

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Werkvorm: Wie is de mol?

Groepswerk en algebraïsch inzicht

Mooie meetkunde

Discussies over correctie examen

Wiskundefilmpjes door leerlingen

NR.2

JAARGANG 93 - NOVEMBER 2017



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 93 NR. 1

IN DIT NUMMER

WERKVORM: WIE IS DE MOL?

MAICO BURGER

4



ALGEBRA OM TE BEWIJZEN

MARTIN KINDT

5

WORTELS VAN DE WISKUNDE

JEANINE DAEMS

9

SAMEN MEER SYMBOL SENSE

CORWIN VAN SCHENDEL

13

EEN MOOI VOORBEELD VAN MOOIE MEETKUNDE

DICK KLINGENS

16

WIS EN WAARACHTIG

20

ANIMATH

MONIQUE PIJLS
MAARTEN VAN DER BURG

22



BOEKBESPREKING 'REKENONDERWIJS DOOR DE EEUWEN HEEN'

FRANK VAN MERWIJK

24

WISKUNDEONLINE OP HET COORNHERT GYMNASIUM

MARTIJN KOPER

RON DAMES

28

WISKUNDE VOOR MORGEN

KOENO GRAVEMEIJER

BERT ZWANEVELD

31

SOMMEN VAN ABSOLUTE WAARDEN

JAN OTTO KRANENBORG

34

VOORBEELD VAN WDA

RICO DEL CASTILHO

HANS KRABBENDAM

38

PUZZEL

41

Kwarts (Cacaofabriek, Helmond 2015). Kunstwerk van zand door Elvira Wersche.
(Zie www.weltensand.com)

foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

HET FIZIER GERICHT OP...
SIETSKA TACOMA

42

VERENIGINGSNIEUWS

NOTULEN VAN DE NVVW-VERGADERING



44

SERVICEPAGINA

46

Kort vooraf

Twee edities van *Euclides* verschijnen er deze keer, zoals je al waarschijnlijk hebt gemerkt. Na een voorbereiding van maanden is de vmbo special gerealiseerd. Met dank aan de gastredacteuren Mieke Abels, Vincent Jonker en Monica Wijers. Hopelijk draagt deze special bij aan een positieve beeldvorming van ons grootste schooltype, iets wat in de andere media nog wel eens minder het geval is.

En na deze special gaan we uiteraard gewoon door met de rubriek 'Berichten uit het vmbo' in de reguliere edities! Datzelfde geldt voor vrijwel alle rubrieken, maar door het grote aantal bijdragen dat spontaan wordt opgestuurd (hetgeen overigens fantastisch is!), zullen deze niet in ieder nummer staan.

We hebben een nieuwe puzzelrubriek, naast de bestaande puzzel van Lieke de Rooij en Wobien Doyer, de Olympiadepuzzel. Birgit van Dalen en Quintijn Puite, bekend van het Olympiade-team, gaan drie keer per jaargang een puzzel componeren waar je ook je leerlingen aan kunt laten werken. Jeroen Ploeg, onze vormgever, ontwierp er een fraai logo voor. De puzzelrubriek van Lieke en Wobien verschijnt vanaf nu vier keer per jaar waardoor je dus ook meer tijd hebt om tot de correcte oplossing te komen.

Deze *Euclides* opent met een verslag van Maico Burger over een door hem bedachte werkvorm. Laat je vooral inspireren. Heb je ook werkvormen die de moeite waard zijn om te delen: laat het horen, wellicht ontstaat er weer een nieuwe rubriek.

Tom Goris

WERKVORM: WIE IS DE MOL?

Maico Burger

Een verrassende werkvorm kan heel motiverend zijn voor leerlingen om enthousiast aan de slag te gaan. Maico Burger bespreekt een werkvorm die hij baseerde op het bekende tv-programma *Wie is de mol?*. Hanteer je ook wel eens een verrassende werkvorm? De redactie nodigt je uit je ervaringen met ons te delen.

Met een 4-havoklas wiskunde B had ik het vaak over het tv-programma *Wie is de mol?*. Wie wordt verdacht en waarom? Elke week maakten we de balans op: wie wordt er verdacht de mol te zijn en wie vooral niet. Leuk om tegen het einde van het achtste lesuur over te praten, maar ik wilde er meer mee doen.

Televisieprogramma

In het programma voert een team van tien bekende Nederlanders opdrachten uit. Met het goed uitvoeren van de opdrachten kunnen de kandidaten geld verdienen voor de pot. Dit gaat echter niet gemakkelijk: één van de tien kandidaten is de mol. De mol moet ervoor zorgen dat er zo weinig mogelijk geld in de pot komt. Hij heeft de rol van saboteur. De mol zorgt er natuurlijk voor dat dit zo min mogelijk opvalt. Als kandidaat moet je de mol zien te vinden. Als jij degene bent die dat het beste doet win je het spel en het geld in de pot. Ik besloot het televisieprogramma in een werkvorm om te zetten.

Hoe werkt het?

De leerlingen spelen het spel in groepjes van acht. Ze kunnen verschillende rollen krijgen: notulist, kandidaat en mol. Ieder heeft zijn eigen taken. Deze rollen worden willekeurig verdeeld:

ik heb alle rollen op strookjes papier geschreven en de leerlingen trekken allemaal een strookje. Per groep zijn er twee notulisten, één mol en vijf kandidaten. Als er een

groep van zeven zou ontstaan is er een kandidaat minder. Elk groepje krijgt acht opdrachten, een paar heb ik zelf verzonnen en andere heb ik overgenomen uit, onder andere, examens. Elke opdracht is maximaal tien punten waard. De groep met de meeste punten wint. De mol wint als hij niet is ontdekt door een meerderheid van het groepje, de kandidaten winnen als zij de mol ontmaskeren. Deze werkvorm vind ik het meest geschikt om de geleerde leerstof te herhalen ter voorbereiding van het schoolexamen.

Ervaringen

De leerlingen gaan eerst heel stil en individueel aan de slag met de opgaven, maar als na een tijdje blijkt dat ze er zelf niet uitkomen vragen ze hulp aan elkaar. Er wordt overlegd over de opgave en uitwerking en de eerste opdrachten worden bij mij ingeleverd. Nadat er een paar opgaven zijn ingeleverd, is er op het bord een tussenstand ontstaan en worden de leerlingen fanatieker. De groep die voorstaat wil voor blijven staan en de groep die achter staat wil zo snel mogelijk opgaven inleveren om eerste te worden. Ondertussen wordt overlegd wie de mol kan zijn. 'Nee', wordt er gezegd, 'hij is het niet, hij is veel te

goed aan het werk met die opdracht', en: 'Hij kan het wel zijn, de opgave die we net hebben ingeleverd was bijna helemaal fout en die had hij gemaakt', waarop een ander weer reageert met: 'Misschien ben je

zelf wel de mol als je zo naar een ander wijst.' De laatste opmerking is typisch voor het spel, waar alles wat gezegd wordt dubbel kan zijn en gebruikt kan worden om zelf niet verdacht over te komen.

Als de tijd om is, wordt er gestemd over wie de mol is. In één groep zijn de meningen verdeeld. Twee kandidaten blijken het goed te hebben. In de andere groep is het bijna unaniem, iedereen stemt op één leerling, behalve hijzelf. Hij heeft namelijk veel slordigheidsfouten gemaakt en heeft geen opdracht helemaal afgemaakt en ingele-

DE MOL: 'IK HEB HEEL LANG OVER EEN OPDRACHT GEDAAN EN BEN ZELFS NAAR U TOEGELOPEN OM TE VRAGEN HOE HET ZAT, MAAR EIGENLIJK HAD IK HET ALLANG GEZIEN.'

verd, zeggen de groepsleden. Als ik vraag of de mol wil opstaan, staat er een leerling op die door niemand verdacht werd. Als ik hem vraag wat hij dan als mol heeft gedaan zegt hij: 'Ik heb heel lang over een opdracht gedaan en ben zelfs naar u toegelopen om te vragen hoe het zat, maar eigenlijk had ik het allang gezien. Ik heb net gedaan of ik het niet zag. En ik heb expres verkeerd afgerond bij de sinus, waardoor het eindantwoord fout is. Alleen de tweede opdracht heb ik per ongeluk perfect ingeleverd, het was de bedoeling hem fout in te leveren, maar blijkbaar was hij toch wel goed. Dat maakte me wel minder verdacht natuurlijk. Daarna heb ik bij een andere opdracht de goede antwoorden doorgestreept en foute antwoorden opgeschreven. Dat maakte de andere score van tien punten voor de tweede opdracht weer een beetje goed.' Deze mol had dus wel degelijk flink gesaboteerd, maar blijkbaar zonder dat de anderen het doorhadden. De leerlingen hebben aan het eind van een middag een blokkur gewerkt aan de opgaven op een manier die zowel de leerlingen als de docent leuk vonden.



vakbladeuclides.nl/932burger

Op de *Euclides*-site is het lesplan, de voorbereiding, de opgaven en de uitwerkingen van de werkvorm te downloaden.

Over de auteur

Maico Burger is docent wiskunde op de Goudse scholengemeenschap Leo Vroman en auteur bij *Moderne Wiskunde*.

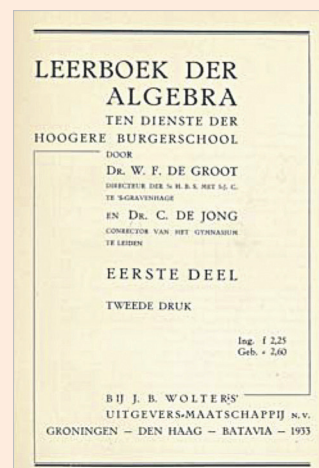
ALGEBRA OM TE BEWIJZEN

Martin Kindt

Waar is algebra eigenlijk goed voor? In een ver verleden was steevast het antwoord; daar kun je van die lastige redeneersommen uit het lager onderwijs handig mee oplossen. Met dit argument kun je vandaag de dag niet zoveel meer. Een ander antwoord zou kunnen zijn: 'daar kun je mooi rekenkundige eigenschappen mee bewijzen'. Dat zouden we dan wel van tijd tot tijd moeten doen. Geïnspireerd door een oud schoolboek, schetst Martin Kindt wat mogelijkheden.

Een opgave van rekenkundige aard

Als men twee getallen van twee cijfers, die samen 100 zijn, kwadrateert, stemmen de uitkomsten in de cijfers der eenheden en der tientallen overeen. Bewijs dit. Deze som vond ik in een algebraboek^[1] uit 1933.



figuur 1 *Leerboek der Algebra* van W.F. de Groot en C. de Jong uit 1933

Ik vond dit een verrassende opgave, waard om een beetje bewerkt te worden en voor te leggen aan diverse doelgroepen.

Kies twee hele getallen die samen 100 zijn en bereken van beide getallen het kwadraat. Herhaal dit voor nog andere paren getallen. Let steeds op de laatste twee cijfers van de uitkomsten bij zo'n paar. Wat valt op? Hoe is dit te bewijzen met algebra?

In de versie van het schoolboek werd niet expliciet aangestuurd op een empirisch voorproefje, zoals:

$$100 \begin{cases} 26 \xrightarrow{\text{kwadraat}} 676 \\ 74 \xrightarrow{\text{kwadraat}} 5476 \end{cases}$$

of

$$100 \begin{cases} 43 \xrightarrow{\text{kwadraat}} 1849 \\ 57 \xrightarrow{\text{kwadraat}} 3249 \end{cases}$$

Een goede leraar zou dit bij een behandeling wel doen, was wellicht de verwachting van de auteurs. Dit was in het algemeen de didactische stijl van leerboeken in die tijd: zakelijke formuleringen, de leraar doet de rest. Dat de opgave ook in mijn eigentijdse versie als behoorlijk lastig werd ervaren, of het nu bovenbouwleerlingen, studenten of leraren betrof, verraste mij overigens wel. Voordat ik op het bewijs inga, vertel ik dat het boek van W.F. de Groot en C. de Jong destijds één van de twintig gangbare algebramethoden was. Het was toen zeker niet de meest gebruikte methode, maar in mijn ogen wel één van de beste. Uitgekiende series oefenopgaven worden afgewisseld met concrete toepassingen in de vorm van ingeklede vergelijkingen en optimaliseringsproblemen. Opmerkelijk in het eerste deel, waar ik in dit artikel uit put, is het hoofdstuk over grafische voorstellingen. Daar is plaats ingeruimd voor realistische contexten, grotendeels ontleend aan meteorologie en aardrijkskunde.

Verschillende aanpakken

De empirische start bij het 'samen-100-probleem' kan worden uitgebreid tot een compleet bewijs, omdat het slechts 41 paren getallen betreft – waarvan er bovendien negen triviaal zijn, namelijk die met eindcijfers 0 of 5 – waarop de uitspraak betrekking heeft. Daarom voegde ik in mijn versie 'met algebra' toe.

Aanpak 1

Stel het ene getal n , het andere is dan $100 - n$. De kwadraten zijn dan n^2 en $10000 - 200n + n^2$. Nu is $10000 - 200n$ een getal dat zeker op twee nullen eindigt, zodat in beide gevallen de laatste twee cijfers worden bepaald door de uitkomst van n^2 . Klaar.

Aanpak 2

Het ene getal stel ik voor door $50 + m$, het andere is dan $50 - m$. De kwadraten zijn nu $2500 \pm 100m + m^2$ en de laatste twee cijfers worden bij beide uitkomsten geproduceerd door het getal m^2 .

Aanpak 3

Ik noem de twee kwadraten m^2 en n^2 . Willen de laatste twee cijfers hiervan, ook in volgorde, hetzelfde zijn, dan moet het verschil deelbaar zijn door 100. Er geldt nu:

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = 100(m - n)$$

Van de drie bewijzen vind ik de derde het mooist. Want anders dan in de beide andere wordt eerst gelet op waar je heen wilt. De tweede aanpak vind ik, vanwege de symmetrie, weer mooier dan de eerste. De eerste aanpak heeft echter het voordeel dat die je makkelijker op het idee brengt dat de eigenschap ook geldt voor twee getallen die samen 50 zijn. Kijk maar:

$$(50 - n)^2 = 2500 - 100n + n^2$$

Spelen met kwadraten

Als leerling heb ik destijds de kwadraten van de natuurlijke getallen tot en met 30 uit het hoofd moeten leren, daar ben ik mijn leraar altijd dankbaar voor geweest. Het viel me toen wel op dat $24^2 (= 576)$ en $26^2 (= 676)$ erg op elkaar leken. Dat maakte het memoriseren niet moeilijker, integendeel. Bij andere kwadraten van paren op gelijke afstand van 25, zoals $23^2 (= 529)$ en $27^2 (= 729)$, is me de overeenkomst in de twee laatste cijfers toen nooit zo opgevallen, ... moet ik me schamen? Aan de cijfers van de kwadraten – zeg tot 1000 – valt nog wel wat meer te ontdekken. Neem $12^2 = 144$ en $21^2 = 441$.

Precies omgekeerd en als je aan een merkwaardig product denkt, kijk je daar niet van op.

Net zo: $13^2 = 169$ en $31^2 = 961$. Maar bij het kwadraat van 14 houdt dit om begrijpelijke reden op. Dat de uitkomst daarvan een ander permutatie van 1, 6 en 9 is, berust op toeval. Spelen met kwadraten zou je dit kunnen noemen, misschien doen we dit soort dingen te weinig bij wiskunde. In 'De Groot & de Jong' gebeurde dat wel. Zo werd in het hoofdstuk met de titel 'Opgaven van rekenkundige aard' een regel voor kwadraten van getallen eindigend op 5 ontdekt.

Voorbeeld: $65^2 = 60 \times 70 + 25$, een handigheid die ik in het verleden van een natuurkunde collega heb geleerd. En voor getallen eindigend op 9 is er ook een kunstje: 49×49 , eerst $5 \times 48 = 240$ en daarachter een 1 geeft 2401. Geef meer voorbeelden en bewijs het maar!

Ziel van de wiskunde

Een aantal bewijsopgaven uit 'De Groot & De Jong' gaat over deelbaarheid.

De tweede macht van een oneven getal verminderd met 1 is altijd door 8 deelbaar. Toon dit aan.

Weer een kwestie van een merkwaardig product:

$$(2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4 \cdot n \cdot (n + 1)$$

en $n(n + 1)$ is, als product van twee opeenvolgende getallen, even. Zo volgt de deelbaarheid door $4 \times 2 = 8$.

Een mooie combinatie van redeneren en algebra. Je moet wel op het idee komen dat een willekeurig oneven

getal kan worden voorgesteld door de vorm $2n + 1$, maar daar was op geanticipeerd in een eerdere som.

Een bekende opgave die goed in 'De Groot & De Jong' zou hebben gepast, luidt:

Als je de derde macht van een getal vermindert met het getal zelf, is de uitkomst een 6-voud.

Als leraar in deze tijd zou ik de leerlingen eerst met de GR (nu het nog kan!) een tabel laten maken van zulke getallen in de, misschien ijdele, hoop dat ze zelf eerst de eigenschap zouden opmerken.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$n^3 - n$	0	6	24	60	120	210	336	504	720	...

Na het uitspreken van een vermoeden en nog een paar testjes met grote getallen is het tijd voor een poging tot bewijs. Deelbaarheid heeft te maken met ontbinding in factoren en dat doen we dan nu met $n^3 - n$.

$n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = n \cdot (n + 1) \cdot (n - 1)$ en het mooie is dat dit het product van drie opvolgende getallen is.

Even checken in de tabel: $6 = 1 \times 2 \times 3$,

$24 = 2 \times 3 \times 4$, $60 = 3 \times 4 \times 5$, enzovoort.

Omdat van elk drietal opvolgende getallen er precies één deelbaar is door 3 en omdat zo'n drietal ten minste één even getal bevat, moet het product deelbaar zijn door 6. Simpel? Zeker niet, maar het toont veel meer de ziel van de wiskunde dan de rijtjes ontbindingen in onze schoolboeken.

In de voorgaande tabel is nog wel wat meer te zien. Sommige getallen uit de onderste rij zijn niet alleen deelbaar door 6, maar zelfs door 12. Ze zijn het duidelijk

niet allemaal, in mijn tabel zijn 6 en 210 uitzonderingen. Als je de GR een uitkomstentabel bij $y = (x^3 - x)/12$ laat produceren zie je na elk viertal stappen een geheel getal + 0,5. Kun je bewijzen dat dit zo doorgaat en dat alle tussenliggende getallen geheel zijn? Ook nu is het meer een kwestie van redeneren dan rekenen.

Er zijn drie mogelijkheden:

- 1) Van drie opeenvolgende hele getallen zijn het eerste en het derde getal allebei even. Het product is nu deelbaar door 4 en 3, dus ook deelbaar door 12.
- 2) Het middelste getal is even en zelfs een 4-voud. Ook nu is het tripelproduct deelbaar door 12.
- 3) Het middelste getal is even, maar geen 4-voud, dus een 4-voud + 2. Het product is in dit geval niet deelbaar door 12. Conclusie: voor $n = 2, 6, 10, 14, \dots$ is $n^3 - n$ niet deelbaar door 12.

Hoe overtuigend is een formeel bewijs?

In zijn artikel 'Intuition and Proof'^[2] beschreef Efraim Fischbein een interessant experiment waarbij zo'n 200 leerlingen in Tel Aviv (middenbouw voortgezet onderwijs) geconfronteerd werden met het voorgaande 'deelbaar-door-6-probleem'. Na een numeriek onderzoekje werd een bewijs gegeven, identiek aan dat wat hiervoor is beschreven. Op de vragen of

(a) de genoemde eigenschap algemeen geldt,

(b) het gegeven bewijs volledig correct is en

(c) dit bewijs garant staat voor de algemene geldigheid, kwamen verschillend percentages bevestigingen binnen (respectievelijk 68,5%, 81,5% en 60,0%).

Dat (b) hoger scoorde dan (a) en (c) lijkt wel voer voor psychologen. Dat een formeel bewijs niet ieder overtuigt, blijkt nog meer uit het feit dat er in een vierde vraag (d) een nep-tegenvoorbeeld met grote getallen werd opgevoerd waarop slechts 32% reageerde dat hier een rekenfout in moest zitten. 4,5% noteerde hier nog bij dat uitzonderingen altijd mogelijk zijn. Hoe zo, algebra?

We leren leerlingen wel manipuleren met algebraïsche vormen, maar daarbij blijft de generaliserende kracht van de algebra meestal onder het oppervlak. Ik denk ook dat het klassieke idee om variabelen voor te stellen door lijnsegmenten kan helpen om het aspect van de generalisatie wél boven water te krijgen. Al sinds een paar jaar is mijn favoriete voorbeeld een eigenschap van de rij van Fibonacci (of een andere rij, waarbij na keuze van de twee begintermen iedere term de som is van zijn twee

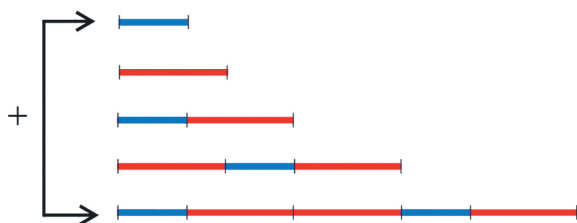
voorgangers). Kies in zo'n rij een arbitrair deelrijtje van vijf opvolgende termen en stel vast dat de som van de beide uiterste termen juist drie keer de middelste term is. Natuurlijk moeten

er eerst meer proeven-op-de-som worden uitgevoerd.

In plaats van de rij van Fibonacci, neem ik hier die van Lucas:

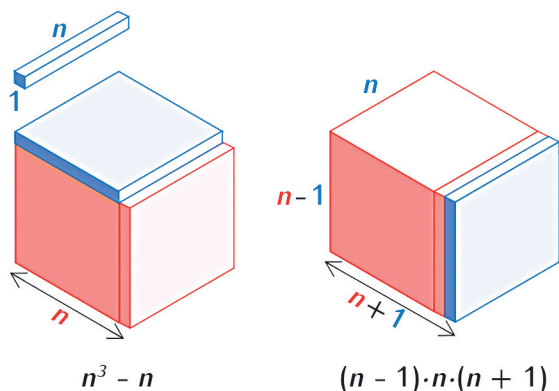
1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, ...

In het beginrijtje-van-vijf komt er $1 + 11 = 3 \times 4$. Een eindje verder: $7 + 47 = 3 \times 18$ of $29 + 199 = 3 \times 76$. Zo kan ik nog uren doorgaan. Je gaat er steeds meer in geloven dat de eigenschap algemeen geldt. Maar hoe kun je zeker weten dat er nooit of te nimmer uitzonderingen komen? In een vroeger artikel^[3] heb ik laten zien, hoe je, refererend aan de Griekse 'pre-algebra', met een plaatje een overtuigend bewijs kunt leveren.



Dat de getallen in de rij van Lucas bij iedere stap groter worden, is duidelijk. Stel ik het kleinste getal van een deelrijtje-van-vijf voor door een blauw en het daaropvolgende door een wat langer rood lijnsegment, dan vind ik de drie volgende 'getallen' door aan elkaar plakken. En zie, de som van het kleinste en het grootste getal van de vijf bestaat uit drie blauwe en drie rode segmenten, en dat is dus even lang als drie keer het middelste lijnstuk. Eigenlijk is dit een klein wonder: *met één plaatje worden oneindig veel rijtjes-van-vijf gevangen!* Dat je (de lengte van) het blauwe lijntje x kunt noemen en die van het rode lijntje y en vervolgens alles nog eens in onze algebrataal kunt weergeven is niet eens zo'n grote stap. Al moeten we wel bedenken dat daar in de geschiedenis van de wiskunde wel een flink aantal eeuwen over is gedaan.

Vanuit een meetkundige voorstelling zou het bewijs van de deelbaarheid door 6 van $n^3 - n$ misschien meer leerlingen echt overtuigen. De sleutel was het schrijven van $n^3 - n$ als het product van drie opvolgende getallen.



Zie de figuur en begrijp. Uit de kubus met ribbe n is een balkje van 1 bij 1 bij n verwijderd. De blauwe plak met dikte 1 wordt aan de voorkant aangelijmd en er ontstaat een blok van $n - 1$ bij n bij $n + 1$. Bij n kun je aan elk willekeurig heel getal denken. De factorisatie met drie opeenvolgende getallen is zichtbaar geworden!

Hogere machten

Aanschouwelijke meetkunde als hulpmiddel bij algebra heeft natuurlijk zijn dimensiebeperkingen. De leerling zal zeker vertrouwd moeten raken met de alomvattende potentie van de formele algebra. Neem het volgende voorbeeld uit 'De Groot & De Jong'.

Bewijs dat $a^5 - a$ steeds deelbaar is door 30, als a een geheel getal voorstelt (ontbind in factoren). Bewijs

hiermee dat de vijfde macht van een geheel getal op hetzelfde cijfer eindigt als het getal zelf.

De aanwijzing 'ontbind in factoren' vonden de auteurs blijkbaar nodig. Die ontbinding levert op:

$$a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + 1)$$

Grappig, ik realiseer me nu ineens dat $a^5 - a$ gelijk is aan het product van $a^3 - a$ en $a^2 + 1$, maar dit terzijde.

Dat $a^5 - a$ in elk geval een 6-voud is, is na het voorgaande duidelijk. Blijft over om aan te tonen dat er ook sprake is van deelbaarheid door 5.

Als a gelijk is aan $5n$, $5n + 1$ of $5n + 4$ (met n geheel) is $a(a - 1)(a + 1)$ en daarmee ook $a^5 - a$ deelbaar door 5. Voor $a = 5n + 2$ of $a = 5n + 3$ moet de deelbaarheid door 5 op het conto van $a^2 + 1$ komen. Een kwestie van algebra:

$$(5n + 2)^2 + 1 = 25n^2 + 20n + 5$$

$$(5n + 3)^2 + 1 = 25n^2 + 30n + 10$$

en de deelbaarheid door 5 is evident.

Omdat deelbaar door 30 (dus door 10) hier betekent dat $a^5 - a$ voor elke waarde van a op 0 eindigt, hebben a^5 en a in alle gevallen hetzelfde laatste cijfer.

Auteur De Jong

Een paar jaar geleden ontmoette ik N. van Kampen, emeritus hoogleraar natuurkunde toen 92 jaar oud, inmiddels overleden. Hij vertelde mij dat hij in de jaren '30 van de vorige eeuw een briljante wiskundeleraar had gehad. Op mijn vraag waar hij op school had gezeten antwoordde hij Stedelijk Gymnasium Leiden. Ik raadde: 'was die leraar misschien C. de Jong - een van de twee auteurs van het boek uit dit artikel - die in de oorlog is gefusileerd?'^[4] Van Kampen knikte, hij was niet eens verrast, en vertelde hoe De Jong bijna elke les buiten zijn boekje ging met mooie verhalen over sterrenkunde.

Noten

- [1] De Groot, W.F. en C. de Jong (1933). *Leerboek der Algebra*, eerste deel (2e druk). Groningen: J.B. Wolters.
- [2] Fischbein, E. (1982). *Intuition and Proof. For the Learning of Mathematics*.
- [3] Kindt, M. (2015). *Wat te bewijzen was* (35). Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [4] Zie het indrukwekkende 'In memoriam'. *Euclides* jaargang 1943/44, p. 75.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl.

WORTELS VAN DE WISKUNDE

Jeanine Daems

6: EEN GEOMETRISCHE QUESTIE

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: een probleem over oppervlakte en omtrek van een rechthoekige driehoek.



De 'Vriesche Euklides'

Naast beroemde Nederlandse wiskundigen als Huygens en Stevin zijn er ook minder beroemde wiskundigen en rekenmeesters geweest die interessante boeken hebben geschreven, vaak in het Nederlands. Sybrandt Hansz. Cardinael (1578 - 1647) was rekenmeester, eerst in Harlingen en daarna in Amsterdam. In zijn tijd was hij behoorlijk bekend. Hij komt bijvoorbeeld in een gedicht van Vondel voor als 'De Vriesche Euklides'. Ook ging Descartes bij hem langs en gebruikte Huygens zijn boek als studiemateriaal. Meer over zijn leven en de inhoud van zijn boeken is te vinden via de literatuurverwijzingen onderaan dit artikel. Zijn boek uit 1620 waar we een vraagstuk uit gaan bekijken heet *Hondert geometrische questien en hare solutien*. In het boek wordt hij alleen Sybrandt Hansz. van Harlingen genoemd, zonder Cardinael erachter, in *Google books* is zijn boek met zoeken op alleen de titel prima te vinden. Het probleem waar we naar gaan kijken gaat over de omtrek en oppervlakte van een driehoek.

Questie XV

XV.
Der is een ghegeven triangel A B C, winckelrecht in A, die de 3yden in somma syn 120/ ende den inhoud is 600. **Waghe naer de 3yden elck besonder ?**

figuur 1

Qua taalgebruik is dit al een prachtige vraag natuurlijk, vanwege de mooie woorden: 'triangel' voor driehoek, 'winckelrecht' voor rechthoekig, 'inhout' voor wat wij in twee dimensies een oppervlakte zouden noemen. Het duurt even voor je de letters goed kunt lezen, maar in een workshop voor docenten waarin ik deze bron besprak was men verbaasd over hoe snel je er aan gewend raakte.

De vraag komt dus neer op:

Gegeven is een driehoek ABC met een rechte hoek bij A, de omtrek is 120 en de oppervlakte 600. Hoe lang zijn de drie zijden?

Het is het leukst om het eerst zelf te proberen, zonder verder te lezen. Dat is ook wat ik met leerlingen zou doen, gewoon vragen: hoe los je dit op? Daar kun je als hint nog bij geven dat het tekenen van een plaatje hier wel erg handig is. Door de rechte hoek zullen ze al snel zien dat de oppervlakte van de driehoek te vinden is door de twee rechthoekszijden te vermenigvuldigen en te delen door 2, dus de twee rechthoekszijden zijn keer elkaar 1200.

Leerlingen zullen waarschijnlijk eerst gewoon maar wat gaan proberen, en dat levert inderdaad een oplossing op: als je 30 en 40 kiest klopt de oppervlakte, en dan is de schuine zijde vanwege Pythagoras gelijk aan 50 en de omtrek klopt ook. Dit is nog prima te doen in klas 2 of 3 van havo of vwo: je haalt Pythagoras weer even op en de oppervlakte en omtrek van een driehoek. Voor de onderbouw is dat waarschijnlijk ingewikkeld genoeg.

Dat is echter niet hoe Cardinael het doet, en ook uit zijn manier kun je met je onderbouwleerlingen wel wat leuks halen, dus lees eventueel meteen verder bij het kopje 'Wat doet Cardinael?'

Oplossen met algebra

Maar ja, hoe weet je dan zeker dat dit de enige oplossing is? Mijn eigen neiging is meteen met variabelen gaan rekenen, en dat zullen bovenbouwleerlingen misschien ook wel snel gaan doen. Dat kan natuurlijk ook, we geven de lengtes van de drie zijden namen:

$|AB| = x$, $|AC| = y$ en $|BC| = z$. Dan krijgen we drie vergelijkingen met drie onbekenden die je kunt oplossen.

Probeer het vooral eerst even zelf voor je verder leest.

Omdat hoek A recht is en de oppervlakte gelijk is aan 600 volgt dat $xy = 1200$. Vanwege de gegeven omtrek weten we dat $x + y + z = 120$. En vanwege de rechte hoek geldt de stelling van Pythagoras, dus $x^2 + y^2 = z^2$.

Dat is een ander soort probleem dan je meestal ziet bij stelsels vergelijkingen, omdat de laatste niet lineair is.

De eerste vergelijking geeft een verband tussen twee variabelen, de andere twee tussen drie, dus je kunt als hint bijvoorbeeld geven dat het handig is om y in termen van x te schrijven en die te substitueren in de twee andere vergelijkingen.

Dan krijg je $y = \frac{1200}{x}$ en als je dat substitueert in de twee andere vergelijkingen kun je twee uitdrukkingen vinden voor z^2 die dus aan elkaar gelijk moeten zijn:

$$\left(120 - x - \frac{1200}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1440000}{x^2}. \text{ Als je de haakjes}$$

uitwerkt vallen meteen twee termen weg en we vinden:

$$16800 - 240x - \frac{28800}{x} = 0$$

Met x vermenigvuldigen aan beide kanten levert een kwadratische vergelijking op waar twee mogelijkheden uit rollen: $x = 30$ of $x = 40$. Deze uitkomsten geven inderdaad allebei een oplossing, die op hetzelfde neerkomen omdat de rollen van x en y verwisselbaar zijn in het hele probleem. De oplossing is dus: de rechthoekszijden zijn 30 en 40 en de schuine zijde is 50.

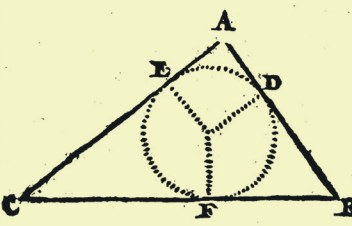
Wat doet Cardinael?

Maar Cardinael pakt dit probleem heel anders aan, en daarmee ontdekken we en passant een leuk meetkundig weetje. Hij tekent (al zegt hij dat niet) de ingeschreven cirkel, zoals we kunnen zien in figuur 2.

Probeer eerst eens zelf verder te lezen. We zullen hieronder voornamelijk ingaan op het eerste stukje, dus je hoeft niet alles te lezen.

DMer is een ghegeven triangel A B C, winckelrecht in A, die de 3yden in somma sijn 120/ ende den inhoud is 600. Vraghe naer de 3yden elck besonder?

Dubbeleert 600/ komt 1200/ dit divideert door 120/ komt booz A D of A E 10/ soo is D A E 20 / die trecket van de 120 / blyben 100 booz D B C E, de helft is 50 booz B C, ende soo veel is oock B D ende E C te samen; dese 50 trecket van 120 / rest 70 booz A B ende A C te samen. Ende om nu A B ende A C elck besonder te vinden; soo doet als in onse veerthiende Exempel gheleert is / multipliceren de helft van de 70 / sijnde 35 quadzaten/ komt 1225 / hier af de 1200 / rest 25/ de $\sqrt{3}$ daer van is 5 / dit ghetrocken van 35 / rest 30 booz A B; ende by die 35 gheaddeert/ komt 40 booz de 3yde A C, ende alsoo sijn alle dize 3yden bekendt/ soomen begheerte te weten.

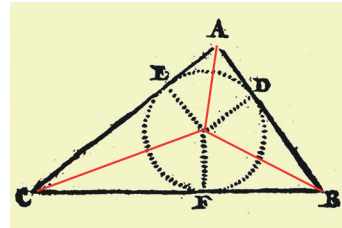


figuur 2

Hij begint dus zo: Dubbeleert 600 / komt 1200 / dit divideert door 120 / komt voor AD of AE 10.

Dat is wel heel anders dan mijn aanpak! Hij verdubbelt 600, dus hij neemt het dubbele van de oppervlakte. En dan deelt hij door de omtrek, en trekt de conclusie dat AD en AE blijkbaar 10 zijn. Omdat hij punten D en E gebruikt, kunnen we wel vermoeden dat die ingeschreven cirkel hier belangrijk is. Maar wat hebben die punten D, E en F met de oppervlakte van de driehoek te maken? Een eerste hint die ik hier zou geven is: trek hulplijnen.

De lijnen die het meest voor de hand liggen, zijn de lijnen van het middelpunt van de ingeschreven cirkel naar de hoekpunten, zie figuur 3 (dat zijn uiteraard de bissectrices, maar dat heb je hier niet per se nodig).



figuur 3

Dan is er een kleine blikwisseling nodig. Die lijnen verdelen de hele driehoek in drie driehoekjes. En wat nou zo bijzonder is: die drie driehoekjes hebben dezelfde hoogte, namelijk de straal van de ingeschreven cirkel. Nu kun je met leerlingen verschillende dingen gaan doen. Ik beschrijf eerst wat je in de bovenbouw zou kunnen doen en daarna een knip-en-plak-aanpak die in de onderbouw zou kunnen. Ik kies voor die volgorde omdat je dan zelf al snapt waarom de knip-en-plak-methode werkt voordat we hem gaan doen.

Bovenbouwaanpak

Laten we de straal van de ingeschreven cirkel r noemen. Kun je de oppervlakte van de hele driehoek nu schrijven in termen van de omtrek en r ?

Dat kan, omdat die drie driehoekjes dezelfde hoogte hebben. De oppervlakte van de hele driehoek is:

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot r + \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot r + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot r, \text{ wat gelijk is aan}$$

$$r \cdot \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |AC| + |BC|). \text{ Oftewel: de straal van de}$$

ingeschreven cirkel keer de halve omtrek is gelijk aan de oppervlakte van de hele driehoek! Dus r keer de omtrek is 1200, dus als we 1200 delen door de omtrek van 120, vinden we $r = 10$, de straal van de ingeschreven cirkel.

Een mooie vraag om te stellen is nu: geldt dit nou alleen omdat we hier een rechthoekige driehoek hebben?

Nee, we hebben nu nog niet gebruikt dat hoek A recht is. Blijkbaar geldt in elke driehoek dat de straal van de ingeschreven cirkel keer de halve omtrek gelijk is aan de oppervlakte. Dat is een leuk weetje dat meteen bewezen is.

Onderbouwaanpak

Dit weetje kun je op tussenniveau ook ontdekken door te knippen en te plakken. Laat de leerlingen zelf een willekeurige driehoek tekenen met de ingeschreven cirkel erin (zo kun je meteen de bissectriceconstructie óf het nauwkeurig meten met de geodriehoek weer even oefenen). Teken ook de loodlijntjes van het midden naar de zijden netjes. Knip nu over de hulplijntjes zodat de grote driehoek in de drie kleine driehoekjes uit elkaar

valt. Knip de drie kleine driehoekjes nog eens door over de stralen van de ingeschreven cirkel. Je krijgt nu zes driehoekjes, die twee aan twee precies rechthoeken vormen!

Als je die naast elkaar legt, kun je een rechthoek maken die als ene zijde r heeft, de straal van de ingeschreven cirkel, en als andere zijde de halve omtrek van de driehoek! En de oppervlakte is niet veranderd, dus nog steeds de oppervlakte van de hele driehoek.

Een vraag die je daarna jezelf (of wellicht ook je leerlingen) kunt stellen is: waarom passen die driehoekjes eigenlijk precies? En waarom worden het rechthoekjes? Noem het middelpunt van de ingeschreven cirkel even M . Omdat je de stralen loodrecht op de zijden hebt getekend, zijn die hoeken allemaal recht. Het is ook duidelijk dat

Dat komt overeen met zijn vorige vraagstuk, nummer XIV, waarin hij precies zo'n probleem oplost. Zelf kun je dat doen door weer een stelsel vergelijkingen op te lossen.

Conclusie

Wat mij opvalt is dat ik dit probleem zelf op een meer algebraïsche manier zou aanpakken dan Cardinael doet. De doorbraak van het gebruik van algebra om meetkundige problemen aan te pakken kwam ongeveer in deze tijd met de wiskunde van Descartes, maar Cardinaels boek is net wat ouder en hij doet dit ook bewust niet. Hij schrijft in zijn voorwoord: *'hier hebt ghy hondert Geometrische Vraghen, en daer en by onderrechtinghe hoemen die solveren sal, eenighe met linien, ende sommige met (doch alle sonder Cossische) ghetalen, seer dienstigh*

'DEZE BRON GEEFT AANLEIDING TOT HET GELEID HERONTDEKKEN VAN EEN LEUK WISKUNDIG FEITJE, ZOALS DAT DE OPPERVLAKE VAN EEN DRIEHOEK GELIJK IS AAN DE STRAAL VAN DE INGESCHEVEN CIRKEL KEER DE HALVE OMTREK.'

$|MD| = |ME| = |MF|$ omdat het stralen van dezelfde cirkel zijn. Dus die passen aan elkaar. Maar waarom geldt bijvoorbeeld dat $|CE| = |CF|$?

Voor ons is dat niet zo'n moeilijke vraag: de driehoeken CME en CMF zijn congruent (ZZR), dus $|CE| = |CF|$.

Net zo geldt dat $|BF| = |BD|$ en $|AE| = |AD|$.

Maar die congruentiegevallen zullen vanwege het nieuwe programma niet meer bekend zijn bij de meeste leerlingen. Dit probleem kan dan een natuurlijke manier zijn om toch even over de vraag te praten hoe je weet wanneer twee driehoeken precies gelijk zijn. Maar dat hoeft natuurlijk niet per se, want het past gewoon precies als je het uitknijpt.

Vervolg van het argument

Maar Cardinael is nog niet klaar: in de meeste driehoeken heb je niet zoveel aan de straal van de ingeschreven cirkel als je de zijden wilt weten. Maar dat is hier, vanwege die rechte hoek, anders. Want Cardinael concludeert niet expliciet dat die straal 10 is, maar dat AD en AE gelijk zijn aan 10. Waarom is dat zo? Daar heb je die rechte hoek echt voor nodig.

Nu berekent Cardinael dat $DBCE$ gelijk is aan $120 - 20 = 100$. Dan beweert hij: BC is de helft daarvan, dus 50. Waarom is dat zo? Weer een leuke vraag. De congruente driehoeken van zojuist bieden hier de oplossing. We weten dan dat $|AB|$ en $|AC|$ samen $120 - 50 = 70$ zijn. Hij heeft nu dus een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde bekend is (nl. 50) en de som van de twee rechthoekszijden ook (nl. 70).

allen den ghenen die haer inde conste der Geometrie begheeren te oefenen (...).'

Met cossische getallen bedoelt hij specifieke symbolen voor de onbekende en machten daarvan (lees meer hierover in deel 8 van *Wortels van de wiskunde*). Toch is die grens tussen wat Cardinael cossische getallen vindt en wat hij onder meetkunde schaaft voor ons eigenlijk wat diffuus: het eind van probleem XV komt in onze moderne ogen neer op het oplossen van een kwadratische vergelijking, wat Cardinael ook doet, maar inderdaad wel meetkundig.

We zien in dit voorbeeld een aantal manieren waarop het gebruik van zo'n oud wiskundeboek iets kan toevoegen aan je les. Ten eerste is het oude taalgebruik leuk voor leerlingen die interesse hebben in talen, want je ziet dat veel woorden die hier in het Nederlands gebruikt worden nu ook nog in andere talen voorkomen, maar juist niet meer op deze manier in het Nederlands. Zo zou je eventueel naar interesse kunnen differentiëren als je niet iedereen even diep de wiskunde in wil laten duiken: kies na het proberen en vinden van een oplossing of je verder gaat met het uitpluizen van de wiskunde via de knip-en-plak-methode of verder gaat zoeken naar de betekenis van oude woorden in de tekst.

We hebben nu slechts één van de honderd vraagstukken van Cardinael besproken, maar dit boek is natuurlijk ook gewoon een bron van talrijke meetkundevraagstukken waar je een deel van zo aan je leerlingen zou kunnen voorleggen.

Ook zie je hoe een bron aanleiding kan geven tot het geleid herontdekken van een leuk wiskundig feitje, zoals dat de oppervlakte van een driehoek gelijk is aan de straal van de ingeschreven cirkel keer de halve omtrek. Omdat we dat feitje nodig hadden om te snappen wat Cardinael deed, hebben we het zelf bewezen (helemaal met de formules of op tussenniveau met knippen en plakken). Bovendien hebben we het verband zelf eerst gereconstrueerd uit de getallen die Cardinael gebruikte en opnieuw geformuleerd, en we hebben ons afgevraagd of deze stelling alleen in een rechthoekige driehoek geldt of algemeen. Als je dat ook zo met leerlingen doet, zijn ze er actiever mee bezig dan wanneer de stelling geponeerd zou worden en het bewijs meteen gevraagd of gegeven wordt.

Literatuur

- Hoorn, M. van (2008). Boekbespreking: M.H. Sitters, Sybrandt Hansz Cardinael, 1578-1647 Rekenmeester en wiskundige - Zijn leven en zijn werk. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, serie 5, deel 9, nummer 4.
- Maanen, J. van (2003). Cardinael in de geschiedenis van de wiskunde. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, serie 5, deel 4, nummer 1.
- Sitters, M.H. (2008). *Sybrandt Hansz Cardinael, 1578-1647 Rekenmeester en wiskundige - Zijn leven en zijn werk*. Hilversum: Uitgeverij Verloren.

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl.

WISKUNDECLUB

VOOR VWO 4/5/6-LEERLINGEN

Vanaf september 2017 is er op de UvA een wiskundeclub voor geïnteresseerde vwo-leerlingen uit klas 4/5/6. Hiermee laten we getalenteerde en gemotiveerde leerlingen van de intellectuele uitdaging en schoonheid van wiskunde genieten. De club staat onder leiding van prof. Sergey Shadrin.

Activiteiten

- leuke problemen oplossen
- korte lezingen volgen van UvA-docenten
- bordspelen met een wiskundige inslag spelen
- aan speciale thema-middagen meedoen.

Vrijdagen van 15.00 tot 17.00 uur
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam, Science Park 105

Per school is er plaats voor maximaal twee leerlingen. Leerlingen die bij voldoende bijeenkomsten aanwezig zijn ontvangen een certificaat.

Voor meer informatie en opgave:
<https://www.itsacademy.nl/de-wiskundeclub/>

SAMEN MEER SYMBOL SENSE

Corwin van Schendel

GROEPSWERK EN ALGEBRAÏSCH INZICHT

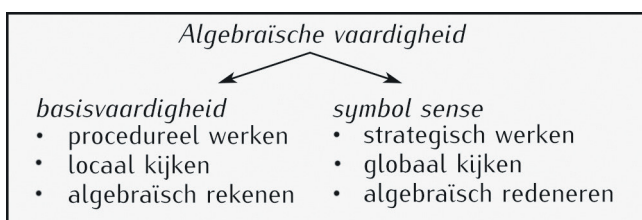
De nieuwe wiskundecurricula voor havo en vwo leggen veel nadruk op wiskundig denken. Specifiek voor algebra vraagt wiskundig denken om *symbol sense*: inzicht in of 'gevoel voor' symbolen. Maar hoe verwerf je dat in de praktijk?

Corwin van Schendel deed onderzoek naar of en hoe je als docent groepswerk kunt gebruiken om tot algebraïsch inzicht te komen.

Je kent het wel: leerlingen krijgen een op te lossen tweedegraadsvergelijking die al met haakjes geschreven is. Helaas werkt de halve klas toch de haakjes weg, om vervolgens weer te ontbinden in factoren. Dit is overbodig werk dat niet van strategie of inzicht getuigt en ook foutgevoelig is. Toch is dit gedrag begrijpelijk na de vele routine-oefeningen in factoriseren. Symbol sense gaat over het strategischer en op een hoger begripsniveau omgaan met algebra, iets wat je graag ziet bij leerlingen. Maar hoe zorg je hiervoor als docent? We zullen toelichten waarom groepswerk geschikt is om symbol sense te bevorderen.^[1]

Symbol sense en groepswerk: theorie

Allereerst kijken we op theoretisch niveau naar de relatie tussen symbol sense en de werkvorm groepswerk.



figuur 1 Twee kanten van algebraïsche vaardigheid^[2]

Algebraïsche vaardigheid kent twee aspecten: basisvaardigheid en symbol sense. In figuur 1 staat samengevat hoe die twee in relatie staan tot elkaar. Het is niet zo dat symbol sense een tegengestelde is van basisvaardigheid. De twee vullen elkaar aan. Een goede wiskundeleerling heeft standaardmethodes in de vingers én gaat strategisch te werk. Symbol sense omvat volgens Drijvers en Kop de volgende onderdelen:^[2]

1. *Strategische vaardigheden* en heuristieken om tot een probleemaanpak te komen, het vermogen om daarop overzicht te houden, om daarbinnen handige keuzes te maken of, als een strategie vastloopt, om een andere invalshoek te zoeken.
2. Het vermogen om *globaal naar expressies en formules te kijken*, om de structuur van expressies

en subexpressies te herkennen, om de betekenis van symbolen in de context te zien en om expressies op een andere manier weer te geven.

3. Het vermogen tot *algebraïsch redeneren*. Denk hierbij aan veelal kwalitatieve beschouwingen over termen en factoren in expressies, aan symmetrieoverwegingen of redeneringen met randgevallen.^[2]

Veel opgaven zijn oefeningen in routinevaardigheden, terwijl het begrijpen waarom en het maken van strategische keuzes ook belangrijk is. Dit belang wordt nu dus onderkend in de nieuwe curricula. In de schoolboeken zie je dan ook wel opgaven die aansturen op relaties tussen verschillende methodes ('*Laat zien dat beide manieren van differentiëren hetzelfde antwoord opleveren*') of het zoeken van meerdere antwoorden, maar de vraag is of de taak alleen voldoende is om symbol sense te stimuleren: '*No matter how interesting or innovative a task may appear, it will be the activity the students are led to engage in that will determine if it supports the construction of symbol sense.*'^[3]

Groepswerk is een werkvorm waarvan er sterke indicaties zijn dat het een effectieve werkvorm is.^[4] Een manier om groepswerk goed vorm te geven is door leerlingen op een positieve manier afhankelijk van elkaar te maken: ze hebben elkaar écht nodig, bijvoorbeeld door het niveau van de opgave of de aard van de activiteit ('*overleg over de oplossing*'). Tegelijkertijd moeten leerlingen individueel aanspreekbaar zijn, bijvoorbeeld doordat iedere leerling klassikaal de groepsoplossing moet kunnen uitleggen.^[4] Verder is het belangrijk dat leerlingen direct contact met elkaar kunnen hebben en dat dit contact niet wordt overstemd door een docent als alwetende oplossings-souffleur. Door als docent alleen proceshulp te geven, móet de groep wel overleggen.^[5]

Het zijn precies deze discussies tussen leerlingen die tot dieper begrip bij algebra zouden moeten leiden. Zodra leerlingen hun ideeën uitleggen en in discussie hierover gaan, wordt inzicht gestimuleerd. Wie een potentiële oplosmethode aan een ander uitlegt, terwijl die ander kritische vragen stelt, gaat deze methode beter begrijpen.

Het globaal naar vraagstukken kijken en nadenken of discussiëren over strategie wordt extra belangrijk als de opdracht bijvoorbeeld vraagt naar meerdere antwoorden of oplosmethodes. Adequaat groepswork waarbij leerlingen op elkaar zijn aangewezen, in combinatie met geschikte algebraopgaven, zou dus symbol sense kunnen stimuleren. Dit verband willen we in de praktijk graag waarnemen. De vraag in dit onderzoek is of en, zo ja, hoe groepswork kan bijdragen aan de ontwikkeling van symbol sense bij leerlingen.

De volgende drie vergelijkingen^{[3][6][7]} zijn in het onderzoek gebruikt:

Voor welke x geldt: $\frac{2x+3}{4x+6}=2$

Voor welke x geldt: $x(x-1)(x+2)=0$

Voor welke v geldt: $v\sqrt{u}=1+2v\sqrt{1+u}$

Opgaven

We gebruiken opgaven die over het algemeen een routine-aanpak en een symbol sense aanpak hebben, waarbij de symbol sense aanpak efficiënter is, zodat we de verschillen in aanpak goed kunnen bekijken. Zie het kader voor de opgaven.

De symbol sense in de eerste opgave zit in het opmerken dat de noemer altijd tweemaal de teller is, waardoor de breuk nooit gelijk aan 2 kan zijn maar juist gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Leerlingen die eerst kruislings vermenigvuldigen en zo de oplossing $x = -1,5$ vinden en vergeten die vervolgens te controleren, geven geen blijk van symbol sense. Kruislings vermenigvuldigen levert namelijk een oplossing op die een noemer gelijk aan nul geeft. Zie figuur 2 voor

een voorbeeld van een leerling die de foute oplossing vindt en ontdekt dat er door nul wordt gedeeld. Aan 0/0 verbindt deze leerling echter geen conclusie, terwijl er geconcludeerd zou moeten worden dat het niet voldoen van de gevonden x betekent dat er geen oplossing is. Bij de tweede opgave getuigt een aanpak waarbij leerlingen direct haakjes wegwerken van weinig strategie en dus van weinig symbol sense. Meteen de oplossingen aflezen geeft blijk van inzicht in de structuur van de vergelijking en beschouwen we daarom als symbol sense. De derde vergelijking ziet er erg lastig uit. Kwadrateren is een stap die visueel aantrekkelijk is, omdat je graag van de wortels af wilt komen, die zo sterk in het oog springen. Daarmee kom je in dit geval niet verder. Echter, zodra je ziet dat de vergelijking lineair in v is en de wortels niet afhankelijk zijn van v , wordt het een stuk eenvoudiger.

Methode

Algemener gekeken naar de probleemaanpak stellen we dat leerlingen of groepen die discussiëren of twijfelen over de geldigheid van een stap symbol sense vertonen. Daarnaast is dingen proberen goed: soms zie je namelijk leerlingen direct na het lezen van de vraag al vastlopen. In het onderzoek hebben acht groepen van drie leerlingen en acht individuele leerlingen uit vijfde en zesde klassen vwo met wiskunde B steeds 20 minuten aan drie vergelijkingen gewerkt (zie het kader). De onderzoekende docent beantwoordde geen inhoudelijke vragen. Van de aanpak zijn steeds video-opnames gemaakt. Vervolgens zijn de video's geanalyseerd, waarbij gekeken werd naar het al dan niet plaatsvinden van de eerder omschreven gebeurtenissen. Zo kunnen we iets zeggen over welke aanpak een groep of individu globaal bekeken heeft en of er verschil zit tussen aanpakken van groepen en individuen.

$$\frac{2x+3}{4x+6} = \frac{2}{1}$$

$$2(4x+6) = 2x+3$$

$$8x+12 = 2x+3$$

$$8x-2x = 3-12$$

$$6x = -9$$

$$x = -\frac{9}{6} = -1\frac{3}{6} = -1\frac{1}{2}$$

$$\frac{2 \cdot -1\frac{1}{2} + 3}{4 \cdot -1\frac{1}{2} + 6} = \frac{-3+3}{-6+6} = \frac{0}{0}$$

figuur 2 Individuele uitwerking van opgave 1

Resultaten			
	Gedrag	Groepen	Individueen
A1	Discussie of twijfel of iets mag	7	3
A2	Proberen	5	4
1.1	Controleren na ontbinden	5	3
1.2	Dus geen oplossing	5	1
1.3a	Herkennen verhouding die er moet zijn (2)	3	0
1.3b	Herkennen verhouding die er is (1/2)	2	0
2.1	Haakjes wegwerken	0	1
2.2	Direct oplossing herkennen	6	5
2.3	Haakjes wegwerken naderhand	2	3
3.1	Kwadrateren	6	6
3.2	Kwadrateren én dit fout doen	3	5
3.3	Herkennen dat u niet relevant is	1	0
3.4	Antwoord onafhankelijk van v	5	1
3.5	Goede oplossing	2	0

tabel 1 Resultaten onderzoek: welk gedrag of welke aanpak komt hoe vaak voor bij groepen en individuen

Tabel 1 vat de resultaten samen. In de tweede kolom staan de gebeurtenissen die we eerder omschreven. De getallen in de eerste kolom refereren aan de opgave (2.*i* slaat bijvoorbeeld op een gebeurtenis bij opgave 2) of aan een algemene gedragsvorm (A). Onder groepen en individuen staat hoeveel van de acht groepen of individuen dat gedrag vertoonden. Bij deze resultaten valt op dat de groepen inderdaad vaker symbol sense vertonen dan de individuen: ze proberen meer en discussiëren of twijfelen vaker. Daarnaast ontdekten sommige groepen bij vraag 1 of 3 de symbol sense oplossing, tegenover geen van de individuen.

Wat specifiek opviel is dat de groepen zelden moeite met een routineaanpak leken te hebben, terwijl dit bij de individuen vaak fout ging, bijvoorbeeld door bij de derde opgave een kwadrateerfout te maken. Dit illustreert dat symbol sense en routineaanpak hand in hand gaan: groepen hebben minder moeite met routine en kunnen meer denkkracht besteden aan strategie en inzicht.

Conclusie

De vraag was of en hoe groepswork kan bijdragen aan het ontwikkelen van symbol sense. Uit de theorie is het vermoeden ontstaan dat groepswork het inzicht kan verhogen, als er binnen de groepen maar voldoende ruimte is voor discussie, en als de docent alleen optreedt als procesmanager. Het beperkte onderzoek bevestigt dit op een kleinschalige, kwalitatieve manier voor het geval van symbol sense: we zien dat groepen inderdaad meer symbol sense vertonen en daardoor vermoedelijk ook meer symbol sense ontwikkelen. Dit ondersteunt dus de positieve waardering voor groepswork als werkvorm. Kwantitatief is dit natuurlijk geen onderbouwing, omdat het een erg klein onderzoek betreft; herhaling en opschaaling zouden nodig zijn voor meer stellige conclusies.



vakbladeuclides.nl/932schendel

Noten

- [1] De scriptie waarin verslag wordt gedaan van het bacheloronderzoek naar de inzet van groepswork ter bevordering van symbol sense is te vinden op de *Euclides* site. Begeleider bij dit onderzoek was Paul Drijvers.
- [2] Drijvers, P. & Kop, P. (2012). Variabelen en Vergelijkingen. In P. Drijvers, A. van Streun, & A. Zwaneveld, *Handboek wiskundendidactiek* (pp. 53-83). Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- [3] Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- [4] Ebbens, S. (2013). *Effectief leren*. Groningen / Houten: Noordhoff Uitgevers bv.
- [5] Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (2007). *Niveauperhoging door samenwerkend leren*. Amsterdam: Vossiuspers UvA.
- [6] Stiphout, I. van (2011). *The Developments of Algebraic Proficiency*. Eindhoven: Printservice TU/e.
- [7] Wenger, R. (1987). Cognitive science and algebra learning. In A. Schoenfeld (Red.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 217-251). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates, Inc.

Over de auteur

Corwin van Schendel volgde de Utrechtse bachelor-opleiding Wiskunde met een educatieve minor. Nu doceert hij wiskunde op O.R.S. Lek en Linge terwijl hij de Utrechtse master Science Education and Communication volgt. Dit artikel is een samenvatting van zijn bachelor-onderzoek naar het inzetten van groepswork om symbol sense te bevorderen. E-mailadres: corwinvs@gmail.com.

EEN MOOI VOORBEELD VAN MOOIE MEETKUNDE

Dick Klingens

Een combinatie van wiskunde B en D kan leiden tot iets wat je mooie meetkunde zou kunnen noemen. Aldus Dick Klingens, die ons graag meevoert in de schoonheid van bijzondere eigenschappen van kegelsneden met een middelpunt.

In het nieuwe eindexamenprogramma van wiskunde B en wiskunde D voor het vwo wordt bij meetkunde de nadruk gelegd op het gebruik van coördinaten (dit is in wat mindere mate het geval op het havo):

- De kandidaat kan eigenschappen en onderlinge ligging van punten, lijnen, cirkels en andere *geschikte figuren onderzoeken met behulp van algebraïsche voorstellingen*, kan in een gegeven of zelfgekozen coördinatenstelsel algebraïsche voorstellingen van figuren opstellen en kan algebraïsche voorstellingen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen. (B, domein E2)
- De kandidaat kan *analytische en synthetische methoden* en redeneringen toepassen op meetkundige probleemsituaties en daarmee eigenschappen bewijzen.^[1] (D, domein D1)

Een combinatie B & D, dat wil zeggen ‘geschikte figuren onderzoeken met analytische en synthetische methoden’, biedt de mogelijkheid in dit artikel wat breder en dieper in te gaan op bijzondere meetkundige eigenschappen. Dit leidt dan tot wat ik ‘mooie meetkunde’ zou willen noemen. Een mooi voorbeeld daarvan volgt hieronder.^[2]

Hyperbool

We gaan in dit voorbeeld uit van een hyperbool.

Weliswaar zijn kegelsneden alleen in het vwo-programma van wiskunde D genoemd, maar binnen de analyse komen toch ook hyperbolen voor.

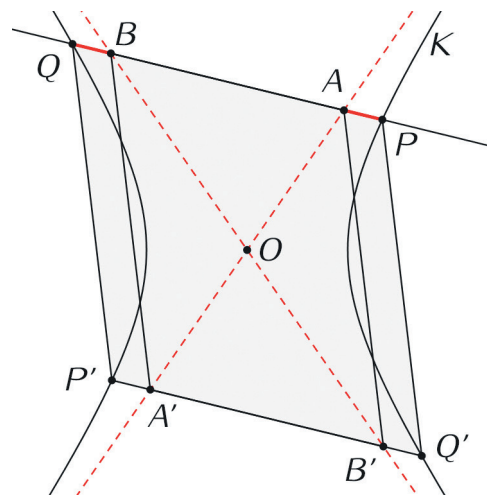
Van de kegelsneden die een middelpunt hebben – cirkel, ellips, hyperbool – is eenvoudig via de middelpuntsvergelijking daarvan in een xOy -assenstelsel, vast te stellen dat ze *puntsymmetrisch* zijn ten opzichte van het punt O .

Vergelijking: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ voor de cirkel,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ voor de ellips en $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ voor de

hyperbool). Puntsymmetrie: Als het punt $P = (x_0, y_0)$ op de kegelsnede ligt, dan ligt het *tegenpunt* P' van P met $P' = (-x_0, -y_0)$ eveneens op die kegelsnede. Dit geeft al direct een ‘mooie’ eigenschap van een hyperbool en diens asymptoten; deze laatste lijnen vormen op zich een puntsymmetrische figuur.

Stelling 1: Is PQ een koorde^[3] van een hyperbool K en snijdt de lijn PQ de asymptoten van K in de punten A en B , dan is $PA = QB$; zie figuur 1.



figuur 1

Bewijs: Zijn P' , Q' , A' en B' de tegenpunten van P , Q , A en B , dan is op grond van de puntsymmetrie ten opzichte van het punt O de vierhoek $PQP'Q'$ een parallelogram, waarbij A' en B' op de zijde $P'Q'$ liggen. Ook vierhoek $ABA'B'$ is een parallelogram. En daaruit volgt het gestelde direct.

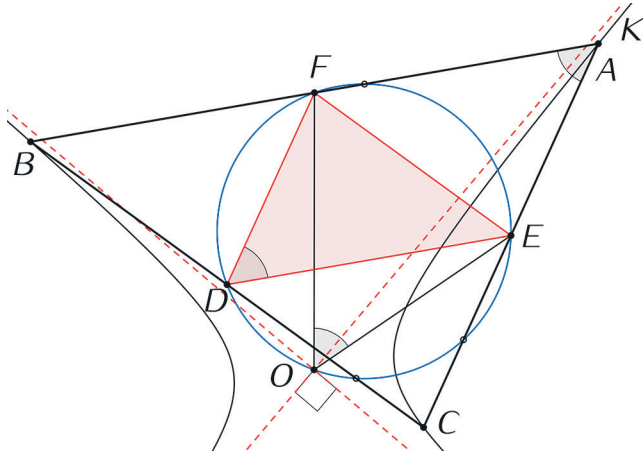
Gevolg: De lijnstukken PQ en AB hebben hetzelfde midden.

Orthogonale hyperbool

We bekijken (het gevolg van) dat gevolg voor een *orthogonale hyperbool* K ^[4] met middelpunt O .

In figuur 2 snijdt de koorde PQ van K de asymptoten ook nu in de punten A en B . Driehoek OAB is dan rechthoekig in O , omdat de asymptoten de dragers zijn van de zijden OA en OB . Voor het midden M van het lijnstuk AB geldt dan: $OM = MA = MB$, immers, OM is deel van de diagonaal OO'' in de rechthoek $OAO''B$. Daarmee is driehoek OAM gelijkbenig, zodat daarin $\angle O = \angle A$. We formuleren dit als:

Van de in K ingeschreven driehoek ABC is DEF de driehoek die bepaald is door de middens van de zijden, zie figuur 4.



figuur 4

De omcirkel^[5] van driehoek DEF is de zogeheten *negenpunts-cirkel* of *cirkel van Feuerbach*^[6] van driehoek ABC . De negen in de naam van de cirkel bedoelde punten die op die cirkel liggen, zijn:

- de middens van de zijden van de driehoek;
- de voetpunten van de hoogtelijnen van de driehoek (geen namen in figuur 4);
- de middens van de ‘bovenste’ stukken van de hoogtelijnen (niet getekend in figuur 4).^[2]

En de in stelling 4 te noemen mooie eigenschap – een *tiende* punt op de negenpunts-cirkel – is nu eenvoudig te bewijzen.

Stelling 4: Is een driehoek ingeschreven in een orthogonale hyperbool, dan ligt het middelpunt van die hyperbool op de negenpunts-cirkel van die driehoek.

Bewijs: Zie weer figuur 4. Hierin is K dus een omgeschreven orthogonale hyperbool van driehoek ABC . Het middelpunt van K is het punt O .

We passen stelling 3 toe op de koorden AB en AC van K . De lijnstukken OF en OE verbinden het middelpunt van de hyperbool met de middens van die koorden, zodat: $\angle FOE = \angle CAB = \angle EAF$.

Maar vierhoek $DEAF$ is een parallellogram, zodat $\angle EDF = \angle EAF$. Gevolg: $\angle FOE = \angle EDF$.

Volgens de stelling van de omtrekshoek ligt dan ook het punt O op de negenpunts-cirkel.

Hoogtepunt

Een eveneens mooie eigenschap van het hoogtepunt van een driehoek die is ingeschreven in een orthogonale hyperbool, staat in de volgende stelling.

Stelling 5: Is een driehoek ingeschreven in een orthogonale hyperbool, dan ligt het hoogtepunt van die driehoek op die hyperbool.

Bij het bewijs van stelling 5 gebruiken we coördinaten.^[7] Zonder de algemene geldigheid van het bewijs geweld aan te doen, kiezen we de asymptoten van de orthogonale hyperbool K langs de coördinaatsassen van een recht-hoekig assenstelsel^[2] xOy . En, op grond van gelijkvormigheid, kunnen we voor de vergelijking van K uitgaan van: $xy = 1$ of $y = \frac{1}{x}$.

Bewijs van stelling 5: Zie figuur 5a waarin $A = (a, 1/a)$, $B = (b, 1/b)$, $C = (1, 1/c)$ drie verschillende punten zijn van K (met $a, b, c \neq 0$ en onder meer $b \neq c$).

Voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van de lijnen AB en AC hebben we dan:^[8]

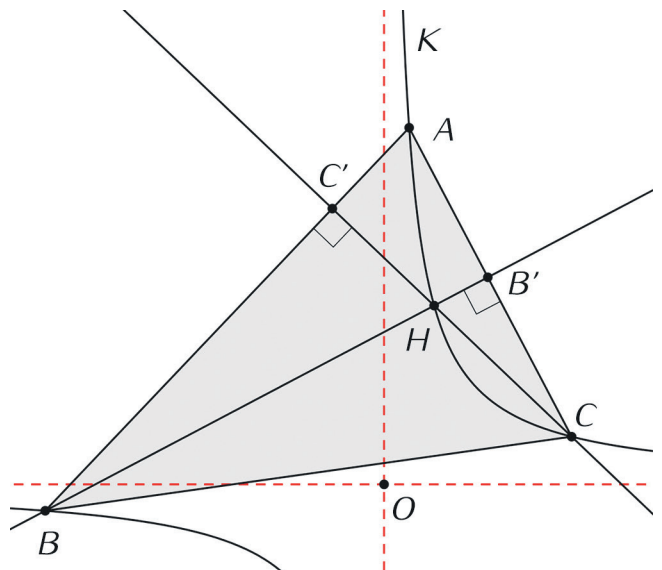
$$\text{rico}(AB) = -1/ab$$

$$\text{rico}(AC) = -1/ac$$

Vergelijkingen van de hoogtelijnen van driehoek ABC uit B en C zijn dan:

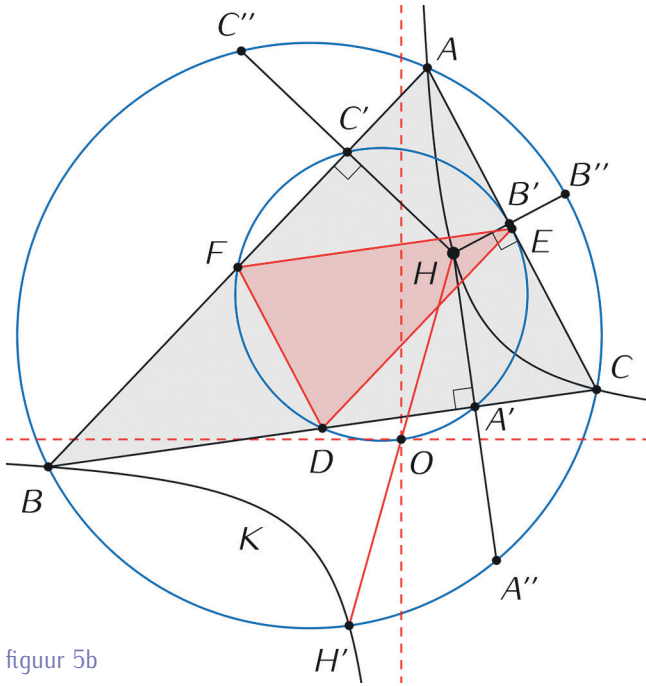
$$BB' : y - 1/b = ac(x - b) \text{ of } by - 1 = abc(x - b)$$

$$CC' : y - 1/c = ab(x - c) \text{ of } cy - 1 = abc(x - c)$$



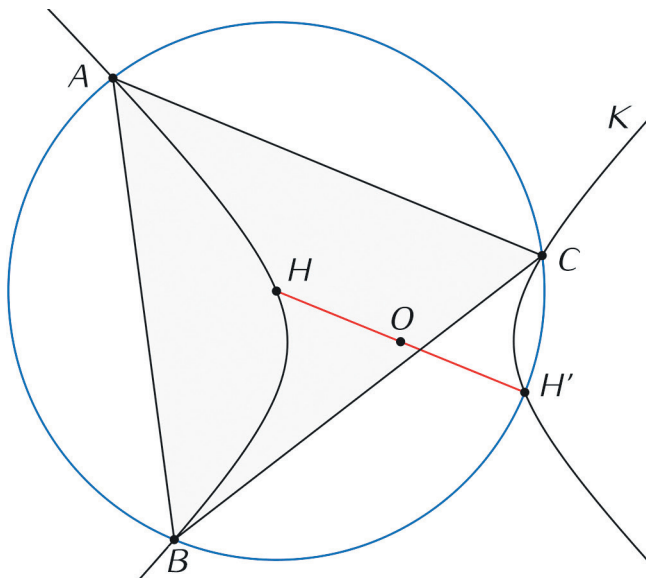
figuur 5a

Uit deze vergelijkingen volgt dan, na enige berekening, voor de coördinaten (x_H, y_H) van het snijpunt H van die lijnen (het hoogtepunt): $x_H = -1/abc$ en $y_H = -abc$. De coördinaten van het punt H voldoen daarmee aan de vergelijking van de hyperbool. Met andere woorden: het hoogtepunt H van de driehoek ABC ligt op K .



figuur 5b

Gevolg: Zie figuur 5b. Volgens de, voorafgaand aan stelling 4, genoemde negenpunteigenschappen beeldt de vermenigvuldiging V_H (centrum H , factor $\frac{1}{2}$) de omcirkel van driehoek ABC – via de punten A'', B'', C'' op die omcirkel – af op de negenpunts-cirkel, en dat is de omcirkel van driehoek $A'B'C' (\equiv$ driehoek $DEF)$.^[2] Het vierde snijpunt H' van de omcirkel en de hyperbool heeft daarmee dus het punt O als V_H -beeld (zie ook stelling 4).



figuur 6

Ook mooi

We gaan nu uit van een orthogonale hyperbool (middenpunt O), zie figuur 6. Daarop kiezen we een punt H . Vervolgens bepalen we de snijpunten A, B, C van de cirkel met middelpunt H die door het tegenpunt H' van H gaat. *Die driehoek is gelijkzijdig!* Waarom? Het punt H is het hoogtepunt van driehoek ABC , maar het is ook het middelpunt van de omgeschreven cirkel van die driehoek. Waar dat uit blijkt? Uit 'al het moois' dat in de voorgaande paragrafen staat.

Noten

- [1] Examenprogramma wiskunde B vanaf 2018
Examenprogramma wiskunde D vanaf 2018
Zie voor beide: <http://www.examenblad.nl>
- [2] Bij dit artikel hoort een appendix waarin enkele (basis)begrippen die in dit artikel worden gebruikt, nader zijn toegelicht. Zie daarvoor: <http://vakbladeuclides.nl/932klingens>
- [3] Onder een *koorde* van een kegelsnede wordt verstaan het verbindingslijnstuk tussen twee punten van die kegelsnede.
- [4] Een hyperbool heet *orthogonaal* (ook wel *gelijkzijdig*) als de asymptoten van die hyperbool loodrecht op elkaar staan.
- [5] De *omcirkel* van een driehoek is de omgeschreven cirkel van die driehoek.
- [6] Naar Karl Wilhelm von Feuerbach (1800 – 1834, Duitsland). Hij bewees als eerste een aantal eigenschappen van de naar hem genoemde cirkel, onder meer dat die cirkel raakt aan de ingeschreven en aan de aangescreven cirkels van de driehoek.
- [7] In de appendix (zie noot 2) staat een synthetisch bewijs.
- [8] Met de rekenkundige uitdrukking $1/xy$ bedoelen we in hetgeen volgt $1/(xy)$.



vakbladeuclides.nl/932klingens

Op de site is een uitgebreide appendix bij dit artikel te vinden.

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Gedurende enkele jaren was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen vanaf 2018). E-mailadres: dklingens@gmail.com

Enigma-codeermachine voor 100 euro op rommelmarkt

Een man op een rommelmarkt in Roemenië dacht een oude typemachine goed verkocht te hebben voor 100 euro. Het bleek echter om een Duitse Enigma-codeermachine te gaan, die later voor 45.000 euro werd verkocht. De Duitse strijdkrachten gebruikten de Enigma-code tijdens de Tweede Wereldoorlog om orders over te brengen naar bijvoorbeeld troepen in het veld of de U-boten. De codeermachines werden door de ontvangers gebruikt om de gecodeerde berichten te ontcijferen.

45.000 euro is voor een Enigma-machine nog relatief goedkoop. In New York werd in juni 477.000 euro betaald voor een Enigma-machine uit 1944.

Hoewel de Duitsers zelf dachten dat hun Enigma-code niet te kraken was, bleek dat wel het geval. Mede dankzij belangrijk werk van Poolse codekrakers wisten de Britten de berichten in Enigma-code uiteindelijk grotendeels te ontcijferen. Historici denken dat de Tweede Wereldoorlog hierdoor mogelijk tot twee jaar werd verkort. De film *The Imitation Game* gaat over het kraken van de Enigma-code, al is deze film historisch gezien allesbehalve accuraat.

Bron: www.nu.nl/opmerkelijk/4836380/man-koopt-enigma-codeermachine-100-euro-rommelmarkt.html



figuur 1

Eerste vrouwelijke Fieldsmedalist overleden

Op 14 juli j.l. overleed op 40-jarige leeftijd Maryam Mirzakhani. Zij was in 2014 de eerste vrouw die de Fieldsmedal voor jonge wiskundigen won. Maryam groeide op in het Iran van net na de revolutie van eind jaren zeventig. In 1994 deed ze, daartoe aangezet door haar oudere broer, mee aan een wiskundige olympiade in haar land. Ze won direct goud en herhaalde deze prestatie het jaar erop. Ze ging studeren aan de Sharif-universiteit, vertrok in 2000 naar Amerika om er in 2004 te promoveren aan Harvard. Vervolgens werkte ze aan Princeton University en in Stanford. Mirzakhani's wiskunde had

betrekking op het begrijpen van de mogelijke patronen op oppervlakken. Ze werkte onder meer aan het bekende probleem of een biljartbal alle delen van het laken zal passeren als hij maar lang genoeg blijft rondkaatsen. Daarnaast werkte ze aan diepe wiskundige theorieën die natuurkundigen gebruiken om deeltjes als trillende snaartjes en membranen voor te stellen. In haar proefschrift bewees ze een stelling op dat gebied van de mathematische fysicus Edward Witten. Dat resultaat bracht haar faam en respect onder collega's.

Bron: *de Volkskrant* juli 2017



figuur 2 Maryam Mirzakhani

Rubikskubus en het handelsreizigersprobleem

De Rubikskubus in figuur 3 kan met hooguit twintig draaibewegingen worden opgelost. Voor grotere kubussen, met 16, 25, of in het algemeen n^2 vlakjes per zijvlak, wordt het maximaal aantal benodigde draaiingen groter. In 2011 bewees Erik Demaine dat het aantal draaiingen dat nodig is om een in de war gedraaide kubus met n^2 vlakjes per zijvlak goed te krijgen proportioneel is met $n^2/\log n$. Het is wiskundig niet moeilijk om een Rubikskubus in $n^2/\log n$ stappen op te lossen. Maar vaak moet het ook met minder draaiingen kunnen, afhankelijk van de beginstand. De vraag is dan of je eenvoudig kunt beslissen of een x aantal stappen toereikend is, waarbij x veel kleiner is dan $n^2/\log n$. Deze zomer wist Demaine het antwoord. Een methode om te bepalen of je een $n \times n \times n$ -kubus vanuit een gegeven beginstand in x stappen kunt oplossen bestaat waarschijnlijk niet. Samen met zijn collega's Sarah Eisenstat en Mikhail Rudoy bewees Demaine dat dit probleem dezelfde moeilijkheidsgraad heeft als het beroemde handelsreizigersprobleem, waarbij een kortste rondrit moet worden gevonden langs een aantal steden.

Dat probleem is een NP-probleem (niet-deterministisch polynomiaal) en daarmee de Rubikskubus nu dus ook.
Bron: NRC Handelsblad, juli 2017



figuur 3

Verborgen partijdigheid in AD-haringtest

De meeste haringwinkels in de top tien van de jaarlijkse AD-Haringtest komen uit de regio Rotterdam. Een statistische analyse, uitgevoerd door hoofddocent economie Ben Vollaard van de Universiteit Tilburg, laat zien dat het zeer onwaarschijnlijk is dat in deze omgeving de beste haring van Nederland verkocht wordt. Zonder de Rotterdam-bonus zou de top tien van dit jaar er heel anders uitzien. Vollaard onderzocht statistisch de onpartijdigheid van de haringtest. Hij concludeert dat haringverkopers binnen een straal van 30 kilometer rond Rotterdam onterecht gemiddeld een half punt hoger scoren (op een schaal van 0 tot 10) dan haringverkopers buiten dat gebied.



figuur 4

AD-journalist Paul Hovius die de haringtest al dertig jaar coördineert en in de krant zet, bekeek het onderzoek met enige verbazing. 'Het AD blijft achter de methodiek staan die wij hanteren voor de haringtest. Het onderzoek van Vollaard doet aannames waar ik me niet in herken. Zo zitten de prijs en het gewicht van de haring ook in het model, maar die twee gegevens spelen geen enkele rol bij ons eindoordeel voor de plaats op de ranglijst.' Het statistisch onderzoek doet trouwens geen uitspraak

over de eventuele motieven van de keurmeesters, het maakt slechts aannemelijk dat haringverkopers in de regio Rotterdam minder kritisch beoordeeld worden. Hovius gelooft daar niet in en nodigt Vollaard uit om volgend jaar een dagje mee te lopen bij de haringtest.
Bron: <https://www.nemokennislink.nl/publicaties/de-verborgen-partijdigheid-in-de-ad-haringtest>

Invloed tie-break bij honkbalwedstrijden

In 2008 heeft de internationale honkbalbond een regel bedacht om het aantal lange wedstrijden terug te dringen: als het na de tiende inning nog steeds gelijk staat, beginnen de nieuwe innings alvast met een speler op het eerste en een speler op het tweede honk.

Vier studenten van het vak 'Stochastische processen' van de TUE hebben de invloed van deze regel op het honkbalspel onderzocht. Met data uit het verleden rekenden de studenten uit wat de kans is op de meest voorkomende situaties in een honkbalspel. Zo berekenden ze onder meer de kans dat een slagman naar het eerste honk weet te lopen, de kans op een vangbal, de kans op een homerun en de kans dat de slagman de bal überhaupt niet weet te raken. Deze mogelijkheden geven aan wat de spelsituatie is als de volgende slagman begint, staat er al iemand op de honken of is er al iemand uit? Door al deze situaties door te rekenen, weet je uiteindelijk hoe groot de kans is dat het aan het eind van een inning nog steeds gelijk staat.

Zonder tie-breaks berekent het model van de studenten dat er gemiddeld 0,4 punten per inning gescoord wordt, na toepassing van de tie-break regel is dat 1,2 punten per inning. De regel zorgt er ook voor dat de verlenging ongeveer twee keer zo kort duurt. Overigens zou het goed zijn als ook het Nederlands honkbalteam gaat trainen op deze tie-break situatie: de twee wedstrijden op het laatste WK waar het in de tie-break terecht kwam werden verloren...

Bron: <https://www.nemokennislink.nl/facesofscience/blogs/onzekere-honkbalwedstrijden>

WISKUNDE KOMT TOT LEVEN

Alweer twee jaar geleden werden tijdens de jubileumviering van de NVvW de films gepresenteerd die ingezonden waren voor de Animath wedstrijd. Door het tijdloze karakter van die films is het nooit te laat een bloemlezing van de inzendingen te geven. Monique Pijls en Maarten van der Burg bespreken de meest opvallende video's.

Laatste stukje koek verdelen

Stelt u zich voor, we zijn in een huiskamer op zaterdagavond, vader, moeder en zoon voor de buis. Kop koffie met boterkoek erbij en ... wie neemt dat laatste stukje? Met deze reality-tv-scène opent de film *Trisectrice*,^[1] gemaakt door student lerarenopleiding wiskunde Arnaud. Een taartpunt in drie gelijke stukken delen, hoe doe je dat eigenlijk? Want dat felbegeerde laatste stuk boterkoek moet natuurlijk eerlijk verdeeld worden. Wiskundig gaat het om de driedeling van een hoek. De film switcht vanuit de openingsscène naar een abstracte visuele uitleg met origami en barokmuziek op de achtergrond. De kijker kan meedoen wat er in de film gebeurt en zo letterlijk 'vat' krijgen op hoe een trisectrice wordt geconstrueerd. Als dit helder is, komen we weer in de huiskamer en wordt de boterkoek – eind goed al goed – gelijk verdeeld.

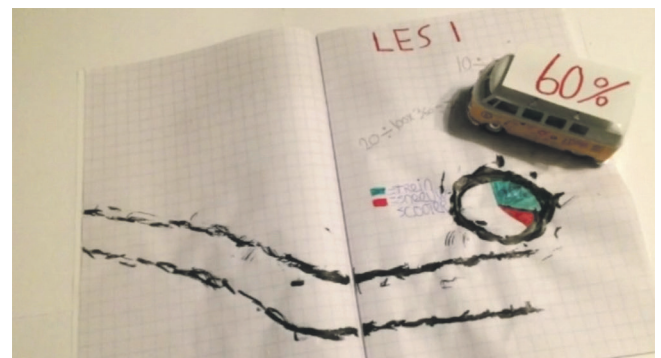


figuur 1 Trisectie

De film *Trisectie* was een van de prijswinnaars van de Animath-lustrumwedstrijd van de NVvW in 2015. 'Maak een clip met een wiskundig object in de hoofdrol, waarin een wiskundig onderwerp wordt uitgelegd en waarbij de clip zelf bovendien artistiek interessant is', zo luidde de opdracht. In de wiskundige uitleg moet bovendien een visueel element zitten. Geen makkelijke opgave, maar uitdagend en toegankelijk voor leerlingen en studenten op alle niveaus! Er zijn destijds 25 films ingestuurd, twaalf films genomineerd en uiteindelijk waren er vier prijswinnaars. In dit artikel maakt u kennis met een aantal genomineerde films.

Sterk door eenvoud

Hoeken meten viel op door de eenvoud van de productie. In een jazzy *lazy-sunday-afternoon* achtige sfeer maakt de kijker kennis met hoeken, de begrippen 'scherpe' en 'stompe' hoek, de gradenboog. Er gebeurt niet heel veel, feitelijk draait de clip om een doosje dat (vanzelf!) open en dichtgaat, maar die eenvoud is juist heel sterk. Dergelijke clips zouden er meer gemaakt moeten worden, als *apetizers* in de les.



figuur 2 Cirkeldiagram

Een verrassende inzending kwam van het Grafisch Lyceum Rotterdam, de film *Cirkeldiagram*. De film start in een wiskundeschrift, waar een speelgoedtrein en een auto doorheen rijden. De auto laat een spoor van inkt na, draait 360° om zijn eigen as en tekent zo een cirkel. Dat is een knap staaltje werk! Vervolgens wordt zichtbaar gemaakt hoe je een cirkeldiagram tekent, door aantallen om te rekenen naar de grootte van de hoek in het diagram. Een kleine vergissing in het tekenen (zoals je in de les als docent soms expres doet om te testen of de leerlingen dit opmerken!) vormt een prachtige aanleiding voor een gesprek. Het idee en de uitwerking zijn sterk, zeker gezien het feit dat de maker dit alleen heeft gedaan.

Vi-harts van de lage Landen

Er waren meer soloartiesten, zoals Milou, die als een wiskundefluisteraar haar kijkers meeneemt in het toepassen van de *Stelling van Pythagoras*. Met humor, geduld en een goed gevoel voor timing, laat Milou de kijker nadenken

over het berekenen van de lengte van een onbekende zijde van een driehoek. Het bewust inzetten van een fout antwoord om vervolgens aan te geven hoe het wel zit is een didactisch goede vondst. Milou vertelde achteraf dat ze er zelf van leert om de clips te maken. Eigenlijk heeft ze moeite met wiskunde en haar vader spoorde haar aan om er films over te maken. 'Door het maken van de film ben ik wel anders naar het onderwerp bij wiskunde gaan kijken, want elke keer als ik nu een toets maak, dan denk ik weer aan hoe dat poppetje in de film naar binnen kwam en dan ging uitleggen hoe alles moest.' Zo begon ze en inmiddels is er een eindproduct waar ook anderen van kunnen leren! Een andere 'Vi-hart van de Lage Landen' was Robin. Zij maakte de film *Oneindig grote oneindigheden*. Alsof ze het al haar leven lang doet, spreekt Robin een voiceover in over oneindigheid. Met subtiele creatieve vondsten en uitleg over de verschillende soorten getallen. Hier blijft een kans liggen om visueel duidelijk te maken wat het verschil is tussen bijvoorbeeld de verzameling rationale getallen en de natuurlijke getallen. We verheugen ons op meer werk van deze filmmaakster. Zelf zei ze: 'Ik ben niet zo goed in wiskunde, dat wist ik al. De opdracht was om wiskunde beeldend te maken, en daarom moest je het voor mijn gevoel ook een beetje in de echte wereld neerzetten. Toen heb ik wel moeten kijken naar, hoe je wiskunde eigenlijk weer kan geven en waar het eigenlijk in zit, want als je het in de les hebt, dan is het allemaal zo abstract en daar kan ik heel weinig mee, dus hoe maak je iets wat abstract is levendig.'



figuur 3 Oneindig grote oneindigheden

Muziek, klei en lego

Muziek speelde ook een belangrijke rol in de films. In *Moduloween* was deze zelf gecomponeerd, professioneel. Prachtige film over modulorekenen, verhalend, spannend. Als het wiskundige model van de klok was mee veranderd met het getallenvoorbeeld, dan was het begrip 'modulo' nog sterker uit de verf gekomen. Veel van de stop-motion films waren met klei en lego gemaakt, en een topper in deze categorie ging over rekenen met maten en oppervlakten. 'Ik heb onze film *Inhoud berekenen* ook laten zien aan kinderen van groep 8, want ik werd een keer uitgenodigd door school, om te vertellen over hoe het was op de



figuur 4 Moduloween

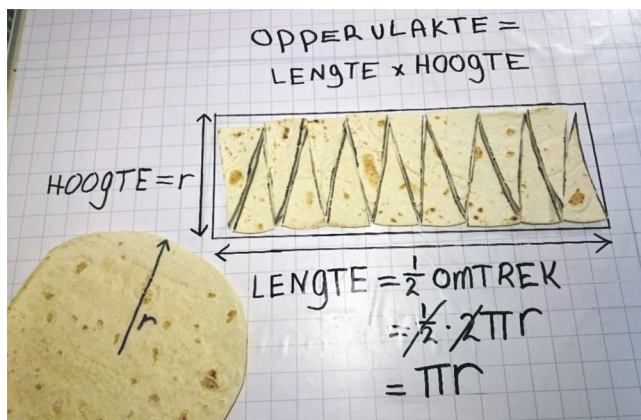


figuur 5 Figurenviendjes berekenen

middelbare, en toen had ik ook het filmpje laten zien, ze vonden het een erg leuk filmpje', vertelde Gert-Jan. Vertederend is de film *Figurenviendjes berekenen*, die laat zien hoe wiskundige objecten gaan leven en een eigen karakter krijgen in een alledaags verhaaltje.

Visueel bewijs

Didactisch interessant was de film *De oppervlakte van een cirkel*, een uitlegclip die iedereen zou moeten zien. Een voice-over met spannende muziek leidt de kijker stap voor stap door het visuele bewijs waarbij een cirkel – in dit geval een tortilla – in steeds kleinere partjes wordt verdeeld. Die partjes verschuiven samen tot een rechthoek waarvan de oppervlakte nadert naar $r \times \pi r$.



figuur 6 De oppervlakte van een cirkel

Sterke beelden die de hersenen doen kraken, heel geschikt voor in de klas! Interessant is dat wiskunde-docent Mariken Barents onlangs in de Facebookgroep Leraar Wiskunde naar deze clip vroeg om te gebruiken in haar les. Deze leerling-clip is veel aantrekkelijker dan de droge visuele animaties die al beschikbaar waren.

Leuk en duidelijk

Wat leren we hiervan? Dat leerlingen helemaal zelfstandig werken voor wat betreft de stop-motion-techniek en het creatieve aspect van de films. Dat leerlingen bij 'uitleg' niet altijd denken aan visuele uitleg, dus dat het belangrijk is om daar op te sturen. We zien dat het project zeer motiverend werkt, voor de makers en hun docenten. Muhtadi Al-Awwadi, student Masteropleiding Wiskunde en maker van de film *Kwadratische formules* zegt: 'Kijk, met een filmpje kun je het duidelijk maken, maar met stop-motion kun je het ook leuk maken. Dus je maakt het leuk en duidelijk en dat is echt wat leerlingen aanspreekt.'

Vanuit de Hogeschool van Amsterdam (HvA) zijn er ervaringen met het maken van Animath-clips als opdracht voor het vak Ontwerpen en Onderzoeken (O & O) op een Technasiumschool. Het project start dan met een kick-off op de HvA waarin leerlingen leren wat animatie is, wat visuele uitleg is en hoe zij een film kunnen maken op grond van een storyboard. Uiteindelijk vindt er een wiskundefilmfestival plaats op school, met rode loper en alle ouders in de zaal, waar de films worden vertoond en de makers vertellen over de films die ze hebben gemaakt. Een dergelijk filmfestival kan prima dienen als opmaat voor een landelijke wedstrijd. Het lectoraat Didactiek van de Bètavakken van de Hogeschool van Amsterdam heeft plannen om de landelijke Animath-wedstrijd opnieuw uit te schrijven, dus je kunt je leerlingen vast warm maken!



vakbladeuclides.nl/932pijls

Op de site vind je een pdf van dit artikel waarin iedere titel een hyperlink is naar de betreffende film. Of je gaat rechtstreeks naar <https://vimeopro.com/user38504697/animath-lustrumfilms-publieksprijs/>

Over de auteurs

Monique Pijls is lector Didactiek van de Bètavakken bij het Kenniscentrum Onderwijs en opvoeding van de Hogeschool van Amsterdam E-mail: m.h.j.pijls@hva.nl Website: <http://betadidactiek-hva.nl>

Maarten van der Burg is filmmaker en eigenaar van Script Factory. E-mail: vandenburg@scriptfactory.nl Website: <http://scriptfactory.nl>

BOEKBESPREKING

REKENONDERWIJS DOOR DE EEUWEN HEEN



Frank van Merwijk



Titel: Weg van het cijferen

Ondertitel: Rekenmethodes vanaf 1800 tot heden

Auteur: Adri Treffers

Uitgever: Reni Casoli (2015)

ISBN: 978909028793 , 252 pagina's (softcover)

Prijs: € 30,-

Gerommel in rekenland

'Rekenen is een stervend vak, onherstelbaar aangetast door het kennelijk moeilijk te bestrijden cijfervirus.'

Voor wie nog dacht dat de storm rondom rekenen pas zo'n jaar of twintig geleden voor het eerst is opgestoken: bovenstaand citaat komt van de onderwijsinspectie, stamt uit 1963 en al in 1936 constateerde de inspectie dat rekenen overgemechaniseerd was.

Aan het begin van deze eeuw vlamden discussies op rondom realistisch en traditioneel rekenen. In 2008 bracht de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen zijn rapport uit met de referentieniveaus voor de verschillende leeftijdsgroepen. De overheid heeft in aansluiting hierop de rekentoets bij de eindexamens vo en mbo ingesteld, waarbij cesuur en zak-/slaagregeling tot op de dag van vandaag niet definitief geregeld zijn. De ervaring van veel leraren uit het vo dat leerlingen matig tot belaberd rekenen valt moeilijk te rijmen met het resultaat van het PIAAC-onderzoek (2012): de Nederlandse jongeren van 16 tot 20 jaar zouden van alle OESO-landen de beste functionele rekenvaardigheid bezitten. Daar staat tegenover dat bij het laatste TIMSS-onderzoek de Nederlandse leerlingen uit de wereld-top-tien zijn gevallen. Kortom: het blijft rommelen in rekenland.

Rekenmethodes

In 2015 verscheen het boek *Weg van het cijferen* van de hand van Adri Treffers, emeritus-hoogleraar in de reken-didactiek. Bovenstaande quotes van de inspectie staan erin opgetekend. Het boek omvat een studie van veel Nederlandse rekenmethoden van de afgelopen twee-honderd jaar. Toonaangevende methodes uit de onder-zochte tijdvakken worden tot in detail beschreven. Hierbij richt Treffers zijn aandacht vooral op de vormgeving van het onderwijs in de cijferalgoritmen en de voorbereidingen daartoe, zoals aanvankelijk rekenen, hoofdrekenen en schatten. De opeenvolgende visies op rekenonderwijs en de ontwikkelingen daarin worden helder beschreven.

Begrippen als heuristisch, conceptueel, mechanistisch, functioneel en procedureel worden vanuit de respectieve-lijke tijdgeesten gedefinieerd en verklarend op een rij gezet. Het boek bevat ook een korte

geschiedenis van het realistisch rekenen en beschrijvingen en onderzoek rondom de internationale rekenonderzoeken van de afgelopen kwart eeuw.

Overzicht

In hoofdstuk 7 'Overzicht 1800-2010' loopt Treffers de eerdere hoofdstukken nog eens samenvattend door, waarbij hij in plaats van de titels van de hoofdstukken typering van elk tijdvak noteert:

1800-1875: de semi-methodische periode

1875-1900: tijdvak van de heuristische methodes

1900-1950: tijdvak van de duale methodes

1950-1985: de tegenstelling procedureel-functioneel

1985-1990: naar een nationaal rekenprogramma

1990- 2010: realistische methoden en Cito-onderzoeken

Was het voor mij in de eerdere hoofdstukken flink studeren op de rijkdom aan details, in deze samenvatting viel voor mij alles wat ik daarvoor gelezen had elegant op zijn plaats.

Enkele hoogtepunten uit het boek:

Jan Versluys: grondlegger Nederlandse rekendidactiek

Na het tijdperk van het 'mechanische bordrekenen' (Kellinga, 1926) in de eerste helft van de 19^e eeuw, waarbij er hooguit voor een enkele deelleergang methode-materiaal voor handen was, werden er na 1850 complete rekenmethoden uitgebracht. Het was een tijd waarin heuristiek een uitgesproken plaats in het reken-onderwijs kregen. De meest gedegen visie en aanpak kwam van Jan Versluys. Hij was de eerste die met zijn methode *Rekenonderwijs* (goede naam!) een didactische aanpak vanuit concentrisch werken organiseerde. Zijn methode noemde hij inzichtelijk, zelfzoekend en klassikaal onder leiding van de onderwijzer. Elk getal tot twintig

werd monografisch gepresenteerd, dat wil zeggen dat het met zijn eigen specifieke getaleigenschappen werd geïntroduceerd. Zo was het getal 12 gelijk aan $10 + 2$, $6 + 6$, 2×6 , 3×4 , $2 \times 5 + 2$. De tafels werden heuris-tisch aangeleerd. Hoofdrekenen had een essentiële plaats in zijn methode, cijferen werd inzichtelijk aangeleerd, want 'ziellos gecijfer' was uit den boze.

Hoofdrekenen en cijferen: hand in hand

Alle andere methoden in de tweede helft van de negentiende eeuw noemden zich eveneens heuristisch. Hoofdrekenen en cijferen waren even belangrijk en werden naast elkaar geoefend. Vanaf 1900 verschijnen er

naast heuristische methodes ook methodes die in elk geval in de leergang cijferen de nadruk leggen op de procedure in plaats van op inzicht. Zij worden dual genoemd, omdat hoofdrekenen

en schatten wel met inzicht worden geïntroduceerd en ingeoeffend, maar cijferen niet. De methoden van Bouwman en Van Zelm en van Diels en Nauta uit de eerste helft van de twintigste eeuw zijn voorbeelden van duale methodes. Uit die tijd stamt ook de klacht van de onder-wijsinspectie dat het rekenen 'overgemechaniseerd' is. Rondom de jaren vijftig van de vorige eeuw wordt het onderscheid tussen procedurele methodes en heuris-tische methodes weer scherper. *Naar Zelfstandig Rekenen*, tot begin jaren '90 op Nederlandse scholen gebruikt, is een voorbeeld van een procedurele methode en *Geef Acht* en *Nieuw Rekenen* zijn heuristisch opgezet. In deze tijd gebruikt men de term mechanistisch in plaats van procedureel. Functioneel of realistisch komt in de plaats van heuristisch.

Nadat in '71 het project Wiskobas met mensen als Freudenthal, Goffree, Treffers en Wijdeveld van start is gegaan, gaat men de methodes die op basis daarvan vanaf de jaren '80 verschijnen realistisch noemen. De Wiskobas-groep heeft op basis van heuristiek en extra vakinhouden, waaronder meetkunde, een nieuwe didactiek ontwikkeld en gepresenteerd. De rekenmachine kwam in die tijd op (toen nog 'zakrekenmachine' geheten) en kreeg ook een plaats in het onderwijs. Uitgangspunt was volgens Freudenthal een didactiek 'aan de realiteit gelieerd, nabij de kinderen en maatschappelijk relevant' (1977). Ook andere hoogleraren in de wiskunde vonden destijds, net als Freudenthal, dat cijferen inzichtelijk geleerd diende te worden.

'DE DISCUSSIE OVER MECHANISTISCH
OF REALISTISCH REKENEN IS AL ZO'N
150 JAAR OUD.'

De Nederlandse examenstand. Nu beschikbaar.



TI-84 Plus CE-T

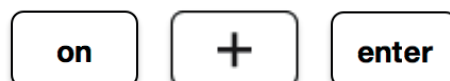


TI-Nspire CX



Alle instellingen volledig klaargezet voor
het Nederlandse wiskunde-examen.

Stel de examenstand in met



Traditioneel versus realistisch: een valse tegenstelling

Treffers laat in zijn boek haarfijn zien dat traditionele methodes heuristisch, procedureel of dual van aard zijn. Voorstanders van het traditionele rekenen als Van de Craats verdedigen in hun pleidooien steeds de procedurele visie en laten de rijke heuristische traditie links liggen.

Het KNAW-rapport *Rekenonderwijs op de Basisschool* (2009) benadrukte de cruciale rol van de leraar en presenteerde al de conclusies dat traditioneel rekenen geen eenduidig begrip is, net zo min als realistisch rekenen dat is. Een andere conclusie uit het KNAW-rapport is dat er *binnen* een bepaalde rekendidactiek vaak grotere verschillen in leerlingenprestaties bestaan dan *tussen* de verschillende rekendidactieken. De specifieke uitwerking van de didactiek en de interactie tussen leraar en leerling spelen kennelijk een grotere rol dan de algemene vakdidactische principes. Tot zover het KNAW-rapport.

Weg van het cijferen gaat niet over de cruciale rol van leraren in het proces van leren rekenen, het gaat over methoden en de bijbehorende didactische visies. In discussies bedoelen de verdedigers van de traditionele rekendidactiek dus meestal de procedurele didactiek. Van Treffers leren we dat de realistische rekendidactiek in de traditie staat van de heuristische rekendidactiek van Jan Versluys en zijn tijdgenoten. Hoofdrekenen als verzamelnaam voor het gebruik van geautomatiseerde kennis en handig en schattend rekenen is sinds de negentiende eeuw van essentieel belang, zowel in de procedurele, als in de heuristische visie.

Enkele kanttekeningen

Op de lagere school heb ik zelf van mijn onderwijzers rekenen geleerd uit de methode *Geef acht*, volgens Treffers een heuristische methode. De staartdeling heb ik altijd procedureel toegepast en pas later, tijdens mijn wiskundestudie, doorzien. Bij de voorbereiding van deze recensie vroeg ik mij af of *Geef acht* in tegenstelling tot wat Treffers beweert, toch een duale methode is geweest: veel aandacht voor inzichtelijk hoofdrekenen en schatten en daartegenover een procedurele methode om cijferen te leren. Of was de methode wel degelijk heuristisch en had de onderwijzer die mij de staartdeling heeft geleerd een procedurele aanpak?

De methode *Operatoir Rekenen* is in *Weg van het cijferen* niet meer dan een voetnoot. Volgens mij ten onrechte: eind jaren '80 van de vorige eeuw had die methode een marktaandeel van ongeveer dertig procent. De methode bevatte invloeden van Wiskobas, zeker op het gebied van schatten en handig rekenen, maar de didactiek van het cijferen was procedureel georganiseerd. Een duale methode dus. In de kringen van realistisch rekenen werd al vanaf de jaren '90 aangestuurd op minder onderwijstijd voor cijferalgoritmen. Argumenten daarvoor worden niet

genoemd in *Weg van het cijferen*. Evenmin komt aan de orde dat in de 21^e eeuw voor de cijferprocedures binnen rekenen geen plaats meer is volgens een aantal didactici. Treffers heeft zich met *Weg van het cijferen* klaarblijkelijk niet in deze discussie willen mengen.

Wel maakt hij in zijn boek duidelijk dat we in onze tijd veel over hoofdrekenen van het verleden kunnen leren. Regelmatig oefenen is essentieel, in po én vo. Was dat vroeger al van belang vanwege directe toepassingen in het dagelijkse leven en de voorbereiding op het cijferen, tegenwoordig is het ook belangrijk om berekeningen door rekenmachines, kassa's en computers snel te kunnen checken. En bij de kale sommen ('contextloze opgaven') in de rekentoets bij het eindexamen zijn geautomatiseerde kennis en handig en schattend rekenen ronduit onmisbaar.

Ten slotte

Wel of niet cijferen in de 21^e eeuw en op grond van welke argumenten, het is een spannende discussie die nog niet gesloten is. Adri Treffers heeft met zijn boek het verleden laten spreken en we kunnen daar veel van leren met het oog op de toekomst. Het begrip traditioneel rekenen is rijker en diverser dan wat men er tegenwoordig vaak mee bedoelt. Voor mij was het verhelderend om te lezen dat de discussie over mechanistisch of realistisch rekenen al zo'n 150 jaar oud is.

Weg van het cijferen is een must voor ieder die zich bezighoudt met rekendidactiek.

Literatuur

- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: Slo.
- KNAW (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool*. Amsterdam: KNAW.

Over de auteur

Frank van Merwijk is lerarenopleider en nascholer rekenen en wiskunde aan de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen (HAN). E-mail: frank.vanmerwijk@han.nl.

WISKUNDEONLINE OP HET COORNHERT GYMNASIUM

Martijn Koper
Ron Dames

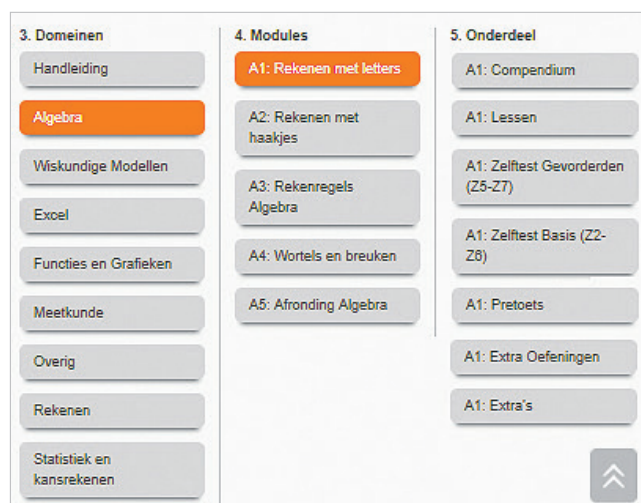
Samen met zijn collega Ron Dames heeft Martijn Koper een eigen digitale methode ontwikkeld. In dit artikel vertelt jij over de ervaringen met *WiskundeOnline* op het Coornhert Gymnasium te Gouda.

Een eigen lesmethode ontwikkelen kost veel tijd en hoofdbrekens. Op het Coornhert Gymnasium in Gouda zijn wij hier zes jaar geleden mee aan de slag gegaan. Inmiddels hebben we een zeer succesvolle digitale wiskundemethode ontwikkeld voor de onderbouw van het vwo, *WiskundeOnline*, (nu nog) alleen bereikbaar via de digitale leeromgeving van school voor leerlingen van het Coornhert Gymnasium. Momenteel wordt er hard gewerkt om de methode gereed te maken voor de bovenbouw van wiskunde A, B en C. Op school zijn we heel enthousiast over het werken met deze methode en sinds twee jaar wordt een digitale leeromgeving gebruikt waarbij de structuur van *WiskundeOnline* als voorbeeld heeft gediend. In dit artikel wil ik graag vertellen over *WiskundeOnline* en over de voordelen die wij ervaren in de praktijk.

Opbouw van *WiskundeOnline*

WiskundeOnline voor de onderbouw bestaat uit zes domeinen: Algebra, Meetkunde, Functies & Grafieken, Rekenen, Wiskundige Modellen en Statistiek & Kansrekenen. Elk domein bestaat uit een aantal modules die op volgorde worden behandeld. Per module zijn de volgende onderdelen beschikbaar:

Compendium:	De theorie van een module, beknopt weergegeven.
Lessen:	Uitleg, voorbeelden en opdrachten en antwoorden. (Hierin staan: introductieopgaven, aanwijzingen, gevorderden-opgaven, links naar ondersteunend lesmateriaal, zoals filmpjes en bewegende grafieken).
Zelftesten:	Opgaven op toetsniveau.
Pretoets:	Opgaven over alle vaardigheden uit de module. Per vaardigheid minimaal een opgave op niveau.
Extra's:	Links naar verdiepingsstof, filmpjes en spelletjes.
Lesplan:	Lesplan en Best Practises van collega's (alleen zichtbaar voor docenten).



figuur 1 Het domein Algebra bestaat uit vijf modules, verdeeld over drie leerjaren. Module A1: Rekenen met Letters bestaat uit zeven onderdelen.

Waarom een eigen methode?

Toen ik in augustus 2010 kwam werken op het Coornhert Gymnasium hadden alle leerlingen al een eigen laptop en was er een goedwerkend draadloos netwerk. De laptop werd bij wiskunde voornamelijk gebruikt om antwoorden te controleren. Wiskunde werd gemaakt uit een boek, dat werd aangevuld met oefenwerkbladen. Kortom veel verschillend materiaal.

Toen er nagedacht werd om nieuwe boeken aan te schaffen voor de onderbouw is het idee ontstaan om een eigen methode te gaan ontwikkelen. Op school wilden we al langer, waar mogelijk, onafhankelijk zijn van een uitgever en hadden we reeds een duidelijke visie ontwikkeld over hoe het lesmateriaal eruit zou moeten gaan zien. De jarenlange ervaring van Ron Dames als docent en maker van lesmateriaal voor de bovenbouw kwam hierbij uitstekend van pas, en ook zijn ervaring als auteur bij Wolters Noordhoff. Ik kwam als zij-instromer vanuit ICT naar het onderwijs en kon met die kennis en kunde een bijdrage leveren. Daarnaast hebben we in de sectie wiskunde zeer enthousiaste collega's, die hebben geholpen met nadenken en uitproberen om de methode zo goed

mogelijk te laten aansluiten bij de onderwijspraktijk. En last but not least wilde de directie van school de ontwikkelkosten betalen.

We zijn erg enthousiast over het werken met *WiskundeOnline*. Hierna bespreek ik de voordelen die wij ervaren in onze lessen.

Compendium als basis

In het *compendium*, dat voor alle leerlingen zichtbaar is, staat alle theorie van zes jaar wiskundeonderwijs. Het voordeel hiervan is dat leerlingen kunnen terugkijken of soms ook vooruitkijken. Dit compendium is geordend in modules.

Per module is er een *pretoets* beschikbaar. Hiermee kunnen leerlingen testen in hoeverre ze de vaardigheden beheersen die in het compendium aan de orde komen.

Pretoets A1	
v4.0	
Vaardigheid	Pretoets
Korter schrijven	P1 Schrijf $a + a + a + a + a$ zo kort mogelijk. P2 Schrijf $p \cdot p \cdot p \cdot p$ zo kort mogelijk.
optellen en aftrekken met variabelen	Schrijf zo kort mogelijk. P3 $3a + 6a - 2a$ P4 $15x + 5 + 8y + 9x$ P5 $5x + 7x^2 + x - 3x^2 + 1$
rekenregels voor machten gebruiken	Schrijf zo kort mogelijk. P6 $x^3 \cdot x^5$ P7 $(x^3)^5$ P8 $(-3x)^4$ P9 $(-2x^2)^6$ P10 $-x^2 + (-x)^2$
vermenigvuldigen met variabelen	P11 Schrijf $7x \cdot -4x \cdot x$ zo kort mogelijk. P12 Schrijf $-3x \cdot -ax \cdot 6ab$ zo kort mogelijk. P13 Schrijf $2x^3 \cdot 4x^2 \cdot 5x^2$ zo kort mogelijk.
haakjes wegwerken	P14 Schrijf $3(x + 8)$ zonder haakjes. P15 Schrijf $-2x(5 - x)$ zonder haakjes. P16 Schrijf $-(-3x + 2)$ zonder haakjes.
Voorrangsregels gebruiken	Schrijf zo kort mogelijk: P17 $(-2x^3)^2 \cdot -4x^2$ P18 $2x + 3x \cdot 4x - 15x^2$ P19 $-(-4x^3)^2 - x^2(5x^2 - 3x^3)$
getallen substitueren voor variabelen (met en zonder rekenmachine)	P20 Substitueer $x = -3$ in $5x^2 - 3x + 8$. P21 Substitueer $a = -5$ en $b = -2$ in $a^2 + 4a - b^2$. P22 Substitueer $x = 2\frac{1}{2}$ in $5x^2 - 3x$.
Woorden en begrippen	
1 Wat is de <i>variabele</i> in: $x^2 + 3x - 2$?	3 Welke termen zijn <i>gelijkssoortig</i> in $x^2 + 5x - 4x^2 + 8x - 3$?
2 Wat zijn de <i>termen</i> in $5 + 6x$	4 Substitueer 5 voor x en bereken $4x$

figuur 2 De vaardighedenlijst van module A1

Ook zijn er voor iedere module *lessen* beschikbaar. Hierin wordt in twee tot drie weken de theorie van de module uit het compendium aangeleerd. Daarnaast is er voor iedere module een *zelftest*, waarin vragen staan op het niveau van het proefwerk. Voor alle modules is er een lijst met vaardigheden beschikbaar. In figuur 2 is de lijst van module A1 te zien.

Gedifferentieerd onderwijs

Een leerling kan op verschillende manieren en snelheden een module doorwerken. De standaardmanier is om alle opdrachten te maken uit het onderdeel *lessen*, gevolgd door opgaven uit het onderdeel *zelftesten*. Een leerling die graag top-down werkt, kan beginnen met de opgaven uit de pretoets en per vaardigheid bepalen of extra

uitleg uit het compendium of uit de lessen nodig is. Ter afsluiting worden ook de zelftesten gedaan, zie figuur 3. Voor een snelle leerling, die meer en ingewikkelde stof aan kan, zitten er in alle lessen gevorderden-opgaven. Een leerling die de betreffende module al eerder heeft afgerond, kan het compendium gebruiken als terugblik voor de theorie uit de module.

De modules waarbij altijd veel gedifferentieerd wordt zijn de Algebra modules A1 en A2, rekenen met letters. Als een leerling de basisstof beheerst, is dat in principe voldoende. Leerlingen die hier moeite mee hebben kunnen extra oefenen. Bij vragen in de zelftest staan direct ook extra oefeningen voor als het niet direct lukt. Voor sommige leerlingen zijn de Probeer-opgaven een leuke puzzel. Bij deze opgaven wordt de nieuwe theorie zelf ontdekt. Voor de slimme leerlingen zijn er ook nog Doordenk-Opgaven (de naam is altijd goed voor hilariteit in de klas). Ook zijn er nog gevorderden-opgaven, waarin de leerling die de basisstof makkelijk vindt, wordt uitgedaagd.

Ook in de zelftesten is gedifferentieerd tussen basisstof en gevorderden-opgaven.

Zelftest Basisstof	
v4.0	
Maak nu de onderstaande test. Je moet deze test binnen 20 minuten kunnen maken. Lukt dit niet binnen 20 minuten of heb je meer dan 2 fouten: maak dan de extra oefeningen op Wisweb.	
22 Schrijf zo kort mogelijk en zonder haakjes.	
a $2p + 3 - 7p + p^2 + 8 =$	c $5x^2 \cdot -3x^6 =$
b $4ab \cdot -2a \cdot -5b^2 =$	d $(-2p^2)^4 =$
e $5(6 + x) =$	f $-2(a - b) =$
23 Schrijf zo kort mogelijk en zonder haakjes.	
a $6x - 2x \cdot -7 =$	c $-3x^2 \cdot 2x^4 - x^4 + (-x)^6 =$
b $-5x^2 - 3x \cdot 8x =$	d $-x^2 \cdot 2xy + 4y \cdot -2x^2 =$
e $-x \cdot -y^2 \cdot (-xy)^3 =$	f $-(4x^2 - 2) - x \cdot -x =$
24 a Bereken de uitkomst van $x^2 - 4x + 5$ voor $x = -3$.	
b Bereken de uitkomst van $-5x^2 - 4x$ voor $x = \frac{2}{3}$.	

Zelftest Gevorderden	
v4.0	
Maak nu de onderstaande test. Je moet deze test binnen 15 minuten kunnen maken. Lukt dit niet binnen 15 minuten of heb je meer dan 1 fout: maak dan de extra oefeningen op Wisweb.	
25 Een balk heeft een lengte van $4x$ cm, een breedte van x cm en een hoogte van h cm. In de antwoorden op de vragen hieronder komen de letters x en h voor.	
a Bereken de totale inhoud van 5 van deze balken.	
b Bereken voor één balk de totale oppervlakte van de zes zijvlakken samen.	
26 Schrijf zo kort mogelijk en zonder haakjes.	
a $(-5a^2b)^3 =$	c $3x(4x^3 + 2x^2) =$
b $-(-7x^2)^2 =$	d $-6p(-5p + 1) =$
e $2a^2b(3ab^3 - 6a^4b) =$	f $-3pq^2(-2q - 4p + 5) =$
27 Schrijf zo kort mogelijk en zonder haakjes.	
a $-3x^2y - 4x^2(y + 2) =$	c $5x + 3x \cdot -4x^2 - (-2x)^3 =$
b $-(-p^3)^8 - p^3 \cdot -p^8 =$	d $-(4x^6 - x^2) - x(x - x^5) =$

figuur 3 Zelftesten op twee niveaus

Profilering als bèta-school

Integratie tussen bètavakken staat op het Coornhert Gymnasium hoog in het vaandel. Dit wordt voluit onderschreven door de wiskundesectie. *WiskundeOnline* maakt het mogelijk deze integratie zichtbaar te maken, door middel van context gerelateerde opgaven, voorbeelden uit andere bètavakken en links van en naar compendia van natuurkunde, biologie en onderzoeken en ontwerpen (O & O). Een voorbeeld: in de brugklas worden de begrippen input- en outcome-variabele eerst geïntroduceerd bij O & O. Vervolgens komen ze bij wiskunde aan bod in tabellen, grafieken en uiteindelijk in functies. In dezelfde periode zijn deze begrippen bij biologie opgenomen in de leerlijn. Afsluitend doen de leerlingen een Excel-opdracht over variabelen. In de modules van de verschillende vakken kan er door middel van links in de methode naar elkaar worden verwezen.

'WISKUNDEONLINE MAAKT
VAKKENINTEGRATIE ZICHTBAAR.'

Volledige leerlijn wiskundige modellen

Als voorbereiding op een leerlijn wiskundige denkactiviteiten in de bovenbouw, wordt in de onderbouw apart aandacht besteed aan het opstellen, gebruiken en interpreteren van wiskundige modellen. De opgaven in deze modules sluiten nauw aan bij de vaardigheden uit 'gewone' modules. In de theorieblokken en de voorbeelden wordt uitgebreid aandacht besteed aan de aanpak van

Een aanpak kiezen

Als je een contextopgave hebt geanalyseerd, weet je wat de gegevens zijn, wat er gevraagd wordt en welke eisen en voorwaarden er gelden.

Vervolgens moet je beslissen hoe je de opgave gaat oplossen. Vraag je daarbij het volgende af.

- Wordt er gevraagd naar een waarde van de **outcomevariabele**?
Meestal moet je dan een **inputvariabele invullen** in een formule **of aflezen** uit een grafiek.
- Wordt er gevraagd naar een waarde van de **inputvariabele** (bijv. bij een snijpunt)?
Meestal moet je dan een **vergelijking** opstellen en oplossen.
- Wordt er ergens **anders** naar gevraagd? Maak eerst een plaatje van de situatie. Voordat je de vraag zelf kunt beantwoorden, moet je vaak eerst dingen uitrekenen die niet gevraagd zijn. Je kunt dit op twee manieren aanpakken:
 - 1) **Werk vanuit de gegevens.**
Bereken dingen die niet gevraagd zijn, maar die volgen uit de gegevens. Kijk daarna of je de gestelde vraag inmiddels kunt beantwoorden.
 - 2) **Werk vanuit de vraag.**
Ga na welke gegevens je zou willen hebben om de vraag te kunnen beantwoorden en probeer deze te berekenen uit de gegevens die je wel hebt.

contextopgaven en de manier waarop je daaruit wiskundige modellen kunt afleiden.

figuur 4 Theorieblok uit de module W1

In figuur 4 zie je een theorieblok uit module 'W1 Wiskundige modellen bij lineaire verbanden' van *WiskundeOnline*. Het kiezen van een aanpak is slechts één van de stappen in het omgaan met contextvraagstukken. Deze stap wordt behandeld aan de hand van voorbeelden en opgaven die horen bij module F7 over lineaire functies. Eerdere stappen zijn behandeld aan de hand van andere modules.

Feedbackknop

Leerlingen en ouders kunnen in *WiskundeOnline* altijd en overal feedback leveren op de stof. De ontwikkelaars worden direct op de hoogte gesteld en kunnen indien nodig direct de module aanpassen. Hierdoor kunnen bijvoorbeeld fouten in de antwoorden snel worden aangepast. Ook onduidelijkheden in de uitleg komen zo aan het licht.

Integratie met de DWO

Bij *WiskundeOnline* wordt gebruik gemaakt van de DWO (Digitale wiskunde Omgeving), ontwikkeld door het Freudenthal Instituut. In deze omgeving kunnen leerlingen op hun laptop, tablet en mobiel opgaven maken, die speciaal voor *WiskundeOnline* zijn ontwikkeld.

De leerlingen krijgen directe feedback op hun antwoorden en de docenten hebben via een dashboard overzicht over de vorderingen van leerlingen. De DWO wordt gebruikt door leerlingen om vaardigheden in te slijpen en om zelftesten te maken. In de toekomst zal de DWO steeds vaker worden gebruikt om toetsen mee af te nemen.

Klas	Oefenen SO1 A1	R6: Zelftesten	Merkwaardige Producten
	▲▼	▲▼	▲▼
klas	100 %	72 %	100 %
klas	97 %	6 %	100 %
klas	80 %	36 %	87 %
klas		78 %	100 %
klas	100 %	86 %	100 %
klas	100 %	100 %	87 %
klas	43 %	69 %	93 %
klas	100 %	50 %	7 %
klas	40 %	6 %	27 %
klas	37 %		
klas	47 %	86 %	33 %
klas	100 %	100 %	100 %
klas	83 %	86 %	100 %
klas		8 %	53 %
klas	100 %	75 %	100 %
klas	47 %	78 %	73 %
klas	100 %	63 %	100 %

figuur 5 Feedback uit de DWO

Hoe willen we verder?

Het ontwikkelen en onderhouden van *WiskundeOnline* kost veel tijd, maar we krijgen gelukkig veel energie uit onze samenwerking. We worden erg enthousiast van het praten over onze methode en vooral over hoe we het nog beter kunnen maken. Veel nieuwe ideeën kunnen we op zeer korte termijn realiseren en direct in de lespraktijk uitproberen (en daarna aanpassen op basis van de feedback van leerlingen). Leerlingen helpen ons nu en in de toekomst bij het verzamelen van interessante extra's, zoals korte uitlegfilmpjes, video's, games, interactieve oefeningen en voorbeelden. Deze extra's voegen we toe aan de modules in *WiskundeOnline*.

De afgelopen jaren is hard gewerkt aan het maken van modules voor het nieuwe examenprogramma in de bovenbouw. Eind 2017 verwachten we een eerste versie van de bovenbouwmethode klaar te hebben.

Daarna gaan we verder met het aanpassen en verbeteren van de methode. Eén van de speerpunten zal dan zijn om de methode verder te integreren met de DWO van het Freudenthal Instituut. Ook willen we graag enthousiaste collega's van andere scholen ontmoeten die zich net als wij bezighouden met het ontwikkelen van lesmateriaal of dit willen gaan doen. Het lijkt ons interessant en praktisch om dit materiaal met elkaar te delen. Ook staan we open om op termijn onze methode voor andere scholen beschikbaar te stellen.

Wie geïnteresseerd is, nodigen we van harte uit om contact met ons op te nemen.

Voor meer informatie zie:

<https://www.youtube.com/watch?v=aQRM5MASIgQ&t=10s>
<https://www.youtube.com/watch?v=M4D2fshG2AM&feature=youtu.be>

Over de auteurs

Martijn Koper en Ron Dames zijn beiden wiskundedocent op het Coornhert Gymnasium in Gouda. Samen hebben ze *WiskundeOnline* ontwikkeld. Ron Dames (E-mailadres: cgdm@coornhert-gymnasium.nl) heeft o.a. gewerkt als auteur bij de methode *Netwerk* van Wolters Noordhoff en Martijn Koper (E-mailadres: cgkp@coornhert-gymnasium.nl) heeft ervaring in de ICT en heeft o.a. gewerkt bij Capgemini.

WISKUNDE VOOR MORGEN

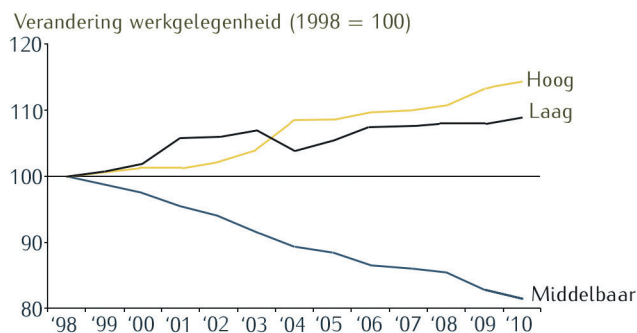
Werkgroep Wiskunde voor Morgen
Koeno Gravemeijer
Bert Zwaneveld

Wiskunde speelt een steeds grotere rol in onze maatschappij, maar is tegelijkertijd in toenemende mate het werk van machines. Het lijkt vanzelfsprekend dat dit consequenties heeft voor het wiskundeonderwijs. Daar lijkt op dit moment echter weinig aandacht voor. Het primaire doel van dit artikel is dan ook om de vraag naar de doelen voor het wiskundeonderwijs voor morgen op de agenda te zetten.

Het wordt de hoogste tijd om na te gaan welke doelen in het wiskundeonderwijs moeten worden nagestreefd om de leerlingen zo goed mogelijk voor te bereiden op de maatschappij van de toekomst. Wiskunde vatten we overigens ruim op; het rekenen omvattend. Anders dan bij Onderwijs 2032 – waar de respondenten vooral hun idealen en wensen op de toekomst hebben geprojecteerd – willen we ons als werkgroep Wiskunde voor Morgen richten op wat de maatschappij in 2032 vraagt. Nu kun je dat uiteraard niet precies weten, maar we kunnen ons wel oriënteren op de ontwikkelingen die nu gaande zijn, om zo te bepalen wat een passende voorbereiding kan zijn – onder het motto: 'Je kunt de toekomst niet kennen, maar je kunt je er wel op voorbereiden.'

Wiskunde in de 21^e eeuw

De toenemende informatisering, robotisering en globalisering leiden ertoe dat steeds meer werk door computers wordt overgenomen. Dat gaat vaak heel indirect. Radio's bijvoorbeeld worden niet meer gerepareerd, omdat een nieuwe radio zo goedkoop is geworden dat repareren niet meer loont. Daarnaast wordt er steeds vaker gewerkt met geprefabriceerde modules en halfproducten, zoals in de bouw. Maar ook fietsenmakers en verwarmingsmonteurs werken steeds vaker met kant-en-klare producten. En dan is er uiteraard nog de robotisering zoals we die in autofabrieken aantreffen. Maar deze ontwikkelingen betreffen niet alleen het maken van producten, ook secretariael werk, boekhouden, logistiek en programmeren zijn onderhevig aan automatisering.



Bron: Goos, Manning en Salomons (2012)

figuur 1 In Europa is in tien jaar tijd twintig procent van de werkgelegenheid in het middensegment verdwenen

De grootste impact hebben deze ontwikkelingen op het middensegment van de arbeidsmarkt, zie figuur 1. Van verschillende kanten wordt erop gewezen dat de oplossing niet ligt in meer mensen hoger opleiden, maar mensen meer *gericht opleiden*. In dit verband is het goed om ons te realiseren dat de computer in deze ontwikkeling twee rollen speelt: enerzijds worden er taken overgenomen, anderzijds is de rol van de computer aanvullend, als uitbreiding van menselijke mogelijkheden. In de verkenning *De robot de baas* adviseert de Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid (WRR) daarom het onderwijs en leren te richten op dit laatste, complementariteit.

Wiskunde voor morgen

De noodzaak om het onderwijs te richten op complementariteit geldt zeker voor de wiskunde, omdat steeds meer wiskundige berekeningen door computers en gecomputeriseerde apparaten worden uitgevoerd. In feite is het nu al zo dat alle wiskundige bewerkingen die in het primair, secundair en tertiair onderwijs worden aangeboden, door computers kunnen worden uitgevoerd. Dit betekent dat we de leerlingen moeten voorbereiden op een wereld waar computers het rekenwerk doen. Dit kan variëren van automatische kassa's en automatische weegschalen in de supermarkt, tot renteberekeningen van hypotheekverstrekkers en sterkteberekeningen in de werktuigbouw. Dit vraagt ander wiskundeonderwijs. Wanneer we het over onderwijs voor de toekomst hebben, worden al snel de zogeheten *21st century skills* genoemd. Het wiskundeonderwijs lijkt uiterst geschikt om aan deze 'skills', zoals probleem oplossen, creativiteit en samenwerken, te werken. Die *21st century skills* kunnen we daarmee opvatten als algemene of langetermijndoelen, die consequenties hebben voor de manier waarop het wiskundeonderwijs wordt ingericht. Omdat apparaten zoveel wiskundige taken overnemen, zal ook de inhoud van het wiskundeonderwijs herzien moeten worden. In dit artikel willen we een begin maken met het in kaart brengen van de doelen waar de discussie over zou moeten gaan. We

richten ons daarbij primair op het aspect 'wiskunde en werk', omdat de digitalisering en globalisering daar de grootste impact hebben. Maar het onderwijs moet uiteraard ook voorbereiden op het gebruik van wiskunde in het dagelijks leven en op het vervolgonderwijs. Op de wiskunde in het dagelijks leven komen we aan het eind van dit artikel nog even terug. Het vervolgonderwijs vraagt een zelfstandige analyse en laten we hier daarom buiten beschouwing. Ook de culturele en vormende waarde vallen buiten het bestek van dit artikel. We zien drie manieren om meer zicht te krijgen op 'wiskunde en werk', namelijk door:

- informatie te verzamelen over het specifieke karakter van de wiskunde op de werkvloer;
- te analyseren welke wiskunde je nodig hebt in een omgeving waar apparaten zowel het alledaagse, als ook het algebraïsche en ander wiskundig rekenwerk doen;
- te inventariseren welke wiskundige onderwerpen in belang toenemen.

Wiskunde op de werkvloer

De wiskunde die op de werkvloer wordt gebruikt, verschilt vaak van de schoolse wiskunde. Een bekend voorbeeld is dat van verpleegkundigen die op schoolse toetsen slecht presteren, maar in de praktijk de juiste doseringen bepalen door gebruik te maken van medicijnspecifieke vuistregels. De Britse onderzoekers Hoyles en Noss spreken in dit verband van *techno-mathematical literacies*; wiskundige vaardigheden die nauw verbonden zijn met gangbare praktijken en gereedschappen. In het voorbeeld gaat het om gangbare medicijnverpakkingen, tegenwoordig zijn het steeds vaker *black boxes* die de *techno-mathematical literacies* bepalen. Onderzoek naar praktijk-situaties laat verder zien dat de wiskunde op school in die zin verschilt van die in werksituaties, dat je in de beroepspraktijk geen kale sommen tegenkomt. De wiskundige activiteiten vinden altijd plaats in een context en de uitkomsten hebben altijd praktische implicaties. Bovendien is er in het algemeen sprake van problemen met meer dan één oplossing. Waarbij voor- en nadelen van verschillende oplossingen tegen elkaar moeten worden afgewogen, of waar sprake is van een optimaliseringsprobleem. De wiskunde die wordt gebruikt heeft vaak ook niet de canonieke standaardvorm. Bij het werken met grafieken is het bijvoorbeeld soms handiger om het centrum van het assenstelsel niet in de oorsprong te leggen, of om in plaats van de gemeten variabele de inverse van die variabele op de x-as uit te zetten.

Wanneer computers het wiskundewerk doen

Naast het onderzoeken van de beroepspraktijk kunnen we ook proberen te beredeneren welke wiskundige vaardigheden in toekomstige werksituaties van belang zijn.

Namelijk door uit te gaan van een karakterisering van het gebruik van wiskunde in de werkelijkheid buiten de school, waar we de volgende stappen kunnen onderscheiden:

- *herkennen* van wiskundige problemen;
- *vertalen* van deze problemen in wiskundige bewerkingen;
- *uitvoeren* van deze wiskundige bewerkingen;
- *interpreteren* van de uitkomsten en de juistheid ervan *evalueren*.

De eerste en de laatste stap kunnen we grofweg samenvatten onder de noemer *modelleren*. Waar we dan het *controleren* van de juistheid van het resultaat van de wiskundige bewerkingen aan toe zouden willen voegen. Wanneer een apparaat de tweede stap uitvoert is het van belang om te *begrijpen* wat deze bewerkingen inhouden. Samenvattend gaat het dus om modelleren, begrijpen en globaal controleren.

Modelleren

De vaardigheden die bij modelleren in het geding zijn, kunnen we beschrijven aan de hand van Perrenet en Zwaneveld (2012), die de volgende handelingen onderscheiden:

- de gegeven situatie *conceptualiseren* (hoofdzaken en bijzaken scheiden, relevante grootheden/variabelen vaststellen),
- de situatie wiskundig *beschrijven* (formule, tabel, diagram/grafiek, meetkundige representatie),
- de wiskundige *bewerking* vaststellen en uitvoeren,
- nagaan of de uitkomst wiskundig in orde is,
- nagaan of het model 'klopt' (bijvoorbeeld door gegevens van elders erbij te betrekken, door randgevallen na te gaan),
- de oplossing *interpreteren*, en
- *verslag doen*.

Daarnaast noemen zij het belang van *reflecteren* op het modelleerproces met het oog op toekomstige modelleeractiviteiten. In aanvulling hierop kan worden opgemerkt dat de problemen waar we het hier over hebben vaak complex en slecht gedefinieerd zijn en dat wisselende condities en het afwegen van verschillende elementen een belangrijke rol kunnen spelen.

In de praktijk zal lang niet altijd de volledige modelleer-cyclus worden doorlopen, er zullen immers ook bestaande modellen worden gebruikt. Daarnaast verwachten we dat het kunnen *beoordelen* van de resultaten van modelleeractiviteiten van anderen in de toekomst belangrijker wordt dan het zelf uitvoeren van modelleeractiviteiten.

Begrijpen

Waar het belang van het vlot en foutloos kunnen uitvoeren van bewerkingen afneemt wanneer apparaten het werk doen, lijkt het des te belangrijker dat de gebruikers begrijpen wat de apparaten doen. Dit is van belang om apparaten goed in te kunnen zetten, fouten te voorkomen

en om na te kunnen denken over mogelijke verbeteringen en andere toepassingen. Bovendien groeit ook de noodzaak om aan collega's en klanten uit te kunnen leggen wat de *black box* die je gebruikt doet. Met de toenemende rol van door apparaten uitgevoerde berekeningen, wordt de omvang van de wiskunde die iedereen zou moeten begrijpen steeds groter. Daar staat tegenover dat een meer globaal soort begrijpen volstaat. Kaput gaf jaren geleden al het voorbeeld van differentiaal- en integraalrekening. Daarbij gaat het volgens hem om 'the key underlying ideas of rate of change, accumulation, the connections between variable rates and accumulation, and approximation' (Kaput, 1997, p. 733). Meer algemeen geformuleerd gaat het om de kernideeën die ten grondslag liggen aan de wiskunde die aan de orde is. Hij voegde daaraan toe dat het gebruik van dynamische software het ideale middel zou zijn om dergelijke inzichten te bereiken.

Globaal controleren

Wanneer je het rekenwerk aan apparaten overlaat, moet je uiteraard wel globaal kunnen controleren of de antwoorden kloppen. Het globaal controleren van uitkomsten vraagt echter andere vaardigheden dan routinematig precies rekenen. Bij het gewone rekenen, bijvoorbeeld, gaat het dan om het zodanig aanpassen van de getallen dat je een goede benadering krijgt van het antwoord. Dit betekent dat de leerling moet beschikken over een netwerk van getalsrelaties die voor zo'n globale berekening kunnen worden ingezet. Bovendien moet hij of zij daarop kunnen variëren, bijvoorbeeld door te vermenigvuldigen met machten van tien, of door gebruik te maken van eigenschapsrekenen. Bij algebra kunnen we denken aan het inschatten hoe een bepaalde functie zich gedraagt, wat je kunt verwaarlozen en welke component domineert. Zo noemt McCallum (2010) als inzichten: je realiseren

dat $P \cdot (1 + \frac{r}{12})^{12n}$ lineair is in P ; dat $L_0 \cdot \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$ naar nul gaat als v nadert naar c en dat $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ een

kubische polynoom is (dus van de orde n^3) met hoofdcoefficiënt $\frac{1}{3}$.

Onderwerpen die in belang toenemen

Naast bovenstaande ontwikkelingen zien we ook dat bepaalde leerstof aan belang toeneemt als gevolg van de digitalisering. Dit geldt bijvoorbeeld voor statistiek en data-analyse, variabelen en functies en 3D-meetkunde. Verder zullen leerlingen moeten leren werken met rekenmachines, spreadsheets, computeralgebrasystemen en dergelijke. Bovendien impliceert computergebruik een kwantificering van de werkelijkheid die inzicht vraagt in allerlei aspecten van meten, zoals meetfouten, steekproeven en een uitbreiding naar maten voor een grote variëteit aan verschijnselen, zoals luchtkwaliteit of economische groei.

Wiskunde in het dagelijks leven

Deze laatste aspecten zijn ook van groot belang voor het dagelijks leven. De toenemende kwantificering van de werkelijkheid vereist een hoger niveau van *quantitative literacy* / gecijferdheid. Veel zaken die van belang zijn in de context van wiskunde en werk, spelen ook een rol in het dagelijks leven. Naast basale gecijferdheid, die nodig is voor alledaagse zaken, heb je als 21^e-eeuwse burger wiskundige kennis nodig om de wereld om je heen te begrijpen, om als geïnformeerd burger te participeren in politieke besluitvorming en om financiële keuzes te maken – bijvoorbeeld rond telefoonabonnementen, hypotheeken of verzekeringen.

Besluit

Om misverstand te voorkomen willen we er ten slotte op wijzen dat wiskundeonderwijs meer dient te omvatten dan de hierboven genoemde onderwerpen, ook doelen die behoren tot de wiskunde als cultuurgoed dienen een plaats te krijgen. Ditzelfde geldt voor abstracte formele wiskunde, die niet alleen van belang is voor leerlingen die hierin doorgaan.

We hopen met deze verkenning te hebben laten zien dat het de hoogste tijd is om de doelen van het wiskundeonderwijs aan te passen aan de eisen van de tijd. Om zoveel mogelijk leerlingen op de maatschappij van de 21^e eeuw voor te bereiden, zullen we onze aandacht daarbij met name moeten richten op het funderend onderwijs.

Literatuur

- Kaput, J. (1997). Rethinking Calculus: Learning and Thinking. *The American Mathematical Monthly*, 104(8), 731–737.
- McCallum, W. (2010). Restoring and balancing. In Z. Usiskin, K. Andersen, & N. Zotto (Eds.), *Future curricular trends in school algebra and geometry: Proceedings of a conference* (pp. 277–286). Charlotte: Information Age Publishing Inc.
 - Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21.

Over de auteurs

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs van de Open Universiteit.

E-mailadres: G.Zwaneveld@uu.nl

Koen Gravemeijer is emeritus hoogleraar Science- en Techniekeducatie aan de Eindhoven School of Education, TU Eindhoven. E-mailadres: koeno@gravemeijer.nl. Beide auteurs zijn lid van de werkgroep Wiskunde voor Morgen.

SOMMEN VAN ABSOLUTE WAARDEN

Jan Otto Kranenborg

Bij de behandeling van het begrip absolute waarde experimenteerde Jan Otto Kranenborg in zijn 4 vwo klas met wiskunde B met allerlei combinaties van sommen (met soms verschillen) van absolute waarden. Bijzonder daarbij was dat er allerlei wiskundige vaardigheden en concepten aan bod kwamen. Begrippen als de absolute waarde, symmetrie van een functie, oppervlakte van een gebied, differentieerbaarheid van een functie en de som van een rekenkundige rij deden zo hun intrede, waarbij wel gezegd moet worden dat sommige onderwerpen tot de stof van 5 vwo wiskunde B behoren.

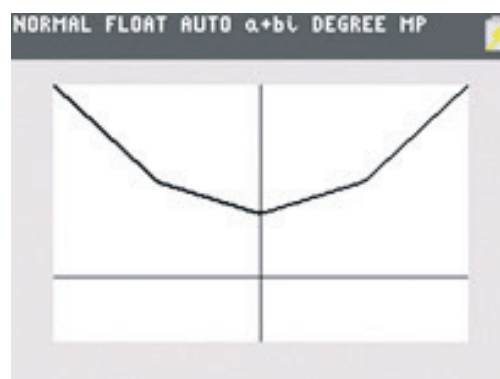
Onderzoek naar functie met absolute waarde

Na verloop van tijd en het nodige oefenen nam ik de volgende functie: $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$.

In plaats van direct de grafische rekenmachine te pakken om de grafiek van f te tekenen, vroeg ik eerst aan de leerlingen om deze f uit te schrijven. Met wat hulp kwamen ze tot:

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{als } x < -1 \\ -x+2 & \text{als } -1 \leq x < 0 \\ x+2 & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 3x & \text{als } 1 \leq x \end{cases}$$

De functie f bestaat dus uit twee lijnstukken en twee halve lijnen, die in drie knikpunten 'scharnieren'. Zie in figuur 1 de grafiek van f op het domein $[-2, 2]$.



figuur 1

Dit bracht mij op het volgende idee: definieer

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n |x-k| \text{ en onderzoek deze functie verder voor}$$

enkele waarden van n .

Eerst maar eens voor $n = 3$.

$$f_3(x) = \sum_{k=-3}^3 |x-k| = |x+3| + |x+2| + |x+1| + |x| + |x-1| + |x-2| + |x-3|.$$

Uitschrijven geeft:

$$f_3(x) = \begin{cases} -7x & \text{als } x < -3 \\ -5x+6 & \text{als } -3 \leq x < -2 \\ -3x+10 & \text{als } -2 \leq x < -1 \\ -x+12 & \text{als } -1 \leq x < 0 \\ x+12 & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 3x+10 & \text{als } 1 \leq x < 2 \\ 5x+6 & \text{als } 2 \leq x < 3 \\ 7x & \text{als } 3 \leq x \end{cases}$$

Eigenschappen van f_n

Met de klas gaan we op zoek naar eigenschappen van f_n .

- 1 De functie f_n heeft geen nulpunten, tenzij $n = 0$. Er geldt zelfs: $f_n(x) \geq n(n+1)$, zie later in 6.
- 2 De functie f_n is symmetrisch in $x = 0$.

De leerlingen vinden deze eigenschap volledig vanzelfsprekend, maar om dat nou te bewijzen...?

Na 't nodige gegoochel en eerst uitschrijven voor kleine n vinden we het volgende (m.b.v. $|x| = |-x|$):

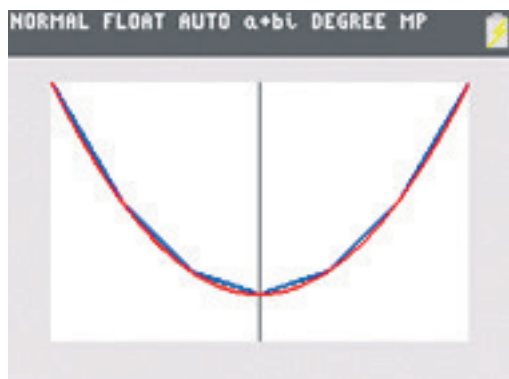
Aangezien k loopt van $-n$ naar n geldt:

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n |x-k| = \sum_{k=-n}^n |x+k|$$

Dan is

$$f_n(-x) = \sum_{k=-n}^n |-x-k| = \sum_{k=-n}^n |x+k| = f_n(x).$$

Een leerling heeft de grafiek van f_3 getekend, zie figuur 2, en merkt het volgende op: 'deze gekke functie is bijna een (mooie) parabool!'



figuur 2

Haar rode grafiek is de grafiek van de functie

$g(x) = x^2 + 12$. De opmerking zet me verder aan het denken. Hoe precies is de benadering? En: hoe is de ligging van f_3 ten opzichte van de (dal)parabool? Altijd boven de parabool?

3 Voor alle $x \in [-3, 3]$ geldt: $f_3(x) \geq x^2 + 12$.

Eigenlijk moet dit bewezen worden voor elk deelinterval van $[-3, 3]$, maar we volstaan met twee deelintervallen.

Laat $x \in [-3, -2]$. Dan $f_3(x) = -5x + 6$.

En nu is $-5x + 6 \geq x^2 + 12$ vanwege

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) \leq 0. \text{ Laat } x \in [1, 2].$$

Dan $f_3(x) = 3x + 10$.

En nu is $3x + 10 \geq x^2 + 12$

$$\text{vanwege } x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \leq 0.$$

Opmerking: in 6 wordt aangetoond dat voor alle $x \in [-n, n]$ geldt: $f_n(x) \geq x^2 + n(n+1)$.

LEERLING: 'DEZE GEKKE FUNCTIE IS BIJNA EEN (MOOIE) PARABOOL!'

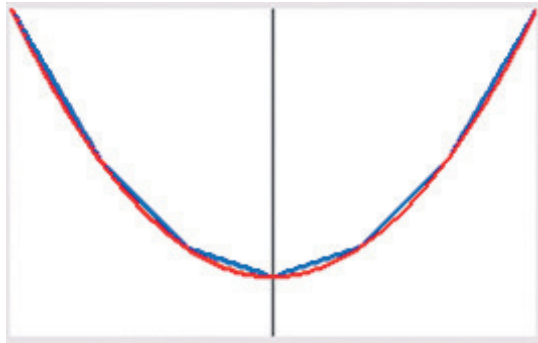
Nu iets over de benadering. Je kunt lokaal naar het verschil tussen f_3 en g kijken, maar misschien is het interessanter om de oppervlakten van de door beide functies ingesloten vlakdelen te berekenen. Helaas lukt dat niet (anders dan met de grafische rekenmachine) in 4 vwo wiskunde B. Zo kan er een uitstapje gemaakt worden naar 5 vwo wiskunde B.

$$\begin{aligned} [0, 1]: \int_0^1 f_3(x) - (x^2 + 12) dx &= \int_0^1 x + 12 - (x^2 + 12) dx = \\ &= \int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1, 2]: \int_1^2 f_3(x) - (x^2 + 12) dx &= \int_1^2 3x + 10 - (x^2 + 12) dx = \\ &= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 = \\ &= -\frac{8}{3} + 6 - 4 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2, 3]: \int_2^3 f_3(x) - (x^2 + 12) dx &= \int_2^3 5x + 6 - (x^2 + 12) dx = \\ &= \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x \right]_2^3 = \\ &= -9 + \frac{5}{2} \cdot 9 - 18 - \left(-\frac{8}{3} + \frac{5}{2} \cdot 4 - 12 \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Kennelijk hebben alle ingesloten vlakdelen oppervlakte $\frac{1}{6}$. Dat dit waar is voor elke n wordt verder in 5 aangetoond. In het plaatje zijn de verschillen tussen f_3 en g aanvallend duidelijk te zien, maar hoe verder van 0 verwijderd, steeds minder. De oppervlakten van de ingesloten vlakdelen blijven gelijk, zie figuur 3.



figuur 3

4 Differentieerbaarheid van f_n .

De functie f_n is overal differentieerbaar behalve in de $2n + 1$ knikpunten. Als voorbeeld neem ik weer f_3 . Er geldt: Voor alle $x \in [-1, 0]$ is $f_3(x) = -x + 12$, en voor alle $x \in [0, 1]$ is $f_3(x) = x + 12$. Daarom is

$$\lim_{x \uparrow 0} f_3'(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{f_3(0+x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-x + 12 - 12}{x} = -1,$$

dus de linkerafgeleide is -1 , terwijl

$$\lim_{x \downarrow 0} f_3'(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f_3(0+x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x + 12 - 12}{x} = 1,$$

zodat de rechterafgeleide $+1$ is. Beide afgeleides bestaan, maar zijn niet aan elkaar gelijk, zodat de functie dus niet differentieerbaar is in 0. De grafische rekenmachine middelt ten onrechte beide afgeleides:

$$f_3'(0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{f_3(0+x) - f_3(0)}{x} + \lim_{x \uparrow 0} \frac{f_3(0+x) - f_3(0)}{x} \right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

Ander voorbeeld met de functie f_4 . In figuur 4 staan de grafieken van f_4 (rood) en $y = x^2 + 20$ (zwart). De letters A t/m I zijn de knikpunten van de grafiek van f_4 . Zo is A(-4, 36), B(-3, 29), C(-2, 24), enzovoort. Er geldt:

$$f_4(x) = \begin{cases} -9x & \text{als } x < -4 \\ -7x+8 & \text{als } -4 \leq x < -3 \\ -5x+14 & \text{als } -3 \leq x < -2 \\ -3x+18 & \text{als } -2 \leq x < -1 \\ -x+20 & \text{als } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

en

$$f_4(x) = \begin{cases} x+20 & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 3x+18 & \text{als } 1 \leq x < 2 \\ 5x+14 & \text{als } 2 \leq x < 3 \\ 7x+8 & \text{als } 3 \leq x < 4 \\ 9x & \text{als } 4 \leq x \end{cases}$$

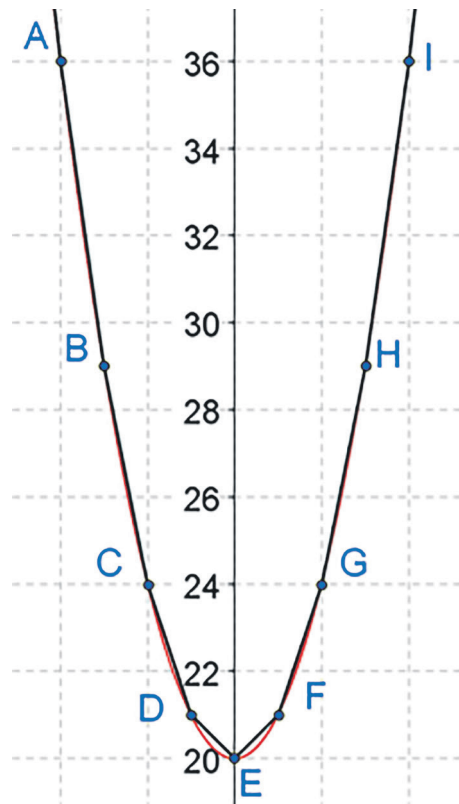
Voor alle $x \in <2, 3>$ is $f_4(x) = 5x + 14$, en voor alle $x \in <3, 4>$ is $f_4(x) = 7x + 8$.

Daarom is $\lim_{x \uparrow 3} f_4'(x) = 5$, maar $\lim_{x \downarrow 3} f_4'(x) = 7$. En, wederom

berekent de grafische rekenmachine ten onrechte de

afgeleide als $f_4'(x) = \frac{1}{2}(\lim_{x \uparrow 3} f_4'(x) + \lim_{x \downarrow 3} f_4'(x)) = 6$. De functie is

dus niet differentieerbaar in 3.



figuur 4

5 Verdere uitwerking van functie f_n .

Daarbij wordt de som van een rekenkundige rij gebruikt.

Zo is bijvoorbeeld $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Vanwege de symmetrie wordt hieronder alleen f_n op $[0, \rightarrow>$ uitgerekend. Immers, op $<\leftarrow, 0]$ verandert slechts de richtingscoëfficiënt van 1 naar -1 .

$$(x) = \begin{cases} x+n(n+1) & \text{als } x < -3 \\ 3x+(n-1)(n+2) & \text{als } 1 \leq x < 2 \\ 5x+(n-2)(n+3) & \text{als } 2 \leq x < 3 \\ 7x+(n-3)(n+4) & \text{als } 3 \leq x < 4 \\ \dots & \text{als } \dots \leq x < \dots \\ (2k+1)x+(n-k)(n+k+1) & \text{als } k \leq x < k+1 \\ \dots & \text{als } \dots \leq x < \dots \\ (2n-3)x+4n-2 & \text{als } n-2 \leq x < n-1 \\ (2n-1)x+2n & \text{als } n-1 \leq x < n \\ (2n+1)x & \text{als } n \leq x \end{cases}$$

Nog even terugkomend op de benadering in 3, waarin de oppervlakten van de ingesloten vlakdelen van f_3 en f_4 berekend worden. Met behulp van bovenstaande algemene formule van f_n vinden we op het interval $[k, k+1>$ met $0 \leq k \leq n-1$ dat de oppervlakte van elk ingesloten vlakdeel precies $\frac{1}{6}$ is:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f_n(x) - (x^2 + n(n+1)) dx &= \int_k^{k+1} (2k+1)x + (n-k)(n+k+1) - x^2 - n(n+1) dx = \\ &= \left[\frac{(2k+1)}{2} x^2 + (n-k)(n+k+1)x - \frac{x^3}{3} - n(n+1)x \right]_k^{k+1} = \\ &= \frac{(2k+1)(k+1)^2}{2} + (n-k)(n+k+1)(k+1) - \frac{(k+1)^3}{3} - n(n+1)(k+1) - \\ &\quad \left(\frac{(2k+1)k^2}{2} + (n-k)(n+k+1)k - \frac{k^3}{3} - n(n+1)k \right) = \\ &= \frac{(2k+1)((k+1)^2 - k^2)}{2} + (n-k)(n+k+1) \cdot 1 - \\ &\quad \frac{k^3 - (k+1)^3}{3} + n(n+1)(k - (k+1)) = \\ &= \frac{(2k+1)^2}{2} + (n-k)(n+k+1) - \frac{3k^2 + 3k + 1}{3} - n(n+1) = \\ &= (2k^2 + 2k + \frac{1}{2}) + (n^2 + kn + n - kn - k^2 - k) - (k^2 + k + \frac{1}{3}) - (n^2 + n) = \\ &= 2k^2 + 2k + \frac{1}{2} + n^2 + n - k^2 - k - k^2 - k - \frac{1}{3} - n^2 - n = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

6 Voor alle n geldt $f_n(x) \geq x^2 + n(n+1)$.

Het is voldoende om dit in een willekeurig interval

$[k, k+1>$ met $0 \leq k \leq n-1$ aan te tonen.

Voor alle x met $k \leq x \leq k+1$ geldt

$(x-k)(x-(k+1)) \leq 0$ zodat

$x^2 - (k+1)x - kx + k(k+1) \leq 0$.

En dus is

$x^2 - (2k+1)x + k^2 + k \leq 0$.

Dan $(2k+1)x \geq x^2 + k^2 + k$.

En dus is

$(2k+1)x + n^2 + kn + n - kn - k^2 - k \geq x^2 + n^2 + n$.

Ofwel $(2k+1)x + (n-k)(n+k+1) \geq x^2 + n^2 + n$,

zodat $(2k+1)x + (n-k)(n+k+1) \geq x^2 + n(n+1)$.

Dus in het interval $[k, k+1>$ geldt $f_n(x) \geq x^2 + n(n+1)$,

waarmee het gestelde bewezen is.

Over de auteur

Jan Otto Kranenburg is docent wiskunde op het Carolus Clusius College te Zwolle.

E-mailadres: j.o.kranenburg@hetnet.nl



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

slo
nationaal expertisecentrum
leerplanontwikkeling

AANKONDIGING

CONFERENTIE REKENEN-WISKUNDE AANSLUITING PO NAAR VMBO

Vrijdag 19 januari 2018,
Bilderberg Parkhotel Rotterdam
Tijd: 9.30 – 16.00 uur
Kosten: € 75

De conferentie is bedoeld voor leerkrachten uit de bovenbouw van het po en wiskundedocenten uit de onderbouw van het vmbo.

De eerste plenaire lezing wordt verzorgd door Kees Hoogland. Kees gaat in op de reken-inhouden voor zwakkere rekenaars in het po en vmbo. Ook zij kunnen succes ervaren in hun reken-wiskundeonderwijs en gemotiveerd zijn! Kees vertelt hoe.

's Middags gaat Anneke Noteboom (SLO) in op de positieve effecten van formatief evalueren in het reken-wiskundeonderwijs. Ze bespreekt wat formatief evalueren inhoudt en hoe je het in je praktijk kunt inzetten.

Daarnaast zijn er workshops over:

- samenwerking po en vo
- lesmethodes in vo en po
- didactiek bij het metriek stelsel
- leerlijnen voor rekenen
- leerlijn verhoudingen
- rekenportfolio

Meer informatie en opgave: www.nvww.nl

Kan het lezen, interpreteren, ontcijferen, verklaren en presenteren van een elementaire, maar redelijk ingewikkelde, meetkundige tekst als WDA fungeren? Rico del Castillo en Hans Krabbendam hebben dat onderzocht, zie hier hun bevindingen.

Inleiding

Wiskundige denkactiviteiten (WDA) staan in de belangstelling op dit moment. Het blijft een didactische en inhoudelijke uitdaging een (leer)lijn op te zetten die leidt tot wat we in het wiskundeonderwijs eigenlijk allemaal willen. Dat is onder meer dat leerlingen bij het verlaten van het voortgezet onderwijs enig inzicht hebben in wat wiskunde eigenlijk is, welke denkactiviteiten daarbij horen en hoe nuttig die zijn in het vervolgonderwijs.

Mooi, maar hoe doen we dat dan? Inmiddels zijn er veel stukken geschreven, veel voorbeelden gemaakt en zelfs bedacht hoe je WDA zou moeten of kunnen toetsen.^[1]

De voorbeelden komen tot nu toe echter niet zo heel veel verder dan de constatering dat het niet-routineuze opgaven zijn (Van Streun), mooie opgaven waar de oplossing niet direct voor de hand ligt. Opmerkelijk is dat veel van die opdrachten een uitdagend meetkundig probleem zijn, zoals je ze ook veel bij de opgaven uit de wiskundeolympiade ziet. Maar willen we een verzameling mooie opgaven of willen we meer? John Poppelaars definieert in Euclides 91-4^[2] wiskundige denkactiviteiten als wiskundig inzicht, kennis van beschikbare oplossmethoden en creativiteit en inventiviteit, gepaard met een scherp denkvermogen en goede communicatieve vaardigheden. Anderen die WDA definiëren zitten op ongeveer hetzelfde spoor.

Als we WDA plaatsen in wat goed wiskundeonderwijs zou moeten zijn, dan geeft het lijstje van Van Streun in het *Handboek wiskundendidactiek* houvast.^[3] Het gaat dan om:

- Weten dat: kennis van feiten en begrippen
- Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden
- Weten waarom: principes, abstracties, overzicht
- Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten
- Later uitgebreid met 'houding': wiskunde leren is leuk en geeft voldoening.

WDA speelt zich dan bij voorkeur af in het 'weten hoe' en het 'weten waarom'.^[4]

Met die achtergrond hebben we een project opgezet om een voorbeeld van WDA te ontwikkelen en te kijken of het doet wat je wilt. Het is uitgevoerd op het Sint-Oelbertgymnasium in Oosterhout bij wiskunde D in klas 6.

Het einddoel van het project hebben we gedefinieerd als het kunnen lezen, interpreteren, ontcijferen, verklaren en presenteren van een elementaire, maar redelijk ingewikkelde, meetkundige tekst. Mogelijk niet geheel dekkend voor wat WDA zou moeten zijn, maar zeker wel in de lijn van 'weten hoe' en 'weten waarom'.

Projectbeschrijving

Ter voorbereiding op het project verdeelt de docent de leerlingen met het vak wiskunde D uit klas 6 in groepjes van drie à vier, licht de opdracht toe, neemt klassikaal de planning door en geeft de klas een voorbereidende meetkundige opgave. Het bewijs is te leveren met eerder geleerde eigenschappen met de bedoeling die ook weer even te actualiseren. Vervolgens zorgt de docent voor een inleidende les, waarbij de klassieke meetkunde wordt besproken, zowel voor wat betreft geschiedenis als inhoud. Daarna begint het eigenlijke werk.



figuur 1 Leerlingen uit klas 6, wiskunde D

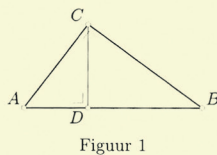
De groepjes worstelen ieder een eigen (gedeelte van een) hoofdstuk uit Bottema door.^[5] Die teksten van Bottema zijn pareltjes, maar, door hun compactheid en stilzwijgende aannames over de kennis en vaardigheden van de lezer, een behoorlijke kluit. De groepjes krijgen de opdracht om de tekst te verklaren en zodanig te herschrijven, dat een zesdeklasser met wiskunde B zonder hobbels de uitgewerkte tekst kan lezen. Daarbij moeten de groepjes de in de tekst genoemde eigenschappen bewijzen of afleiden, de stellingen goed helder bewijzen en die in enkele toepassingen toelichten. Gekozen is voor deze meetkundige teksten, omdat het mooie wiskunde betreft: compact en elegant. De groepjes werken negen lesuren aan de uitwerking van de tekst. Daarbij maken ze gebruik van GeoGebra.

Als de uitgewerkte tekst is ingeleverd, houden de leerlingen gedurende een lesuur een uitgebreide presentatie over de belangrijkste elementen van het betreffende hoofdstuk. Na afloop van de presentatie maken de overige leerlingen een opgave hierover.

Voorbeeld

Hieronder volgt een voorbeeld van een zeer klein gedeelte van de uitwerking van een van de groepjes. De tekst komt uit het eerste hoofdstuk van Bottema, de Stelling van Pythagoras, zie figuur 2.

2. Uit de drie eigenschappen: a) overeenkomstige afstanden in twee gelijkvormige figuren zijn evenredig; b) de oppervlakte kan worden opgevat als de som (bij kromlijnige figuren eventueel als limiet van de som) van oppervlakten van driehoeken en c) de oppervlakte van een driehoek is, kort geformuleerd, gelijk aan het product van twee lengten, volgt: de oppervlakten van twee gelijkvormige figuren verhouden zich als de kwadraten van overeenkomstige lengten. Hieruit blijkt, dat men de stelling van PYTHAGORAS in ruimere vorm kan uitspreken: worden op de zijden van de rechthoekige driehoek onderling gelijkvormige figuren beschreven met de oppervlakten O_a , O_b en O_c , dan is $O_a + O_b = O_c$. En omgekeerd zal een bewijs voor de stelling geleverd zijn, als het gelukt op de rechthoekszijden en op de hypotenusa van de rechthoekige driehoek één enkel stel onderling gelijkvormige figuren te beschrijven, zodanig dat de som van de oppervlakten van de eerste twee gelijk is aan die van de derde. Een dergelijk stelsel ontstaat echter onmiddellijk door de hoogtelijn CD te trekken; de driehoeken CAB , DAC en DCB zijn gelijkvormig, omdat zij gelijke hoeken hebben (Figuur 1).



figuur 2

Het gaat hier vooral om het tweede gedeelte. Het is een compacte tekst, die soms ook wel enige wrevel bij leerlingen oproept. De leerlingen maken er het volgende van (de aanvullende tekst van de leerlingen is vetgedrukt):

En omgekeerd zal een bewijs voor de stelling geleverd zijn, als het gelukt op de rechthoekszijden en op de hypotenusa van de rechthoekige

driehoek één enkel stel onderling gelijkvormige figuren te beschrijven, **dus op de rechthoekszijden kan elke figuur komen, zolang op elke rechthoekszijde dezelfde gelijkvormige figuur wordt gebruikt; niet alleen een driehoek met vierkanten of een driehoek met halve cirkels zijn dus mogelijk, maar ook halve sterren zouden kunnen worden gebruikt**, zodanig dat de som van de oppervlakten van de eerste twee gelijk is aan die van de derde.

Na de presentatie kregen de overige leerlingen de opgave van figuur 3 voorgelegd.

Opgave

Gegeven is een $\triangle ABC$.

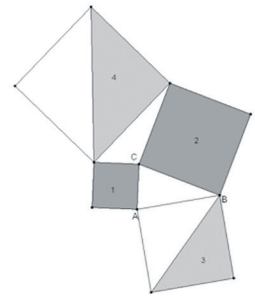
Op de zijden staan vierkanten 1, 2 en halve vierkant 3.

Het (halve) vierkant 4 staat op de verbinding van 1 en 2 (zie figuur).

Bewijs dat in de figuur hiernaast geldt dat

$$\text{opp.1} + \text{opp.2} =$$

$$\text{opp.3} + \text{opp.4}.$$



figuur 3

Het project werd door de leerlingen geëvalueerd door middel van een enquête.

Onze evaluatie

Er zijn enkele opvallende zaken te melden, zowel met betrekking tot het inhoudelijke niveau, als ook wat betreft organisatie, evaluatie en beleving van leerlingen.

1. De meeste leerlingen vonden de opdracht interessant, leerzaam en uitdagend. Andere veelgenoemde pluspunten zijn de afwisseling ten opzichte van de reguliere lesstof, het leren werken met GeoGebra, het presenteren van een wiskundig onderwerp en het werken in teams. Enkelens noemden ook het werken aan meetkunde.
2. Er worden wel fouten gemaakt in de wiskundetaal (middenloodlijn, raken ipv snijden, middeldriehoek, hoogtelijnen ipv loodlijnen), te veel wordt zelf verzonnen. Woorden als een 'snavefiguur' of 'zandloperfiguur' zijn een soort mantra's geworden en worden veelvuldig, ook incorrect, gebruikt.
3. Eigenschappen die in de tekst van Bottema worden genoemd, worden veelal niet bewezen, maar aannemelijk gemaakt met een getallenvoorbeeld. Slechts sporadisch wordt zo'n eigenschap in zijn algemeenheid bewezen.
4. De situaties die gekoppeld worden aan een algemene eigenschap zijn in veel gevallen bijzonder. Zo wordt er

bijvoorbeeld een gelijkzijdige driehoek getekend als het om middelloodlijnen gaat, waardoor het ook hoogtelijnen zijn. Of er wordt een gelijkbenige rechthoekige driehoek gebruikt in plaats

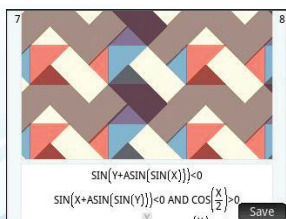
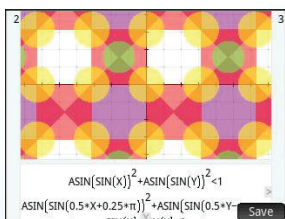
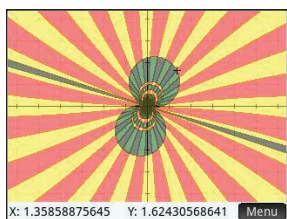
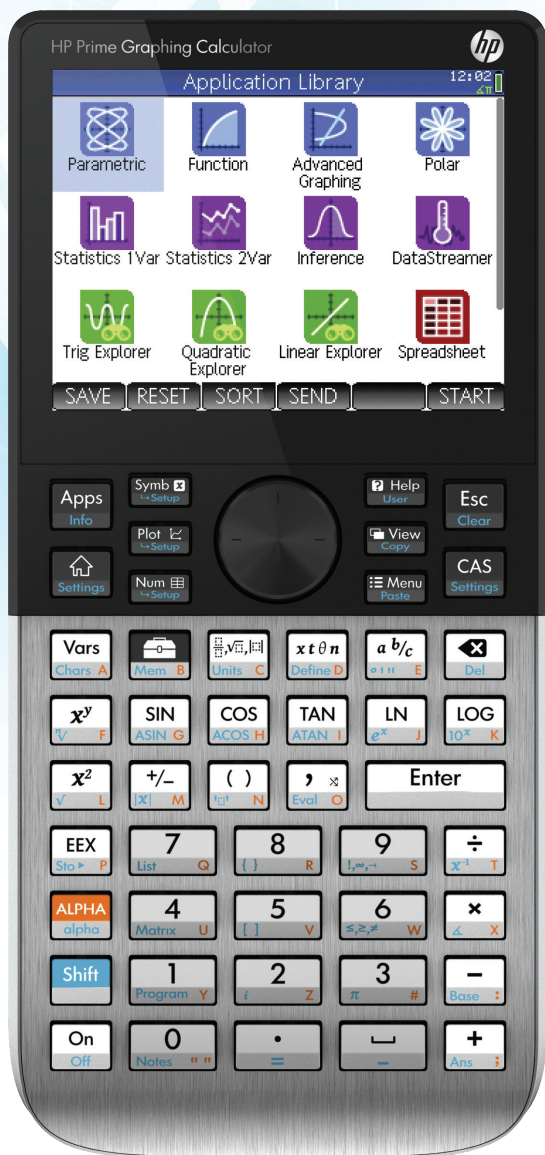
van een 'willekeurige'.

5. Er wordt veel vertrouwd op GeoGebra, waar alles 'gemeten' kan worden. Geogebra wordt gezien als een 'waarheid' en een bewijs vinden de leerlingen dan overbodig.
6. Vaak worden alleen de meest elementaire gereedschappen gebruikt, waardoor de voortgang en ook diepgang te lijden hebben.
7. Oplossingen worden geforceerd. Vaak wordt toch een schijnbewijs gegeven op het moment dat niet direct een oplossing wordt gezien.

New Body & New Brain HP Prime



- **SNELLER**
door 100x meer rekenkracht
- **INTUÏTIEVER**
door hoge resolutie touchscreen
- **HANDIGER**
door menu met apps
- **VEILIGER**
door CvTE-goedgekeurde examenstand met 3 LEDs en (optioneel) extra wachtwoord, starten met 1 druk op knop
- **GOEDKOPER**
door gratis emulator software
- **TOEKOMSTGERICHT**
door aanwezigheid van CAS en programmeermogelijkheden



De HP Prime kost voor uw leerlingen hetzelfde als wat ze nu gewend zijn, maar ze krijgen zoveel meer. Download nu al de app in de Apple, Windows of Android Store om kennis te maken met de Prime. Bij een workshop krijgt u als docenten uw eigen model van ons cadeau.

Voor meer informatie gaat u naar:

www.hp-prime.nl

of neem contact op via info@hp-prime.nl



Discussie en slot

Duidelijk is dat de leerlingen goed bezig zijn geweest met 'weten dat', 'weten hoe' en 'weten waarom'. Wel valt op dat ze te weinig gewend zijn aan dit soort activiteiten en dat ze het wellicht daardoor soms betrekkelijk snel opgeven. Een punt van zorg voor een goede WDA. Al snel blijkt dat er voor een dergelijk project andere dingen nodig zijn dan wanneer je aan een complexe meetkundeopgave begint en dan mis je iets in het lijstje van Van Streun. Wij zouden dan ook aan 'weten dat, weten hoe, weten waarom' er eentje aan toe willen voegen, namelijk 'weten wat', een soort voorfase, waarin je moet uitzoeken wat je eigenlijk moet gaan doen. Dat is bij een opgave al snel duidelijk, bij een tekst niet. Het begrijpen van een tekst is iets anders dan het oplossen van een complex probleem. Bottema zegt bijvoorbeeld: "... en nu volgt eenvoudig dat...". Op zo'n moment moet je je afvragen: "O ja?, is dat wel zo? Hoe zit dat dan?". Lastig en niet altijd helder, maar volgens ons is het wel een essentieel onderdeel van het bezig zijn met wiskunde: je krijgt een tekst, die moet je zien te begrijpen, je moet er uithalen wat vanzelf spreekt en wat niet. Als het niet vanzelf spreekt, dan moet je een bewijs leveren of een redenering opzetten en vervolgens een volgende stap nemen. Wat ons betreft heeft dit project zeker heel wat toegevoegd en ook verhelderd waar nog een en ander te winnen is. Volgend jaar weer!

Noten

- [1] Streun, A. van (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO.
- [2] Streun A. van & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In Drijvers P., Streun A. van & Zwaneveld, B. (Red.), *Handboek wiskundendidactiek* (pp. 339-368). Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [3] Poppelaars, J. (2016). Wiskunde op het Werk. *Euclides*, 91(4), 4-6.
- [4] Drijvers, P (2011). Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten. *Nieuwe Wiskrant*, 31(2).
- [4] Bottema, O. (2010). *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven. Oorspronkelijke uitgave 1944. In dit project zijn de hoofdstukken 1, 2, 3, 4, 5 en 10 (Stelling van Pythagoras, Stelling van Ceva, Loodlijnen, Negenpuntscirkel, Stelling van Taylor, Driehoek) verdeeld over de groepjes.

Over de auteurs

Rico del Castillo is eerstegraadsdocent op het Sint-Oelbertgymnasium te Oosterhout.

E-mailadres: r.delcastilho@oelbert.nl.

Hans Krabbendam is gepensioneerd en was onder meer 25 jaar lerarenopleider wiskunde.

E-mailadres: h.krabbendam@xs4all.nl

OLYMPIADEPUZZEL 93-2

KAARTJES TREKKEN



Birgit van Dalen
Quintijn Puite

Vanaf deze jaargang vind je in nummers 2, 4 en 6 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. We moedigen je daarom aan om de puzzel ook met je klas te proberen: met enig doorzettingsvermogen zal een groepje leerlingen deze puzzel misschien ook wel kunnen oplossen.

Kaartjes trekken

In een hoge hoed zit één kaartje met het getal 1 erop, verder twee kaartjes met het getal 2 erop, drie kaartjes met het getal 3 erop, enzovoorts, tot en met honderd kaartjes met het getal 100 erop. Je trekt blind kaartjes uit de hoge hoed. Hoeveel kaartjes moet je minstens uit de hoed halen om zeker te weten dat je:

- a) tien kaartjes met hetzelfde getal hebt of tien kaartjes met tien verschillende getallen (of allebei);
- b) zowel tien kaartjes met hetzelfde getal hebt als tien kaartjes met tien verschillende getallen (dit hoeven niet per se twintig verschillende kaartjes te zijn; een kaartje kan meetellen voor beide categorieën).

Stuur je oplossingen uiterlijk 1 december naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een kadobon van € 20,-.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen hun creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.



HET FIZIER GERICHT OP...

Sietske Tacoma

STUDENTMODELLEN VOOR GEPERSONALISEERDE FEEDBACK

In Flzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering belicht Sietske Tacoma gepersonaliseerde feedback voor statistiek in het wetenschappelijk onderwijs.



Struikelblok

Aan de Universiteit Utrecht merken we in verschillende opleidingen dat statistiek een struikelblok is voor veel studenten. Er is behoefte aan meer individuele begeleiding, maar door hoge studentaantallen is dit vaak niet goed haalbaar. In een driejarig onderwijs-ontwikkelproject ontwikkelen we daarom digitale oefenactiviteiten voor statistiek, samen met het departement Informatica en docenten van Biologie, Economie en Sociale Wetenschappen. Deze activiteiten zijn een aanvulling op de colleges en werkcolleges en geven de studenten gepersonaliseerde feedback op hun werk. Met de feedback willen we studenten inzicht geven in hun beheersing van de verschillende onderwerpen die een rol spelen in statistiek.

Studentmodellen

De feedback die we ontwikkelen is gebaseerd op studentmodellen. Heel algemeen is een studentmodel een lijst met eigenschappen van de individuele student, die door de leeromgeving is samengesteld op basis van de interacties met de student. Zo'n eigenschap kan bijvoorbeeld beschrijven hoe goed de student het opstellen van hypothesen beheerst. Na elke stap die een student maakt, goed of fout, wordt het studentmodel bijgewerkt. Stelt een student een correcte hypothese op, dan wordt zijn beheersing van 'hypothesen opstellen' wat naar boven bijgesteld, en bij een foute hypothese juist wat naar beneden. In mijn onderzoek gebruiken we een veelgebruikte vorm van het studentmodel: een zogenaamd *overlay-model*. Dit model bestaat uit twee onderdelen: het *domeinmodel* en de *overlay*. Het domeinmodel is een lijst met 'dingen' die belangrijk zijn in het domein, in mijn geval statistiek. Wat zo'n 'ding' precies is, kan verschillen; het kan bijvoorbeeld gaan om een definitie ('De p -waarde is de kans op een waarde net zo extreem als of extremer dan de gevonden waarde van de toetsingsgrootte, als de nulhypothese waar is'), maar ook om een verband tussen twee begrippen ('Als de steekproefgrootte toeneemt, neemt de grootte van de standaardfout af'). In mijn onderzoek noem ik die dingen kenniscomponenten. Het tweede

onderdeel van het overlay-model, de overlay zelf, bevat een score voor elke kenniscomponent uit het domeinmodel. Die score geeft op een schaal van 0 tot 1 (of van 0% tot 100%) aan in hoeverre de student de betreffende kenniscomponent beheerst. Waar het domeinmodel hetzelfde is voor alle studenten, is de overlay dus studentspecifiek. Een voorbeeld van een studentmodel uit mijn onderzoek is te zien in figuur 1. De kenniscomponenten zijn verdeeld in

figuur 1 Studentmodel van een student

Categorie	Score
☐ Typen toevalsvariabelen	55%
Meetniveaus	59%
Continu en discreet	20%
Onafhankelijk en afhankelijk	20%
☒ Visuele representaties van data	66%
☐ Cumulatieve frequenties en percentielen	50%
Cumulatieve frequentie	43%
Percentielrang	67%
Percentiel	48%
☐ Centrummaten	54%
Centrummaat als samenvatting	59%
Gemiddelde	53%
Mediaan	50%
Modus	52%
Invloed van uitschieters op centrummaten	50%
☒ Spreidingsmaten	40%

vijf categorieën. De eerste, derde en vijfde categorie zijn uitgekapt, waardoor de individuele kenniscomponenten en scores te zien zijn. Om de studenten snel inzicht te geven in hun beheersing, zijn de scorevakjes gekleurd: rode vakjes geven een lage beheersing aan, gele vakjes een redelijke beheersing en groene vakjes een goede beheersing.

Scores bepalen

De scores in het studentmodel worden bepaald door de prestaties van de student op de verschillende opgaven. Voor elke opgave is in kaart gebracht welke concepten een rol spelen. Voor veel opgaven is dat makkelijk; in een opgave waarin studenten een gemiddelde moeten berekenen speelt alleen het concept gemiddelde een rol. Maar er zijn ook veel opgaven waarin studenten kennis over verschillende kenniscomponenten moeten combineren. Bij het bepalen van een kritiek gebied in een t -toets bijvoorbeeld, moeten studenten rekening houden met het significantieniveau, of linkszijdig, rechtszijdig of tweezijdig wordt getoetst en met het aantal vrijheidsgraden. Door dit soort afhankelijkheden is het ontwerpen van een domeinmodel en van de koppeling tussen domeinmodel en opgaven vaak een hele puzzel. In mijn onderzoek proberen we deze puzzel verder op te lossen door werk van studenten te analyseren.

Studentmodel gebruiken

Zodra studenten een van de activiteiten helemaal hebben gemaakt, kunnen ze hun studentmodel bekijken. De scores kunnen de student helpen bij het kiezen van vervolgstappen: aan welke onderwerpen moet ik nog aandacht besteden en welke beheers ik al voldoende? Een van de vervolgstappen in mijn onderzoek is het bekijken in hoeverre studenten ook daadwerkelijk gebruik maken van de informatie uit hun studentmodel.

Zelf een studentmodel maken

Ik denk dat studentmodellen een waardevolle toevoeging zijn bij veel digitale leeractiviteiten, omdat ze studenten en leerlingen kunnen helpen beter inzicht te krijgen in hiaten in hun kennis. Bovendien merk ik in mijn onderzoek dat het ontwikkelen en testen van studentmodellen bijdraagt aan de kwaliteit van het lesmateriaal zelf. Voor het ontwerpen van een domeinmodel breng je vrij precies in kaart aan welke concepten je in het materiaal aandacht wilt besteden. Door vervolgens voor de ontwikkelde opdrachten aan te geven welke concepten een rol spelen, zie je snel of alle concepten voldoende aan bod komen. Zo bieden studentmodellen niet alleen overzicht aan leerlingen, studenten en docenten, maar ook aan auteurs van lesmateriaal.

MEDEDELING



Mathekalender 2017: online wiskundewedstrijd

De Mathekalender is een digitale adventskalender die de adventsperiode van 1-24 december bestrijkt, maar die in plaats van allerlei zoete lekkernijen achter haar luikjes uitdagende wiskundepuzzels verbergt. Soms zijn de wiskundevraagstukken pittig, zeg van het niveau van de nationale wiskundeolympiade, maar altijd leuk ingekleed in de sprookjesachtige sfeer van de kerst met vaak de kerstman en zijn kerstcabouters in de hoofdrol. De vraagstukken zijn meerkeuzevraagstukken; geen bewijzen, geen toelichtingen. Vorig jaar kende de Mathekalender twee winnaars: Ward van der Schoot (18) van het Stedelijk Gymnasium Breda en Marvin Jans (17) van het Liemers College Zevenaar.

Opgeven, spelregels en archief van oude opgaven:

<https://www.4tu.nl/ami/en/mathekalender/>

Om mee te kunnen doen moet je je vooraf registreren.

Dat kan vanaf 1 november.

Vragen? Mail naar 4tuami-ewi@tudelft.nl

Over de auteur

Sietske Tacoma doet bij het Freudenthal Instituut promotieonderzoek naar het gebruik van automatische feedback in universitair statistiekonderwijs. Daarnaast werkt zij aan de ontwikkeling van de Digitale Wiskunde Omgeving en zit ze in de redactie van *Euclides*.
E-mailadres: s.g.tacoma@uu.nl.

NOTULEN VAN DE NVvW-JAARVERGADERING

ZATERDAG 5 NOVEMBER 2016, VEENENDAAL

Kees Garst

Opening

De voorzitter, Swier Garst, heet alle aanwezigen welkom, in het bijzonder de ereleden van de vereniging en vertegenwoordigers van onder meer NVON (Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen), NVORWO (Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs) en CvTE (College voor Toetsen en Examens). De voorzitter hoopt dat eenieder op deze dag inspiratie kan opdoen voor het werk in de klas.

Jaarrede

In deze notulen wordt een paar aspecten belicht uit de jaarrede. De volledige tekst van de jaarrede is na te lezen in een van de komende nummers van *Euclides*.

De voorzitter noemt onder meer de rol van Facebook om leraren in hun werk te ondersteunen. Ook de aankondiging van het bestuur om met de leden in contact te komen door enkele regionale bijeenkomsten te organiseren en het plan om een nieuwe website op te zetten, intensiveren de communicatie tussen leden en bestuur.

Tijdens de jaarrede wordt Ruud Jongeling bedankt voor zijn inspanningen om de markt al twintig jaar tot een succes te maken. De vergadering ondersteunt dit met applaus.

Notulen

De notulen van de jaarvergadering van 2015 worden vastgesteld, met dankzegging aan de secretaris.

Jaarverslagen

De jaarverslagen 2015–2016 van de NVvW en van *Euclides* worden vastgesteld (zie vakbladeuclides.nl/922nvw en vakbladeuclides.nl/922euclides).

Financiën

De penningmeester, Gert de Kleuver, geeft een toelichting op de beknopte jaarrekening 2015–2016. Op het eigen vermogen is licht ingeteerd, vanwege de werkzaamheden die de nieuwe eindredacteur van *Euclides* al voor aanvang van de officiële indiensttreding heeft uitgevoerd.

Het Wereldwiskundefonds kan, mede door de bijdrage van € 2,50 en door de veiling van boeken, diverse hulpverleningsprojecten op het gebied van wiskundeonderwijs financieel ondersteunen.

De contributies zijn iets meer gebleken dan begroot, evenals de opbrengsten uit advertenties in *Euclides*. De opbrengsten uit symposia komen voort uit subsidie van instanties als SLO en inschrijfgelden voor deelnemers. De lasten voor het organiseren van deze activiteiten is in evenwicht met deze kosten.

De bureaunkosten wijken veel af van het daarvoor begrote bedrag, maar er wordt opgemerkt dat deze lasten zijn uitgesplitst onder andere activiteiten die door de beleidsmedewerkster worden uitgevoerd. Voor de begroting van 2016–2017 en 2017–2018 valt op dat de inkomsten vanuit de FvOv afnemen.

Een groter aantal vakorganisaties moet dezelfde pot verdelen. Om deze inkomsten op peil te houden is het wenselijk dat het ledenaantal van de NVvW groeit. Als het ledenaantal van de NVvW toeneemt, zullen de inkomsten voor de vereniging ook toenemen. Voor symposia is het lastig een bedrag te begroten, omdat momenteel niet duidelijk is of deze georganiseerd kunnen worden.

De kascontrolecommissie, bestaande uit de heer H.E. Zechiel en de heer P.G.M. Goverde, melden in hun verslag dat de stukken op de juiste wijze verantwoord zijn en dat de op de balans voorkomende liquide middelen in overeenstemming zijn met de dagafschriften. De penningmeester wordt door de vergadering gedetacheerd voor het gevoerde beleid.

De penningmeester stelt voor ook dit jaar de contributie niet te verhogen. De heer van Barneveld vormt, samen met de heer Goverde de nieuwe kascontrolecommissie.

De penningmeester spreekt zijn waardering uit voor het vele werk dat door Peter en Heleen van der Ree wordt gedaan ten behoeve van de financiële administratie.

Bestuursverkiezing

Marianne Lambriex neemt na zestien jaar afscheid als bestuurslid. Voor velen bekend als organisator van de studiedag en vanaf het eerste uur als pleitbezorgster van het lerarenregister. Naast haar schoolwerk en nog enkele andere taken in diverse commissies wist ze ook nog tijd vrij te maken voor het motorrijden. Dank voor alle inzet.

Douwe van der Kooi zorgde binnen het bestuur voor de verbinding met de lerarenopleidingen. Ook binnen de onderwijscommissie van PWN vervulde hij een rol. Zijn vermogen om discussies over gecompliceerde vraagstukken samen te vatten is een aangename kwaliteit gebleken, waarvoor dank.

De door het bestuur voorgestelde kandidaten Desiree van de Bogaart en Erik van den Hout worden door de vergadering als bestuurslid benoemd.

De voorzitter maakt van de gelegenheid gebruik om de aanwezigen op de hoogte te stellen van het bestuursbesluit om Ebrina Smallegange tot vicevoorzitter te benoemen, om daarmee te waarborgen dat het voorzitterschap, na aftreden van de huidige voorzitter, in goede handen is.

Rondvraag

De heer Cool vraagt het bestuur in een vooraf schriftelijk ingediende rondvraag of het bestuur het instellen van een Commissie van Goede Diensten een goed idee vindt. Deze commissie zou diverse misstanden op het gebied van o.a. censuur moeten onderzoeken.

De voorzitter antwoordt dat het bestuur dit geen goed idee vindt om reden dat het bestuur dit een onevenredig zwaar instrument vindt om kwesties te onderzoeken die binnen de vereniging niet breed gedragen worden.

Sluiting

De voorzitter sluit de vergadering, onder dankzegging van iedereen die zich inspant om deze studiedag tot een succes te maken, waarna de introductie op de studiedag volgt.

WEBSITE

JAARVERSLAGEN NVVW EN EUCLIDES

Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 4 november 2017** staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van *Euclides* jaargang 93 nummer 2.



vakbladeuclides.nl/932nvvw



vakbladeuclides.nl/932euclides

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2017

3/11
t/m
2/12

LANDELIJK

Webklas wiskunde: complexe netwerken

Organisatie: It's Academy en Universiteit van Amsterdam

za
4/11

VEENENDAAL

Jaarvergadering / studiedag NVvW

Organisatie: NVvW

2/11
en
21/11

AMSTERDAM

Cursus statistiek voor docenten havo/vwo

Organisatie: It's Academy en Bètapartners

vr
10/11

EINDHOVEN

Prijsuitreiking Nederlandse wiskundeolympiade

Organisatie: NWO

2018

22/1
t/m
1/2

LANDELIJK

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Organisatie: NWO

do
25/1

UTRECHT

Wiskundeconferentie vmbo en havo/vwo onderbouw

Organisatie: NVvW

2/2
en
3/2

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskunde Dagen

Organisatie: Freudenthal Instituut

wo
7/2

LANDELIJK

OnderbouwWiskundeDag

Organisatie: Freudenthalinstituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 93

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	19 december 2017	16 oktober 2017
4	30 januari 2018	20 november 2017
5	20 maart 2018	8 januari 2018
6	8 mei 2018	5 maart 2018
7	26 juni 2018	30 april 2018

CASIO®

Casio fx-CG50

Een mooi nieuw design met de vertrouwde functionaliteit!

De Casio fx-CG50 is de vervanger van de fx-CG20. Hij heeft de vertrouwde functionaliteit plus een aantal handige toevoegingen. Onderscheidend zijn de carbon look, heldere stevige toetsen en verdiept beeldscherm met minder kans op beschadiging. Dit voor dezelfde prijs als de fx-CG20!



CvTE
goedgekeurd

Bestel direct uw docentenexemplaar voor maar € 39,50*

Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer.

Bekijk de video's op: www.youtube.com/c/CASIOCOLLEGE

* Inclusief btw en verzending

MODERNE WISKUNDE

Nieuw! De 12e editie onderbouw:

- Structuur
- Eenvoudig differentiëren
- Een digitale, adaptieve omgeving
- Rekenen opgenomen in het werkboek en in Moderne Wiskunde online

Ga voor meer informatie naar:
modernewiskunde.noordhoff.nl

Nu ook voor
vmbo-basis!



Noordhoff Uitgevers



Innoveren in leren