Aanvulling op artikel ‘kwadratische verbanden’ in *Euclides* 7 jaargang 92

Jacques Jansen

Waarom beperken we ons tot rechthoeken met een zijde op de rand van het driehoekige plankje?

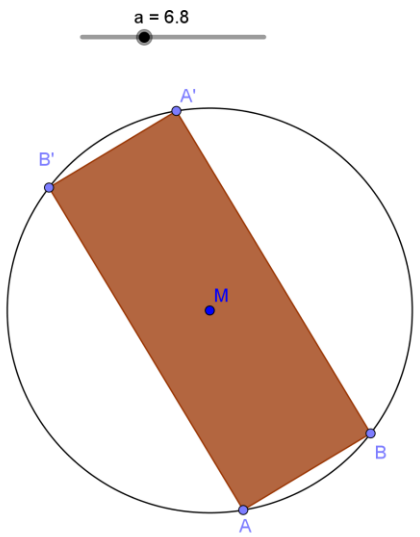
De beperking gaat over ingeschreven rechthoeken. Eerst bekijken we de rechthoeken nader.

Leerlingen kunnen met papier en schaar aan de gang gaan. Maar je zou ook onderzoek willen doen met een rechthoek die je niet alleen van plaats kunt veranderen, maar waarvan je het formaat naar eigen keuze kunt instellen. Natuurlijk is dat een uitdaging voor de leerling om zo’n rechthoek te construeren.

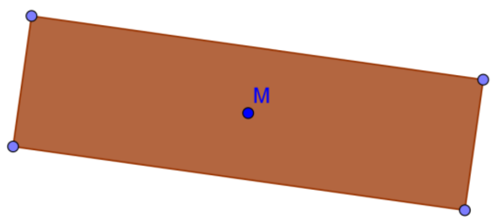
Flexibele rechthoek maken

Dat kan weer mooi met GeoGebra. Een bekende eigenschap van een rechthoek is dat de diagonalen even lang zijn en elkaar middendoor delen. Daar maken we gebruik van. We kiezen een willekeurig punt M in het tekenscherm. We voeren een schuifparameter a in en tekenen een cirkel met M als middelpunt met een variabele straal a.

- Kies twee willekeurige (niet diametraal) punten A en B op de cirkel.
- Spiegel deze punten in middelpunt M. Dat levert de punten A' en B' op.
- Teken de rechthoek met hoekpunten A, B, A' en B' . Zie figuur 1.
- Laat de cirkel weg.
- Laat de labels weg, behalve die van het middelpunt. Zie figuur 2.



Figuur 1



figuur 2

Terug naar de vraag in de titel

We laten zien dat een rechthoek, in een willekeurige positie binnen een scherphoekige driehoek, terug te brengen is tot een rechthoek met dezelfde oppervlakte die een zijde heeft liggen op een zijde van de driehoek.

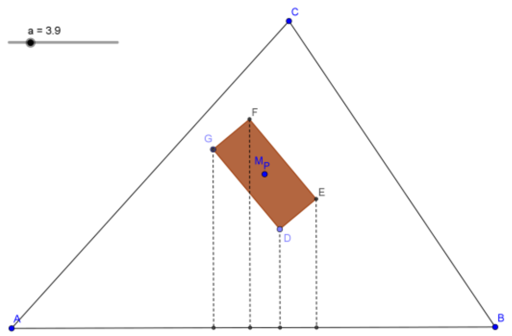
Om een flexibele rechthoek, zie figuur 2, tekenen we een scherphoekige driehoek. We kunnen de getekende driehoek zo labelen dat $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$. We zorgen er in eerste instantie voor dat de rechthoek zich echt binnen de driehoek bevindt, zie figuur 3.

We gaan de hoekpunten van de rechthoek opnieuw labelen, nu met de letters D, E, F en G.

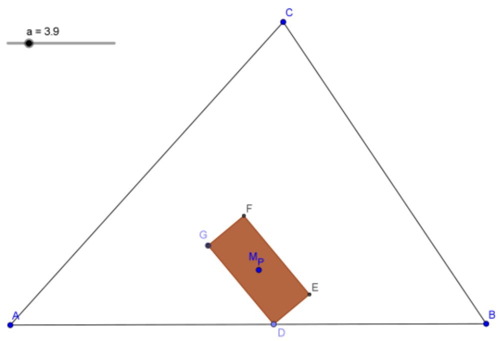
Met de letter d geven we de afstand aan van een willekeurig punt tot zijde AB.

We labelen nu zodanig dat : $d(D) \leq d(E) \leq d(G) \leq d(F)$. Zie figuur 3.

Vervolgens schuiven we de rechthoek, volgens de kortste weg richting AB, zodat punt D op zijde AB komt te liggen. Dit punt had ook de kortste afstand tot zijde AB. Zie figuren 3 en 4.

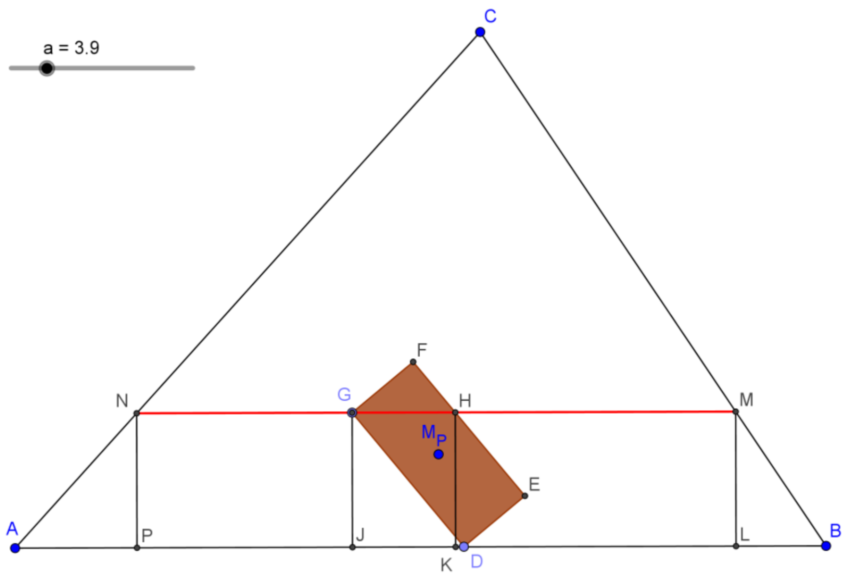


Figuur 3



figuur 4

We trekken een lijn door hoekpunt G evenwijdig met zijde AB. Het snijpunt met zijde FE noemen we H. De snijpunten met AC en BC noemen we respectievelijk N en M. De voetpunten van de punten N en M op zijde AB noemen we respectievelijk P en L. Zie figuur 5.



Figuur 5

Let op, er zijn een paar bijzondere gevallen.

- $d(G) = d(F)$. Dan ligt zijde *DE* van de rechthoek op zijde *AB*. We hebben een situatie van onze beperking.
- $d(E) = d(G)$. Punt *H* valt samen met punt *E*.

We introduceren verder de punten *J* en *K*. Ze zijn de voetpunten op lijn *AB* van respectievelijk de punten *G* en *H*. Ga na dat deze voetpunten liggen tussen *A* en *B*.

Merk op dat : ΔJDG is gelijkvormig met ΔFHG. Immers

$\angle GFH = \angle GJK = 90^\circ$ en $\angle FHG = \angle HGD = \angle JDG$.

Hieruit leiden we af: $\frac{DG}{HG} = \frac{JG}{FG}$. Dus $DG \times FG = HG \times JG$.

Dat betekent: Oppervlakte rechthoek *DEFG* = oppervlakte rechthoek *JKHG*. Rechthoek *JKHG* heeft zijde *JK* op zijde *AB* liggen. Ook opgemerkt dient te worden dat oppervlakte rechthoek *JKHG* $\leq$ oppervlakte rechthoek *PLMN*. Rechthoek *PLMN* is weer een ingeschreven rechthoek van ΔABC.

Bron: M.T. Bird (1971). Maximum rectangle inscribed in a triangle. *Mathematics Teacher, 64*, p. 759.