Uitwerking Puzzel 93-1, Doelloos

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

Volgens de titel is deze puzzel zonder doel, dus zonder bekende toepassing. Het doel is echter nul en dat is zeker in de wiskunde niet niks.
We gaan namelijk onderzoeken of we met een gegeven algoritme positieve getallen kunnen omzetten in nullen. Meer precies: gegeven zijn twee (of drie) positieve gehele getallen en daarvan willen we er een, (of twee) omzetten in een 0 door het algoritme een of meerdere keren toe te passen.
Als je er een voorstelling bij zou willen: de twee (of drie) getallen kunnen de coördinaten van roosterpunten voorstellen in een 2- (of 3-)dimensionaal assenstelsel, orthogonaal of zo je wilt als driehoeksgetallen. Het doel is dan om een (of twee) van de coördinaten 0 te maken. Kennis van getaltheorie en modulair rekenen kan helpen, maar is niet per se noodzakelijk.

Een paar tips die wellicht voor de bewijzen handig kunnen zijn:
Als de twee of drie getallen een gemeenschappelijke deler hebben kunnen we die als het ware buiten haakjes brengen. Uit de getaltheorie: de stelling van Euler: Als ggd(a, M) = 1, dan is er een k zodat a^k mod(M) = 1 mod(M). Het zou in bepaalde gevallen handig kunnen zijn om de getallen in het 2-tallige stelsel te noteren.

Er zijn makkelijke en moeilijke vragen, maar elk vraagonderdeel is 2 punten waard.

Algoritme A:

We beginnen tweedimensionaal, ofwel twee getallen. We starten met twee gehele positieve getallen a en b.
We verminderen steeds de grootste van de twee met de kleinste en verdubbelen de kleinste, dus als $a \geq b$ krijgen we $(a - b, 2b)$

Voorbeeld:
Met $(a, b) = (9, 1)$ wordt dit achtereenvolgens (8, 2), (6, 4), (2, 8), (4, 6),... Als punt komt hij dus nooit op een as terecht, maar komt hij in een cykel: als we het kleinste getal steeds als eerste noemen wisselen de getallenparen (4, 6) en (2, 8) elkaar af.
Het is niet zo moeilijk in te zien dat de som van de twee getallen constant blijft.

Ga na dat bij herhaald toepassen van algoritme A er drie mogelijkheden zijn:
I) Een van de getallen wordt na zekere tijd 0.
II) We krijgen geen 0, maar wel direct een cykel, ofwel als we starten met (a, b) hebben we na een tijdje weer (a, b) of (b, a). Voor het bepalen van de lengte van zo'n cykel beschouwen we daarbij (a, b) en (b, a) als gelijk.
III) We krijgen ook een cykel (zonder 0), maar via een aanloop. Punt (9, 1) is dus een voorbeeld van III, via een aanloop komt hij in een cykel van lengte 2.

Opgave 1a: Zoek een voorbeeld van mogelijkheid I.

Uitwerking: Voorbeelden:
(1, 3) ⇒ (2, 2) ⇒ (0, 4).
(5, 15) ⇒(10, 10) ⇒ (0, 20)
(3, 5) ⇒ (6, 2) ⇒ (4, 4) ⇒ (0, 8)
(11, 5) ⇒ (6, 10) ⇒ (12, 4) ⇒ (8, 8) ⇒ (0, 16)

Opgave 1b: Zoek een voorbeeld (niet 9, 1) dat al of niet direct in een cykel van lengte 2 terecht komt. Idem ook lengte 3 en lengte 4.

Uitwerking: Voorbeeld van lengte 2 (de cykel is steeds met rood aangegeven):

(2, 3) ⇒ (4, 1) ⇒ (3, 2) = (2, 3)

Voorbeelden van lengte 3:

(2, 5) ⇒ (4, 3) ⇒ (1, 6) ⇒ (2, 5)
(1, 8) ⇒ (2, 7) ⇒ (4, 5) ⇒ (8, 1) = (1, 8)
(3, 11) ⇒ (6, 8) ⇒ (12, 2) ⇒ (10, 4) ⇒ (6, 8) (met aanloop)

Voorbeelden van lengte 4:

(11, 4) ⇒ (7, 8) ⇒ (14, 1) ⇒ (13, 2) ⇒ (11, 4)
(16, 1) ⇒ (15, 2) ⇒ (13, 4) ⇒ (9, 8) ⇒ (1, 16) = (16, 1)

Opmerkingen:
Het 2e voorbeeld bij opgave 1a is, op een factor 5 na, gelijk aan het eerste voorbeeld. Het zal duidelijk zijn dat als op een bepaald punt in de reeks de getallen een gemeenschappelijke deler hebben, dat in alle volgende paren zo blijft. Het kan dus zin hebben om zo'n deler 'buiten haakjes' te zetten. Het tweede en vierde voorbeeld van 1a worden dan:
(5, 15) = 5·(1, 3) ⇒5·(2, 2) ⇒10·(1, 1) ⇒20·(0, 1) en
(11, 5) ⇒ (6, 10) = 2 ·(3, 5) ⇒2·(6, 2) ⇒4·(3, 1) ⇒4·(2, 2) ⇒8·(1, 1) ⇒16·(0, 1).
En het derde voorbeeld met cykel van lengte 3:
(3, 11) ⇒ (6, 8) = 2·(3, 4) ⇒2·(6, 1) ⇒2·(5, 2) ⇒2·(3, 4)

We definiëren eerst enkele variabelen: a_0 en b_0 de startgetallen, en a_i en b_i de getallen verderop in de reeks. g_i = ggd(a_i, b_i). In de notatie hierboven is g_i dus steeds het getal buiten de haakjes en a_i en b_i de producten van g_i en de getallen tussen de haakjes. De som s van de getallen verandert niet als je algoritme A toepast, dus de som van de startgetallen is ook de som van alle paren, dus steeds $a_i + b_i = s$.
In de notaties hierboven valt een aantal zaken op die we gemakkelijk algemeen kunnen bewijzen:

1. Alle buiten haakjes gebrachte factoren zijn delers van s.
   Bewijs: als p een deler is van a_i en b_i dan is p ook een deler van de som $s = a_i + b_i$.
2. De buiten haakjes gebrachte factor word na een algoritme A-stap nooit kleiner.
   Bewijs: als p een deler is van a_i en b_i dan is p ook een deler van het verschil tussen a_i en b_i en van het dubbele van één van de twee.
3. Als de buiten haakjes gebrachte factor na een algoritme A-stap groter wordt gaat het steeds om een factor 2.
   Bewijs: Stel de getallen tussen de haakjes zijn a en b met $a < b$, dan is $a = a_i / g_i$ en $b = b_i / g_i$ en ggd(a, b) = 1 en dus ook ggd(a, $b - a$) = 1. Als nu na een algoritme A-stap $2a$ en $b - a$ een gemeenschappelijke deler hebben dan kan dat alleen 2 zijn.
4. Na een algoritme A-stap wordt de buiten haakjes gebrachte factor twee keer zo groot dan en slechts dan als de som van de getallen tussen de haakjes vóór die stap even was.
   Bewijs: Met dezelfde variabelen als in punt 3:
   I: Als de som van a en b even was: dan zijn a en b oneven (want ggd(a, b) = 1). Dan zijn $2a$ en $b - a$ beide even, en $2a$ bevat precies één factor 2. Dus is ggd($2a$, $b - a$) = 2.
   II: Als de som van a en b oneven was: Dan is $b - a$ oneven en is er na de algoritme A-stap geen gemeenschappelijke factor 2.
5. Er ontstaat een nul dan en slechts dan als de som van de getallen tussen de haakjes een 2-

macht is.
Bewijs:
I: Als de som van de getallen tussen de haakjes een tweemacht is, wordt die som bij elke volgende stap gehalveerd totdat hij gelijk wordt aan 1. Dan zijn de getallen tussen de haakjes dus 0 en 1.
II: Als het geen tweemacht is wordt die som op een bepaald moment oneven en >1, en gezien punt 3 blijft de som daarna constant en dus oneven >1. De twee getallen kunnen dan niet gelijk worden, en dus kan er ook geen nul ontstaan.

Omdat we vooral geïnteresseerd zijn in het verschijnen van nullen en in cykels zullen we in het vervolg het getal buiten de haakjes weglaten en dus alleen delen door de gemeenschappelijke factor. We mogen dan steeds veronderstellen dat de g.g.d. van de getallen 1 is.

Opgave 1c: Hoe kun je aan de startgetallen direct bepalen of we met mogelijkheid I , II dan wel III hebben te doen?
En **Opgave 1d:** Geef een bewijs van uw conclusies bij opgaven 1c.

Uitwerking:
Omdat de som van de getallen gelijk blijft is het aantal mogelijke paren begrensd. Na een bepaald getallenpaar volgt altijd dezelfde opvolger, dus er ontstaat altijd een cykel (eventueel een cykel van 1 getallenpaar)

Mogelijkheid I: Een van de getallen wordt 0 (en dus een cykel van 1 getallenpaar).
De punten 1 tot en met 5 hierboven tonen aan dat dit gebeurt dan en slechts dan als s behalve g_0 = ggd(a_0, b_0) alleen factoren 2 bevat. Dus als $s = g_0 \cdot 2^k$.

Mogelijkheden II en III: Als dat niet zo is dan is $s / g_0 = 2^k \cdot p$ met p oneven, en dan is na k algoritme A-stappen $s / g_k = p$. Daarna volgt een reeks waarin het getal buiten de haakjes constant blijft en de som van de getallen binnen de haakjes = p, dus oneven. Omdat er binnen de haakjes dus steeds maar één van de twee getallen even is, (en dat is dus het getal dat ontstaan is door verdubbeling) ligt niet alleen de opvolger, maar ook de voorganger van elk paar eenduidig vast. En dat betekent dat alle paren vanaf dat moment deel uitmaken van een cykel. Bijzonder geval is $b_0 = 2a_0$, zodat tussen de haakjes (1, 2) overblijft, met cykellengte 1.

Mogelijkheid II: $k = 0$. Er ontstaat een cykel zonder aanloop (dus het eerste getallenpaar is onderdeel van de cykel)

Mogelijkheid III: $k > 0$. Er ontstaat een cykel met een aanloop.
(We kunnen natuurlijk ook zeggen dat mogelijkheid 1 een bijzonder geval is van mogelijkheid 3 met een cykellengte van 1.)

Sommige inzenders bewezen mogelijkheid I met volledige inductie, maar zoals hierboven is aangetoond kan het ook rechtstreeks.

Harm Bakker gaf een erg mooi bewijs met behulp rekenen modulo s, dat we hier wat verkort en in iets gewijzigde vorm weergeven.
Omdat voor elke i geldt
$a_i + b_i = s$ geldt: $b_i \equiv -a_i \bmod(s)$.
Bij elke algoritme A-stap wordt ofwel a_i ofwel b_i verdubbeld,

Dus als a_i verdubbelt hebben we $a_{i+1} = 2a_i$, dus $b_{i+1} \equiv -a_{i+1} \bmod(s) \equiv -2\, a_i \bmod(s).\equiv$
$\equiv 2b_i \bmod(s)$. Dus als a_i verdubbelt, verdubbelt b_i ook en omgekeerd.
We krijgen dus: $a_i \equiv a_0 \cdot 2^i \bmod(s)$ en $b_i \equiv b_0 \cdot 2^i \bmod(s)$.
Dat levert een cykel op als voor zekere k geldt:
$a_0 \equiv a_0 \cdot 2^k \bmod(s)$ en dus $2^k \equiv 1 \bmod(s)$ en dus is er een n zodanig dat $2^k = 1 + n \cdot s$ dus $2^k =$
$n \cdot s = 2^k - 1$., en dat betekent dat s oneven moet zijn. De conclusie hieruit is:
Als (a_0, b_0) op een cykel ligt, dan is $s = (a_0 + b_0)$ oneven.
Met behulp van de stelling van Euler is ook het omgekeerde te bewijzen.

Dan het verschijnen van een 0: Daarvoor moet voor zekere k gelden:
$a_k \equiv a_0 \cdot 2^k \bmod(s) \equiv 0 \bmod(s)$ en dus:
$\text{ggd}(a_0, s) \cdot 2^k \bmod(s) \equiv 0 \bmod(s)$. Nu geldt (in onze notatie): $\text{ggd}(a_0, s) = \text{ggd}(a_0, b_0) = g_0$ en dan wordt dat:
$2^k \bmod(s) \equiv 0 \bmod(s / g_0)$, dus $s / g_0 = 2^k$.

Algoritme B:

En nu driedimensionaal: punt (a, b, c), ofwel drie getallen. Weer met alle drie geheel en positief. We moeten nu het algoritme iets nader specificeren. We kiezen nu elke keer twee van de drie getallen (een paartje) en passen daar het eerder beschreven algoritme A op toe. Het derde niet gekozen getal blijft ongewijzigd.

Zo geeft bijvoorbeeld punt (a, b, c) , met $a \geq c$ bij de keuze van het paartje (a, c) de getallen $(a - c, b, 2c)$. Daarna kun je hier weer een paartje uit kiezen en de handeling herhalen. Er zijn dus bij elke stap drie keuzemogelijkheden om een paartje te kiezen.

Opgave 2a: Bij welke startgetallen (een verband) kunnen we nu twee nullen krijgen, ofwel als punt kunnen we zorgen dat het op een as terechtkomt? Geef, als je geen algemene regel kunt vinden, een voorbeeld.

Uitwerking:
We krijgen altijd 2 nullen als we beginnen met 3 getallen waarvan de som een tweemacht is, maar natuurlijk ook als de som gelijk is aan $g_0 \cdot 2^k$, waarbij g_0 de ggd is van de 3 startgetallen.

Er werd niet gevraagd naar een bewijs, maar meerdere inzenders gaven dit wel, vaak met volledige inductie.

We beginnen met twee voorbeelden. We laten daarbij het getal buiten haakjes weg, maar geven wel steeds weer door welk getal we delen. We geven aan welk paartje we kiezen met een kleurtje: het grootste getal van het paartje met rood, het kleinste met blauw.
$(12, 15, 37) \overset{:2}{\Rightarrow} (6, 15, 11) \overset{:2}{\Rightarrow} (3, 2, 11) \overset{:2}{\Rightarrow} (3, 1, 4) \overset{:2}{\Rightarrow} (1, 1, 2) \overset{:2}{\Rightarrow} (1, 0, 1) \overset{:2}{\Rightarrow} (1, 0, 0)$
$(5, 25, 34) \overset{:2}{\Rightarrow} (5, 10, 17) \overset{:2}{\Rightarrow} (5, 5, 6) \overset{:2}{\Rightarrow} (5, 0, 3) \overset{:2}{\Rightarrow} (1, 0, 3) \overset{:2}{\Rightarrow} (1, 0, 1) \overset{:2}{\Rightarrow} (1, 0, 0)$
Net als bij het maken van een nul bij twee cijfers is de som van de begingetallen een tweemacht. In de voorbeelden is de ggd van de begingetallen gelijk aan 1, maar dat hoeft natuurlijk niet. We kunnen de begingetallen alle drie met hetzelfde getal vermenigvuldigen en dan krijgen we, omdat we gemeenschappelijke factoren buiten haakjes zetten, precies dezelfde reeks als hierboven.

In wezen is het mechanisme dat ervoor zorgt dat de nullen verschijnen hetzelfde als bij twee getallen:

- Ook bij algoritme B blijft de som van de getallen gelijk.
- De som van de getallen binnen de haakjes blijft steeds even omdat het een tweemacht is.
- We hebben steeds twee oneven getallen en een even.
- Daarom kunnen we een algoritme A-stap uitvoeren op 2 oneven getallen, die twee even getallen oplevert, waarvan minstens één met precies één factor 2.
- We brengen meteen weer een factor 2 buiten haakjes, en hebben dan weer twee oneven getallen en één even.
- Dus kunnen we steeds doorgaan, totdat er eerst één nul en dan twee nullen verschijnen.

Opgave 2b: Probeer met de startgetallen (18, 19, 30) en (34, 57, 70) bij elk minstens een nul te maken en dat in zo min mogelijk stappen.

Uitwerking: We proberen een tweetal getallen te krijgen zodanig dat de som ervan gelijk is aan $g \cdot 2^k$ waarbij g de ggd is van de twee getallen.

Bij (18, 19, 30) staat dat al voor ons klaar: ggd(18, 30) = 6 en 18 + 30 = 48 = $6 \cdot 2^4$.
(18, 19, 30)⇒(36, 19, 12) ⇒(24, 19, 24) ⇒(0, 19, 48)

Bij (34, 57, 70) moeten we wat puzzelen. Als we de cykel van (34, 57) een paar stappen volgen krijgen we: (34, 57) ⇒ (68, 23) ⇒ (45, 46) ⇒ (90, 1). Voor 90 en 70 geldt: ggd(90, 70) = 10, en de som is 160 = 10 · 16. Dat geeft de oplossing:
(34, 57, 70) ⇒ (68, 23 , 70) ⇒ (45, 46, 70) ⇒ (90, 1, 70) ⇒ (20, 1, 140) ⇒ (40, 1, 120) ⇒ (80, 1, 80) ⇒ (0, 1, 160)

Het lijkt erop dat het eigenlijk altijd lukt om minstens één nul te maken, maar een bewijs of dat al of niet waar is kregen we niet sluitend. Wel lukt dat bijvoorbeeld als een van de getallen een macht is van 2, dus 2^k ($k \geq 0$ en geheel). Of met twee getallen zoals bedoeld in opgave 1c.

Opgave 2c: Kun je aantonen dat, als een van de getallen een tweemacht is (2^k) er altijd een nul is te maken? Als het niet lukt voor willekeurige k, toon het dat aan voor $k = 0$ en $k = 1$.

Uitwerking: We beginnen met $k = 0$:
We hebben dan (a_0, b_0, c_0) met $a_0 = 1$ en $b_0 < c_0$ (als $b_0 = c_0$ zijn we meteen klaar)
We gaan gebruik maken van een tip die we bij de puzzel gaven, om het 2-tallig stelsel te gebruiken. We schrijven b_0 in het tweetallig stelsel: $b_0 = \sum_{j=0}^{k} x_j . 2^j$,
waarin $x_j = 0$ of $x_j = 1$ en $x_k = 1$.
2^k is dus de hoogste 2-macht in b_0.
We gaan nu $k + 1$ keer algoritme A toepassen, steeds met a_i als kleinste getal. Dat wordt dus k maal verdubbeld, en is dus is na de i-de stap $a_i = 2^i$
We gebruiken dit om de 2-machten in de somnotatie van a stuk voor stuk te verwijderen, dus als het eerste getal gelijk is aan 2^i, en $x_i = 1$, dan passen we algoritme A toe op a_i en b_i.
Is $x_i = 0$, dan passen we het algoritme toe op a_i en c_i.
Na $k + 1$ stappen zijn alle termen uit de somnotatie van b_0 verwijderd, dus is $b_{k+1} = 0$,

We moeten alleen nog controleren of c niet voortijdig ‘op’ is.

De som van de drie getallen was aan het begin $s = a + b + c > 1 + 2b$. Omdat 2^k de hoogste 2-macht in b is hebben we $b \geq 2^k$, dus $s > 1+2^{k+1}$ Aan het eind is $a_{k+1} = 2^{k+1}$, en $b_{k+1} = 0$. Omdat de som gelijk blijft is het derde getal dus >1 en was het derde getal de laatste keer dat het meedeed in het algoritme nog groot genoeg.

Een eenvoudig voorbeeld: Maak een nul in (1, 19, 23):
We schrijven 19 als 19 = 1 + 2 + 16. We voeren dus een algoritme A-stap uit op a en b als a = 1, 2 of 16, anders op a en c:
(1, 1 + 2 + 16, 23) ⇒(2, 2 + 16, 23) ⇒(4, 16, 23) ⇒(8, 16, 21) ⇒(16, 16, 13) ⇒(32, 0, 13)

Als één van de getallen 1 is kunnen we dus zorgen dat er een 0 verschijnt.

Laat nu één van de getallen gelijk zijn aan 2^k. Als beide andere getallen ook even zijn dan brengen we zoveel mogelijk factoren 2 buiten haakjes. Nu is één van de getallen oneven.
Als dat 1 is kunnen we bovenstaande procedure toepassen en zijn we klaar.
Zo niet dan hebben we een tweemacht en ook een oneven getal. Als we daarop herhaald algoritme *A* toepassen dan krijgen we een cykel zonder aanloop. Op een gegeven moment keert dus diezelfde tweemacht terug. Maar dat kan alleen ontstaan als er daarvoor een 1 gestaan heeft die herhaald als kleinste getal bij het algoritme betrokken was. We stoppen de cykel op het moment dat die 1 er stond, en kunnen dan bovenstaande procedure toepassen.

Monica Woldinga kwam met een mooie oplossing in het geval dat $a < 2^k < c$. Dan kunnen we de volgende algoritme-*A* stappen maken:
$(a, 2^k, c) \Rightarrow (2a, 2^k - a, c) \Rightarrow (2a, 2^{k+1} - 2a, c - 2^k + a)$
De som van de eerste twee getallen is nu 2^{k+1}, dus als we daarop herhaald algoritme *A*-stappen toepassen ontstaat er een nul.
Dan moet natuurlijk nog wel worden aangetoond dat we, als de tweemacht niet de middelste is, we een tweemacht in het midden kunnen krijgen.

Extra: Onderzoek (bewijs) of het al of niet lukt voor elk willekeurig drietal om minstens één nul te maken. (Zie hierover de toegift aan het eind van deze uitwerking)

Algoritme C:

Weer voor drie getallen maar nu met extra keuzemogelijkheden:
We kiezen ook hier weer een paartje. We trekken de kleinste van die twee weer af van de grootste. Ook nu gaan we een getal verdubbelen. Dat mag nu de kleinste van het paartje zijn of het derde, niet gekozen getal. Er is wel een beperking: zodra een van de getallen 0 is mag die niet meer meedoen, dus kunnen we alleen verder met de andere twee getallen volgens algoritme A.

Met de getallen ($a \geq b \geq c$) kiezen we bijvoorbeeld het paartje (a, c). Een van de nieuwe getallen wordt dan $a - c$. Nu mogen we kiezen uit b en c. Een van de twee blijft onveranderd en de andere verdubbelen we. Dat kan dus worden ($a - c$, b, $2c$) of ($a - c$, $2b$, c).
Met $a \geq b \geq c$ zijn er nu dus zes mogelijkheden: drie mogelijkheden om een paartje te kiezen en twee mogelijkheden voor verdubbeling.
Voorbeeld: voor (9, 5, 3) kunnen we na de eerste stap krijgen: (4, 10, 3), (4, 5, 6), (6, 10, 3), (6, 5, 6), (18, 2, 3) of (9, 2, 6). Vervolgens kunnen we bepalen wat de volgende stap ons allemaal kan opleveren. Maar met bijvoorbeeld (0, 10, 3) krijgen we alleen (0, 7, 6), vervolgens (0, 1, 12), (0, 2, 11), (0, 4, 9), (0, 8, 5), (0, 3, 10), ...

Opgave 3a: Onderzoek of en zo ja hoe je van de getallen (4, 5, 6) twee nullen kunt maken, ofwel een punt op een van de assen. Idem voor (34, 57, 70).

Uitwerking:
We weten dat we 2 nullen kunnen maken als de som *s* van de getallen een tweemacht is. Dat is in de opgaven niet zo, maar, anders dan bij algoritme *B* kunnen we met algoritme *C* de som veranderen. Als we een paartje kiezen en dan de kleinste van het paartje verdubbelen, dan verandert de som niet, maar als we het derde getal verdubbelen (en het derde getal is ongelijk aan de kleinste van het paartje) dan verandert de som wel. Concreet: als we paartje a, b kiezen met $a \geq b$ en we verdubbelen c, dan stijgt de som met $c - b$ (of daalt met $b - c$).
Kijken we naar (4, 5, 6) dan is de som 15. Als we dat met 1 laten stijgen dan zijn we klaar. Dat lukt door het paartje (6, 4) te kiezen en dan 5 te verdubbelen:

We geven het paartje weer aan met rood en blauw, en het te verdubbelen getal door onderstrepen.
$(4, \underline{5}, 6) \Rightarrow (4, 10, \underline{2}) \Rightarrow (\underline{4}, 8, 4) \Rightarrow (\underline{8}, 8, 0) \Rightarrow (16, 0, 0)$

(34, 57, 70) vraagt wat meer puzzelwerk. Hoewel we niet expliciet om de kortste route hadden gevraagd geven we hier de kortste route die werd gevonden en dat was door door Harm Bakker:
$(34, \underline{57}, 70) \Rightarrow (\underline{34}, 114, 36) \Rightarrow (68, 114, \underline{2}) \Rightarrow (68, 112, \underline{4}) \Rightarrow (64, 112, \underline{8}) \Rightarrow (64, 48, \underline{16}) \Rightarrow (64, \underline{32}, 32) \Rightarrow (\underline{64}, 64, 0) \Rightarrow (128, 0, 0)$

Opgave 3b: Kun je bewijzen dat er voor elk gekozen drietal minstens één nul is te maken? Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Uitwerking: Hans Linders gaf een kort maar krachtig bewijs:
Er is altijd minstens één 0 te maken.
Methode: Doe steeds de grootste min de middelste en verdubbel de kleinste. Dan wordt de som van de drie getallen steeds kleiner. Immers de middelste gaat eraf en de kleinste komt erbij. Dit blijft kleiner worden, behalve als de kleinste twee getallen even groot zijn. Maar dan kun je een 0 maken!

Opgave 3c: Kun je bewijzen dat er altijd twee nullen zijn te maken? Zo nee, geef een tegenvoorbeeld. (Als je dit hebt bewezen is opgave 3b natuurlijk overbodig).

Uitwerking: Een tegenvoorbeeld is gemakkelijk te vinden: als de drie startgetallen gelijk zijn is er maar één eerste stap mogelijk: $(a, a, a) \Rightarrow (2a, 0, a)$, met meteen een nul en daarna als enige mogelijkheid een cykel van lengte 1.
Hoewel dat eigenlijk niet onze bedoeling was, is dat natuurlijk wel een goed antwoord.

Gelukkig probeerden veel inzenders nog wel de vraag te beantwoorden of het in alle andere gevallen wel lukt. Een aantal inzenders wist te bewijzen dat het dan wel lukt. In de meeste gevallen met een bewijs dat, net als het bewijs van Hans Linders hierboven, gebaseerd is op het steeds kleiner maken van de getallen. Deze bewijzen zijn soms wat onoverzichtelijk omdat er allerlei verschillende gevallen moeten worden onderscheiden om te voorkomen dat er aan het eind één nul verschijnt en geen twee.
Wij vonden onderstaand bewijs gemakkelijker te volgen:

Het bewijs gaat in twee stappen: we bewijzen eerst dat elk drietal getallen behalve (a, a, a) kan worden omgezet in een drietal van de vorm: $(a, 1, 1)$ met $a > 1$. Vervolgens laten we zien dat we de waarde van a steeds kleiner kunnen maken, tot aan een waarde waarvoor we twee nullen kunnen genereren.

Stelling I: **Elk drietal (behalve (p, p, p) kunnen we met behulp van algoritme C omzetten in $(a, 1, 1)$ met $a > 1$.**
Voor het bewijs gebruiken we een bekend algoritme voor het vinden van de ggd van twee getallen: trek steeds de kleinste van de grootste af tot je twee gelijke getallen krijgt. Dat is de ggd.

Bewijs van stelling 1:
We beginnen met 3 getallen a_0, b_0, c_0 (niet alle drie gelijk) met ggd$(a_0, b_0, c_0) = 1$. Dat is geen beperking, want een eventuele grotere ggd kunnen we buiten haakjes brengen. Van die drie is er dus minstens één oneven.
Kies nu 2 getallen waarvan minstens één oneven, b.v. a_0 en b_0 en neem een aantal stappen als volgt:
Trek van a_j en b_j de kleinste van de grootste af en verdubbel c_j. Na een aantal stappen geldt dan: $a_i = b_i =$ ggd$(a_0, b_0) = g$ met g oneven, en $c_i = c_0 \cdot 2^i$.
Kies nu het paar b_i en c_i en neem opnieuw een aantal stappen, dit keer door van c_j en b_j de kleinste van de grootste af te trekken en a_j te verdubbelen. Op een goed moment is dan $c_k = b_k =$ ggd(c_i, b_i) en $a_k = a_i \cdot 2^{k-i}$.
Nu is ggd$(c_i, b_i) =$ ggd$(b_0 \cdot 2^i, g)$, en omdat g oneven is, is dat gelijk aan ggd$(b_0, g) =$ ggd$(a_0, b_0, c_0) = 1$.
We hebben nu dus $(a_k, b_k, c_k) = (a_i \cdot 2^{k-i}, 1, 1)$.
We controleren nog of $a_k > 1$: Als $a_k = 1$ dan moet $a_i = 1$ en $k = i$. We hebben dan $(a_i, b_i, c_i) = (a_k, b_k, c_k) = (1, 1, 1)$. Als $c_i = c_0 \cdot 2^i = 1$ dan is ook $i = 0$ dus $(a_0, b_0, c_0) = (a_i, b_i, c_i) = (1, 1, 1)$, maar de begingetallen waren niet alle drie gelijk.
Dus is $(a_k, b_k, c_k) = (a_k, 1, 1)$ met $a_k > 1$.
Q.E.D.
Stelling 2: **In elk drietal $(a, 1, 1)$ met $a > 1$ kunnen we met behulp van algoritme C twee nullen genereren.**
Voor het bewijs laten we zien dat we eerst in stappen de waarde van a steeds kleiner kunnen maken, en dan voor een klein aantal kleine waarden van a laten zien dat we twee nullen kunnen genereren.

Bewijs van stelling 2:
Als $a_i > 5$ passen we twee keer algoritme C toe als volgt:
Als a_i even:
$(a_i, \underline{1}, 1) \Rightarrow (a_i - 1, 2, \underline{1}) \Rightarrow (a_i - 2, 2, 2) = 2 \cdot (a_{i+1}, 1, 1)$ met $a_{i+1} = (a_i - 2)/2$
En als a_i oneven:
$(a_i, \underline{1}, 1) \Rightarrow (a_i - 1, 2, \underline{1}) \Rightarrow (a_i - 3, 2, 2) = 2 \cdot (a_{i+1}, 1, 1)$ met $a_{i+1} = (a_i - 3)/2$

We kunnen zo dus de waarde van a binnen de haakjes steeds meer dan halveren en krijgen zo een steeds lagere waarde van a.
Als we doorgaan krijgen we uiteindelijk $a = 0$ of $a = 1$.
$a = 0$ is prima, dan hebben we $(0, 1, 1)$ en dan hebben we de volgende stap twee nullen.
$a = 1$ is niet prima, want na $(1, 1, 1)$ krijgen we maar één nul, dus als we daarop dreigen uit te komen moeten we stoppen.
Vanaf 2 en 3 komen we op 0 uit, dus dan gaan we nog een stap verder.
Vanaf 4 en 5 komen we op 1 uit, dus moeten we laten zien dat we vanuit $(4, 1, 1)$ en $(5, 1, 1)$ twee nullen kunnen krijgen.

$(4, \underline{1}, 1) \Rightarrow (3, \underline{2}, 1) \Rightarrow (\underline{2}, 4, 1) \Rightarrow (4, 3, \underline{1}) \Rightarrow (4, \underline{2}, 2) \Rightarrow (\underline{4}, 4, 0) \Rightarrow (8, 0, 0)$
$(5, \underline{1}, 1) \Rightarrow (4, \underline{2}, 1) \Rightarrow (3, 4, \underline{1}) \Rightarrow (\underline{2}, 4, 2) \Rightarrow (\underline{4}, 4, 0) \Rightarrow (8, 0, 0)$

In alle gevallen krijgen we twee nullen.
Q.E.D.

Toegift:

Als **extra opgave** vroegen we of we met algoritme B altijd ten minste één nul kunnen maken. In opgave 2b zagen we al dat dat kan als één van de drie getallen een tweemacht is. We moeten dus nog bewijzen (of weerleggen) dat we die tweemacht altijd kunnen krijgen.
In de opgaven hierboven zeggen we dat wij het bewijs niet sluitend krijgen. Dat was zo toen we de opgaven publiceerden in *Euclides*, en dat was tot voor kort nog steeds zo. Er zijn wel pogingen gedaan door de inzenders, maar die zijn, net zomin als onze eerdere eigen pogingen, sluitend.
In het volgende is een aantal beweringen die niet expliciet in de uitwerkingen van de opgaven zijn bewezen voorzien van een nummertje, dat verwijst naar een bewijs na deze toegift.

We laten hieronder iets zien van die pogingen:

Die pogingen leiden wel tot een procedure die iedere keer een 0 oplevert, maar zonder bewijs van garantie. We zullen die procedure dan ook gebruiken om mee te beginnen en noemen dat procedure 1. Daarna volgt een procedure 2 die ons wel garandeert een 0 te maken.

Vanuit een willekeurig drietal getallen kunnen we altijd door buiten haakjes zetten en algoritme A-stappen zorgen dat er binnen de haakjes drie getallen a, b en c komen waarvoor geldt: ggd$(a, b, c) = 1$ en van de drie getallen zijn er twee even en één oneven (1).
Bovendien: als we eenmaal een oneven en twee even getallen met ggd = 1 hebben dan blijft dat zo bij alle verdere algoritme A-stappen (2). We kunnen ons dus tot dat geval beperken.

We hebben dus startgetallen (a, b, c) met ggd$(a, b, c) = 1$, a oneven en b en c even. We schrijven nu: $a = \alpha$, $b = \beta \cdot 2^p$, $c = \gamma \cdot 2^q$ met α, β en γ oneven.

Definitie: in het vervolg noemen we α, β en γ de **kernen** van de getallen.
Er zijn op elk moment drie kernen van de drie getallen, en bij elke algoritme A-stap verandert er één van die kernen.

We gaan kijken naar het minimum van de drie kernen. Als dat minimum 1 is, dan is één van de getallen een tweemacht en kunnen we met de methode van opgave 2c een nul maken. We proberen dus dat minimum zo klein mogelijk te maken.

Procedure 1
We gaan daarom een aantal stappen nemen om dat minimum te verkleinen:

1. Eerst maken we het oneven getal gelijk aan het minimum van de kernen als volgt:
   Als het minimum α is dan zijn we klaar.
   Als het minimum β is dan gaan we algoritme A-stappen uitvoeren op α en $\beta \cdot 2^p$. Omdat dat een even en een oneven getal is weten we uit opgave 1c en 1d dat we een cykel zonder aanloop krijgen. We stoppen met de cykel bij het kleinste getal dat in de cykel voorkomt. Dat is $\leq \beta$ en oneven (3a en b) en dus is het oneven getal nu het (nieuwe) minimum van de kernen.

Als het minimum γ is gaat het op dezelfde manier.

Het kleinste getal is nu oneven en gelijk aan het minimum van de kernen, en dat blijft zo bij de volgende stappen (2 en 3), die steeds kunnen worden herhaald:

2. We voeren weer algoritme A-stappen uit op het kleinste (oneven) getal en één van de twee even getallen, en we stoppen bij het kleinste getal uit de cykel. En dat is natuurlijk kleiner of gelijk aan het oude kleinste getal en weer oneven.
   Daarna doen we hetzelfde met het nieuwe kleinste getal en het andere even getal.

   Dit herhalen we tot het kleinste getal 1 is of tot het kleinste getal niet meer kleiner wordt.

3. We voeren één algoritme A-stap uit op de twee even getallen, wat weer twee nieuwe even getallen oplevert, zodat we terug kunnen gaan naar stap 2.

Deze procedure stopt als ofwel het minimum van de kernen 1 is (en dan kunnen we de methode van opgave 2c toepassen om een nul te maken) ofwel als het kleinste getal gedurende een volledige cykel van de twee even getallen niet meer kleiner geworden is.

Er is nog een ‘noodknop’: Als we niet meer verder komen kunnen we in één van de cykels stoppen bij een getal dat net iets groter is dan het minimum. Dan hebben we weer een nieuwe situatie en dus kunnen we verder gaan met de cykels en hopen dat het nu wel lukt.

Het lijkt erop dat we zoveel mogelijkheden hebben dat het altijd wel moet lukken om 1 (en dan nul) te krijgen. Vooral ook omdat we bij het uitschrijven van cykels voor getallenparen waarvan de ggd =1 heel vaak zien dat de cykel het getal 1 bevat. Maar helaas is dat niet altijd zo, met name niet als de som van de twee getallen een tweemacht + 1 of een tweemacht – 1 is. Maar ook niet bij grote delers daarvan. Niet al te grote voorbeelden: 43 = 129 : 3 en 41 = 1025 : 25 (U kunt dat zelf proberen door cykels met getallen waarvan de som 41 of 43 is uit te schrijven).

We zijn er niet in geslaagd om een drietal getallen te vinden waarbij het proces inderdaad stopt voordat we een 1 hebben, maar een garantie daarop hebben we natuurlijk niet en een bewijs hebben we zo ook niet.

Maar mede geïnspireerd door de uitwerkingen van de inzenders (vooral ook door de methode van Monica Woldinga voor opgave 2c) slaagden wij er vlak voor het ter perse gaan van deze uitwerking toch in een sluitende methode te vinden, die we hieronder laten volgen.

We maken gebruik van de hierboven beschreven procedure 1 die we volgen tot hij stopt.

Procedure 2

We vonden een procedure 2 die op dit punt verder gaat. Het doel van procedure 2 is: een kleinere kern te krijgen dan de kleinste kern die we met procedure 1 kunnen krijgen. Als dat lukt kunnen we door afwisselend procedure 1 en procedure 2 uit te voeren een steeds kleinere kern vinden en dus tenslotte een 1.

Schets van procedure 2:

Als procedure 1 gestopt is, hebben we als kleinste getal de kleinste kern m die we met procedure 1 konden vinden, en twee even getallen. Als $m = 1$ zijn we klaar en als m > 1 zetten we procedure 2 in:
We kiezen dan één van de twee even getallen met kern n_0 en het andere even getal noemen we $2x_0$.

1. We gaan (voorlopig zonder direct verband met cykels of algoritme A-stappen) een dalende reeks oneven getallen n_0, n_1, n_2, ….., n_k definiëren waarin $n_k < m$. We laten de reeks dus beginnen met de kern n_0 uit het getallendrietal.
2. We zullen een serie algoritme A-stappen beschrijven en die toepassen op een drietal getallen van de vorm: (m , even getal met kern n_i, ander even getal), waarin n_i een getal is uit de gedefinieerde reeks. Dat blijkt dan een drietal getallen op te leveren met oneven getal m en twee even getallen waarbij we kunnen aantonen dat één van de kernen van de even getallen de volgende term n_{i+1} van de gedefinieerde reeks is.

   Als we de serie algoritme A-stappen zien als een superstap $\overset{s}{\Rightarrow}$ dan hebben we dus:
   (m , even getal met kern n_i, ander even getal) $\overset{s}{\Rightarrow}$
   (m , even getal met kern n_{i+1}, ander even getal)

3. Maar omdat de n_0 uit het getallendrietal de eerste term van de reeks is krijgen we:
   (m , even getal met kern n_0, ander even getal) $\overset{s}{\Rightarrow}$
   (m , even getal met kern n_1, ander even getal) $\overset{s}{\Rightarrow}$
   …
   …
   (m , even getal met kern n_k, ander even getal)
   Na k superstappen hebben we dus een kern $n_k < m$.

We hebben zo een methode die als procedure 1 stopt toch nog een kleinere kern produceert en dus het minimum van de kernen verkleint.

Hulpmiddel: een 'kern' stap

We hebben al gezien dat we als we een even getal hebben met kern φ en een oneven getal door herhaalde algoritme A-stappen altijd het getal φ kunnen krijgen[(3b)].
We kunnen dus als we beginnen met $(\varphi\cdot 2^p,\ \omega)$ met φ en ω oneven met een aantal stappen uitkomen op
$(\varphi,\ \varphi\cdot 2^p - \varphi + \omega)$ (want de som van de twee getallen blijft gelijk).
We zullen dat in het volgende noteren als één 'kern' stap (die de kern uit het getal isoleert):
$(\varphi\cdot 2^p,\ \omega)\overset{k}{\Rightarrow}(\varphi,\ \varphi\cdot 2^p - \varphi + \omega)$
Waarbij we de twee betrokken getallen voor de stap aangeven met groen voor het even getal en bruin voor het oneven getal.

Uitwerking Procedure 2:

Keuze van n_0
We beginnen met een oneven getal $m > 1$ en twee even getallen, waarbij m het minimum is van de kernen.
Omdat de ggd van de drie getallen 1 is m geen deler is van allebei de even getallen. Dus is er een even getal met een kern $n_0 > m$, en m is geen deler van n_0.

De drie startgetallen
De drie getallen waarmee we beginnen zijn dus het oneven getal m, een even getal met kern n_0 dus $n_0 \cdot 2^{p_0}$ en een tweede even getal $2x_0$, dus het drietal $(m, \ \ n_0 \cdot 2^{p_0}, \ \ 2x_0)$

Constructie van de reeks
We definiëren, gebruikmakend van de kernen m en n_0 die voorkomen in de getallen waarmee we procedure 2 beginnen, de reeks $n_0, n_1, n_2, \ldots.., n_k$ als volgt:
De volgende term n_{i+1} is steeds het oneven getal waarvoor geldt: $m + n_i = n_{i+1} \cdot 2^p$, dus de kern van $m + n_i$. Zodra er een n_k is met $n_k \leq m$ stoppen we en dan is n_k dus de laatste term van de reeks.

Eigenschappen van de reeks
m en alle n_i zijn kernen en dus allemaal oneven, $m + n_i$ is dan steeds even, zodat de kern ervan $n_{i+1} \leq (m + n_i) / 2$. Zolang $n_i > m$ geldt dus: $n_{i+1} < n_i$. We hebben dus een strikt dalende rij tot en met n_k, en er is dus inderdaad een n_k.
Verder geldt: als m geen deler is van n_i dan is m ook geen deler van $m + n_i$ en dus ook niet van de kern n_{i+1} van $m + n_i$. Omdat m geen deler is van n_0 is m dus een deler van geen van de termen van onze rij, ook niet van n_k. Dus $n_k = m$ kan niet, zodat $\boldsymbol{n_k < m}$.

De serie algoritme *A*-stappen die leiden tot één superstap (geïnspireerd door de truc van Monica)
We kijken naar een serie algoritme A-stappen die kunnen worden uitgevoerd op drie getallen van de vorm:
$(m, \ \ n_i \cdot 2^{p_i}, \ \ 2x_i)$, waarin n_i, één van de termen uit de gedefinieerde reeks is en $m < 2x_i$.

We kunnen daarop de volgende stappen uitvoeren: (we schrijven na stap 2 het even getal dat ontstaat als $2x_{i+1}$) :
Stap 1: kies het paar $(m, \ \ 2x_i)$ en pas daar één keer algoritme A op toe. Dat geeft $(2m, \ \ 2x_i - m)$.
Stap 2: kies het paar $(n_i \cdot 2^{p_i}, \ \ 2x_i - m) \stackrel{k}{\Rightarrow} (n_i, \ \ 2x_{i+1})$
Stap 3: kies het paar $(2m, \ \ n_i) \stackrel{k}{\Rightarrow} (m, \ \ m + n_i)$.

De n_{i+1} uit de reeks die we hebben opgesteld is de kern van $m + n_i$, dus
$m + n_i = n_{i+1} \cdot 2^{p_{i+1}}$, zodat het laatste drietal wordt:
$(m, \ \ m + n_i, \ \ 2x_{i+1}) = (m, \ \ n_{i+1} \cdot 2^{p_{i+1}}, \ \ 2x_{i+1})$

Of achter elkaar geschreven:
$(m, \ \ n_i \cdot 2^{p_i}, \ \ 2x_i) \Rightarrow (2m, \ \ n_i \cdot 2^{p_i}, \ \ 2x_i - m) \stackrel{k}{\Rightarrow} (2m, \ \ n_i, \ \ 2x_{i+1}) \stackrel{k}{\Rightarrow} (m, \ \ m + n_i, \ \ 2x_{i+1}) =$
$(m, \ \ n_{i+1} \cdot 2^{p_{i+1}}, \ \ 2x_{i+1})$
Deze serie is de superstap die we in de schets van procedure 2 bedoelden.

De superstappen
Geven we de hele serie algoritme A-stappen weer als één superstap dan hebben we als $m < 2x_i$:
$(m,\quad n_i \cdot 2^{p_i},\quad 2x_i) \overset{s}{\Rightarrow} (m,\quad n_{i+1} \cdot 2^{p_{i+1}},\quad 2x_{i+1})$
Dat geldt voor alle x_i, dus ook voor n_0, en dus kunnen we ons startdrietal $(m,\quad n_0 \cdot 2^{p_0},\quad 2x_0)$ omzetten in $(m,\quad n_1 \cdot 2^{p_1},\quad 2x_1)$ en dat weer in $(m,\quad n_2 \cdot 2^{p_2},\quad 2x_2)$ en zo verder, tenminste zolang $m < 2x_i$. Maar als $m \geq 2x_i$ dan is het doel van procedure 2 bereikt, want dan is de kern van het tweede even getal $< m$ [*].

Dus hebben we ofwel in k superstappen:
$(m,\quad n_0 \cdot 2^{p_0},\quad 2x_0) \overset{k \times s}{\Longrightarrow} (m,\quad n_k \cdot 2^{p_k},\quad 2x_k)$ met $n_k < m$ en dus hebben we het doel bereikt, ofwel het doel van procedure 2 is al eerder bereikt.

Conclusie
Met procedure 2 kunnen we dus, als we met procedure 1 gezorgd hebben dat het oneven getal gelijk is aan het minimum van de kernen en dat minimum is > 1, **altijd** het minimum van de kernen kleiner maken. Als we dat vaak genoeg herhalen krijgen we altijd een kern 1 en dan kunnen we met de methode van opgave 2c tenslotte de felbegeerde nul maken.

[*] Het is niet zo moeilijk aan te tonen dat als m aan het begin het minimum van de kernen is voor alle waarden van i geldt $m < 2x_i$, maar dat bewijs is dus niet nodig.

(1) We bewijzen:
Vanuit een willekeurig drietal getallen kunnen we altijd door buiten haakjes zetten en algoritme A-stappen zorgen dat er binnen de haakjes drie getallen a, b en c komen waarvoor geldt:
ggd(a, b, c) = 1 en van de drie getallen zijn er twee even en één oneven.

Bewijs **1:** Stel we brengen steeds afwisselend alle gemeenschappelijke factoren buiten haakjes we passen op twee oneven getallen een algoritme A-stap uit tot er geen twee oneven getallen meer zijn.
Uit een algoritme A-stap op twee oneven getallen ontstaan twee even getallen. Dan zijn er ofwel twee even getallen ofwel drie.
Als het er twee zijn stoppen we. Er zijn dan twee even getallen en dus een oneven.
Als het er drie zijn kunnen we factoren 2 buiten haakjes brengen en wordt de som van de getallen tussen de haakjes kleiner. Dat proces moet dus ooit stoppen, doordat er ofwel nullen ontstaan (en dan zijn we klaar) ofwel doordat er twee even getallen zijn.

We eindigen dus (tenzij er nullen zijn ontstaan) altijd met twee even getallen en een oneven, en de ggd tussen de haakjes is 1 omdat we alle gemeenschappelijke factoren buiten haakjes gebracht hebben. Q.E.D.

(2) We bewijzen:
2a: Als we één oneven en twee even getallen hebben, dan blijft dat zo bij alle verdere algoritme A-stappen.
2b: Als we één oneven en twee even getallen hebben en de ggd van de drie getallen is 1, dan blijft de ggd 1 bij alle verdere algoritme A-stappen.

Bewijs **2a**: Bij een algoritme A-stap met een even en een oneven getal is het resultaat weer een even en een oneven getal en bij een algoritme A-stap met twee even getallen is het resultaat weer twee even getallen. Als we voor de stap dus een oneven en twee even getallen hebben is dan na de stap weer zo. Q.E.D.

Bewijs **2b**: Omdat er altijd één van de getallen oneven is (zie 2a) kan de ggd van de drie getallen nooit even worden.
En we zagen in de uitwerking van opgave 1b bij opmerkingen punt 3 dat de ggd van 2 getallen door algoritme A-stappen alleen met een factor 2 kan toenemen. Dus kan de ggd na een algoritme A-stap geen oneven factoren hebben die er daarvoor niet inzaten. Als de ggd voor de stap gelijk was aan 1 is dat dus na de stap weer zo. Q.E.D.

(3) We bewijzen:
a: In een cykel die begint met een even en een oneven getal is het kleinste getal dat in de cykel voorkomt altijd oneven.
b: In een cykel die begint met een even en een oneven getal is de kern van het even getal één van de getallen die in de cykel voorkomen.

Bewijs **3a**: Als een cykel begint met een even en een oneven getal bestaan alle paren van de cykel uit een even en een oneven getal, waarbij het even getal het getal is dat het laatst verdubbeld is. Een even getal kan dus nooit het kleinste getal in de cykel zijn, omdat de helft ervan voorkwam in het vorige getallenpaar. Q.E.D.

Bewijs **3b**: Als α en $\beta \cdot 2^p$ de getallen zijn waarmee de cykel begint en β dus de kern is van het even getal, dan komt $\beta \cdot 2^p$ na een aantal stappen weer terug dus p stappen daarvoor was β het oneven getal van het getallenpaar. Q.E.D.

We mogen dus concluderen: Als een cykel begint met een even getal met kern β en een oneven getal dan is het kleinste getal dat in de cykel voorkomt oneven en $\leq \beta$.