Bijlage bij de uitwerking van puzzel 93-1 Doelloos

Korter bewijs van de extra opgave van Frans van Hoeve.

In de uitwerking van puzzel 93-1 gaven we een lang bewijs voor de extra opgave (ruim 5 bladzijden). Nadat we dat publiceerden verraste Frans van Hoeve ons met een aanzienlijk korter en eleganter bewijs.
Hieronder vindt u (een variant van) het bewijs van Frans:

Bewijs dat we met algoritme B elk drietal getallen kunnen omvormen in een drietal met minstens één nul.

Vooraf het volgende:
Als we een even en een oneven getal hebben en we voeren daarop herhaalde algoritme A-stappen uit dan ontstaat meteen een cykel (zie de uitwerking van opgave 1c en 1d). Als we die cykel stoppen één stap voordat we het oorspronkelijke getallenpaar terugkrijgen dan gaan we een 'stap terug' in de cykel. Als de getallen $2a$ en b zijn (b oneven), dan is $(a, b + a)$ de voorganger van $(2a, b)$, notatie $(2a, b) \overset{st}{\Rightarrow} (a, b + a)$.

En verder: we kunnen met algoritme B elk drietal getallen omvormen tot een drietal met twee even en één oneven getal door afwisselend algoritme A-stappen toe te passen op tweetallen oneven getallen (waarbij twee even getallen ontstaan) en factoren 2 buiten haakjes te brengen (waarbij de getallen tussen de haakjes kleiner worden). Dit proces is dus eindig en kan alleen eindigen met precies één oneven getal. We hoeven onze stelling dus alleen te bewijzen voor drietallen met precies één oneven getal.

We hoeven dus alleen te bewijzen:
Als we een drietal getallen hebben waarvan twee even en één oneven dan kunnen we met algoritme B dat drietal omvormen tot een drietal met tenminste één nul.

We bewijzen dat met volledige inductie naar de som van de twee even getallen:

1. Als de som van de twee even getallen ≤ 4 kunnen we een nul maken.
   Bewijs: als de som van 2 even getallen ≤ 4 is dan is ofwel minstens één van die getallen 0 ofwel ze zijn beide 2. Dan hebben we dus al een nul of we kunnen er een maken door $(2, 2) \Rightarrow (4, 0)$.

2. Stel dat we altijd een nul kunnen maken als de som van de even getallen $\leq 2k$ is, dan gaan we bewijzen dat het ook kan als de som $2k + 2$ is.
   Bewijs: We hebben dus drie getallen, 2 even en 1 oneven, en de som van de even getallen = $2k + 2$.

   I: Als minstens één van de even getallen een viervoud is, dus $4a$, en het oneven getal is γ, dan kunnen we een 'stap terug' uitvoeren op $4a$ en γ: $(4a, \gamma) \overset{st}{\Rightarrow} (2a, \gamma + 2a)$, met $2a$ even en $\gamma + 2a$ oneven.
   We hebben dus weer een drietal met twee even en één oneven getal, waarbij één van de even getallen $2a$ kleiner is geworden. De som van de even getallen is nu dus $2k + 2 - 2a \leq 2k$, en dus kunnen we volgens de inductieveronderstelling een nul maken.

   II: Als géén van de even getallen een viervoud is dan zijn die getallen dus $2a$ en $2b$. We voeren nu een algoritme A- stap uit op $2a$ en $2b$. Als $a = b$ levert die stap een nul op, dus we mogen aannemen dat $a < b$: $(2a, 2b) \Rightarrow (4a, 2b - 2a)$. De som van de twee even getallen is nu nog steeds $2k + 2$, maar het eerste even getal is nu een viervoud, zodat we I: kunnen toepassen om de som van de even getallen kleiner te maken.

Daarmee is het bewijs geleverd.