een professionele leergemeenschap. *Tijdschrift voor Lerarenopleiders*, 36(4), 83-90.

Over de auteurs

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde bij de lerarenopleiding van de RUG en de NHL en betrokken bij Lesson Study projecten. E-mailadres: g.roorda@rug.nl

Sui Lin Goei is lector Onderwijsbehoefte Inclusieve en Betekenisvolle Leeromgevingen bij de Hogeschool Windesheim en universitair docent bij LEARN! Research Institute van de VU waar zij programmaleider Lesson Study onderzoek is. E-mailadres: sl.goei@windesheim.nl

Wiskundige geschiedenis in ere hersteld

In het Oekraïense Lviv (vroeger Lemberg of Lwów) heeft onlangs een nieuw etablissement, Szkocka Restaurant & Bar, zijn deuren geopend. Hiermee is een stukje wiskundige geschiedenis in ere hersteld. In de jaren '30 van de vorige eeuw was Szkocka bekend als het Schotse Café. Bekende wiskundigen uit die tijd, zoals Banach en Ulam, bespraken onder het genot van een kop koffie of een borrel tal van zaken, natuurlijk ook wiskunde. De wiskundigen schreven dan vaak direct met houtskool op de marmeren tafels. Om te voorkomen dat alle aantekeningen verloren zouden gaan, werden problemen en oplossingen genoteerd in een groot notitieboek, dat nu bekend staat als het Schotse Boek. De collectie vraagstukken geeft een goed beeld van de interesse en werkwijze van de wiskundigen en bevat naast veel functionaalanalyse (waar de Poolse wiskundigen van de jaren '30 naam mee maakten) vragen uit tal van gebieden van de wiskunde, zoals verzamelingenleer, topologie, groepentheorie, maattheorie en kansrekening. Veel van de 193 problemen zijn intussen opgelost, maar nog altijd zijn er enkele niet opgelost. In 1981 verscheen onder redactie van Dan Mauldin (University of North Texas) een Engelstalige uitgave van het Schotse Boek. In 2015 verscheen een herziene versie.

Bron: NRC 22 september 2017, zie ook https://www.nrc.nl/nieuws/2017/09/22/lekker-aan-raadsels-werken-in-de-kroeg-13133886-a1574501?utm_source=NRC&utm_medium=related&utm_campaign=related2



vakbladeuclides.nl/934wisenwaarachtig

Zie op de site het artikel 'Wiskundeorgieën in een Schots café'. *Nieuwe Wiskrant*, juni 2010



Zwaktes in alarmerend onderzoek naar insecten

Drie kwart van de vliegende insecten is verdwenen, kopten de media eind oktober. Maar de conclusie dat er een insectenarmageddon aan de gang is, berust op

statistisch drijfzand. Het Duits-Nederlandse onderzoek in het vakblad *Plos One*, waaruit zou blijken dat drie kwart van de zogeheten 'vliegende biomassa' sinds 1989 verdwenen is, zorgde eind oktober voor alarmerende berichten in kranten, tijdschriften en op websites. De Britse *The Guardian* sprak van een 'ecologisch armageddon' dat al het leven op aarde bedreigt. Het NERN (*Netherlands Ecological Research Network*) luidt de noodklok en belegt op 21 november een bijeenkomst met landbouw- en natuurorganisaties. Zelfs de Tweede Kamer gaat hoorzittingen organiseren over insecten-beschermende maatregelen.

Waar zoveel verschillende partijen het roerend eens zijn, is geen twijfel meer mogelijk, zou je denken. Maar deskundigen uiten wel degelijk harde kritiek op het onderzoek. Om een algemene trend in de tijd te monitoren, hadden de wetenschappers op een flink aantal locaties, verspreid over Duitsland, elk jaar de vliegende biomassa moeten meten. Maar dat is nergens gedaan. In plaats daarvan is op een groot aantal plekken maar één keer gemeten, en op sommige locaties twee of drie keer, in 27 jaar tijd. Zo zijn geen harde conclusies over een algemene trend te trekken.

En dit is slechts het meest in het oog lopende manco van het onderzoek. De Wageningse entomoloog Kees Booij: 'De suggestie dat er een monitoringsproef is opgezet klopt dus van geen kant. Er is nog meer dat niet deugt, maar dat gaat schuil onder een laag statistiek die de zwakheden verdoezelt.'

De auteurs hebben bij hun publicatie op *Plos One* inhoudelijk gereageerd op de kritieken op hun onderzoek. Deze reactie en meer over de kritiek van deskundigen is te vinden in ondergenoemde bron.

Bron: <https://www.nemokennislink.nl/publicaties/ernstige-zwakheden-in-alarmerend-onderzoek-naar-vliegende-insecten/>

Profielwerkstukprijs 2017-2018

Pythagoras organiseert dit jaar voor de derde keer een profielwerkstukwedstijd op het gebied van wiskunde. Woensdag 4 april zal de finale van de Pythagoras Profielwerkstuk Wedstrijd plaatsvinden in Veldhoven. Er kan worden ingezonden tot zondag 11 maart 23:59 uur. Door inzending geeft de leerling *Pythagoras* het recht om het profielwerkstuk op de website te publiceren.

Pythagoras doet dit natuurlijk uit enthousiasme, maar ook omdat er veel meer zeer goede profielwerkstukken worden ingestuurd dan er de finale bereiken. De jury zal bestaan uit vijf researchwiskundigen.

Bron: <http://www.pyth.eu/>

Menselijke rationaliteit moeilijk te kraken

Een van de theorieën over menselijke rationaliteit, de *adaptive toolbox theory*, blijkt net als andere rationaliteitstheorieën, zoals het handelsreizigersprobleem en de Rubik's Cube, toch een NP-moeilijk probleem in zich te bergen. Dat bewijzen cognitiewetenschappers van de Radboud Universiteit.

NP is de afkorting voor niet-deterministisch polynomiaal: de benodigde rekentijd om een NP-moeilijk probleem op te lossen, groeit exponentieel naarmate het probleem groter in omvang wordt. Bij het handelsreizigersprobleem is dat het aantal steden en bij een Rubik's Cube het aantal vlakken per zijvlak. Deze twee klassieke theorieën van rationaliteit, gebaseerd op logica of kanstheorie, zijn berucht om het feit dat zij zulke demonische rekenkracht veronderstellen.

De *adaptive toolbox theory* stelt dat rationaliteit te definiëren is door de mate waarin mensen hun beslissingsstrategieën aanpassen aan de situatie. Wanneer dat aanpassen leidt tot een 'goede' beslissing, spreken de cognitiewetenschappers van ecologische rationaliteit. Tot nu toe ging men ervan uit dat de *adaptive toolbox theory* geen NP-moeilijk probleem in zich droeg. Een voordeel, want daardoor was deze theorie makkelijker schaalbaar naar de echte wereld. Radboud-onderzoekers Maria Otworowska, Iris van Rooij en hun collega's presenteren nu dus wiskundig bewijs dat ecologische rationaliteit ook een NP-moeilijk probleem in zich bergt, namelijk in het aanpassingsproces zelf. Hun bevindingen staan in het vaktijdschrift *Cognitive Science*.

'Ik verwacht dat het in het veld nogal wat stof gaat doen opwaaien', aldus Iris van Rooij. 'Er zijn grofweg drie groepen rationaliteits-theoretici: de logici, de probabilisten en de heuristici. Die laatste groep dacht dat ze al "gewonnen" hadden, maar door onze vinding zijn ze als het ware hun voorsprong kwijt. Het is nu weer een open vraag welke theorie over rationaliteit de beste is. We moeten aan de bak!'

De vinding heeft volgens haar verregaande gevolgen, niet alleen voor discussies over vragen als 'zijn mensen rationeel of irrationeel' en 'is rationaliteit wel een haalbare norm', maar ook omdat het nieuwe onderzoekslijnen opent naar hoe omgeving en brein co-evolueren. Het artikel biedt handvatten om onderzoek naar rationaliteit in de echte, complexe wereld, en niet alleen in de kunstmatige omgeving van experimenten in het lab, vooruit te helpen.

Bron: <http://www.ru.nl/nieuws-agenda/nieuws/vm/donders/cognitive-neuroscience/2017/theorie-rationaliteit-wiskundig-probleem/>

KLEINTJE DIDACTIEK

MEER OF MINDER DAN – Lonneke Boels TAAL BIJ WISKUNDE

Voor verschillende wiskundige onderwerpen moeten leerlingen het verschil in betekenis kennen tussen *meer dan*, *minder dan*, *minstens*, *hoogstens*, enzovoorts. Dit komt bijvoorbeeld voor bij kansrekening bij het omzetten van een context naar een ongelijkheid en het oplossen van die ongelijkheid. Ook weten leerlingen niet altijd het verschil tussen een $<$ en een $\leq$ teken. Ik verbind dit als volgt aan elkaar door – afhankelijk van het onderwerp – een deel van onderstaande rijtjes op het bord te laten verschijnen. Dat wordt uiteindelijk een aantekening, maar dat gaat in samenspel met de klas waarbij ik vraag naar welke woorden er zijn (bijvoorbeeld opzoeken in het hoofdstuk) en de klas bovendien moet aangeven welk woord waar hoort.

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$	$2 < x < 8$
- minder dan	- hoogstens	- meer dan	- minstens	-tussen
- kleiner dan	- maximaal	- groter dan	- minimaal	
- tot	- tot en met	- vanaf	- ten minste	
	- ten hoogste		- op z'n minst	

Aanvullingen op deze rijtjes zijn welkom.

MEDEDELING

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade is in volle gang. Verspreid over heel Nederland laten ruim driehonderd scholen hun leerlingen meedoen aan deze wedstrijd met verrassende en uitdagende wiskunde-opgaven, waar nauwelijks voorkennis voor vereist is. De opgaven en uitwerkingen van de eerste ronde verschijnen begin februari op de website www.wiskunde-olympiade.nl. Uiterlijk 12 februari wordt bekend welke duizend leerlingen verder mogen naar de tweede ronde. Daarnaast maken we rond die tijd ook de vier winnende scholen bekend: de beste school overall, de school met de beste onderbouwleerlingen, de school met de beste vrouwelijke deelnemers en de beste nieuwe school (die sinds hooguit drie jaar meedoet). Wie weet valt jouw school dit jaar in de prijzen!

HOE MAKEN WE DE NEDERLANDSE PORTEMONNEE LICHTER?

Sebastiaan Breedveld

De vraag uit de titel komt van de jaarlijkse WiscWedstrijd^[1] georganiseerd door Hans Wisbrun, makelaar in wiskunde. Eenvoudige antwoorden, zoals alles elektronisch betalen, waren niet toegestaan. Dit jaar won Sebastiaan Breedveld de wedstrijd. Voor de wiskundige uitdaging heeft hij zich beperkt tot muntgeld. Hiermee heeft menig een haat-liefdeverhouding: fijn om dat terug te krijgen, maar oh jee, hoe krijg je zo'n berg munten in je portemonnee?

Inleiding

Om tot een antwoord te komen behandel ik de volgende drie stappen:

- 1) Wat is een reëel uitgavepatroon?
- 2) Helpt een ander muntstelsel?
- 3) Wat kun je zelf doen?

We kunnen ons beperken tot bedragen onder de € 5,00 omdat de rest in biljetten kan. Munten van 1 en 2 cent doen wel gewoon mee. We moeten dus elk bedrag van 1 – 499 cent kunnen maken. Het fysieke gewicht van de munten laat ik voor het gemak buiten beschouwing.

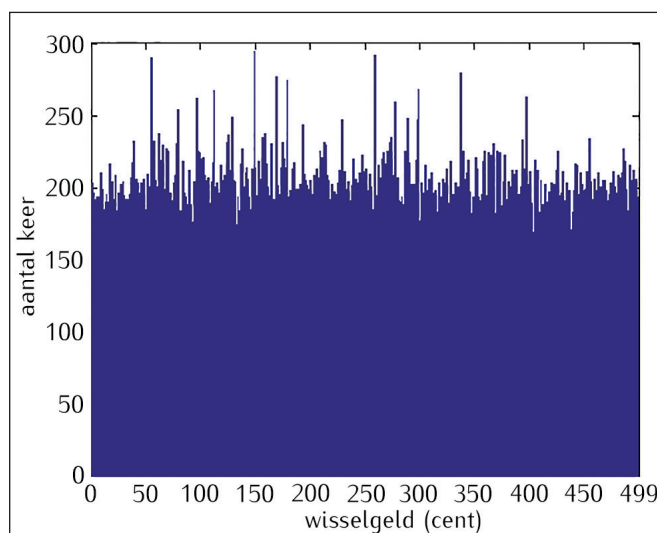
Simulatie

De eerste vraag die ik had is: veel artikelen zijn geprijsd à la € 4,98, moeten we daar rekening mee houden? Om dit te onderzoeken heb ik mijn wekelijkse supermarktbon erbij gepakt. Daarop stonden die week 87 producten voor € 220,71 (voor een heel gezin). Bij dit bedrag moet ik dus 71 cent als muntgeld bijleggen, of € 4,29 (429 cent) aan wisselgeld terugkrijgen. We zullen ook zien of dit onderscheid tussen *muntgeld bijleggen* en *wisselgeld terugkrijgen* nodig is.

Mijn vraag is nu welke verdeling het wisselgeld heeft in de praktijk. Voor enige statistische relevantie zou je honderden supermarktbonnen moeten verzamelen. Ik heb gekozen voor een andere aanpak, namelijk een simulatie. Ik ga 100.000 keer winkelen, en koop daarbij elke keer at random 1 tot 50 producten die op mijn supermarktbon staan: deze bon bevat namelijk 87 realistische bedragen. Dit is een techniek die bekend staat als *bootstrapping*^[2] bereikt door *Monte-Carlosimulatie*^[3]: uit weinig data veel data maken.

Als ik voor elke simulatie bijhoud hoeveel wisselgeld ik krijg, krijg ik de verdeling van figuur 1.

Deze verdeling laat zien dat elk bedrag tussen de 0 – 499 cent ongeveer even vaak voorkomt, zo'n 200



figuur 1 Verdeling van het wisselgeld

keer. Dit komt overeen met de verwachting: 100.000 keer (boodschappen doen) delen door 500 geeft aan dat elk wisselgeldbedrag ongeveer 200 keer voorkomt. Dit maakt het geheel eenvoudig: de verdeling is uniform, dus elk bedrag tussen de 0 – 499 cent is even belangrijk. Ik hoef dus geen onderscheid te maken tussen muntgeld bijleggen en wisselgeld terugkrijgen.

Muntstelsel

Het muntstelsel van de euro bestaat uit acht munten: 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 en 200 cent. Hoewel de keuze voor deze verdeling voornamelijk van praktische aard is (rekent makkelijker dan munten van bijvoorbeeld 8, 37 en 194 cent), is het een interessante vraag of er een muntstelsel te bedenken is dat tot minder wisselgeld leidt.^[4] Ik wil dus weten: als ik 499 producten koop, geprijsd van 1 – 499 cent, wat krijg ik dan gemiddeld aan munten als wisselgeld? Merk op dat ik dit kan doen, omdat wisselgeld bij benadering uniform is verdeeld, zie hiervoor.

Ik ga er daarbij vanuit dat er zo *slim mogelijk* wordt gewisseld. Dus 6 cent neerleggen als $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ cent is niet slim, want dan heb je zes munten nodig. $5 + 1$ cent betekent het minste aantal munten, namelijk twee. Het probleem van zo slim mogelijk wisselen heet het

'EEN LICHTERE PORTEMONNEE HEB JE DUS IN EIGEN HAND!'

change-making problem ^[5] (wisselgeldprobleem).

De eenvoudigste manier is de greedy methode: je trekt stapsgewijs de hoogst mogelijke muntwaarde van het wisselgeldbedrag af, ofwel exact zoals de winkelier doorgaans het wisselgeld uittelt. Bij 6 cent is dat dus eerst 5 cent (rest 1), en vervolgens 1 cent (rest 0). Deze methode is erg eenvoudig, en werkt bij de euro-, pond-, dollar- en (oude) gulden muntstelsels. Muntstelsels worden namelijk zodanig ontworpen dat de greedy methode werkt, om het wisselen bij de kassa eenvoudig te houden. Bij algemene (kunstmatige) muntstelsels werkt de greedy methode niet altijd: stel, je muntstelsel bevat munten van 1, 3 en 4 cent, en je moet 6 cent maken. De greedy methode maakt hier $4 + 1 + 1$ cent van, ofwel drie munten. Met $3 + 3$ cent kun je het met twee munten maken.

Voor het oplossen van het wisselgeldprobleem voor algemene muntstelsels gebruiken we dynamisch programmeren. Bij dynamisch programmeren breek je een complex probleem op in kleinere stukken, en je bewaart het resultaat hiervan. In een volgende iteratie wordt dan alleen het resultaat gebruikt in plaats van de berekening opnieuw te doen. Voor het wisselgeldprobleem is het idee als volgt: op den duur heb je berekend wat de optimale manier is om bijvoorbeeld 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 cent te wisselen.

Als je in een volgende stap 8 cent moet wisselen, dan ga je alle mogelijkheden af, beginnend bij $1 + 7$ cent. De optimale oplossing voor 7 cent weet je al, dus die berekening hoeft je niet nogmaals te doen. De volgende stap is: kijken hoeveel munten er nodig zijn voor $2 + 6$ cent, waarbij de antwoorden om optimaal zowel 2 als 6 cent te wisselen ook al eerder berekend zijn. Deze methode beperkt het rekenwerk aanzienlijk. Voor wie dynamisch programmeren zelf wil verkennen: de Fibonaccireeks ^[6] is een leuk instaprobleem.

Handigste muntstelsel

Terug naar de vraag: bestaat er een ander muntstelsel dat tot minder wisselgeld leidt? En kunnen we die vinden? We kunnen nu het wisselgeldprobleem dankzij dynamisch programmeren efficiënt oplossen: we tellen, gegeven een muntstelsel, het gemiddeld aantal munten aan wisselgeld voor alle bedragen tussen 1 – 499 cent. Voor de euro komen we dan op gemiddeld 4,6 munten. Dat is overigens een munt minder dan we vroeger met de gulden hadden: daar was het gemiddelde 5,8 munten. Die twee extra euromunten hebben dus een duidelijk voordeel. De twee extremen zijn het eenvoudigst: bij een

muntstelsel met slechts één munt (van 1 cent), hebben we gemiddeld 250 munten aan wisselgeld: 499 cent maken betekent dan namelijk ook 499 munten.

Het andere extremum, namelijk een muntstelsel van 499 verschillende munten, geeft een gemiddelde van één munt wissel-

geld. Alleen zul je hierbij eisen moeten stellen aan het formaat van de kassalade, die 499 verschillende munten moet gaan huisvesten.

Combinatoriek

Het aantal unieke mogelijkheden bepalen om een bepaald muntstelsel te maken is een combinatorisch probleem. Voor een muntstelsel van twee munten zijn er 498 varianten beschikbaar: 1 cent (die includeren we standaard om elke variant oplosbaar te houden), en daarnaast een munt van een andere waarde. Voor drie munten kom je uit op: 123 753. Dat zit zo: het aantal combinaties van twee niet-dezelfde munten (herinner: de 1 cent staat vast) is 498×497 , waaronder dubbele: een stelsel van 1, 2 en 3 cent is hetzelfde van 1, 3 en 2 cent. We moeten deze uitkomst dus delen door 2.

Met binominaalcoëfficiënten kun je het aantal unieke combinaties uitrekenen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ voor } 0 \leq k \leq n.$$

In ons geval is $n = 498$, en k staat voor het aantal munten in het stelsel, naast die van 1 cent.

Het aantal unieke combinaties loopt hard op, zie tabel 1:

Aantal munten ($k + 1$)	Aantal combinaties
1	1
2	498
3	123 753
4	20 460 496
5	2 531 986 380
6	250 160 254 344
7	20 554 834 231 932
8	1 444 711 206 015 792

tabel 1 Overzicht van het aantal mogelijke varianten voor een muntstelsel met een bepaald aantal munten

Een combinatorisch probleem is helaas *NP-volledig* ^[7] (Niet-Polynomiaal): de complexiteit van het probleem groeit harder dan polynomiaal met het aantal dimensies (aantal munten in het stelsel). Het probleem tot acht munten is wel net klein genoeg om op te lossen door *brute-force*, ofwel: voor elke mogelijke combinatie van munten uitrekenen wat het gemiddelde is aan wisselgeld. Ik heb beroepshalve de beschikking over een

aardig computercluster, en de vaardigheid om het wisselgeldprobleem efficiënt in C te programmeren. Het stelsel van vijf munten kostte een kleine twee uur rekentijd op een enkele computer, dat van acht munten heb ik gedistribueerd een week laten doorrekenen, waarna de kans erg klein werd dat er een nog betere oplossing zou worden gevonden. Dit is verdedigbaar: op basis van de resultaten van de muntstelsels tot en met zeven munten is een patroon te zien in maxima voor de muntwaarden – het lijkt er dus op dat we niet uitputtend alle combinaties af hoeven te zoeken. De resultaten zijn in tabel 2 te vinden.

Als we kijken naar het stelsel van acht munten, dan zouden we dus gemiddeld *nog géén hele munt* (van 4,6 naar 3,8) winnen door over te gaan op een ingewikkeld muntstelsel.

Betaalgewoonten

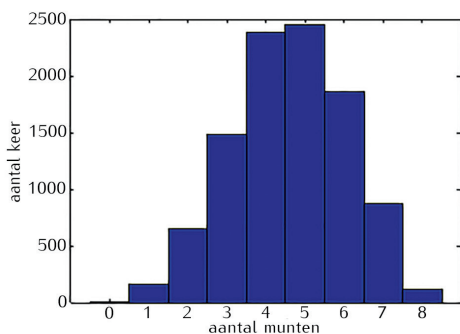
Een ander muntstelsel geeft dus geen echte oplossing. Wat we wél geleerd hebben is dat we doorgaans tussen de vier en vijf munten aan wisselgeld in onze portemonnee zouden moeten hebben. De ervaring leert echter dat dit

niet zo is. De oorzaak hiervan ligt aan onze gewoonte om 'lui' te betalen. We geven liever groot geld aan de winkelier in plaats van zelf alle muntjes passend bij elkaar te zoeken. Als we nu eens al het muntgeld dat zich in onze portemonnee bevindt aan de winkelier zouden geven, en de winkelier vervolgens het wisselgeld met zo min mogelijk munten teruggeeft? Ook dit kunnen we door middel van een Monte-Carlosimulatie simuleren. Om dit te doen moet je een virtuele portemonnee bijhouden: bij elk uitgavebedrag, *at random* gekozen uit de uniforme verdeling 1 – 499, geef je de gehele inhoud van de virtuele portemonnee (eventueel plus een biljet van 500 centen) aan de virtuele winkelier en berekent het wisselgeld, en in hoeveel munten dat het beste gegeven kan worden. Als ik dat 10.000 keer herhaal, kom ik tot de volgende verdeling munten over al die keren, zie figuur 2.

Ik heb dus, zoals verwacht, het vaakst tussen de vier en vijf munten, een enkele keer acht munten, en ik kan bijna nooit gepast betalen (nul munten). Het gemiddelde van deze verdeling is overigens 4,6 munten, wat exact overeenkomt met de analyse van de vorige paragraaf.

Aantal munten in stelsel	Wissel-totaal	Gemiddeld aantal munten	Verschillende muntwaarden							
1	124750	250,0	1							
2	10636	21,3	1	22						
			1	23						
3	4979	10,0	1	14	61					
4	3402	6,8	1	7	57	80				
5	2720	5,5	1	6	20	85	121			
6	2335	4,7	1	6	14	62	99	140		
			1	8	13	69	110	160		
7	2088	4,2	1	4	15	36	95	147	156	
			1	4	17	28	91	133	156	
			1	8	13	35	86	117	162	
			1	8	13	41	92	129	160	
8	1907	3,8	1	5	18	25	71	110	155	158
Euro	2300	4,6	1	2	5	10	20	50	100	200
Gulden	2900	5,8	1	5	10	25	100	250		

tabel 2 Voor elk stelsel van een bepaald aantal munten is weergegeven wat de muntverdeling is met de minste hoeveelheid aan wisselgeld



figuur 2 Frequentie van het aantal munten in de portemonnee na het volgen van de verbeterde betaalgewoonte

Conclusie

Het mooie van toegepaste wiskunde zit hem in de interactie tussen theorie en praktijk. Beginnend met een boodschappenbon hebben we kunnen aannemen dat het uitgavepatroon uniform verdeeld is. Door vervolgens het wisselgeldprobleem te analyseren, leerden we dat het aantal munten als wisselgeld gemiddeld tussen de vier en vijf zou moeten liggen, en een ingewikkeld muntstelsel nauwelijks beter is. Dit strookt niet met de observatie uit de praktijk, waarbij men doorgaans meer munten in bezit heeft. Er is dus iets anders aan de hand: in dit geval menselijk gedrag. Het voorstel om alle munten aan de winkelier te geven, hebben we kunnen narekenen, en kwam overeen met het eerder berekende minimale gemiddelde aan wisselgeld. Een lichtere portemonnee heb je dus in eigen hand!

Met dank aan Hans Wisbrun.

Wie zelf verder wil experimenteren kan de brochure vinden op: <http://sebastiaanbreedveld.nl/other/wisselen/>

Noten

- [1] <http://hanswisbrun.nl/2017/04/18/winnaar-wiswedstrijd-2017-sebastiaan-breedveld/>
- [2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Bootstrapping_\(statistics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Bootstrapping_(statistics))
- [3] <https://nl.wikipedia.org/wiki/Monte-Carlosimulatie>
- [4] <http://chalkdustmagazine.com/blog/forget-a-new-1-pound-coin-we-need-a-1-pound-23-coin/>
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Change-making_problem
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming#Fibonacci_sequence
- [7] <https://nl.wikipedia.org/wiki/NP-volledig>

Over de auteur

Sebastiaan Breedveld studeerde Technische Wiskunde aan de Technische Universiteit Delft, en is nu Assistant Professor aan het Erasmus Universitair Medisch Centrum in Rotterdam. Daar doet hij onderzoek naar het verbeteren van bestralingstherapie voor kankerpatiënten.

DIGITALE CENTRALE EXAMENS WISKUNDE VMBO

Melanie Steentjes
Paul van der Molen
Marjolein Nieuwenhuizen

Er gebeurt veel op het gebied van de digitale centrale examens. In dit artikel worden drie recente ontwikkelingen nader toegelicht, namelijk de oefensite, groepsrapportages en het besloten en beveiligde forum.

Digitale centrale examens op de oefensite

Sinds afgelopen examenjaar wordt twee derde deel van de vragen die zijn afgenomen bij de digitale centrale examens van vmbo-bb en kb openbaar gemaakt. Op de website oefenen.facet.onl (openen in Chrome of Firefox, in Explorer werkt het niet) worden deze vragen gepubliceerd. Op deze website is nog veel meer te vinden. Bijvoorbeeld ook voorbeeldtoetsen van de centrale eindtoets, de rekentoets, minitoetsen voor de beroepsgerichte vakken en ook de rekenexamens voor mbo. Het is wellicht ook eens leuk om een examen van een ander vak te bekijken!

Doel

De oefensite is er voor twee doeleinden. Enerzijds worden op de oefensite de vragen openbaar gemaakt. Door de oefensite kan iedereen de vragen bekijken, ook mensen die niet op een school werkzaam zijn en dus geen toegang hebben tot Facet (de afnameomgeving). Anderzijds is de oefensite er, zoals de naam al zegt, om te oefenen. Leerlingen kunnen oefenen met digitale centrale examens en de applicaties die we in de digitale examens gebruiken.

Wat staat er op de oefensite?

Als we kijken wat er voor wiskunde wat betreft de digitale centrale examens op deze site staat, zien we examenvarianten, opgavensets en oefenopgaven (het is handig om te zoeken op 'wiskunde', anders is het een erg onoverzichtelijke lijst). De examenvarianten zijn in principe het afgelopen jaar afgenomen. 'In principe', omdat er wel wijzigingen in de vragen zijn aangebracht. Zo werken we bij kb komend jaar met een nieuwe, in Facet geïntegreerde, toolbox.

Ook is de diagramtool aangepast. Met behulp van de diagramtool kan een leerling punten in een assenstelsel zetten en een grafiek tekenen. Omdat we willen dat de leerlingen met de juiste applicaties oefenen, zijn deze zaken dus aangepast. Bij bb gaan de leerlingen dit jaar voor het eerst, na een succesvolle pilot van vorig jaar, met een (vereenvoudigde) toolbox werken. Veel vragen bij bb op de oefensite maken nu gebruik van deze toolbox zodat de leerlingen er mee kunnen oefenen en er zo gewend aan raken. Van de examens uit 2017 staan er op de oefensite voor bb twee examenvarianten en een opgavenset en voor kb één examenvariant en een opgavenset. Bij beide examens is twee derde deel van de vragen openbaar gemaakt. Daarnaast staat er het volgende op voor zowel bb als kb:

- 2015 variant h1 voorbeeld
- oefenopgaven toolbox
- oefenopgaven

Schaatsen

In totaal zijn er bij deze wedstrijd 73 vrouwen gestart. Niet iedereen rijdt de wedstrijd uit.



De wedstrijd is door 41 vrouwen uitgereden.

Bereken hoeveel procent van de vrouwen de wedstrijd heeft uitgereden. Typ je berekening in.

vrouwen	73	1	41
procent	100		56,16438356

Dus 56%

Rekenmachine

100 ÷ 73 × 41 = 56,16438356

figuur 1 Examen wiskunde bb 2017

Uiterlijk in januari 2018 volgt voor bb nog een voorbeeldexamen uit 2013 en voor kb uit 2014. We zullen op de sets oefenopgaven nader ingaan.

Oefenopgaven toolbox

De toolbox is ontwikkeld om leerlingen in staat te stellen om op een intuïtieve manier hun denkwijze en berekeningen in het antwoordveld in te voeren. In figuur 1 is een voorbeeld te zien uit examenvariant 1, 2017 van bb. De leerling kan een tabel maken en daar zijn gegevens

Hamsterkooi

Nico maakt voor zijn hamster een loopwiel zoals op de afbeelding. De diameter van het loopwiel is 30 cm.



Bereken hoeveel cm² de oppervlakte van de achterwand van het loopwiel is. Je hoeft geen rekening te houden met de dikte van de houten latjes. Typ je berekening in.

oppervlakte cirkel = $\pi \times \text{straal}^2$

straal = 30 : 2 = 15

$\pi \times 15^2 = 706,8583471$

Dus 707 cm²

Rekenmachine

$\pi \times 15^2 = 706,8583471$

figuur 2 Examen wiskunde kb 2017

in zetten. De leerling kan de berekening uitvoeren en het antwoord vervolgens opslaan in de tabel. Een belangrijk verschil met de examens in eerdere jaren is, dat er, zoals bij sommige vragen gebruikelijk was, geen lege verhoudingstabellen meer worden gegeven. De leerling kan zo'n tabel nu desgewenst zelf maken in de toolbox.

In figuur 2 is een voorbeeld te zien uit de examenvariant van 2017 van kb. De leerling kan in het formuleblad de formule voor de oppervlakte van een cirkel opzoeken. Als de leerling daarop klikt, wordt deze formule in het antwoordveld geplakt. De berekening kan de leerling met de rekenmachine uitvoeren en ook in het antwoordveld opslaan.

Uit verschillende tests en pilots blijkt dat leerlingen heel snel met de toolbox uit de voeten kunnen. Toch is het heel belangrijk dat de leerlingen worden voorbereid op de toolbox. In het eerste deel van de oefenopgaven toolbox worden de verschillende knoppen stuk voor stuk toegelicht en leren leerlingen ermee werken. In het laatste deel worden examenvragen gesteld die ze met behulp van de toolbox aan moeten pakken. Een goede oefening dus om de leerlingen vertrouwd te maken met de toolbox.

Oefenopgaven

In de set oefenopgaven passeren meerdere applicaties de revue. Zo kunnen leerlingen oefenen met de diagramtool, die in vergelijking met voorgaande jaren is aangepast. De belangrijkste aanpassing is dat een leerling automatisch een vloeiende kromme door de uitgezette punten kan laten tekenen. Ook kan er geoefend worden

met de liniaal en de windroos of geodriehoek. Daarnaast komen er in een examen soms vragen voor waarbij vlakken moeten worden gekleurd. Zo'n soort vraag zit ook in de oefenopgaven. De oefensite wordt elk jaar aangevuld met openbaar gemaakte varianten. Leerlingen krijgen zo dus elk jaar meer mogelijkheden om te oefenen. Daarnaast hopen we ook dat mensen die niet direct met de digitale centrale examens te maken hebben een beter beeld krijgen van wat digitale examinering bij wiskunde inhoudt.

Groepsrapportages digitale centrale examens

Veel docenten kennen het begrip groepsrapportage: een kort rapport waarin ze kunnen zien hoe de leerlingen van hun klas of groep gepresteerd hebben ten opzichte van het landelijk gemiddelde. In het rapport staat naast een overall beeld ook hoe de groep het deed op onderdelen van het CE. Deze groepsrapportage bestaat al ruim tien jaar voor de papieren centrale examens. Voor de digitale centrale examens bestond dit niet. Maar daar komt verandering in.

Waarom heeft dit zo lang geduurd?

Om deze vraag te beantwoorden moeten we eerst inzoomen op de manier waarop het rapport wordt gemaakt. Bij de papieren centrale examens gebruiken de docenten het programma Wolf om de scores van hun leerlingen aan Cito door te geven. Cito analyseert de gegevens en geeft een technisch normeringsadvies aan het CvTE. De gegevens in Wolf vormen een schat aan informatie. 'Daar moet Cito meer mee doen', klonk het vanuit de docenten. De docent ontvangt nu een terugkoppeling per mail. Daarbij heeft Cito de scholen beloofd dat ze de e-mailadressen, die de scholen in Wolf hebben doorgegeven, alleen gebruikt voor het terugsturen van de groepsrapportage en de uitgebreide vragenlijst. De cirkel is daarmee rond. Bij de digitale centrale examens gaat het proces iets anders. Ten eerste maken de leerlingen in een klas of groep niet allemaal dezelfde variant. Ten tweede komen de data naar Cito niet via Wolf maar via Facet. Om privacy redenen is de naam van de corrector omgezet in een nummer en dus kent Cito de naam en het mailadres van de corrector niet waar het rapport naartoe moet. Docenten zeiden tegen Cito: 'Tom Poes, verzin een list.' En dat heeft 'even' geduurd.

Hoe ziet het rapport er nu uit?

In 2016 heeft Cito een eerste proefrapportage verstuurd voor het vak wiskunde. Een klankbordgroep van docenten wiskunde en enkele examensecretarissen hebben daarbij geholpen. Dit jaar doen zeven vakken mee en het is de bedoeling dat DUO de rapportage naar de docenten stuurt. DUO maakt daarbij achter de schermen een link met het e-mailadres van de docent in Facet. Ten tijd van

het schrijven van dit artikel wordt er nog hard gewerkt om dit voor elkaar te krijgen. In figuur 3 is te zien hoe de conceptrapportage er nu uitziet. Zie voor meer achtergrondinformatie de Cito website en de site van *Euclides*.



figuur 3 Voorbeeld van een rapportage

En hoe gaat het nu verder?

In de 2017-rapporten staan alle leerlingen van één corrector nog bij elkaar in één rapport. De klankbordgroep gaf aan een rapportage per klas te willen hebben. Het zou mooi zijn als in 2018 de persoon die de examens inplant (vaak de examensecretaris) het veld 'Wolf-groep' kan gebruiken om de groepen nader aan te duiden. Cito gaat daarmee aan de slag, net als met het tijdstip van het versturen van de rapportages. De rapportages 2017 worden rond kerst verstuurd. Dat zou in 2018 eerder moeten kunnen omdat het vervaardigen van de rapporten dan verregaand is geautomatiseerd. Het zou mooi zijn als docenten met hun eigen Facet-inlog hun eigen rapportage op kunnen halen. Daar gaan we voor, maar het kost nog wel enige tijd om dat te bouwen. Tot die tijd blijft Cito werken aan de verbetering van de rapportage en aan de levering ervan. Examensecretarissen ontvangen hierover dit voorjaar een mailing via *Examenblad.nl*.

Discussieforum voor het digitale centrale examen wiskunde kb

Bij de papieren centrale examens kunnen docenten vrijelijk discussiëren over de opgaven, het correctievoorschrift en de antwoorden van leerlingen. Bij de digitale examens ligt dit anders, omdat de opgaven daarvan niet direct na de afname openbaar zijn.^[1] Het CvTE ziet de meerwaarde van collegiale discussies en wil daarom docenten de gelegenheid bieden om al tijdens de afnameperiode met collega-examinatoren te discussiëren over opgaven die nog onder de geheimhouding vallen. Hiervoor zal een discussieforum ingericht worden, om te beginnen met wiskunde kb.

Besloten en beveiligd forum (bbf)

Het discussie-bbf wiskunde kb is een beveiligde website voor het digitale examen wiskunde kb. Uitgangspunten hierbij zijn:

- Op het discussie-bbf kunnen docenten zowel tijdens de afnameperiode als na de normering vrijelijk discussiëren over opgaven uit de digitale examens kb, een leerling-antwoord, de moeilijkheidsgraad of de lengte van een variant of een reactie van de Examenlijn van het CvTE.
- Een docent met een examenklas krijgt pas toegang tot het forum zodra zijn eigen leerlingen zijn geëxamineerd. De directeur, die verantwoordelijk is voor de afname van het CE (of namens deze de examensecretaris), verleent de toegang aan een docent.

Het discussie-bbf maakt de Examenlijn van het CvTE niet overbodig. Wat blijft is dat de docent fouten/onvolkomenheden aan de Examenlijn kan melden, anders worden deze niet in behandeling genomen. Een docent kan het discussie-bbf wel gebruiken voor collegiale consultatie daarover. Onze verwachting is dat de meeste discussies op het besloten forum in mei plaats zullen gaan vinden. Dat is tijdig voor de normering, zodat de bevindingen meegenomen kunnen worden bij het bepalen van de N-termen.

Meer informatie

Nadere informatie over het discussie-bbf wiskunde kb zal het CvTE versturen via mailings vanuit *Examenblad.nl*. Als de examensecretaris de examiner wiskunde kb heeft geregistreerd, ontvangt de examiner deze mailings per e-mail. Updates zullen ook worden gemeld op de vakpagina wiskunde kb op *Examenblad.nl*.

Voor achtergrondinformatie over de conceptrapportage:



Noot

[1] Zie de vakpagina op Examenblad.nl: www.examenblad.nl → jaarring 2018 → vmbo KB → exacte vakken → wiskunde → brochure 'Flexibele en digitale centrale BB en KB 2018' → paragraaf 8.5 'Geheimhouding'.

Over de auteurs

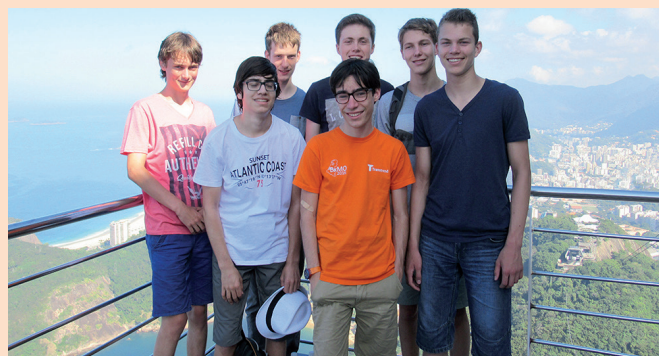
Paul van der Molen (E-mailadres: paul.vandermolen@cito.nl) en Melanie Steentjes (E-mailadres: melanie.steentjes@cito.nl) zijn beiden werkzaam bij Cito en respectievelijk manager Onderzoek en Normering en toetsdeskundige. Marjolein Nieuwenhuizen (E-mailadres: m.nieuwenhuizen@cvte.nl) is werkzaam bij CvTE als coördinator Project Leiders Examen.

VOETBALLERS SELECTEREN

OLYMPIADEOPGAVE RIO

Lammert Westerdijk

In juli 2017 vond in Rio de Janeiro, Brazilië, de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. Het Nederlands team werd hier 18^e van de 111 deelnemende landen. Lammert Westerdijk (16, toen nog 5 vwo) kreeg de kans om als extra leerling mee te gaan en wist maar liefst drie van de zes opgaven volledig op te lossen. In dit artikel neemt hij de lezer mee op zijn ontdekkingsstocht naar de oplossing van opgave 5.



figuur 1 Team NL met v.l.n.r.: Lammert Westerdijk, Gabriel Visser, Wietze Koops, Levi van de Pol, Ward van der Schoot, Nils van de Berg en Matthijs van der Poel

Mee naar Brazilië

Sinds de vierde klas neem ik met dertig andere middelbare scholieren deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade, nadat ik als derdeklasser met succes aan de eerste ronde had meegedaan. Afgelopen schooljaar was dus mijn tweede jaar in deze trainingsgroep, en nadat ik bij de Benelux Mathematical Olympiad in Namen (België) als enige van de tien Nederlandse deelnemers geen medaille had gehaald, was mijn kans om mee te gaan naar de International Mathematical Olympiad (IMO) in Brazilië vrijwel nihil; althans, dat dacht ik. Ook tijdens de drie selectietoetsen in juni had ik niet het gevoel dat het heel goed ging en ik was dan ook ontzettend verrast toen mijn naam bij de bekendmaking van het team werd genoemd. Ik had de aanmoedigingsprijs^[1] gewonnen: ik zou niet officieel meedoen aan de wedstrijd, maar aan alle andere

activiteiten, waaronder de trainingsweek in Brazilië, zou ik wel samen met de zes teamleden deelnemen. Toen ik drie weken later in het vliegtuig naar Brazilië zat, was het eigenlijk nog steeds niet helemaal tot me doorgedrongen wat ik had bereikt: ik ging naar de IMO, het hoogste niveau wiskundewedstrijd dat een middelbare scholier kan bereiken.

Na een week van veel trainen in Rio de Janeiro, begon de IMO. Naast de vele excursies was er natuurlijk ook de echte wedstrijd. Verdeeld over de twee wedstrijddagen van elk 4,5 uur hadden de deelnemers in totaal zes opgaven om op te lossen. Aangezien ik niet mee mocht doen aan de wedstrijd zelf, moest ik wachten tot de wedstrijd was afgelopen om zelf aan de opgaven te werken. Hierna bespreek ik een van de opgaven.

Opgave 5

Zij gegeven een geheel getal $N \geq 2$. Een groep van $N(N + 1)$ voetballers, allemaal van verschillende lengte, staat op een rij. De bondscoach wil $N(N - 1)$ voetballers uit deze rij verwijderen zodat een rij van $2N$ voetballers overblijft die aan de volgende N voorwaarden voldoet:

- (1) *Er staat niemand tussen de twee langste voetballers.*
- (2) *Er staat niemand tussen de op twee na langste en de op drie na langste voetballer.*
- (3) *Er staat niemand tussen de op vier na langste en de op vijf na langste voetballer.*
- $\vdots$
- (N) *Er staat niemand tussen de twee kortste voetballers.*

Bewijs dat dit altijd mogelijk is.

'Kleine gevallen'

Hoe pak je nu zo'n opgave aan? Het eerste dat alle trainingsdeelnemers leren, is het kijken naar *kleine gevallen*; hierbij probeer je de variabelen in het probleem

te vervangen door een aantal kleine getallen. Hierdoor krijg je een beter begrip van de opgave en misschien vind je een oplossing die gemakkelijk naar alle mogelijke waarden

voor diezelfde variabele is uit te breiden. In dit geval is N de enige variabele in de opgave; laten we hier een klein getal voor invullen. De opgave specificeert dat N minstens 2 moet zijn, dus laten we dat proberen.

Als we $N = 2$ invullen, bestaat de groep voetballers dus uit zes voetballers en wil de bondscoach twee spelers

verwijderen, zodat er niemand tussen de twee langste voetballers en niemand tussen de op twee na langste en de op drie na langste voetballer, oftewel de twee kortste voetballers staat. We merken echter al gauw op dat de zes voetballers op 720 manieren in een rij kunnen gaan staan. Het is ondoenlijk om al deze gevallen als *kleine gevallen* af te gaan, dus we moeten iets handigers bedenken. Pogingen om met volledige inductie of uit het ongerijmde een bewijs te leveren stranden. We zullen dus wederom iets anders moeten proberen.

Constructie

Om te bewijzen dat iets altijd mogelijk is, kan het handig zijn om een constructie te geven: een manier waarop de coach altijd $2N$ spelers kan kiezen die aan de voorwaarden voldoen. Door nog een aantal kleine gevallen uit te proberen, lijkt ook bij deze aanpak een addertje onder het gras verborgen te liggen. De constructie moet namelijk iets over de lengtes van de spelers in de selectie van de coach zeggen, maar ook iets over de posities van de spelers, want volgens de voorwaarden doen zowel de positie als de lengte van een speler ertoe. Toch blijkt dit probleem hier oplosbaar. Het cruciale idee daarbij is het opdelen van de rij van $N(N + 1)$ voetballers in N rijtjes met elk $N + 1$ spelers. Als we nu elk van de paren die genoemd worden in de voorwaarden in een van deze N rijtjes kunnen plaatsen, zodat in elk rijtje precies één paar staat, hebben we in totaal $2N$ spelers, waarvan de twee langste spelers in een ander rijtje staan dan de andere $2N - 2$ voetballers, de op twee na langste en de op drie na langste voetballer ook in een ander rijtje dan de andere $2N - 2$ voetballers, en zo door tot en met de twee kortste voetballers. Omdat al deze paren in een ander rijtje staan, kan er geen andere voetballer tussen twee spelers uit een paar staan; dan zou deze voetballer namelijk in hetzelfde rijtje staan als de twee spelers uit dit paar, in tegenspraak met het feit dat alle paren in een ander rijtje staan.

Op een idee komen

Hoe kom je nu op zo'n idee? Allereerst hebben alle trainingsdeelnemers al ontzettend veel van dit soort

opgaven gemaakt en dat helpt natuurlijk veel bij het krijgen van zo'n idee. Maar ook zonder jaren aan training kan iemand op dit idee komen; ik zal proberen uit te

leggen hoe. Als je de opgave leest, zie je al in de opgave $N(N + 1)$ staan. Dit moet je natuurlijk ergens in je bewijs gebruiken, dus het is handig om alvast na te denken hoe je dit zou kunnen gebruiken. Daarnaast zie je door veel rijtjes te proberen en door het zoeken van een constructie, dat het feit dat je iets over de positie én de lengte van

'TIJDENS DE IMO HEB IK DOOR SNEL IN TE ZIEN DAT
DINGEN NIET GINGEN WERKEN UITEINDELIJK EEN
OPLOSSING GEVONDEN.'

de spelers uit de selectie van $2N$ spelers wilt weten, voor een probleem zorgt; het zou fijn zijn als je één van deze twee dingen uit zou kunnen sluiten, zodat je bijvoorbeeld alleen nog maar iets over de lengtes van de spelers hoeft te zeggen. Als laatste impliceert de formulering van de voorwaarden eigenlijk al het kijken naar paren van spelers. Als je deze drie dingen combineert, kom je al gauw op het slimme idee om de rij voetballers op te delen in kleinere rijtjes. Het opdelen van de rij in kleinere rijtjes is een leuk idee, maar we hebben nu nog geen bewijs; we moeten nog laten zien dat we de paren voetballers, gebaseerd op hun lengte, altijd in verschillende groepen in kunnen delen. Op dit punt kan het bewijs op verschillende manieren af worden gemaakt; ik zal hier de manier laten zien die ik tijdens de IMO ook heb gebruikt.

Tegenvoorbeelden

Om een constructie te vinden, heb ik een methode gebruikt die ik tijdens de trainingsweek in Brazilië heb geleerd. Hierbij bedenkt ik een mogelijke strategie en probeer ik dan een tegenvoorbeeld voor die strategie te vinden. Op het moment dat het niet meer lukt om een tegenvoorbeeld te geven, is het goed mogelijk dat dit een juiste strategie is. Mijn eerste idee was bijvoorbeeld om de eerste twee spelers te kiezen als de langste twee spelers uit het rijtje met de langste speler. Een tegenvoorbeeld was gemakkelijk te vinden; dit ging dus niet werken. Het vinden van een tegenvoorbeeld gaf me echter wel nieuwe ideeën. Ik zag namelijk in dat de op een na langste speler uit het rijtje met de langste speler relatief gezien nogal kort kon zijn, wat voor problemen zorgde. Door steeds nieuwe dingen te proberen en tegenvoorbeelden te zoeken, lukte het mij uiteindelijk om een constructie te bedenken waarbij ik geen tegenvoorbeeld meer kon vinden.

Algemene constructie

1 3 2 4 4 3 1 2 4 2 3 1
1, 7, 3, 11, 12, 9, 2, 5, 10, 6, 8, 4

figuur 2

In figuur 2 is mijn gevonden constructie voor een rijtje voetballers met $N = 3$ te zien, waarbij de voetballers van kort (speler 1) naar lang (speler 12) genummerd zijn. Ook heb ik de voetballers in de drie rijtjes van vier, zoals die hierboven zijn gedefinieerd, van kort naar lang genummerd; dit zijn de getallen in het rood boven de 'spelers'. De onderstreepte getallen zijn de uiteindelijk gekozen spelers. De algemene constructie werkt nu als volgt:

Stap 1: Kijk naar de op één na langste spelers uit elk van de N rijtjes met $N + 1$ spelers. Kies hiervan de langste

en kies ook de langste speler uit hetzelfde rijtje. Kijk in de volgende stappen niet meer naar de spelers uit dit rijtje.

Stap 2: Kijk naar de op twee na langste spelers uit elk van de $N - 1$ rijtjes met $N + 1$ spelers waaruit nog geen spelers zijn geselecteerd. Kies hiervan de langste en kies ook de op één na langste speler uit hetzelfde rijtje. Kijk in de volgende stappen niet meer naar de spelers uit dit rijtje.

En in het algemeen:

Stap k : Kijk naar de op k na langste spelers uit elk van de $N - k + 1$ rijtjes met $N + 1$ spelers waaruit nog geen spelers zijn geselecteerd. Kies hiervan de langste en kies ook de op $k - 1$ na langste speler uit hetzelfde rijtje. Kijk in de volgende stappen niet meer naar de spelers uit dit rijtje.

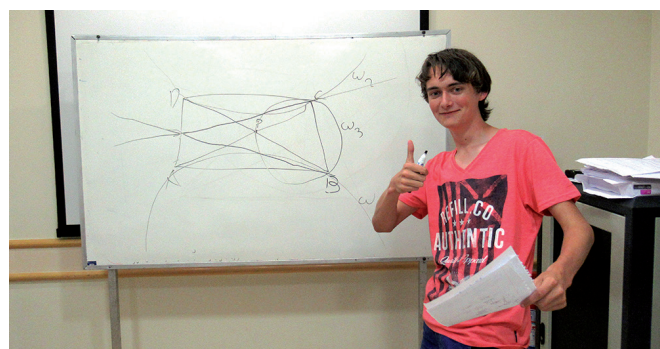
Het algoritme ziet er voor het voorbeeld in figuur 2 dus als volgt uit:

Stap 1: We kijken naar de spelers onder de rode drieën; de langste hiervan is speler 9. Ook kiezen we nu dus de speler onder de rode vier uit hetzelfde rijtje; dat is speler 12.

Stap 2: Nu kijken we naar de spelers onder de rode tweeën uit de rijtjes waarvan we nog geen spelers hebben gekozen, dus het eerste en het derde rijtje. De langste hiervan is speler 6. Ook kiezen we nu dus de speler onder de rode drie uit hetzelfde rijtje; dat is speler 8.

Stap 3: Tot slot kijken we naar de speler onder de rode een uit het eerste rijtje; we hebben namelijk al spelers uit beide andere rijtjes gekozen. Dit gaat om speler 1. Nu kiezen we ook nog de speler onder de rode twee uit hetzelfde rijtje; dat is speler 3.

We hebben nu zes spelers gekozen die aan de voorwaarden voldoen. Het is nu eigenlijk duidelijk dat deze strategie altijd gaat werken; op een wedstrijd zou je dit nog wel volledig wiskundig moeten uitwerken.



figuur 3 Lammert Westerdijk

Lastig begin

Het is bij deze opgave vrij lastig om een begin te maken: kleine gevalletjes gaan moeilijk en het is moeilijk een goede strategie te vinden. Het idee om de rij voetballers op te delen in N kleinere rijtjes blijkt de sleutel tot de oplossing te zijn; daarna is de opgave goed te doen. Het krijgen van dit idee en een goede strategie zoeken zijn de echte hindernissen van deze opgave. Tijdens de IMO heb ik door snel in te zien dat dingen niet gingen werken uiteindelijk een oplossing gevonden. Daarmee heb ik zeven (officiële) punten op deze opgave behaald. Op de andere vijf opgaven heb ik in totaal nog veertien (officiële) punten verdiend door het volledig oplossen van twee andere opgaven. Volgens de begeleiders mag ik zeer trots zijn op het kraken van drie van de zes opgaven. Verder heb ik erg veel leuke herinneringen overgehouden aan de IMO en erg veel meegemaakt. Ik ga zeker mijn best doen om er volgend jaar in Roemenië weer bij te zijn!

Noot

[1] De aanmoedigingsprijs is bestemd voor een jong aanstormend talent en wordt beschikbaar gesteld door het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Over de auteur

Lammert Westerdijk (16 jaar) neemt sinds schooljaar 2015/16 deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. Lammert zit in klas 6 vwo van het Stedelijk Gymnasium Leeuwarden.
E-mailadres: 145008@pj.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE



8: BABYLONISCHE VERGELIJKINGEN

Jeanine Daems

In de rubriek *Wortels van de Wiskunde* bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: Babylonische vergelijkingen.

De Babyloniërs

De term 'Babyloniërs' gooit eigenlijk meerdere volkeren in een lange tijd op één hoop. De bloeitijd van de wiskunde in het gebied rond de Eufraat en de Tigris (het huidige Irak en Syrië) begon rond 3000 v. Chr. en duurde een paar duizend jaar. De cultuur die daar toen heerste en de mensen die daar woonden noemen we voor het gemak allemaal 'Babylonisch', al is dat dus niet helemaal terecht. In dit artikel ga ik niet in op het Babylonische getalsysteem. Wie meer wil weten over de Babylonische wiskunde kan verder lezen in bijvoorbeeld *Wortels van de wiskunde* ^[1] en in het Zebra-boekje *Babylonische wiskunde*. ^[2] Leerlingen kunnen prima de werking van het Babylonische getalsysteem ontcijferen aan de hand van (transcripties van) kleitabletten zoals die in dit boekje te vinden zijn, als je dat goed begeleidt. Voor wie meer over de geschiedenis van vergelijkingen wil weten, is ook *Het avontuur dat algebra heet* ^[3] een aanrader.

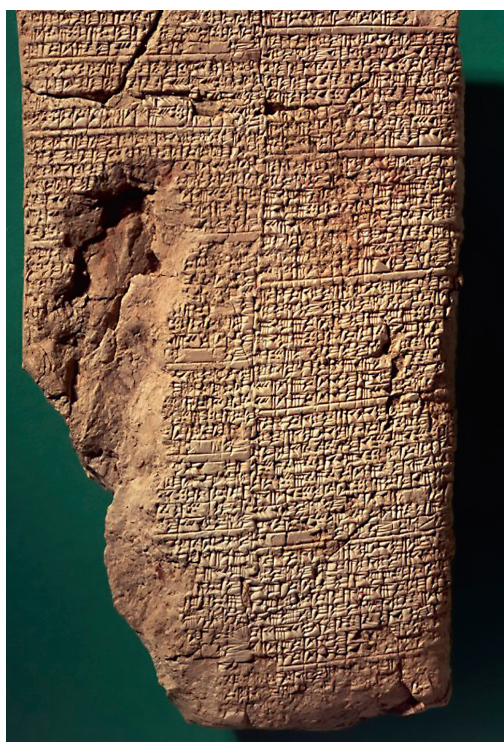
Vergelijkingen

Vergelijkingen spelen al lang een rol in de geschiedenis, en bij de Babyloniërs kwamen ze veelvuldig voor. Dat de Arabische wiskundigen rond het jaar 800 dergelijke vergelijkingen oplossen weten veel mensen wel, dat de Babyloniërs dat al veel eerder deden lijkt minder bekend te zijn.

Als je bij de introductie van kwadratische vergelijkingen bronnen wilt gebruiken, zou ik voor Al-Khwarizmi kiezen, of voor voorbeelden die daarop lijken. Maar in hogere klassen zijn juist ook de bronnen van de Babyloniërs interessant: je moet net iets meer je best doen om te zien dat het om kwadratische vergelijkingen gaat, en de problemen hebben minder mooie getallen (voor ons dan,

in het Babylonische getalstelsel komen de problemen vaak juist wel ‘mooi’ uit). Die vergelijkingen zagen er wel echt anders uit dan die van ons: de Babyloniërs, en ook de Arabische wiskundigen rond het jaar 800, hadden nog geen algebraïsche notatie om vergelijkingen in uit te drukken. Ze hadden ook geen manier om over een algemene vorm van een vergelijking, zoals onze $ax^2 + bx + c = 0$, of een algemene oplossing, zoals onze abc -formule, te praten.

Veel vergelijkingen op Babylonische kleitabletten zijn geformuleerd als meetkundige problemen met één of twee onbekenden (vaak: de zijde van een vierkant, of de lengte en breedte van een rechthoek). Ik bespreek in dit artikel drie voorbeelden die van één kleitablet afkomstig zijn: een verzameling van 24 modelproblemen die op kwadratische vergelijkingen neerkomen. Grappig detail: in het 24^e probleem worden allerlei rekenfouten gemaakt die elkaar uiteindelijk weer opheffen, om zo toch op het juiste antwoord te komen. De problemen komen namelijk vaak mooi uit en de oplossingen zijn snel te zien, en dan weet je eigenlijk vooraf al waar je op uit moet komen.



figuur 1 Dit kleitablet wordt bewaard in het British Museum in Londen en heeft nummer 13901

Probleem 1

Ik heb de oppervlakte en zijde van mijn vierkant opgeteld en dat werd 0,75. Je schrijft 1 op, de projectie. Je breekt de helft van 1 af. Je combineert 0,5 en 0,5. Je telt 0,25 op bij 0,75. 1 is het kwadraat van 1. Je haalt de 0,5 die je gecombineerd had weg vanuit de 1 zodat de vierkantszijde 0,5 is.^[4]

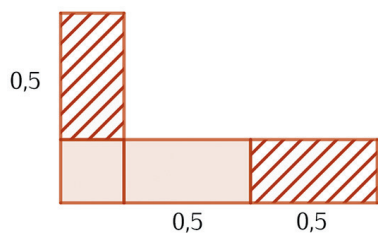
De eerste vraag die je kunt stellen is, zoals eigenlijk altijd: wat valt je op? Het lijkt of hier een probleem wordt opgelost, maar wordt er eigenlijk wel een vraag gesteld? Welke vraag dan? Hoe zou je dat in moderne wiskunde-notatie uitdrukken en oplossen? Waarom staat er eigenlijk geen plaatje bij? Want het gaat over oppervlaktes en zijden, maar we zien helemaal geen plaatje.

Dat geldt eigenlijk voor alle vergelijkingen die zijn gevonden: er staan alleen berekeningen en geen plaatjes. Dat duidt erop dat het standaardmethodes waren, en dat men misschien nog wel aan meetkundige plaatjes gedacht heeft, maar dat de rekenalgoritmes om tot een oplossing te komen daar los van waren gekomen. Maar om te snappen wat er gebeurt helpt een plaatje wel. In het probleem wordt de zijde van een vierkant gezocht. Omdat de oppervlakte van het vierkant samen met die zijde 0,75 is, weet je meteen wel dat die zijde in ieder geval kleiner dan 1 zal zijn. Wat voor plaatje kun je hierbij tekenen? De eerste vraag die opkomt, is dan: hoe tel je meetkundig nou een vierkant en een zijde bij elkaar op? Dat zijn dingen van verschillende dimensies! In de westerse wiskunde wordt dat soort termen van verschillende dimensies bij elkaar optellen pas sinds Descartes geaccepteerd. Daar kun je de leerlingen zelf over laten nadenken: hoe kun je een oppervlakte en een zijde bij elkaar optellen zodat een zinnige betekenis ontstaat? Wat de Babyloniërs doen wordt uitgedrukt met een woord dat in Katz^[5] als *projectie* vertaald is: ze maken een rechthoek met als ene zijde 1 en als andere de gezochte zijde. Die rechthoek heeft een oppervlakte van die zijde keer één. En die kan zonder problemen bij het vierkant worden opgeteld, zie figuur 2.



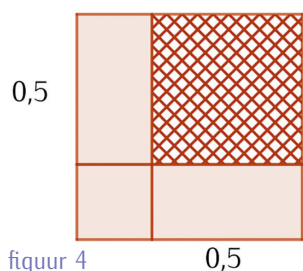
figuur 2

Deze totale rechthoek heeft volgens de eerste zin van de bron dus een oppervlakte die gelijk is aan 0,75. Je kunt al aan de bron zien dat het antwoord 0,5 gaat worden. Klopt dat? Ja, als je 0,5 kwadrateert en dat bij $0,5 \times 1$ optelt, vind je inderdaad 0,75. Het is natuurlijk interessant om de leerlingen uit te laten zoeken hoe de Babyloniërs hebben geredeneerd. In de tekst staat: ‘je breekt de helft van 1 af’. Er is maar één 1 waar over gepraat is tot nu toe, en hoe kun je daar de helft van afbreken? Je kunt de rechthoek van breedte 1 doormidden breken. En wat doe je dan met het afgebroken deel? De volgende berekening helpt misschien: 0,5 wordt ‘gecombineerd’ met 0,5 en dan gebeurt er iets met 0,25. Dat klinkt als een kwadraat en dat klinkt weer alsof er een vierkant ontstaan is. In een plaatje kun je het zo voor je zien, zie figuur 3.



figuur 3

De gearceerde rechthoek wordt rechtsonder weggehaald en linksboven aangepast (dat past natuurlijk precies omdat linksonder een vierkantje zit). De ruimte die rechtsboven ontstaat is een vierkant, en daar weten we de afmetingen van: 0,5 bij 0,5, dus oppervlakte 0,25. Dat voegen we toe, zie figuur 4.



figuur 4

Al met al vinden we dus een vierkant met oppervlakte $0,75 + 0,25 = 1$. De zijde is dus gelijk aan 1, en de zijde van het kleine vierkantje is dus $1 - 0,5 = 0,5$. Zo zie je precies hoe de berekening van de Babyloniërs meetkundig verklaard kan worden. Je kunt de berekening natuurlijk ook algebraïsch verklaren: $x^2 + x = 0,75$ geeft $(x + 0,5)^2 = 0,75 + 0,25 = 1$, dus $x + 0,5 = 1$, dus $x = 0,5$. Als je niet meetkundig blijft denken, vind je nu ook de negatieve oplossing: $x + 0,5 = -1$, dus $x = -1,5$. En dan zie je dat we meetkundig precies gedaan hebben wat we ook wel kennen als kwadraat afsplitsen. Wanneer je de algebra in dit probleem introduceert is natuurlijk aan jezelf.

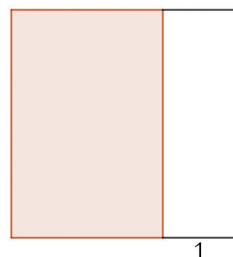
Probleem 2

De volgende opgave op hetzelfde kleitablet:

Ik heb mijn vierkantszijde van het binnenste van de oppervlakte afgehaald zodat het 870 werd. Je schrijft 1 op, de projectie. Je breekt de helft van 1 af. Je combineert 0,5 en 0,5. Je telt 0,25 op bij 870. 870,25 is het kwadraat van 29,5. Je telt de 0,5 die je gecombineerd hebt op bij 29,5 zodat de vierkantszijde gelijk is aan 30.

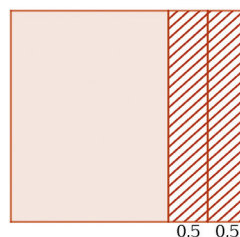
Als je dit probleem na het volgende voorlegt, kun je vragen: welke verschillen en overeenkomsten zie je met het vorige probleem? Leerlingen zullen dingen zeggen als: 'nu wordt er iets afgehaald in plaats van erbij gedaan, er staan veel grotere getallen in, je breekt weer de helft van 1 af.' En kun je hier nu ook een meetkundige voorstelling bij maken zodat het klopt en logisch is? Dat kan, alleen

moet je nu even bedenken dat het vierkant een oppervlakte heeft die groter is dan 870, dus dat de zijde die we zoeken nu groter dan 1 zal zijn, zie figuur 5.



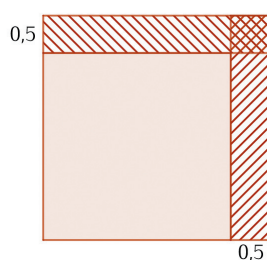
figuur 5

We hebben dus deze situatie en de oppervlakte van het gekleurde stuk is 870, het witte stuk is het deel dat er afgehaald is. Ook nu wordt weer de helft van 1 afgebroken, dat is vast weer de helft van de witte rechthoek. De vraag is nu: waar leggen we die helft van de witte rechthoek, die er dus juist is afgehaald, neer? En welke helft gaan we nu verplaatsen? Houd in je achterhoofd dat het doel zojuist was om een vierkant te maken en dat er in de tekst ook weer gesproken wordt over de 0,25, zie figuur 6.



figuur 6

Die laatste hints leiden er wellicht toe dat leerlingen dit gaan proberen, zie figuur 7.



figuur 7

Wat is nu de oppervlakte van het gekleurde vierkant linksonder? Zojuist was de oppervlakte van het gekleurde deel (dus het grote vierkant min de twee rechthoekjes) gelijk aan 870. Nu hebben we diezelfde oppervlakte, behalve dat er een klein stukje bijgekomen is omdat de rechthoeken die we eraf hebben gehaald nu overlappen. Hoeveel is er dan bijgekomen? Nou, de overlap van de twee rechthoeken is een vierkantje van 0,5 bij 0,5 met oppervlakte 0,25. De oppervlakte van het gekleurde vierkant is dus 870,25, de zijde is dus de wortel daarvan en dat komt mooi uit op 29,5. Van het oorspronkelijke grote vierkant was de zijde dus

$29,5 + 0,5 = 30$. Je ziet dat we weer precies het recept van de bron hebben gevolgd. Kan dit ook weer algebraïsch met kwadraatafsplitsen? Ja, dat kan. En het plaatje maakt inzichtelijk waarom die $-0,5$ keer $-0,5$ inderdaad een $+0,25$ oplevert. Het lijkt gek dat ze bij deze tweede vraag opeens met getallen van een heel andere orde van grootte rekenen. Toch komt ook hier een mooi antwoord uit. Waarschijnlijk zijn de problemen andersom geconstrueerd: wat is een mooi voorbeeld om dit recept mee te laten zien?

Probleem 3

Soms gebeurt het dat een probleem niet direct met een standaardrecept zoals kwadraatafsplitsen kan worden aangepakt. Je ziet vaak dat er dan een poging gewaagd wordt om het probleem te vertalen in iets dat wel een standaardprobleem is. Dat zien we bijvoorbeeld in dit probleem van hetzelfde kleitablet:

Ik heb mijn vierkantszijde zeven keer opgeteld en de oppervlakte elf keer, zodat het 6,25 werd. Schrijf op 7 en 11. Je vermenigvuldigt 11 met 6,25 zodat het 68,75 wordt. Je breekt de helft van 7 af. Je combineert 3,5 en 3,5. Je telt 12,25 op bij 68,75 en 81 is het kwadraat van 9. Je haalt er 3,5 die je gecombineerd had van het midden, af van 9 en je schrijft op 5,5. De reciproke van 11 kan niet worden opgelost. Wat moet ik opschrijven bij 11 dat me 5,5 geeft? Het quotiënt is 0,5. De vierkantszijde is 0,5.

Dit probleem lijkt erg op de vorige, alleen zijn er nu elf vierkanten en zeven zijden. Die meetkundig samenvoegen op een bruikbare manier is lastig. (Je ziet aan de tekst ook dat dat niet gebeurt). En zelfs al zou dat kunnen, dan zou je aan de methode die hier wordt behandeld niets hebben bij een ander probleem waarbij er niet elf maar tien of twaalf vierkanten zijn. Om te begrijpen wat hier gebeurt helpt het om meteen naar de algebra te gaan kijken. Welke vergelijking wordt hier opgelost?

Als je de vergelijking in onze termen schrijft krijg je $11x^2 + 7x = 6,25$. In onze *abc*-formule is de 11 geen probleem, dus je kunt je leerlingen meteen vragen de oplossing uit te rekenen, en kwadraatafsplitsen kan natuurlijk ook als je de vergelijking even door 11 deelt. Of je vult die 0,5 die er uitkomt in om te checken of het klopt. Maar dat is niet wat in de bron gebeurt: we zien dat de 6,25 hier met 11 vermenigvuldigd wordt. Dat suggereert dat de hele vergelijking met 11 vermenigvuldigd wordt (terwijl wij eerder zouden delen). Waarom helpt dat? Algebraïsch zie je dan het volgende: $11 \cdot 11x^2 + 11 \cdot 7x = 68,75$. Ofwel: $(11x)^2 + 7 \cdot (11x) = 68,75$. Wat je dus krijgt is een 'gewone' vergelijking die je kunt oplossen voor $11x$, wij zouden zeggen: als je $y = 11x$ substitueert, vind je: $y^2 + 7y = 68,75$. Het is een goede oefening om leerlingen deze vergelijking Babylonisch op te laten lossen op de manier van probleem 1. Dan zie je namelijk precies

gebeuren wat de bron ook zegt. De uitkomst is $y = 11x = 5,5$. Maar hoe moeten we dan x bepalen? Het tablet zegt dan: 'de reciproke van 11 kan niet worden opgelost'. Dat is een interessant punt: waarom is delen door 11 lastig voor Babyloniërs? Dat komt door hun getelsysteem. Dit kan dus een mooie aanleiding zijn om meer over het Babylonische getalstelsel uit te gaan zoeken. Gelukkig is in dit geval het antwoord ook meteen te zien en dat deden de Babyloniërs ook: $5,5$ gedeeld door 11 is gewoon $0,5$. Dus ook hier zien we een mooi uitkomend probleem.

In de les

Waarom zou je deze Babylonische opgaven willen gebruiken in de les? Voor mij ligt de meerwaarde voornamelijk in een mooie en logische koppeling tussen algebra en meetkunde, in het verrijken van het cognitieve schema van de leerlingen wat betreft vergelijkingen oplossen, kwadraatafsplitsen, meetkunde. Kwadraatafsplitsen lijkt een algebraïsch trucje te zijn, maar meetkundig krijgt het een echte betekenis. De Babylonische opgaven zijn extra uitdagend, omdat er niet zo voor de hand liggende getallen in voorkomen: breuken, of juist best grote getallen in combinatie met breuken. Ook zijn die opgaven in oplopende moeilijkheid te vinden. Het vinden van een meetkundige interpretatie bij een gegeven Babylonisch probleem is soms een behoorlijke wiskundige denkactiviteit waar je tot ver in de bovenbouw mee zoet bent. Het bronnenboek van Katz ^[5] bevat nog veel meer van dergelijke bronnen, dat kan een mooi startpunt zijn voor bijvoorbeeld een profielwerkstuk.

Noten

- [1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.Q. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [2] Kindt, M. & Roest, A. van der (2012). *Babylonische wiskunde*. Zebra-boekje 20. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [3] Kindt, M. & Hietbrink, H. (2017). *Het avontuur dat algebra heet*. Zebra-boekje 48. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [4] Deze vertaling is gebaseerd op de Engelse vertaling in Katz ^[5]. Ik heb de getallen meteen naar moderne getallen vertaald, en ik heb voor kommagetallen gekozen, omdat de niet-gehele getallen van de Babyloniërs meer lijken op onze kommagetallen dan op onze breuken.
- [5] Katz, V. (Ed.) (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A sourcebook*. Princeton: Princeton University Press.

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

DE DYNAMIEK VAN GETALLEN

Paul Durenkamp

WINNAAR NVVW ONTWERPPRIJS

Dit artikel is geschreven in het kader van de module Vakdidactiek 3 binnen de opleiding LVO-wiskunde aan Driestar Educatief. Het betreft de uiteenzetting van een vakdidactisch probleem in de onderbouw binnen het vak wiskunde. Het vakdidactisch probleem heeft betrekking op het ontbinden in factoren met bijzondere aandacht voor priemgetallen.

Paul Durenkamp won er de NVvW Ontwerpprijs mee.

Elf!

Samen met een groep havo3-leerlingen ben ik aan de slag gegaan met het oplossen van kwadratische vergelijkingen, waarbij het getal 88 naar voren komt in de vergelijking $x^2 + 3x - 88 = 0$. De vraag aan hen is wie dit met de product-som-methode zou oplossen en wie met de *abc*-formule. Bijna iedereen kiest voor de *abc*-formule. Waarom? Vanwege dat rare en hoge getal '88'. 'Je gaat toch nooit twee getallen vinden die "keer elkaar" - 88 zijn en opgeteld + 3', zegt een leerling. Enerzijds blij met het tonen van het begrip van de product-som-methode, ben ik toch enigszins teleurgesteld dat de leerlingen het eigenlijk ook niet eens gaan proberen. Ik laat het er niet bij zitten: 'Aan welke getallen denk je nog meer bij 88?', vraag ik ze. Het blijft stil. 'En als ik nu de getallen 77, 66, 55, 44, 33 en 22 noem...' probeer ik ze te helpen. '11!' roepen er een paar. Een aantal leerlingen ziet nu dat de vermenigvuldiging 8×11 leidt tot 88 en met wat goochelen met de tekens ook tot - 88 en opgeteld +3. Later die dag ben ik met een havo4-wiskundeB-groep bezig met het vereenvoudigen van wortels. $\sqrt{50}$ passeert de revue. 'Welke macht herken je in het getal 50?', vraag ik ze. Het blijft angstvallig stil. Na even denken komt de sterkste leerling met het antwoord: 5^2 . Hierdoor kunnen we dus $\sqrt{50}$ schrijven als $\sqrt{2 \times 25} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$. Een aantal leerlingen kijkt mij aan alsof ik net hardgrondig heb beweerd dat de aarde toch plat blijkt te zijn.

Een getal is niet statisch

De vraag die mij bezighield na deze dag was: Waarom zien veel leerlingen getallen als iets statisch? Bij het getal 88 is er geen associatie met het getal 11 en bij het getal 50 niet met het getal 25 of 5. De getallen zijn statisch voor veel leerlingen. Wat hierboven beschreven is heeft betrekking op *factorisatie*, ofwel een getal ontbinden in factoren. Zo kun je het getal 6 opdelen in de factoren 2 en 3, want $2 \times 3 = 6$. Zodra je bezig gaat met factoriseren, kom je vrijwel onmiddellijk uit bij de priemgetallen,

want waar houdt factoriseren op? Inderdaad, zodra een priemgetal is bereikt die zodoende ook priemfactor wordt genoemd. Zo is het getal 12 te factoriseren naar 2 en 6, maar is 6 vervolgens weer te factoriseren naar 2 en 3. Ofwel: de priemfactorisatie van 12 is $2 \times 2 \times 3$, dit zijn allemaal priemgetallen. Stevenhage (2001), hoogleraar in de zuivere wiskunde aan de Universiteit van Leiden, zegt hierover in zijn oratie:

Niet minder fundamenteel dan het rechtstreekse op-, af- of bijtellen is het concept van vermenigvuldiging. Dat is ietsje ingewikkelder, en het is niet voor niets dat men generaties lang tafels van vermenigvuldiging uit het hoofd geleerd heeft, terwijl het begrip opteltafel hoegenaamd onbekend is. Tegenwoordig lijkt het nog slechts een onderscheid tussen twee knoppen op een rekenmachine, maar er is een heus verschil. Additief gesproken, voor de optelling, is er een enkele bouwsteen, de eenheid 1, en ieder getal is uniek te maken door die bouwsteen een aantal keer op zichzelf te stapelen. Multiplicatief gesproken, voor de vermenigvuldiging, kom je niet ver door herhaald met 1 te vermenigvuldigen. Willen we grote getallen uit kleine maken door vermenigvuldiging, dan speelt 1 geen rol van betekenis en treedt een nieuw type bouwsteen op, priemgetal genaamd.

Na het geven van een voorbeeld vervolgt Stevenhage:

Wat ik u heb laten zien is de priemfactorontbinding of factorisatie van het getal 1575 en u bent misschien ook niet verbaasd te horen dat 1575 echt alleen maar verkregen kan worden met de goede hoeveelheden drieën, vijven en zevens, en dat je door een priembouwsteen als 2, 11 of 13 te gebruiken nooit het getal 1575 krijgt.

Deze eenduidigheid van de ontbinding klinkt heel vanzelfsprekend, omdat in de scheikunde een watermolecuul alleen maar uit twee waterstofatomen en één zuurstofatoom verkregen kan worden, en in de kernfysica het aantal protonen en neutronen in een alfadeeltje ook al niet de neiging heeft te variëren. U kunt de priemgetallen wel zien als de “elementaire deeltjes” waaruit de gehele getallen onder vermenigvuldiging opgebouwd zijn.’ Hofstede (2017) schrijft: ‘Priemgetallen zijn de bouwstenen van alle andere getallen!’

Het bestaan en de eenduidigheid van de priemfactor-ontbinding van getallen zijn zo fundamenteel in de getaltheorie dat men vroeger wel van de hoofdstelling van de rekenkunde sprak (Stevenhage, 2001).

Priemfactoren in het vo

Begrippen als ‘bouwstenen van de wiskunde’, ‘elementaire deeltjes’ en ‘hoofdstelling’ doen vermoeden dat we hier te maken hebben met iets zeer wezenlijks in de wiskunde. Hoe kan het dan dat leerlingen hier vrij onbekend mee zijn en het ook moeizaam kunnen toepassen? Vermenigvuldigen en delen worden al geleerd op de basisschool en zijn instrumenten die je de rest van je (school)carrière veelvuldig gebruikt. Begrippen als priemgetal en factoriseren worden echter op de middelbare school pas geïntroduceerd, afgezien van zogenaamde plusklasjes op de basisschool. Een op zichzelf vanzelfsprekende volgorde, want een leerling moet het vermenigvuldigen en delen eerst goed beheersen om het factoriseren te kunnen begrijpen en toepassen. Kijkend naar de leerlijn bij de meest gebruikte methode *Getal & Ruimte* op havo/vwo-niveau zien we dat er in de onderbouw van het voortgezet onderwijs precies eenmaal concreet aandacht wordt besteed aan dit onderwerp en dat is in de tweede klas bij het hoofdstuk ‘Kwadratische vergelijkingen’, zie figuur 1.

Theorie B Priemgetallen

Het getal 13 heeft precies twee delers, namelijk 1 en 13.

Het getal 13 is een voorbeeld van een **priemgetal**.

Andere voorbeelden van priemgetallen zijn 2, 5, 17, 23 en 67.

Een natuurlijk getal met precies twee delers is een priemgetal.

De priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Elk natuurlijk getal dat geen priemgetal is, is te schrijven als product van priemgetallen. Zo is $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$. We zeggen dat 60 als product van **priemfactoren** is geschreven. Hiernaast zie je hoe je de priemfactoren vindt.



figuur 1 *Getal & Ruimte*, deel 2 havo/vwo, 10^e editie

Zowel in de derde klas als in de eerste klas, komt dit onderwerp niet aan de orde. In de eerste klas wordt er weliswaar aandacht besteed aan de grootste gemeenschappelijke delen (ggd) en kleinste gemeenschappelijke

veelvoud (kgv), maar dit wordt vervolgens niet gekoppeld aan priemfactoren en -getallen. Dit geldt ook voor het vraagstuk uit de inleiding, namelijk het vereenvoudigen van wortels. De methode raadt hierbij aan om de machten uit je hoofd te leren en ze als factor te gaan herkennen in de wortel. Zeer nuttig om de machten uit je hoofd te weten en te herkennen, maar waarom niet direct ook de stap maken naar het fundament, de priemgetallen? Lagerwerf (2000) moedigt namelijk aan om een gestructureerde getallenwereld te creëren voor leerlingen, zodat getallen niet als los zand aan elkaar hangen. De vraag is hoe een leerling deze structuur kan ontdekken en kan toepassen als het enerzijds nauwelijks in de methode naar voren komt en, belangrijker nog, als een losstaand onderdeel wordt aangeboden in plaats van een elementair onderdeel door de rekenkundige en algebraïsche hoofdstukken heen.

Probleem

Het probleem dat leerlingen ervaren is dat ze ‘maar een beetje moeten zoeken’ naar bepaalde factoren bij het vereenvoudigen van wortels of lijstjes met mogelijke combinaties van factoren moeten produceren bij de product-som-methode. Een rekenkundig zwakke leerling die de theorie goed begrijpt, loopt hierdoor vast. Een degelijke getallenstructuur ontbreekt, waarbij de priemgetallen ‘als bouwstenen van de wiskunde’ een zeer geschikte basis zouden kunnen vormen. Een collega, eveneens docerend aan de Vrije Universiteit van Amsterdam, legt het vereenvoudigen van wortels als volgt uit: Zet het getal onder de wortel om in priemfactoren. Kijk naar de macht van de wortel; deze vertelt je namelijk hoe groot het ‘groepje’ moet worden om het uit de wortel te mogen halen. Alles wat overblijft, blijft dus ook onder de wortel. Bijvoorbeeld:

$$\sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{2 \times 5 \times 5} = 5\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 3 \times 3 \times 3} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} = 2 \times 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

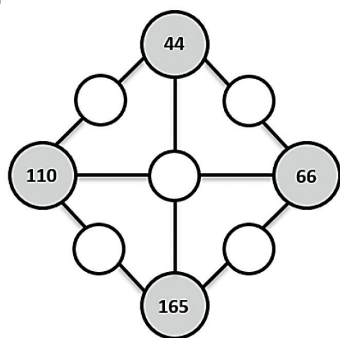
$$\sqrt[3]{88} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 11} = 2\sqrt[3]{11}$$

Het ziet er wellicht enigszins omslachtig uit en het vereenvoudigen van wortels is niet de belangrijkste vaardigheid bij wiskunde, maar door alle vraagstukken van dergelijke aard op deze manier aan te pakken, krijgt de leerling een veel dynamischer beeld van getallen. Dit kunnen ze inzetten bij het vereenvoudigen van wortels, maar ook van breuken, het toepassen van de product-som-methode en bij rekenvraagstukken. Toevallig(er)wijs (?) onderwerpen waar leerlingen van nature veel moeite mee hebben.

Priemfactorisatiepuzzel

Een college getaltheorie of hameren op rekenvaardigheden gaat dit probleem niet direct oplossen, daarom

ben ik op zoek gegaan naar een oplossing die de leerling prikkelt en aanzet tot denken. De methode steekt dit onderwerp voornamelijk in als een 'doe-model': Zo doe je het en zoek zelf maar uit wat precies de factoren zijn. Een 'denk-model' is een strategie die erop is gericht dat leerlingen inzien wat ze doen en kunnen nagaan of het goed is; dit is anders dan het aanleren van regels of het leren van de machten (Faes, et al., 2011). Leerlingen zijn over het algemeen wel te porren voor puzzels en deze twee zaken heb ik gecombineerd tot de priemfactorisatiepuzzel. Ik heb dertig verschillende puzzels ontwikkeld die leerlingen stimuleren te zoeken naar en te denken in priemfactoren. In figuur 2 zie je een voorbeeld van een puzzel.



figuur 2

In het grijze rondje staat het getal dat ontbonden moet worden in drie priemfactoren, zie figuur 2. Twee van de drie hebben een overlap met een ander grijs rondje. Hierdoor moet de leerling niet alleen de juiste priemgetallen vinden, maar ook nog op de juiste positie zetten om de puzzel kloppend te maken. Tot slot komt er in het middelste witte rondje een priemfactor te staan die alle vier de grijze getallen gemeenschappelijk hebben. In het voorbeeld is dit 11. De verwachting is dat leerlingen door het maken van deze puzzels enerzijds inzicht en vaardigheid gaan ontwikkelen in het factoriseren en anderzijds ook begrip en herkenning gaan creëren voor bepaalde getallen. Als ze de volgende keer het getal 44 of 66 zien, dan is er in het 'cognitief schema' een link gelegd naar het priemgetal 11 (Drijvers, Streun, & Zwaneveld, 2013). Dit geldt voor veel meer getallen, vandaar dat er dertig puzzels zijn ontwikkeld. De puzzels heb ik gebruikt in mijn derde klassen. De puzzels stonden in principe los van de lesstof en fungeerde als *energizer* of als afwisselingsoefening. Iedere leerling kreeg drie uitgesneden puzzels en wanneer ze deze klaar hadden, mochten ze vragen om nieuwe puzzels. Hierdoor konden ze de puzzels als het ware sparen als kaartjes. De docent kan zodoende eenvoudig ontdekken wie er snelheid en aardigheid in heeft en wie niet. Dit werkte erg goed. Leerlingen gingen (waarschijnlijk vanwege het puzzelkarakter) enthousiast met de puzzels aan de slag en in gesprekjes met leerlingen probeerde ik erachter te komen of ze ook echt begrepen wat ze aan het doen waren en wat het getal in het midden van de puzzel hen vertelde. Na het een paar

keer te hebben toegepast en de nieuwigheid er af was, heb ik nogmaals een vergelijking op het bord gezet, namelijk: $x^2 + 17x + 66 = 0$ en gevraagd of deze vergelijking ook opgelost kon worden met de product-som-methode. Ik merkte dat leerlingen sneller een associatie hadden bij het getal 66 en daardoor het oplossen een minder grote opgave voor hen werd die ze voorheen liever wilden ontwijken. De getallen zijn minder statisch geworden.

Nabeschuwing

Ik ben aangenaam verrast dat een relatief eenvoudige oplossing als een puzzeltje het cognitief schema van leerlingen wat betreft getallen kan verrijken en dat dit ook snel zijn vruchten afwerpt. Een nadeel van de puzzels is dat het steeds betrekking heeft op drie priemfactoren, terwijl er ook dikwijls meer of minder priemfactoren zijn. De puzzel kan worden uitgebreid. Deze puzzels wil ik in de toekomst gaan ontwikkelen. Een ander nadeel van de puzzel is dat het getal 1 geen priemgetal is, maar wel een oplossing kan zijn bij de product-som-methode. Dit aspect heb ik op de koop toe toegenomen, omdat ik het verrijken van het getallenbegrip veel belangrijker vind dan het ontwikkelen van een manier om de product-som-methode sneller op te kunnen lossen.

Tot slot is het gewoon erg leuk om met leerlingen te puzzelen.

Literatuur

- Drijvers, P., Streun, A. v., & Zwaneveld, B. (2013). *Handboek wiskundendidactiek*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Faes, T., Goris, T., Konings, T., Krabbendam, H., Monquil, A., & Staal, H. (2011). *Het leren van wiskunde - Leren effectief lesgeven*. Utrecht: APS Utrecht.
- Hofstede, H. (2017, maart 22). Ontbinden in priemfactoren. Opgehaald van hhofstede.nl: <http://www.hhofstede.nl/modules/priemfactoren.htm>
- Hoogeboom, G., & Konings, T. (2013). Klein vakdidactisch onderzoek Algebra Deel 4. *Euclides*, (88)5, 214-217.
- Lagerwerf, B. (2000). *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Utrecht: APS.
- Reichard, L., Dijkhuis, J., Admiraal, C., te Vaarwerk, G., Verbeek, J., de Jong, G., . . . Hiele, R. (2014). *Getal & Ruimte 2 havo/vwo (10 ed., Vol. 1)*. Houten/Groningen: Noordhoff Uitgevers.
- Stevenhage, P. (2001, september 7). Oratie 'Rekenen en getaltheorie'. Leiden: Universiteit Leiden.

Over de auteur

Paul Durenkamp is voormalig student LVO Wiskunde Driestar Educatief, thans docent op het Rijnlands Lyceum Sassenheim

WISKUNDE UIT DE KUNST

NVVW-DAG

De jaarlijkse NVvW jaarvergadering en studiedag vond 4 november jl plaats in Veenendaal. We vroegen Ab van der Roest of hij met zijn mooie 'vastgeroest' bril naar deze dag wilde kijken. Dat resulteerde in deze persoonlijke beschouwing.

Veel te kiezen

De eerste zaterdag van november is de NVvW-dag. Elk jaar moet ik kiezen tussen mijn twee hobby's: hardlopen en wiskunde. Elk jaar op dezelfde dag de halve marathon van Renswoude en de verenigingsdag. Net als elk jaar valt de beslissing ten gunste van de verenigingsdag... Vorig jaar moest ik de dag missen door mijn verblijf in China. Reikhalzend kijk ik daarom uit naar deze dag. Naast een mooi programma ook de collegiale ontmoetingen. Naast lekker kletsen de serieuze gesprekken over ons mooie vak. Maar kan het wel, een verenigingsdag die niet door Marianne Lambriex georganiseerd is?

De vereniging heeft het ons dit jaar erg moeilijk gemaakt: *Wiskunde uit de Kunst* als thema en dan mogen we maar twee workshops kiezen, terwijl er wel meer dan tien interessante workshops zijn! Wiskunst (veertien keuzes), didactiek (negen keuzes) en dan ook nog twaalf extra workshops. Kies maar!

Op zaterdag was het al vroeg een gezellige drukte in het Ichthus College. De verwelcoming was zoals gewoonlijk geweldig en meteen voelde ik me weer opgenomen in die grote wiskundefamilie. Snel een rondje langs de stands om uiteindelijk iets langer bij de tafel van het wereldwiskundefonds te blijven staan. De keuze was weer groot en gevarieerd. Geweldig initiatief en de opbrengst ook nog voor derdewereldlanden.

Het verslag van de jaarvergadering maakt de secretaris wel. De penningmeester sleepte de centjes weer binnen. En dan een soort van afscheid. Swier gaat als voorzitter en Ebrina komt. Het bestuur heeft een mooi cadeau voor Swier uitgezocht dat precies bij het thema van de dag paste. Jammer voor Swier dat hij geen voorzitter meer is, want hij kan nu veel minder motorrijden.

Dan de studiedag. Een geweldige aftrap van Tom Verhoeff die een lezing gaf over het werk van zijn vader Koos. Mooi te horen dat vader en zoon zo samen de interesse voor kunst hebben. Koos Verhoeff is bekend om zijn mooie sculpturen die hij van hout of van metaal maakt. Hij creëert ze niet, maar ontdekt ze. Vader is de doener, terwijl Tom meer denker is. Ze delen dat ze de kunst ontdekken. Tom vertelt van een project waar de

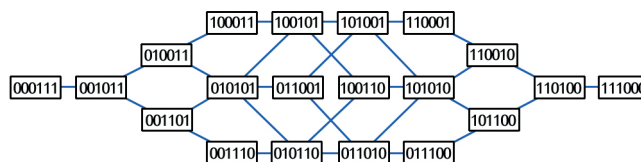
Ab van der Roest



figuur 1 Swier Garst houdt z'n laatste jaarrede

onderlinge afstand tussen twee breuken a/b met a en b tussen 0 en 100 belangrijk is. Hiervan maakte hij een grafiek en de regelmaat is een kunstwerk op zich. Met een ander voorbeeld in zijn lezing legde hij uit wat wiskunst is: wiskundig van uiterlijk (uitwendig) en wiskundig ontwerp (inwendig en proces).

Bij een presentatie van een team van vier dansers, liet hij de deelnemers de permutaties van vier demonstreren door steeds twee personen onderling van positie te laten wisselen. Er zijn 24 posities, maar toen er een team van zes deelnemers was, werd dit met 720 posities toch wel erg bewerkelijk. Daarom drie personen in het blauw en drie in het rood. Nu zijn er 20 permutaties, hetgeen je kunt modelleren met een graaf met nullen en enen. De dans wordt dan een hamiltonpad in de graaf, zie figuur 2, of een vlecht zoals in figuur 3 waarmee alle permutaties zijn getoond.



figuur 2



figuur 3

Statistiek in het nieuwe programma

Wiskunst biedt zeker kansen om leerlingen te boeien, was de boodschap. De creativiteit van de kunst kunnen we in de wiskunde gebruiken. In de les gebeurt dit erg weinig. Daarna volgden de workshops. Ik heb gekozen voor nuttig, interessant en leerzaam. Statistiek van het nieuwe programma komt dan heel snel binnen beeld. Omdat ik het vorig jaar 'gemist' heb, ervaar ik hier een lichte achterstand en probeer dat zo goed mogelijk bij te werken. De lezing van Peter Kop en Hester Vogels kon

ik dus zeker niet overslaan. De informatie die zij met ons deelden brengt me op ideeën. Om leerlingen het geheel van de statistiek te laten begrijpen is de statistische cyclus erg belangrijk. In methodes komt dat vaak niet tot uiting, omdat de stof veel te versnipperd wordt aangeboden. Hester heeft daarom besloten om in havo-4 van augustus tot januari alleen statistiek te doen. In mijn ogen een gewaagd experiment, omdat andere delen van de wiskunde (bijvoorbeeld algebra) ver wegzakken. Maar we kunnen als dit cohort examen gedaan heeft de statistiek erop loslaten en dan weten we of het te gewaagd was. In ieder geval op dit moment stof tot overdenking.

Top 2000

De tweede workshop was de Top 2000 door Tom Goris. Deze keuze was heel makkelijk omdat ik al jaren lang fan ben van de top 2000 en me geen oudejaarsdag zonder olieballen bakken en luisteren naar de radio kan voorstellen. Maar we vergeten wel eens dat er achter de schermen van de Top 2000 veel statistiek is, want niet alleen de favoriete nummers worden gevraagd, ook zijn er andere vragen in te vullen. Daar is prachtige statistiek mee te bedrijven. Tom heeft er in de decembernummers van de *Nieuwe Wiskrant* in 2008, 2009 en 2010 mooie artikelen over geschreven. Voor de leerlingen kun je hier interessante statistiek mee bedrijven die dicht bij hun belevingswereld zit. Elke wiskundedocent zou eigenlijk Radio 2 een e-mail moeten sturen met het de vraag naar de data om die uiteraard geanonimiseerd vrij te geven en zo het onderwijs in statistiek te helpen vormgeven.

Kunst in wording

En dan volgt de laatste lezing alweer. Uiteraard na de lunch die wel erg rustig verliep. Omdat er twee tijdstippen zijn voor de lunch kun je helaas niet iedereen die je zou willen ontmoeten, spreken. Maar je moet hier praktisch denken en die overvolle aula was ook niet ideaal. Tijdens de lunch nog even vol bewondering gestaan bij de stand van de 'wiskunstenaar' Hanneke Rijks. Mooie objecten, die zo eenvoudig lijken, maar toch zo moeilijk te maken. Ondertussen waren Kasper Koster en Tijmen van der Ree de hele dag bezig om twee pixelportretten van Leon van den Broek met 400 Rubik kubussen te maken. Verbluffend om te zien hoe op afstand die portretten tevoorschijn komen, zie figuur 4 en de omslag van deze *Euclides*.

Paul, Ringo, John en George

De eindlezing was dit jaar voor *Ars et Mathesis*. Hans Kuiper en Walt van Ballegooijen hadden zich laten inspireren door de voorkant van het boek *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid* van Douglas Hofstadter waar de letters E, G en B geprojecteerd worden in drie richtingen. Ze ontwierpen een Minimal Art object, waar niet de letters geprojecteerd worden, maar de gezichten van Escher, Gödel en Bach. Een mooi kunstwerk, dat inspireert om de grenzen te verleggen.



figuur 4 Kasper Koster en Tijmen van der Ree, pixelportret van Leon van den Broek

Zouden ze het ook met vier gezichten kunnen? Er was geen lange zoektocht nodig om vier bij elkaar behorende gezichten te vinden: de Beatles. En na veel wiskunde, handvaardigheid en doorzettingsvermogen konden ze op onze studiedag voor het eerst hun kunstwerk laten zien. Paul, Ringo, John en George werden onder luid applaus geprojecteerd, zie figuur 5.



figuur 5 Kunstwerk van Hans Kuiper en Walt van Ballegooijen met projectie van de gezichten van de Beatles

Een waardige afsluiting van onze verenigingsdag en op de fiets naar huis bedacht ik me weer dat de *Ars et Mathesis*-dag eigenlijk in het voorjaar gepland zou moeten worden. Ik verwacht dat er dan meer wiskundedocenten de tijd nemen om te gaan. Zeker na deze studiedag waar we konden ontdekken dat Kunst inspirerend kan zijn voor de Wiskunde.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

Foto's: Marjolein Koster

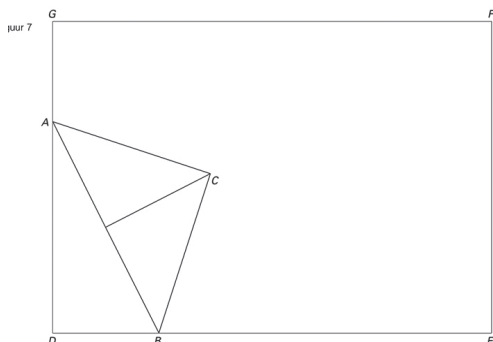
Ton Lecluse vraagt zich af of meetkundeopgaven uit oude examens ingezet kunnen worden in het nieuwe curriculum.

Vanaf mei 2018 is het zover: het eerste eindexamen wiskunde voor het vwo, nieuw curriculum. Geen bewijsmeetkunde meer, maar wel analytische meetkunde. Jammer eigenlijk van die mooie opgaven met synthetische bewijzen. Dan maar weggooien? Nee, weggooien is zonde, zegt AH ;) Zou zo'n bewijsopgave, ietwat aangepast, in het nieuwe curriculum hergebruikt kunnen worden? Laten we het eens proberen. Ik kies de *bewegende, gelijkbenige, rechthoekige driehoek* uit het examen wiskunde B_{1,2} 2001-I (figuur 1).

Bewegende, gelijkbenige, rechthoekige driehoek

Een gelijkbenige rechthoekige driehoek wordt in de linkeronderhoek van een vel papier gelegd. De eindpunten van de schuine zijde van de driehoek zijn A en B en het derde hoekpunt is C . Punt A ligt op de linkerkant van het papier en punt B op de onderzijde van het papier. De hoekpunten van het papier noemen we D , E , F en G . Zie figuur 7.

Figuur 7 is op de bijlage afgedrukt.



We laten de driehoek over het papier bewegen waarbij A op de linkerkant en B op de onderzijde van het papier blijft. In de beginsituatie valt B samen met D . B beweegt over de onderzijde van het papier tot A samenvalt met D . Tijdens de beweging beschrijft C een baan over het papier.

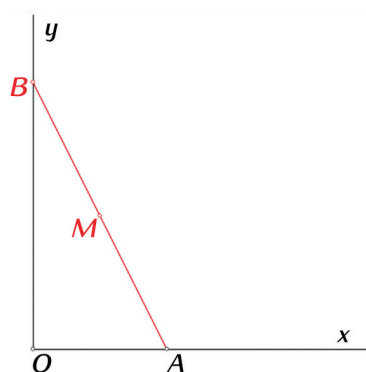
- Bewijs dat C tijdens deze beweging over de bissectrice van $\angle D$ beweegt. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de bijlage bij vraag 17.
- Het punt M is het midden van AB . Bij de beweging beschrijft ook M een baan.
- Laat zien dat deze baan een kwartcirkel is en geef het middelpunt van deze cirkel. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de bijlage bij vraag 18.

figuur 1

Om de opgave meer te laten lijken op aanverwante opgaven in mijn wiskundeboek (*Getal & Ruimte*, hoofdstuk 10) pas ik de puntnamen aan en teken een vierkant in plaats van een geodriehoek. In verband met de logische volgorde tijdens het oplossen heb ik de twee oorspronkelijke vragen omgewisseld.

Opgave

Van lijnstuk AB , met lengte 10, beweegt punt A over de positieve x -as en punt B over de positieve y -as. Punt M is het midden van AB . Zie figuur 2.



figuur 2

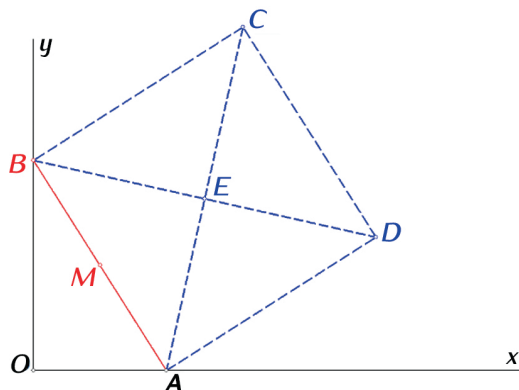
Stel $A = (2a, 0)$. Dan is $M = (a, \sqrt{100 - 4a^2})$

3p a) Bewijs dat deze uitdrukking voor de coördinaten van M klopt.

Wanneer punt A over de x -as beweegt, met $0 \leq 2a \leq 10$, doorloopt M een kwart cirkel.

3p b) Bepaal een formule van de cirkel die punt M (gedeeltelijk) doorloopt.

AB is zijde van twee vierkanten, waarvan er in figuur 3 één is getekend, $ABCD$.



figuur 3

Punt E is het midden van dit vierkant. Wanneer A alle mogelijke posities op de positieve x -as doorloopt, doorloopt E een deel van een lijn.

7p c) Bepaal een vergelijking van deze lijn.

Nakijkmodel

Opgave a

1p stelling van Pythagoras in driehoek OAB geeft:
 $(2a)^2 + OB^2 = 10^2$

1p dus $OB = \sqrt{10^2 - (2a)^2}$

1p dus $OB = \sqrt{100 - 4a^2}$, dus is

$$M = (a, \sqrt{100 - 4a^2})$$

Opgave b

1p voor punt M geldt:
$$\begin{cases} x = \frac{2a+0}{2} \\ y = \frac{0 + \sqrt{100 - 4a^2}}{2} \end{cases}$$

1p eliminatie van a levert op: $y = \frac{\sqrt{100 - 4x^2}}{2}$

1p herleiden tot $(y = \frac{\sqrt{100 - 4x^2}}{2})$ dus $y^2 = 25 - x^2$,

de cirkelvergelijking: $x^2 + y^2 = 25$.

Opmerking: de *omgekeerde stelling van Thales* zegt dat O op de cirkel ligt waarvan AB een middellijn is, en die cirkel heeft M als middelpunt en $\frac{1}{2}AB$ als straal, waarmee je klaar bent. Immers: $OM = \frac{1}{2}AB = 5$. En Thales zit zowel in het oude als nieuwe programma.

Een mooi alternatief antwoord dus.

Opgave c

1p $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(\sqrt{100 - 4a^2}, -2a \right)$

1p loodrecht hierop: $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{100 - 4a^2}}{2a}, 1 \right)$

1p $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \left(2a + \frac{\sqrt{100 - 4a^2}}{2a}, 1 \right)$

1p $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \left(-2a - \frac{\sqrt{100 - 4a^2}}{2a}, -1 \right)$

1p $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \left(-a - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{100 - 4a^2}}{2a}, -\frac{1}{2} \right)$

1p $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \left(a + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{100 - 4a^2}}{2a}, \frac{1}{2} \right)$

1p dus punt E ligt op de lijn $y = x$

Opmerking: uitwerken met vectoren in plaats van coördinaten geeft voordeel in de tweede stap van bovenstaande

uitwerking: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.

Opgave c kan een puntje korter door te geven dat E een deel van $y = x$ doorloopt, en dit te laten aantonen. Je kunt de opgave algemener maken door A en B ook op de negatieve asdelen toe te laten, dus $2a$ te laten lopen van -10 tot 10 , en ook het tweede vierkant op AB te beschouwen. Dan krijg je als baan van M de hele cirkel en doorloopt E stukken van de lijnen $y = x$ en $y = -x$. Maar dat maakt het voor de leerling gecompliceerder. Wel een leuke veralgemenisering in de les.

De nieuwe tekeningen zijn gemaakt met geocadabra (<http://members.casema.nl/alecluse/>, *downloads geocadabra, setupned.exe*).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

MEER RUIMTE VOOR HET FESTIVAL

Dédé de Haan

ONDERBOUWWSKUNDEDAG 2017

De OnderbouwWiskundeDag (OWD) is een wedstrijd waarbij teams van leerlingen uit klas 3 havo-vwo de hele dag aan een uitdagende wiskundeopdracht werken. Het open karakter van de opdracht maakt dat de teams een complete weg afleggen van probleemstelling via strategiebepaling, oplossing en argumentatie naar presentatie van de gevonden oplossing. Dédé de Haan bespreekt de resultaten van de OWD van 2017. De volgende editie is 7 februari 2018, meedoen kan nog!

Opdracht

De insteek van de opdracht in 2017 was dat Nederland steeds meer een festivalland wordt. Met name in de zomer is er ieder weekend wel ergens in het land een (muziek) festival. Bestaande terreinen worden tijdens een festival vaak tijdelijk omgebouwd tot een festivalterrein. Dat betekent dat er allerlei elektrische voorzieningen moeten komen, er moeten podia aangelegd worden, de grond moet verstevigd worden, er moeten toiletten komen, horeca, chillplekken, etcetera.

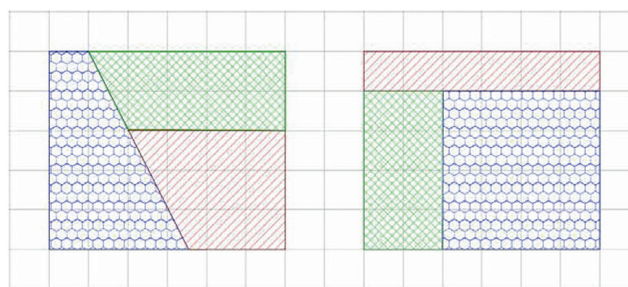
Ieder jaar worden de festivals ook steeds groter. Dat betekent grotere 'verbouwingen', en dus veel kosten. Daarna wordt het terrein over het algemeen weer in de oude staat teruggebracht, en dat kost ook weer veel geld. De kern van de opdracht gaat over het berekenen van de 'herinrichtingskosten' als de bestemming van een stuk gebied verandert – het gaat hierbij om een festivalorganisatie die meer festivalruimte wil in het gemeentepark waar het festival jaarlijks wordt georganiseerd. De gemeente wil dat wel, maar de herinrichting moet zo goedkoop mogelijk, en er moet ook nog eens aan allerlei voorwaarden worden voldaan die het duurder maken, bijvoorbeeld dat het rustgebied zover mogelijk van het festivalgebied af ligt. De goedkoopste oplossing zal niet aan de randvoorwaarden van de gemeente voldoen – dat betekent dat het team (de festivalorganisatie) zijn plan goed moet onderbouwen!

Verkenning

De opdracht start met een verkenning, waarbij een schematische voorstelling van een terrein met verschillende bestemmingen gegeven wordt (een bestaande indeling en een gewenste indeling). Aan de leerlingen om uit te rekenen hoeveel het zal kosten om de gewenste indeling te verkrijgen, en of dat ook anders (goedkoper) zou kunnen. In figuur 1 zie je het eerste deel van de verkenningsopdracht.

Verkenning van het probleem

We beginnen met het verkennen van het probleem door eerst naar een schematisch voorbeeld te kijken van een park dat tijdelijk gebruikt wordt voor een festival.



figuur 1: huidige indeling

figuur 2: gewenste indeling

In figuur 1 zie je de huidige indeling van een gebied van 500 x 600 meter. De totale oppervlakte van dit gebied is $300.000 \text{ m}^2 = 30 \text{ hectare (30 ha)}$.

Met behulp van kleuren en arceringen is aangegeven welke bestemming ieder deel van het gebied heeft gekregen, dus welke activiteiten daar mogen plaatsvinden.

 is rustgebied

 is speeltuiggebied

 is festivalgebied (hier mogen dus bands optreden)

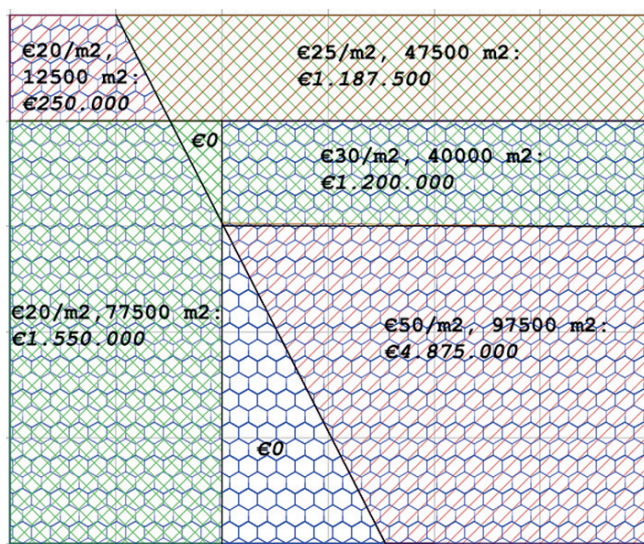
Je kunt aan de hand van de schematische plattegronden in figuur 1 en 2 uitrekenen hoeveel m^2 er toegekend gebruikt wordt voor rustgebied, speeltuiggebied en festivalgebied in de huidige indeling en in de gewenste indeling.

figuur 1 Verkenning

De uitdaging voor de leerlingen ligt in de representatie van de kosten per stukje gebied, zie figuur 2 voor de suggestie in de docentenhandleiding bij deze OWD-opdracht.

Teams van leerlingen hadden hier allerlei varianten op, met veel kleuren en coderingen.

Er waren ook teams die dit onderdeel heel lastig vonden, meldden de docenten in de evaluatie.



figuur 2 Overzicht van kosten per gebied. Bron: docentenhand-leiding bij de OWD-opdracht

Meer ruimte voor het festival!

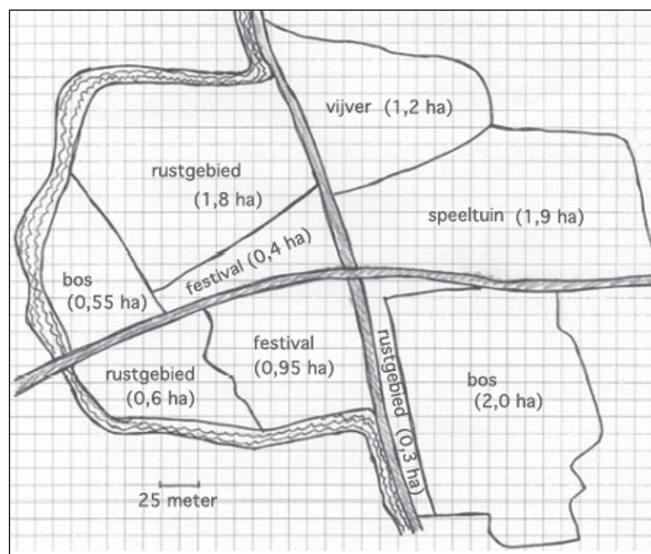
De kern van de opdracht betrof een herindeling van een park, zie figuur 3.

De festivalorganisatoren willen het liefst een minstens twee keer zo groot gebied. Rekening houden met de voorwaarden van de gemeente is hier de uitdaging. Die luiden als volgt: alle bestemmingen die het park nu heeft, moeten blijven; er moet rekening gehouden worden met de belangen van andere bezoekers van het park; de vijver blijft hetzelfde (op dezelfde plek) of wordt groter; rustgebied moet in ieder geval gedeeltelijk aan de vijver grenzen; er moet rekening worden gehouden met de kosten. De opdracht is een brief te schrijven namens de festivalorganisatie naar de gemeente, met daarin het plan van de festivalorganisatie.

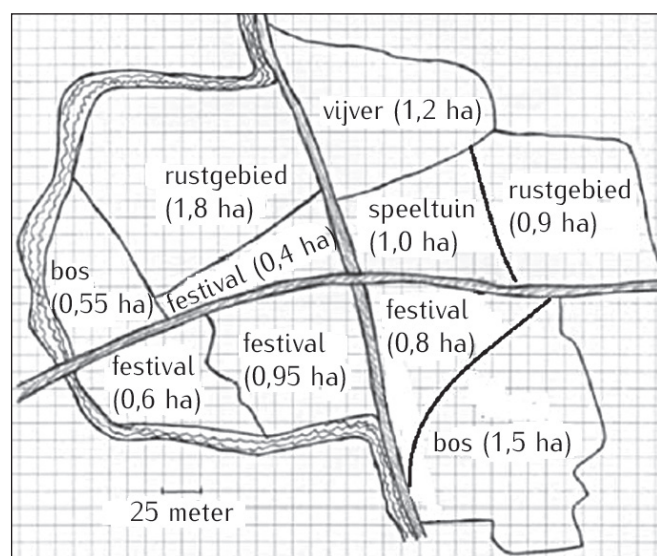
Resultaten

Het team van het Utrechts Stedelijk Gymnasium leverde een voorstel met drie mogelijke plannen aan de gemeente, gebaseerd op zeven mogelijk ideeën voor herinrichting. De veranderingen, de voordelen, de nadelen, de kosten, staan allemaal duidelijk gepresenteerd. Het team heeft drie van

de zeven ideeën als plan aan de gemeente aangeboden. Waarom precies deze keuze gemaakt is, wordt niet expliciet gemaakt. In figuur 4 zie je plan 1.



figuur 3 Herindeling van het park



figuur 4 Plan 1 van het Utrechts Stedelijk Gymnasium

Kosten		
2,0 ha bos	→1,5 ha bos	-
	→0,5 ha festival	140 × 5000 = € 700.000
0,3 ha rustgebied	→0,3 ha festival	50 × 3000 = € 150.000
0,6 ha rustgebied	→0,6 ha festival	50 × 6000 = € 300.000
1,9 ha speeltuin	→1,0 ha speeltuin	
	→0,9 ha rustgebied	30 × 9000 = € 270.000
totaal		€ 1.420.000

In dit plan komt er 1,4 ha festival bij. Hiervoor moet wel een beetje bos weg en een stuk speeltuin. Er blijft wel veel rustgebied en dat komt (relatief) verder van het festival te liggen. Er blijft ook genoeg rustgebied aan de vijver liggen. Er gaat dus wel een stukje speeltuin weg, maar dat is niet heel erg, omdat er toch niet zo veel kinderen zijn die erin willen spelen. De speeltoestellen kunnen desnoods dichter op elkaar worden gezet, waardoor er evenveel plezier voor de kinderen blijft. Een voordeel is ook dat er nu een rustgebied naast de speeltuin ligt, waar de ouders lekker kunnen uitrusten, terwijl hun kinderen zich vermaken.

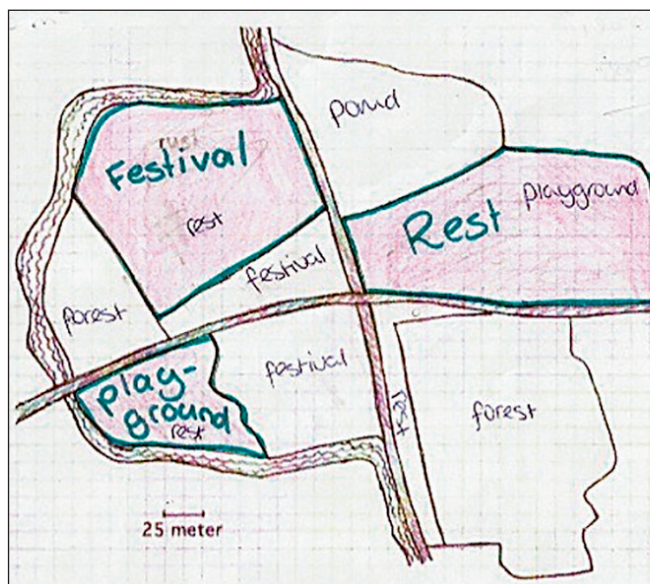
Het team van het Haarlemmermeerlyceum presenteerde twee oplossingen, en beargumenteerde duidelijk waarom ze voor de oplossing van figuur 5 kozen. Op deze school voor tweetalig onderwijs werd de opdracht in het Engels uitgevoerd:

This would mean transforming 1.9 ha of playground into rest area, which costs 30 euros per square meter and would therefore cost 570,000 euros. We would then transform 0.6 ha of rest area into playground, which costs 40 euros per square meter and would result in 240,000 euros. Lastly, it was part of our idea to transform 1.8 ha of rest area into festival ground. That costs 50 euros per square meter. This would cost 900,000 euros. Altogether, this idea would cost 1.71 million euros. This layout is, in our opinion, superior to the previous one, as all requirements have been taken into account. The rest area has been moved to the right side of the park, and the festival grounds are on the left side. This means they are further away from each other, which will result in less noise disturbance. The forest and pond have been preserved, and although the playground has become smaller, it is now located next to the festival grounds, which makes it easier for people to visit the festival while letting their children play. In addition, the festival ground is now one big area, rather than loose parts spread out over the park.

Conclusie

Zowel leerlingen als docenten waren enthousiast over de creativiteit en de systematische aanpak die bij deze opdracht werd gevraagd, en waren ook goed in staat daar vorm aan te geven.

Bij deze opdracht hebben we ons laten inspireren door de Wiskunde A-lympiade voorrondeopdracht uit schooljaar 2001-2002, over de herverkaveling van gebieden. Hoewel de opdracht in de festivalcontext een stuk eenvoudiger is



figuur 5 Plan van het Haarlemmermeerlyceum

dan de opdracht waarop hij is gebaseerd, wordt er nog steeds een beroep gedaan op vaardigheden als modelleren en systematisch redeneren, op het niveau van een derdeklasser.

De volgende OWD vindt plaats op 7 februari 2018. Aanmelden kan nog via [https://www.uu.nl/onderwijs/onderbouwwiskunedag](https://www.uu.nl/onderwijs/onderbouwwiskundedag).

Op de site zijn de volledige opdracht en de docentenhandleiding te downloaden.

 [vakbladeuclides/934haan](https://www.uu.nl/onderwijs/onderbouwwiskunedag)

Bronnen

- De Haan, D., Doorman, L. M., Jonker, V. en Wijers, M. (2012). De OnderbouwWiskundeDag. *Nieuwe Wiskrant*, 32(1), 12-16.
- De Haan, D., Jonker, V., Wijers, M. en Doorman, M. (2013). Pauzes op school. *Euclides*, 89(3), 7-9.
- Wijers, M. (2015). Vissen en erwten. *Euclides*, 91(2), 25-27.

<https://www.uu.nl/onderwijs/onderbouwwiskunedag/opdrachten> (hier zijn de opdrachten van alle OWD's te downloaden)
<http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00629/>

Over de auteur

Dédé de Haan is lid van de OnderbouwWiskunde Dag-commissie en werkzaam bij het Freudenthal Instituut.
 e-mail: d.dehaan@uu.nl

Dames en heren,

Zo een paar weken na de grote vakantie leverde ik een jaarrede in bij het bestuur. Handig, leek me, dan heeft ieder bestuurslid ruim de gelegenheid te reageren. Ik had een verhaal over een leerling met de vraag:

'Meneer... als ik het assenstelsel groter teken, worden de hoeken die ik moet meten dan ook groter?'

Mijn dag was goed en mijn antwoord wellicht wat te lang. Iets over plaatjes van olifanten en hoe groot die beesten in het echt zijn en dan toch geen verwarring.

Vmbo-programma

Neem het vmbo-programma. Intussen is het wiskundeprogramma zo'n dertig jaar oud, terwijl er toch allerlei nieuwe leerwegen in het vmbo zijn gekomen. Het is dan ook prettig dat we nu kunnen melden dat de NVvW en OCW binnen korte tijd een werkgroep kunnen instellen die het vmbo-programma onder de loep gaat nemen. Eindelijk!!! Het bestuur heeft er vele ministeriële koppen koffie voor moeten wegwerken. Nu we toch spreken over het vmbo. Met trots presenteren we vandaag de vmbo-special van *Euclides*. Zonder twijfel zal zo'n special vele nog-niet-leden in het vmbo over de streep trekken om lid te worden van onze vereniging.

Curriculum.nu

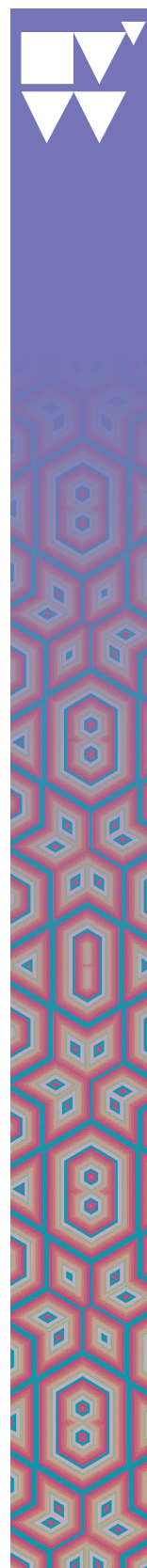
Sprekend over vernieuwing komen we vanzelfsprekend bij wat eerst Onderwijs2032 heette. Echter deze naam bleek bij velen de suggestie te wekken dat er in 2032 pas met een vernieuwing begonnen zou worden. Neen, dat is niet de bedoeling en de huidige naam is dan ook curriculum.nu. Aanvankelijk was het de bedoeling dat de vakinhoudelijke verenigingen weinig inbreng in de hele procedure zouden hebben. Echter na een hoorzitting in de Tweede Kamer, en tien moties verder, kregen de vakinhoudelijke verenigingen een steviger rol toebedeeld in het vernieuwingsproces. Op dit moment is de stand van zaken dat de commissie onderwijs van het Platform Wiskunde Nederland, die nieuw leven is ingeblazen, een visie heeft ontwikkeld op wiskunde in het voortgezet onderwijs. Ook de NVORWO, de Nederlandse Vereniging voor Onderzoek in Reken- Wiskunde Onderwijs, is uitgenodigd een document te schrijven en NVvW en NVORWO houden nauw contact over de inhoud van beider documenten. Het visiedocument staat intussen op de website en ligt ter inzage bij de stand van de vereniging. Vanaf morgen kunnen NVvW-leden een reactie geven op de website. Dit is nog maar een deel van het communicatieplan over dit document. Volg de website, raad ik aan.

Nog een opmerking over curriculum.nu. Zeker, de maatschappij verandert en dus is een permanente blik op het curriculum noodzakelijk. We zijn echter wel sceptisch over de gekozen opzet met ontwikkelteams.

Rekenonderwijs

Met verandering komen we bij de stand van zaken omtrent het rekenonderwijs. In de loop van het jaar werd de staatssecretaris door de kamer gedwongen het alternatief van de NVvW te onderzoeken. Daarop werden er twee zogeheten tafels ingericht waaraan een tweetal groepen, een voor havo/vwo en een voor vmbo spraken over een alternatief traject voor het rekenen tot en met de eindexamens. Er bleken vele hobbels te nemen en de langdurige kabinetsformatie was in dezen ook geen versneller van het proces. Lopende het proces bereikten ons wel berichten die ons grote zorgen baarden. De mogelijkheid dat er geen rekentoets meer zou zijn werd door sommige schoolleiders aangegrepen om te willen bezuinigen op het rekenonderwijs. Een wonderlijk geluid ... We hopen dan ook dat er spoedig witte rook komt vanuit de twee rekentafels zodat voor alle betrokkenen duidelijkheid bestaat over de toekomst van het rekenen in het vo. Vrolijk werd ik dan weer wel van een passage uit het regeerakkoord:

In het voortgezet onderwijs komt een alternatief voor de rekentoets. Dit alternatief treedt uiterlijk in het schooljaar 2019-2020 in werking en wordt daarmee voor alle leerlingen op alle niveaus een geïntegreerd onderdeel van het examen.





Lerarentekort en nascholing

Maar goed die schoolleiders ... Ze hebben het niet makkelijk bij het vinden van wiskundeleraars. Het lerarentekort is een grote bedreiging voor het onderwijsniveau in de wiskundelessen. Zo stond onlangs een roostermaker bij een der lerarenopleidingen bijna huilend op de stoep omdat in plaats van wiskunde de leerlingen naar huis werden gestuurd. Goed laat ik het bij dit ene voorbeeld houden. Een uitputtende opsomming van voorbeelden van het lerarentekort zou de studiedag eenvoudig kunnen vullen. Gelukkig wordt het besef breed gedragen dat na het behalen van de startbekwaamheid nascholing nodig is en blijft. Zowel op vakinhoudelijk als op didactisch gebied. Het idee om die nascholing te beoordelen en te registreren bleek zo'n bijna tien jaar geleden nog niet zo'n gek idee. Dat idee van de NVvW heeft uiteindelijk geresulteerd in een Leraren Register dat zelfs wettelijk is vastgelegd. Maar nu de uitvoering. Die is in handen van de Onderwijs Coöperatie die de lastige taak heeft gekregen alle leraren van alle vakken in een register samen te brengen. En dat ze die taak maar al te lastig vinden blijkt ook steeds weer in de moeizame gesprekken die we als bestuur hebben met de vertegenwoordigers van de Onderwijs Coöperatie. Laat ik het proberen uit te leggen met een voorbeeld uit ons dagelijks werk: als een leerling met een probleem komt, dan zijn we als wiskundeleraars gewend om de oplossing uit te leggen. Welnu zo gingen we te werk in gesprekken met de vertegenwoordigers van de Onderwijs Coöperatie die echter alleen in nieuwe problemen dachten. Je zou bijna verzuchten ... er is nog een lange weg te gaan, zeker voor de Onderwijs Coöperatie. Ik wens de toekomstige voorzitter van de Onderwijs Coöperatie dan ook veel wijsheid en sterkte toe.

Examens

Maar laten we wat dichterbij huis blijven. Een jaarlijks terugkerend iets zijn de landelijke eindexamens onder verantwoordelijkheid van het CvTE. We zien een toenemende openheid bij het CvTE en de gesprekken tussen bestuur en CvTE vinden dan ook in een goede sfeer plaats: positief kritisch en constructief. In die gesprekken is er de mogelijkheid onze zorgen te uiten over de onderwerpen die in de examenperiode de revue passeren. Zo is het digitaal afnemen van examens in het vmbo toch nog steeds een punt van zorg. Enerzijds is daar een onweerstaanbare drang de computer in te zetten terwijl anderzijds allerlei verworvenheden uit het papieren tijdperk verdwijnen. Een eenvoudig voorbeeld is het beoordelen van de tussenstappen bij de oplossing van de opgaven.

Dan komen we bij de correctie van de examens. De NVvW organiseert ieder jaar de landelijke en het afgelopen jaar de regionale bijeenkomsten om collega's in staat te stellen te spreken over het correctievoorschrift. Deze bijeenkomsten zijn vele jaren perfect georganiseerd door Grada Fokkens. Grada, bij dezen wil het bestuur je hartelijk bedanken voor al het werk rondom de organisatie van de examenbesprekingen. En toch, daarmee is nog niet alles gezegd over het nakijken van een examenwerk. De examenmakers steken veel energie in het samenstellen van het correctievoorschrift. Dat is tegenwoordig dan ook zeer gedetailleerd. En daar zit meteen een bron van discussie tussen de eerste en tweede corrector. Waar de een bolletje voor bolletje beoordeelt overziet een ander of de leerling blijk geeft van voldoende inzicht en vaardigheid bij het oplossen van de opgaven. De twee geschetste werkwijzen sporen niet altijd en op dit punt moet er toch nog een slag gemaakt worden.

Facebookgroep en Euclides

Nog een stapje dichterbij huis. De teller van de Facebookgroep *Leraar Wiskunde* staat boven de 3000. Velen gebruiken het medium om er een vraag te stellen. Misschien is dit wel een mooi moment om op te merken dat er ook materiaal geleverd kan worden. *Euclides* is weer in de loop van het jaar verschenen met het ene na het andere prachtige nummer. Tom Goris, Liesbeth Coffeng, Henk Rozenhart en de hele redactie veel complimenten weer voor jullie werk. Intussen is het Gert Treurniet en Erik van Hout gelukt om *Euclides* in digitale vorm aan te bieden. Over digitalisering gesproken: Heleen van der Ree en Erik van Hout hebben een compleet nieuwe website gebouwd. De ervaringen met de commerciële ondernemer waren van dien aard dat Heleen en Erik besloten maar zelf de hand aan de digitale ploeg te slaan. En met een prachtig resultaat dat we zo zullen tonen.

Tot slot

Het bestuur is door de leden gekozen en doet middels een jaarverslag melding van het werk dat er is verzet. Vaak moeten er beslissingen genomen worden onder grote tijdsdruk. Een uitgebreide raadpleging van de leden is dan helaas onmogelijk. Het bestuur ervaart een dergelijke gang van zaken nog

wel eens als 'zou dat niet beter kunnen?' Anders gezegd: hoe kunnen we de leden beter (of lees eerder) betrekken bij de meningsvorming over verschillende onderwerpen. Het lijkt me een prima onderwerp voor de komende tijd.

Laten we besluiten met een redenering van Hugo Brandt Corstius (met dank aan Michiel Doorman):

*Als er in de tijd iets verandert heet dat nieuws.
Dus de afgeleide van de gebeurtenissen is nieuws.
Alles wat er in de loop van de tijd gebeurt heet geschiedenis.
Ofwel geschiedenis is de integraal van gebeurtenissen in de tijd.
Conclusie: Nieuws is de tweede afgeleide van de geschiedenis.
Of anders: De geschiedenis is de versnelling van het nieuws*

Dank je wel.

OLYMPIADEPUZZEL 93-4

VERMENIGVULDIGEN



Vanaf deze jaargang vind je in nummers 2, 4 en 6 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

We moedigen je daarom aan om de puzzel ook met je klas te proberen: met enig doorzettingsvermogen zal een groepje leerlingen deze puzzel misschien ook wel kunnen oplossen.



Birgit van Dalen
Quintijn Puite

Vermenigvuldigen

Noem M het getal bestaande uit 2017 enen achter elkaar. We maken nu een getallenrij $N_0, N_1, N_2, \dots$ als volgt. Het eerste getal in de rij is $N_0 = 2017$. Elk volgende getal in de rij hangt af van zijn directe voorganger: N_{i+1} is de som van de cijfers van het product $N_i \cdot M$. Zo kunnen we alle getallen in de rij berekenen. Wat wordt nu de waarde van N_{2017} ?

Stuur je oplossingen uiterlijk 1 maart naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een kadobon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 2

Voor de puzzel Kaartjes trekken hebben we tien inzendingen ontvangen waarvan er negen de goede antwoorden bevatten. De strategie die bij opgave a vaak terugkwam, was dat mensen een voorbeeld lieten

zien van het maximale aantal kaartjes dat je kon trekken zonder 10 kaartjes met hetzelfde getal of 10 verschillende getallen te hebben getrokken, en vervolgens uitlegden waarom er bij het volgende kaartje iets 'mis' ging. Ook bij opgave b kwam deze strategie vaak terug. Een valkuil hierbij was dat alleen een voorbeeld werd gegeven van het maximale aantal kaartjes zonder 10 verschillende getallen of juist alleen een voorbeeld van het maximale aantal kaartjes zonder 10 keer hetzelfde getal, terwijl beide voorbeelden nodig waren voor een compleet bewijs. Uit de complete inzendingen hebben we Ben Groot als winnaar geloot.

De juiste uitwerking van de puzzel en de lijst met alle inzenders van een juiste oplossing zijn te vinden op de website.



vakbladeuclides.nl/934olympiadepuzzel

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW – Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

2018

2/2
en
3/2

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskunde Dagen

Organisatie: Freudenthal Instituut

wo
7/2

LANDELIJK

OnderbouwWiskundeDag

Organisatie: Freudenthalinstituut

do
15/3

LANDELIJK

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd

Organisatie: St. Wiskunde Kangoeroe

vr
16/3

LANDELIJK

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Organisatie: NWO

3/4
en
4/4

VELDHOVEN

Nederlands Mathematisch Congres

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 93

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	20 maart 2018	8 januari 2018
6	8 mei 2018	5 maart 2018
7	26 juni 2018	30 april 2018

Casio fx-CG50

e vervanger van
de vertrouwde
aantal handige
scheidend zijn de
tevige toetsen en
met minder kans
voor dezelfde

CvTE
goedgekeurd

Bekijk de video's op: www.youtube.com/c/CASIOCOLLEGE

* Inclusief btw en verzending

MODERNE WISKUNDE

Nieuw!
Ontdek de 12e editie
onderbouw:

- Drie leerroutes: elke leerling werkt op eigen niveau
- Kies hoe u wilt werken: boek, digitaal of beide
- Rekenen is opgenomen in het werkboek en online

Bestel uw beoordelingsmateriaal op:
modernewiskunde.noordhoff.nl

Nu ook voor
vmbo-basis!



Noordhoff Uitgevers



Innoveren in leren