

Lessenserie

Afgeleiden en raaklijnen zonder limiet

Ontwerpprincipes: Didactische uitgangspunten bij deze lessenserie,

1. Nieuwe concepten moeten expliciet en in zo veel mogelijk worden verbonden met of gebaseerd zijn met aanwezige (relevante) kennis.
2. Wiskundige concepten moeten logisch, precies gedefinieerd en toegankelijk voor direct (lokaal) onderzoek zijn.
3. Laagdrempelig, te gebruiken met minimale instructie van docent: bruikbaar voor zelfstudie.

Ad 1. Ik heb hiervoor gekozen omdat ik wil onderzoeken of ik hiermee nieuwe begrippen toegankelijker of aantrekkelijker kan maken voor leerlingen.

Voorbeeld 1: Rationale getallen definieer je in termen van gehele getallen.

Voorbeeld 2: in deze lessenserie worden de afgeleiden gedefinieerd in termen van aanwezige eigenschappen van de polynoom met behulp van de driehoek van Pascal.

Ad 2. Ik heb hiervoor gekozen omdat ik in de wiskunde in het vo vaak wordt afgezien van 'rigourness', omdat we denken dat dat te moeilijk is. Ik denk echter dat we wiskunde voor (een deel van) de leerlingen er niet aantrekkelijker op maken.

Voorbeeld 1: De definitie "2 lijnen zijn parallel als ze elkaar nooit snijden" is ongeschikt voor onderzoek, want als je wilt weten of 2 lijnen parallel zijn moet je die lijnen tot in het oneindige onderzoeken (wat dat ook moge betekenen). De definitie "2 lijnen die beide loodrecht door een derde lijn worden doorsneden zijn parallel" stelt ons wel in staat lokaal te constateren of 2 lijnen parallel zijn.

Voorbeeld 2: De definitie "de raaklijn aan een grafiek in een bepaald punt P is de rechte lijn door 2 verschillende punten op de grafiek A en B als we A en B oneindig dicht bij P brengen." is ongeschikt voor direct onderzoek. Zulke punten A en B kunnen we niet tekenen en evenmin door een microscoop bestuderen. De definitie in deze lessenserie is niet gebaseerd op begrippen als oneindig (groot of klein).

Ad 3. Ik heb hiervoor gekozen omdat ik leerlingen zoveel mogelijk de kans wil geven zelf ontdekkingen te doen.
Onderweg moet de leerling in staat zijn vast te stellen of de stof al voldoende is begrepen.

Vragen aan experts

1. Wordt in deze lessenserie (voldoende) expliciet gebruik gemaakt van de aanwezige relevante kennis?
2. Zijn de ingevoerde wiskundige begrippen logisch, precies gedefinieerd en toegankelijk voor direct (lokaal) onderzoek zijn.
3. Kan de voorgestelde methode bijdragen aan de didactiek van de wiskunde, in het bijzonder aan een directer begrip van wat afgeleiden en raaklijnen zijn?
4. Sluiten de gevraagde vaardigheden aan bij wat vo 2^e fase leerlingen (kunnen) weten?

Vragen aan leerlingen

- Heb je de lessen grotendeels kunnen volgen zonder hulp van je docent?
- Welk onderdeel of welke onderdelen waren vrij gemakkelijk en welke vond je erg lastig?
- Wat vond je echt leuk en wat vond je maar niks?
- Hoeveel tijd heb je besteed per onderdeel?
- Heb je al eerder kennis gemaakt met de afgeleide van een functie? Heb je nu een beter idee van wat de afgeleide is? Of is het er niet helderder door geworden?
- Wat heb je geleerd van deze lessen?

Voor docenten: aanleiding

In de meestal gebruikte definitie van de afgeleide van een functie is $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, is

limietovergang van cruciaal belang. De gebruikte koorde is wel intuïtief, maar de limietovergang zelf is dat veel minder. We geven de leerlingen de definitie (misschien slaan we dit vaker maar over) en vertellen leerlingen hoe die definitie werkt. Het bijzondere is wel dat je door h deelt en h naar 0 laat gaan. Delen door 0 mag niet benadrukken we nog eens, maar we mogen wel delen door h omdat h niet 0 is. En als er nog h 's in de teller overblijven, zeggen we dat we die mogen verwaarlozen (en dus gelijk nul stellen). Ik heb dat een aantal leerlingen niet overtuigend kunnen uitleggen.

Ik heb gezocht naar een andere benadering van de afgeleide. Niet als iets dat pas in het oneindig grote of oneindig kleine ontstaat, maar dat een direct waarneembare eigenschap is. In deze lessenserie laat ik een alternatieve methode zien. Deze methode maakt uitsluitend gebruik van middelbare school algebra (optellen en vermenigvuldigen). Hierdoor werkt deze methode behalve in $\mathbb{R}$ ook in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en eindige velden. De voorgestelde aanpak zou je daarom meer elementair kunnen noemen. Ik zeg daarmee niet dat deze methode vervanger is of moet zijn van de analytische benadering. Ik wil echter in het kader van mijn afstuderen onderzoeken of de voorgestelde aanpak didactische voordelen heeft. Mogelijke voordelen zijn te vinden in het feit dat leerlingen in deze aanpak doorbouwen op eerder geleerde begrippen zoals als de driehoek van Pascal, het transleren van grafieken en algebraïsche vaardigheden. Daarnaast maakt de leerling op elementair niveau kennis met lineaire en kwadratische benadering van functies, dus eigenlijk met de kern van calculus.

Lesplannen – Cor Fortgens

In deze lessenserie worden 6 lessen gegeven aan een groep van havo 4 wi D leerlingen. Voor mij is deze groep nieuw zijn.

	Benodigdheden	Aan het eind van iedere 2 lesuren een korte enquête
Les 1	Standaard lokaal	• Uitleg door docent aan de hand van beeldmateriaal. Methode OLG met oefeningen. • CV 1-1. Hoe kun je $(a + b)^4$ uitschrijven met de driehoek van Pascal? • CV 1-2. Wat is precies een polynoom en hoe schrijf je die precies op? • CV 1-3. Hoe tel je polynoom $p=1+2\alpha-3\alpha^4$ op bij $q = -3 + 2\alpha - 3\alpha^2$? • Oefeningen mee voor thuis • Korte enquête
Les 2	Computerlokaal	• Korte instructie, zelf ontdekken in duo's. Duo's presenteren kort wat ze gevonden hebben (hangt af van aantal lln). • CV 3-1. Hoe teken je de grafiek van polynoom $p=1 + 2\alpha^2 - 5\alpha^3$ • CV 3-2. Hoe bepaal ik de 1e en 2e orde raaklijn aan de grafiek van polynoom $p = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3$ in $x = 0$? • CV 3-3. Hoe bepaal je de 1e en 2e orde raaklijn aan de grafiek van polynoom $p = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3$ in $x = -2$?
Les 3	Computerlokaal	• Deze les is misschien wel de belangrijkste omdat lln hierin ontdekken dat de raaklijn een 'natuurlijk' onderdeel is van iedere polynoom. Theoretische vragen over huiswerk naar 4^e lesuur verschuiven. • Korte instructie door, zelf ontdekken in duo's. Duo's presenteren kort wat ze gevonden hebben (hangt af van aantal lln). • CV 3-1. Hoe teken je de grafiek van polynoom $p=1 + 2\alpha^2 - 5\alpha^3$ • CV 3-2. Hoe bepaal ik de 1e en 2e orde raaklijn aan de grafiek van polynoom $p = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3$ in $x = 0$ • CV 3-3. Hoe bepaal je de 1e en 2e orde raaklijn aan de grafiek van polynoom $p = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3$ in $x = -2$?
Les 4	Standaard lokaal	• Leerlingen bespreken met elkaar oefeningen van les 2. • Uitleg door docent aan de hand van beeldmateriaal afgewisseld met klassikale oefeningen. • CV 4-1. Hoe bepaal ik de subafgeleiden en de Taylorpolynoom van $p=3\alpha - \alpha^2$? • Korte enquête
Les 5	Standaardlokaal	• Laatste theorie zal kort zijn. • CV 5-1. Hoe vind ik de subpolynomen van een willekeurige polynoom $p=a+b\alpha+c\alpha^2$ door middel van de Taylorontwikkeling?
Les 6	Computerlokaal	• Aantal grotere opdrachten die goed met Geogebra opgelost kunnen worden. • CV 6-1. Hoe bepaal je de afgeleide van $p = 1 - 3\alpha + 2\alpha^3$ met de machtenregel? • CV 6-2. OK, ik kan afgeleiden en raaklijnen bepalen. Hoe begrijp ik hiermee de vorm van een polynoom beter? • Korte enquête

Overwegingen vooraf

Les 1 en 2 gaan over het ophalen van voorkennis over tekenen van grafieken met Geogebra (is niet voor alle lln voorkennis) en het transleren van grafieken en eigenschappen van de driehoek van Pascal. In les 2 introduceer polynomen met als variabele α in plaats van de gebruikelijke x . Ik heb dat gedaan omdat het nodig is dat de variabelen α en β vrij uitwisselbaar zijn, wat x en y niet zijn omdat leerlingen hebben geleerd dat deze variabelen een specifieke oriëntatie hebben in een tekening. De keuze om polynomen te noteren met oplopende machten heeft te maken met de gebruikelijke notatie van de driehoek van Pascal en de in les 4 en 5 gebruikte afgeleide polynomen.

Les 3 is mijns inziens de centrale les. Hierin ontdekken de leerlingen dat een ingewikkelde polynoom in de buurt van $x=0$ mooie en voorspelbare eigenschappen bezit.

Les 4 is de meest abstracte les waarin subafgeleiden worden gedefinieerd aan de hand van de coëfficiënten van de polynoom. De term subafgeleide is geen gangbare wiskundige term. Het woord subafgeleide gebruik ik ter onderscheid van de gebruikelijke 'afgeleide'. Ik heb deze term overgenomen uit het Engels. De 1^e subafgeleide is direct vergelijkbaar met de gebruikelijke afgeleide. De hogere subafgeleiden hebben geen onmiddellijke equivalent in de klassieke wiskunde. De gebruikelijke 2^e-afgeleide is eigenlijk de afgeleide van de afgeleide. Je kunt overigens aantonen dat de n^{e} -subafgeleide overeenkomt met de n^{e} -afgeleide gedeeld door $n!$ Het is denkbaar dat je voor de middelbare school de afleiding van de subafgeleiden (grotendeels les 4 en 5) weglaat en je beperkt tot de conclusie dat de afgeleide aan een polynoom in een punt c gelijk is aan $D_1(c)$ en de vergelijking van de raaklijn gelijk is aan $p_1: y = D_1(c) \cdot (x - c) + D_0(c)$. Dat ik deze lessen in deze proeflessen wel meeneem om de aansluiting met les 3 langer te behouden, namelijk dat een polynoom niet 1 maar een hele familie van raaklijnen heeft. Later zal dit aspect echter later naar de achtergrond verdwijnen, omdat we ons meestal beperken tot de 1^e afgeleide en lineaire benaderingen.

Les 5 en 6 vatten de theorie $p_1: y = D_1(c) \cdot (x - c) + D_0(c)$ met de machtenregel waarmee je snel $D_1(c)$ kun bepalen en daarmee de raaklijn voor ieder punt van de grafiek van de polynoom. Les 6 bevat oefenmateriaal en toepassingen.

Tot slot is er een serie extra lesmodules toegevoegd die ontstaan zijn in de loop van de ontwikkeling van deze lessen, maar die nodig zijn om antwoorden te krijgen op de onderzoeksvraag van het onderliggende specialisatieonderzoek. Deze modules zullen niet nader onderzocht worden.

Raaklijnen en afgeleiden zonder limiet

C. Fortgens

Mei 2012

Raaklijnen en afgeleiden zonder limiet

Inhoud

0	INSTRUCTIE	2
1	LES 1 DRIEHOEK VAN PASCAL EN POLYNOMEN	3
1.1	DE DRIEHOEK VAN PASCAL	3
1.2	POLYNOMEN: DEFINITIES EN NOTATIES	6
1.3	REKENEN MET POLYNOMEN	8
2	LES 2 POLYNOMEN TEKENEN EN TRANSLEREN 	12
2.1	TEKENEN VAN GRAFIEKEN MET GEOGEBRA	12
2.2	VOORKENNIS: TRANSLEREN VAN GRAFIEKEN 	14
3	LES 3 HET GEDRAG VAN POLYNOMEN 	16
3.1	POLYNOMEN TEKENEN	16
3.2	DE EIGENSCHAPPEN VAN EEN POLYNOM ROND $x=0$	17
3.3	ONDERZOEK EEN POLYNOM ROND $x=-2$	20
4	LES 4 DE SUBAFGELEIDEN VAN EEN POLYNOM	24
5	LES 5 DE RAAKLIJNEN AAN EEN WILLEKEURIGE POLYNOM	28
6	LES 6 DIFFERENTIEERREGELS EN VERDER ONDERZOEK VAN DE RAAKLIJNEN.	34
6.1	DE SOMREGEL	34
6.2	DE VEELVOUDREGEL	35
6.3	DE MACHTENREGEL	35
6.4	OEFENEN EN TOEPASSEN 	39
7	EXTRA OPDRACHTEN EN ANTWOORDEN OP OPDRACHTEN	42
8	EXTRA MODULE: RAAKLIJNEN AAN EEN CIRKEL	45
9	EXTRA MODULE: RAAKLIJNEN AAN HET LEMNISCAAT VAN HUYGENS	50
10	EXTRA MODULE: PRODUCTREGEL	53
11	EXTRA MODULE: KETTINGREGEL	55
12	EXTRA MODULE: DE AFGELEIDE VAN P GELIJK AAN P	57
13	EXTRA MODULE: REKENREGEL VOOR DE 2^{E} SUBAFGELEIDE VAN HET PRODUCT VAN 2 POLYNOMEN	59
14	EXTRA MODULE: EINDIGE VELDEN	62
15	EINDOPDRACHT	63

0 Instructie

De stof die in deze lessen wijkt af van wat er doorgaans wordt verteld over raaklijnen en afgeleiden. Daarom wordt veel aandacht gegeven aan definities en notaties. Sommige begrippen zijn ongebruikelijk voor de wiskunde op de middelbare school, zoals subafgeleiden en hogere orde raaklijnen. De '1^e subafgeleide' komt praktisch overeen wat in de meeste wiskundeboeken 'de afgeleide' wordt genoemd. De hogere orde raaklijnen kom je niet vaak tegen. In deze lessen worden deze raaklijnen gebruikt om te laten zien dat wat doorgaans *de raaklijn* heet, er een is van een hele familie van raaklijnen. Het hoofddoel is dat je goed kan uitleggen dat raaklijnen een natuurlijk onderdeel vormen van een hogere orde formules. In feite liggen in zo'n formule zijn raaklijnen al opgesloten.

In de lessen zijn theorie en praktijk nauw met elkaar verweven. In de tekst worden regelmatig oefeningen en opdrachten aangeboden. Lessen met het teken  zijn bedoeld om door te nemen met een computer bij de hand. De bedoeling is dat je die oefeningen en opdrachten direct uitvoert. In deze lessenserie is het programma Geogebra een belangrijk stuk onderzoeksgereedschap. Je kan hiermee zelf experimenteren met de aangeboden begrippen en zal misschien ontdekkingen doen die niet eens in de stof voorkomen.

De lessen zijn zo opgezet dat je zelfstandig of in tweetallen met een computer bij de hand, door de stof kunt gaan. Het is de bedoeling dat je de antwoorden in een apart schrift bijhoudt en dat je de computerresultaten opslaat op je computer.

In les 1 en 2 wordt voorkennis over de driehoek van Pascal en over het transleren van functies opgehaald, maak je kennis met het programma Geogebra en wordt de in de wiskunde veel gebruikte polynoom geïntroduceerd.

In les 3 en 4 ga je ontdekken dat in de polynoom raaklijnen en subafgeleiden liggen besloten die te voorschijn komen als je de polynoom op een bepaalde manier opschrijft.

In les 5 en 6 leer je hoe je snel afgeleiden en raaklijnen kunt vinden aan iedere soort polynoom.

De extra modules zijn voor verdieping.

In hoofdstuk 15 staat de eindopdracht.

1 Les 1 Driehoek van Pascal en Polynomen

1.1 De driehoek van Pascal

CV 1-1. Hoe kun je $(a + b)^4$ uitschrijven met de driehoek van Pascal?

In deze paragraaf leer je dat de coëfficiënten van merkwaardige producten $(a + b)^n$ een regelmatig patroon vormen, de driehoek van Pascal. Je leert een verkorte schrijfwijze kennen waarmee je niet alleen die coëfficiënten handig kunt noteren, maar de coëfficiënten van elke uitdrukking met machten van a en b .

De driehoek van Pascal kun je tegenkomen in de vorm van een piramide met bepaalde getallen (1).

In de top van de piramide staat het getal 1. Op de volgende rijen staan getallen die telkens gelijk zijn aan de som van de 2 cellen die

er direct linksboven en rechtsboven staan. Met deze regel kun je de piramide naar beneden toe uitbreiden zo ver je wilt.



Figuur 1 Blaise Pascal (1623-1662) Bron wikipedia

Driehoek van Pascal

				1					
				1	2	1			
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
1	6	15	20	15	6	1			

(1)

De getallen in de driehoek van Pascal hebben vele interessante interpretaties. In menig profielwerkstuk speelt deze driehoek daarom een belangrijke rol. Een belangrijke interpretatie van de driehoek van Pascal vind je bij de kansberekening (wiskunde A/D).

In deze lessenserie gebruiken we de eigenschap dat de getallen in de driehoek van Pascal overeenkomen met de zogenaamde binomiaalcoëfficiënten. Binomiaalcoëfficiënten ontstaan bij het uitvermenigvuldigen van merkwaardige producten in de vorm van $(a + b)^n$.

Voor $n = 2$ krijg je 4 termen: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb$ of $1a^2 + 2ab + 1b^2$. Je zou kunnen zeggen dat er 4 verschillende manieren zijn om a 's en b 's te verdelen over 2 posities. Omdat ab en ba hetzelfde zijn, zijn er dus 2 manieren om het product ab te vormen. Totaal heb je dan 1x een term a^2 , 2 keer een term ab en 1 keer een term b^2 .

De factoren 1, 2, 1 voor de a^2 , ab en b^2 zijn de binomiaalcoëfficiënten voor $n = 2$. Dit zijn de getallen die je op de horizontale rij 2 van de driehoek van Pascal vindt (de nummering van de rijen is 0, 1, 2, 3, 4, ...).

Voor $n = 3$ krijg je 8 termen: $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

De factoren 1, 3, 3, 1 voor a^3 , a^2b , ab^2 en b^3 zijn de binomiaalcoëfficiënten voor $n = 3$. Die staan op de 3^e rij. Kun je ontdekken dat de factor 3 voor de a^2b inderdaad ontstaat uit de som van de factoren 1 en 2 op 2^e rij?

De factoren van $(a + b)^4$ lezen we af van de 4^e rij, dus $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. En zo kun je verder gaan zo lang je wilt.

In deze lessen noteren deze driehoek niet als een piramide maar als een driehoek in de linker bovenhelft van een vierkant, zie (2).

	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	...
b^0	1	1	1	1	1	1	
b^1	1	2	3	4	5		
b^2	1	3	6	10			
b^3	1	4	10				
b^4	1	5					
b^5	1						
$\vdots$							

(2)

Hoe lees je deze driehoek? Kijk bijvoorbeeld naar het getal 6. Die staat in de (verticale) kolom waarboven a^2 staat en in de (horizontale) rij waarnaast b^2 . Het getal 6 staat daarom voor de term $6a^2b^2$. Op dezelfde wijze staat bijvoorbeeld het getal 2 voor $2ab$.

Uit deze driehoek kun je de binomiaalcoëfficiënten aflezen voor iedere waarde van n als je tenminste eerst de driehoek voldoende hebt uitgebreid.

We kunnen deze driehoek van Pascal nog compacter opschrijven dan in (2) door weglating van de machten van a en b . Zie hieronder.

Driehoek van Pascal

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

(3)

De driehoek van Pascal is een bijzonder geval van de invulling van zo'n driehoek met getallen, zie Oefening 2.

Oefening 1 Schrijf de driehoek van Pascal uit tot van $n = 0$ tot en met $n = 7$ in de compacte vorm als in (3).
Schrijf $(a + b)^7$ uit als optelling van afzonderlijke termen, gebruikmakend van de driehoek van Pascal.

Oefening 2 Interpretatie:

Als je $\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 2 & 3 & \\ & 1 & 3 & & \\ 1 & & & & \end{array}$ interpreteert als

$$(a + b)^2 + (a + b)^3 \equiv a^2 + 2ab + b^2 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

en

$\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & -2 & \\ & 0 & 3 & & \\ 0 & & & & \end{array}$ interpreteert als $ab + 3ab^2 - 2a^2b + a^3$,

hoe interpreteer je dan:

$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 2 & -2 & \\ & 1 & 3 & & \\ 2 & & & & \end{array}$ en $\begin{array}{ccc} & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & \\ 1 & & & \end{array}$ en $\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 1 & 1 & ? \end{array}$

In deze lessen zullen we de onderstaande interpretatie gebruiken.

$p = \begin{array}{ccc} & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 2 & \\ 1 & & & \end{array}$ wordt geïnterpreteerd als:

$$p \equiv 1 + a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^0 + (a + b)^2.$$

De term $(a + b)^0$ komt van de 0^e diagonaal en de term $(a + b)^2$ komt van de 2^e diagonaal.

Dus ieder getal ongelijk nul in deze notatie komt overeen met de bijbehorende term in machten van a en b .

Met deze interpretatie lezen we de verkorte schrijfwijze van de driehoek van Pascal als volgt:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \\ 1 & 3 & & \\ 1 & & & \end{array} \equiv (a+b)^0 + (a+b)^1 + (a+b)^2 + (a+b)^3$$

Of uitgeschreven:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \\ 1 & 3 & & \\ 1 & & & \end{array} =$$

$$= 1 + a + b + a^2 + 2ab + b^2 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (4)$$

Als we in de driehoek van Pascal de diagonalen respectievelijk vermenigvuldigen met de getallen 1, 3, 2, 1, dan ontstaat de driehoek:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & \\ 2 & 3 & & \\ 1 & & & \end{array} \equiv (a+b)^0 + 3(a+b)^1 + 2(a+b)^2 + (a+b)^3 \quad (5)$$

Oefening 3 Schrijf in verkorte vorm:

$$\begin{aligned} p &= 2(a+b) \\ q &= (a+b)^0 + 2(a+b)^1 + 3(a+b)^2 + 4(a+b)^3 \\ r &= a^3 + 3a^2b + 5 \end{aligned}$$

Samenvatting: In deze paragraaf heb je geleerd hoe de coëfficiënten van de merkwaardige producten $(a+b)^n$ een regelmatig patroon vormen, dat we de driehoek van Pascal noemen. We hebben een verkorte schrijfwijze ingevoerd waarmee je niet alleen die binomiaalcoëfficiënten handig kunt noteren, maar ook de coëfficiënten van andere uitdrukking met machten van a en b .

1.2 Polynomen: definities en notaties

CV 1-2. Wat is precies een polynoom en hoe schrijf je die precies op?

In deze paragraaf leer je dat polynomen uitdrukkingen zijn als $p = 2 + \alpha - 2\alpha^2$ en dat je deze kunt noteren als $p = \overline{2 \quad 1 \quad -2}$

De uitdrukkingen als $3x^3 - 2x + 2$ en $x^3 + x$ noemen we veeltermen of polynomen in x . In deze lessen zullen de term polynoom (in het Engels 'polynomial') gebruiken. Een polynoom heeft een of meer termen.

Weet je nog wat een term is en wat een factor is?

Die termen bestaan uit een macht van x vermenigvuldigd met een constant getal, de coëfficiënt. De machten van x zijn hierbij nul of positieve gehele getallen (0, 1, 2, 3, enzovoorts). Bedenk dat $x^0 = 1$. Die machten hoeven niet per se machten van x te zijn. Zo is $2s^3 - 1$ ook een polynoom. Er bestaan ook polynomen met meer dan een variabele, zoals $x^2 + 2xy - 1$ of $2xy^2 - 5x^2 - 1$. Termen met uitdrukkingen als 2^x en $\frac{1+x^2}{x^3}$ komen niet voor in een polynoom.

Definitie:

Een polynoom van de orde n in één variabele α is een formule in de vorm:

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n \quad (6)$$

$p(\alpha)$ is de naam van de polynoom, α is de variabele.

In deze lessen worden de namen van polynomen aangeduid met de letters p, q, r, s, t . Griekse letters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ worden gebruikt om de variabelen van de polynoom weer te geven. De letters x, y en z gebruiken we uitsluitend voor meetkundige figuren zoals grafieken maken in het x - y -vlak. De letters a, b, c, d zijn namen voor gewone getallen. Namen kunnen indices hebben zoals in p_0 en a_1 . In (6) zijn de getallen $a_0 \dots a_n$ gewone getallen en heten de coëfficiënten van de polynoom. Coëfficiënten mogen gelijk aan nul zijn behalve dat coëfficiënt $a_n \neq 0$, anders zou de polynoom van een lagere orde dan n zijn! In deze lessen werken we voornamelijk met gehele getallen zodat we precies en zonder afronding kunnen rekenen.

Definitie

De term met de coëfficiënt a_0 heet de 0^e -orde term of de constante term.
 De term met de coëfficiënt a_1 heet de 1^e -orde term of de lineaire term.
 De term met de coëfficiënt a_2 heet de 2^e -orde term of de kwadratische term.
 De term met de coëfficiënt a_n heet de n^e -orde term.

Voorbeelden

$p = 2 + \alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3$ is een 3^e -orde polynoom.

$q = 1 + 2\alpha - 3\alpha^4$ is een 4^e-orde polynoom waarbij de coëfficiënten van de 2^e- en 3^e-orde termen gelijk aan nul zijn.

$r = 3\alpha^2$ is een 2^e-orde polynoom met alleen een kwadratische term.

Uiteraard kun je eenzelfde polynoom op verschillende manieren opschrijven.

Zo is $q = 1 + 2\alpha - 3\alpha^4$ hetzelfde als $q = 2\alpha + 1 - 3\alpha^4$ of $q = -3\alpha^4 + 2\alpha + 1$. In deze lessen noteren we de termen met oplopende machten zoals in $q = 1 + 2\alpha - 3\alpha^4$.

De polynoom is eigenlijk helemaal bekend als we zijn coëfficiënten $a_0 \cdots a_n$ kennen.

Daarom kun je een polynoom ook opschrijven als een rij coëfficiënten:

$p = 1 + 2\alpha - 3\alpha^3$ schrijf je verkort als $p = \overline{1 \quad 2 \quad 0 \quad -3}$.

Dit is precies de notatie die je in de vorige paragraaf hebt leren kennen. Coëfficiënten gelijk aan 0 worden nu wél opgeschreven! Deze lijst met getallen noemen we een polygetal. Als gezegd wordt, schrijf de polynoom p als polygetal, dan wordt bedoeld zo'n lijst met getallen. De getallen in die lijst nummer je van 0 tot n , net zoals je de diagonalen in de driehoek van Pascal nummert van 0 naar n . In $p = \overline{1 \quad 2 \quad 0 \quad -3}$ is het getal 0 het 2^e getal in het polygetal.

Polygetallen kennen we al van de basisschool in de vorm van decimale getallen. Immers het decimale getal 3045 is een verkorte schrijfwijze voor $3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \equiv 3045$. Bij decimale getallen zetten we de hoogste machten van 10 echter juist vooraan en staan we alleen de coëfficiënten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 toe (die we cijfers noemen).

Oefening 4 Beantwoord de centrale vraag

Samenvatting: In deze les heb je geleerd dat decimale getallen ook polynomen zijn en dat je polynomen net als decimale getallen verkort kunt schrijven door alleen de coëfficiënten te noteren.

1.3 Rekenen met polynomen

CV 1-3. Hoe tel je polynoom $p = 1 + 2\alpha - 3\alpha^4$ op bij $q = -3 + 2\alpha - 3\alpha^2$?

In deze paragraaf leer dat je met polynomen net zo kunt rekenen als met decimale getallen. Je leert 4 rekenregels die je ook al kent van decimale getallen.

Met polynomen kun je rekenen op vrijwel dezelfde manier als met decimale getallen. Daarvoor hebben we 4 regels.

1.3.1 Polynomen optellen

Je telt de coëfficiënten van termen met gelijke machten op. Formeel geschreven:

<i>Rekenregel 1</i> <i>Optellen van 2 polynomen</i>	Gegeven $p = a_0 + a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2 + \dots a_n\alpha^n$ en $q = b_0 + b_1\alpha^1 + b_2\alpha^2 + \dots b_m\alpha^m$. $p + q = r = c_0 + c_1\alpha^1 + c_2\alpha^2 + \dots c_k\alpha^k$, waarin $c_k = a_k + b_k$.
--	---

Voorbeeld

Gegeven $p = 1 + 7\alpha - 3\alpha^3$ en $q = 2 + \alpha - 3\alpha^2$.

Dan is som $r = p + q = (1 + 2) + (7 + 1)\alpha + (0 - 3)\alpha^2 - 3\alpha^3 = 3 + 8\alpha - 3\alpha^2 - 3\alpha^3$

In polygetallen geschreven kan je polynomen optellen door de coëfficiënten onder elkaar te zetten:

$$\begin{array}{r}
 p = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 7 & 0 & -3 \\ \hline \end{array} \\
 q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & -3 \\ \hline \end{array} \\
 \phantom{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 8 & -3 & -3 \\ \hline \end{array}} \\
 p + q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 8 & -3 & -3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

1.3.2 Polynomen evalueren

Voor een willekeurig getal c geldt dat de evaluatie van een polynoom p voor het getal c gelijk is aan het getal $p(c)$.

<i>Rekenregel 4</i> <i>Een polynoom evalueren rond het getal c</i>	Gegeven $p = a_0 + a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2 + \dots a_n\alpha^n$ en het getal c . Dan is $p(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + a_3c^3 + \dots + a_nc^n$
---	---

Voorbeeld

Gegeven $p = 1 + 7\alpha - 3\alpha^3$

Dan is $p(0) = 1 + 7 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 1$ en $p(-2) = 1 + 7 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^3 = 11$

1.3.3 Verdieping: Polynomen met elkaar vermenigvuldigen

Twee polynomen kunnen we ook met elkaar vermenigvuldigen. Vermenigvuldig iedere term van de eerste polynoom met iedere term van de tweede polynoom en tel daarna termen met gelijke machten van α bij elkaar op. Formeel geschreven:

<i>Rekenregel 2</i>	$p = a_0 + a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2 + \dots a_n\alpha^n$ en
---------------------	--

Vermenigvuldigen van 2 polynomen	$q = b_0 + b_1\alpha^1 + b_2\alpha^2 + \dots b_m\alpha^m$ $p \cdot q = r = \overline{c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_k}$. Het getal c_k is de som van alle producten $a_i \cdot b_j$ waarvoor $i + j = k$.
----------------------------------	---

Voorbeeld

$$p = 1 + 7\alpha - 3\alpha^3 \text{ en } q = 2 + \alpha - 3\alpha^2.$$

$$\begin{aligned}
r = p \cdot q &= (1 + 7\alpha - 3\alpha^3) \cdot (2 + \alpha - 3\alpha^2) \\
&= 1 \cdot (2 + \alpha - 3\alpha^2) + 7\alpha \cdot (2 + \alpha - 3\alpha^2) - 3\alpha^3 \cdot (2 + \alpha - 3\alpha^2) \\
&= 2 + \alpha - 3\alpha^2 + 14\alpha + 7\alpha^2 - 21\alpha^3 - 6\alpha^3 - 3\alpha^4 + 9\alpha^5 \\
&= 2 + 15\alpha + 4\alpha^2 - 27\alpha^3 - 3\alpha^4 + 9\alpha^5
\end{aligned}$$

In polygetallen geschreven, kan je polynomen vermenigvuldigen door de coëfficiënten onder elkaar te zetten zoals bij een decimale vermenigvuldiging (maar denk er om, het eerste getal staat nu voor de laagste macht 0).

$$\begin{array}{r}
p = \overline{1 \quad 7 \quad 0 \quad -3} \\
q = \overline{2 \quad 1 \quad -3} \\
\hline
 \\
 2 \quad 14 \quad 0 \quad -6 \\
 1 \quad 7 \quad 0 \quad -3 \\
 -3 \quad -21 \quad 0 \quad 9 \quad + \\
\hline
r = \overline{2 \quad 15 \quad 4 \quad -27 \quad -3 \quad 9}
\end{array}$$

1.3.4 Verdieping: Polynomen vermenigvuldigen met een getal

Voor een willekeurig getal b geldt dat het product van b en polynoom p gelijk is aan het vermenigvuldigen van iedere term van p met b .

Rekenregel 3 Een polynoom vermenigvuldigen met getal b	Gegeven $p = a_0 + a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2 + \dots a_n\alpha^n$ en het getal b . Dan is $bp = ba_0 + ba_1\alpha + ba_2\alpha^2 + ba_3\alpha^3 + \dots + ba_n\alpha^n$
--	--

Voorbeeld

$$\text{Gegeven } p = 1 + 7\alpha - 3\alpha^3 \text{ en } b = 4$$

$$\text{Dan is } b \cdot p = 4 \cdot p = 4 + 28\alpha - 12\alpha^3$$

Oefening 5 Bereken $p + q$:

- $p = 1 + 7\alpha - 3\alpha^3$ en $q = 1$
- $p = 7\alpha - 3\alpha^3$ en $q = 1 + 2\alpha^2$
- $p = -3\alpha^3$ en $q = 3\alpha^3$
- $p = (1 + 7\alpha)^2$ en $q = 1$
- Beantwoord de centrale vraag

Samenvatting: In deze paragraaf heb je geleerd hoe je 2 polynomen met elkaar kunt optellen (en vermenigvuldigen), hoe je een polynoom met een constant getal vermenigvuldigt en hoe je een polynoom evalueert voor een bepaald getal.

2 Les 2 Polynomen tekenen en transleren

2.1 Teken en grafieken met Geogebra

CV 2-1. Hoe teken ik de grafiek van $p = 3 - 3x + x^3$ met Geogebra?

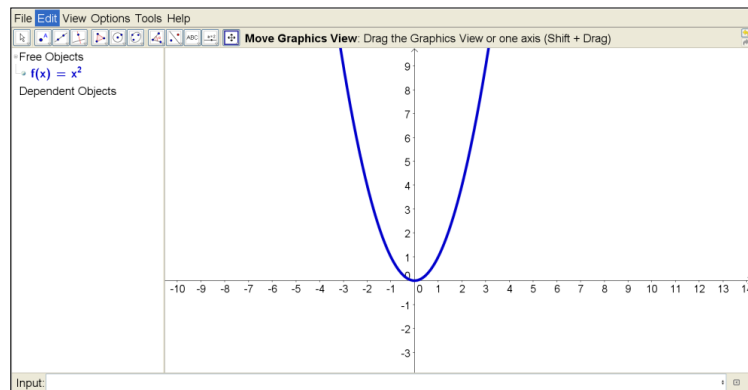
In deze paragraaf leer je het programma Geogebra gebruiken en daarmee grafieken te tekenen van polynomen.

Met de grafische rekenmachine (GR) en programma's als Geogebra en Excel kun je grafieken nauwkeurig en snel tekenen. In deze lessen gebruiken we Geogebra. Hiermee kan je de grafieken nauwkeurig tekenen en onderzoeken. *Let op:* in Geogebra en in deze lessenserie gebruiken we de decimale punt in plaats van de decimale komma!

Open <http://www.geogebra.org/cms/en/download> en kies applet start (het Geogebra programma werkt in je browser) of webstart (Geogebra wordt op je computer geïnstalleerd). Het openingsscherm wordt zichtbaar. Aan de linkerkant heb je een formulegebied waarin wiskundige formules verschijnen van de objecten die je invoert. Rechts is een tekengebied met een assenstelsel. Bovenaan het scherm staat een rij knoppen met tekengereedschap en tabs voor het aanpassen van allerlei instellingen. Onderaan het scherm is een invoerbalk (input) voor functies en formules.

Voer in de invoerbalk in:
 $f(x)=x^2$ (het teken ^ staat voor exponent).

Er verschijnt nu een grafiek in het tekengebied en links zie je onder Free objects de formule $f(x) = x^2$ (Figuur 2).



Figuur 2 Ingevoerd $f(x)=x^2$

Als je met de rechtmuisknop klikt op de grafiek in het tekengebied of op de formule in het formulegebied, kun je allerlei eigenschappen van de grafiek aanpassen zoals kleur, lijndikte, bijschriften, enzovoort. Kijken we naar de uitdrukking $f(x)=x^2$, dan staat links van het = teken de naam $f(x)$ en rechts de definitie van $f(x)$, hier x^2 .

Voer nu in: $g(x)=x^3+x^2+1$

Je ziet dat er een grafiek bij komt in zowel het tekengebied als het formule gebied.

Eerder ingevoerde formules kun je gebruiken om nieuwe formules mee te maken.

Voer nu in: $h(x)=2f(x)$

Geogebra kent al $f(x)=x^2$ en vult zelf voor $f(x)$ de waarde x^2 in. In het formulegebied verschijnt nu $h(x) = 2x^2$.

De grafieken die je hebt gemaakt kun je opslaan op je computer. Doe dat. Op deze manier kun je later je grafieken weer terughalen of kun je grafieken inlezen die een ander heeft gemaakt.

Met Geogebra kun je op een grafiek een willekeurig punt tekenen (2^e button van links) en kun je snijpunten van grafieken tekenen (een van de buttons onder de 2^e button van links). Ontdek hoe dat moet. Als je het goed gedaan hebt verschijnt de getekende punt zowel in het tekengebied als in het formulegebied waar je de exacte coördinaten aflezen. Kom je er niet uit, vraag het je klasgenoten of je docent.

Oefening 6 Gegeven: $f(x) = 3 + 6x$ en $g(x) = -2 + x^2$
Teken de grafieken van f en g .
Teken de snijpunten. Lees de waarde af van de coördinaten v

We gaan een nieuwe serie grafieken maken.

Maak je tekenvenster leeg door op iedere formule of grafiek met de rechtermuisknop te klikken en deze te verwijderen. Voer nu in de uitdrukking $f(x)=2$. Herken je de lijn die Geogebra tekent? Voer nu in $f_1(x)=2+3x$. De naam f_1 in de invoerbalk verschijnt in het formulegebied als f_1 . Na het teken _ wordt de volgende letter lager iets geplaatst. De grafiek van $f_1(x)$ is dezelfde grafiek als die van f , maar dan met de extra term $2x$. Waar snijden f en f_1 elkaar? Had je dat verwacht?

Voer vervolgens een nieuwe uitdrukking in: $f_2(x)= 2+3x-2x^2$. Dit is een nieuwe uitdrukking die gelijk is aan $f_1(x)$ met daaraan toegevoegd een nieuwe term met $-2x^2$. Maak nu een nieuwe uitdrukking $f_3(x)$ die gelijk is aan f_2 met daaraan toegevoegd een nieuwe term met een constante die jezelf kiest keer x^3 (bijvoorbeeld $3x^3$). En ga zo verder tot $f_5(x)$. Iedere keer voeg je een term toe met x tot 1 macht hoger. Je hebt nu 6 verschillende grafieken getekend. Wat valt je op aan deze grafieken?

Sla de grafieken op.

Oefening 7

- Experimenteer met verschillende zelfbedachte formules. Je kunt ook formules invoeren met x^n en y^n , zoals $y = x^2$, $y = mx + c$, $y^2 + x^2 - 1 = 0$. Op zo'n manier kun je allerlei vormen van grafieken krijgen. Als je een leuke vorm hebt gevonden, sla de grafiek op.
- Beantwoord de centrale vraag

Samenvatting: In deze les heb je geleerd hoe je in Geogebra grafieken kunt tekenen en hoe je snijpunten van grafieken kunt bepalen. Verder heb je geëxperimenteerd met het tekenen van een 'familie' van grafieken waarbij het ene familielid uit het andere

ontstaat door er een term aan toe te voegen.

2.2 Voorkennis: transleren van grafieken

CV 2-2. Gegeven in Geogebra de grafiek van $f(x) = 3x - 2x^2$. Hoe transleer je deze grafiek 3 stappen naar rechts?

In deze paragraaf leer hoe je in met het programma Geogebra grafieken kunt transleren in de x-richting.

We spreken van het transleren van grafieken als we een grafiek verschuiven in het x-y-vlak. Voorlopig hebben we hier alleen verschuiven in de x-richting nodig.

Je transleert $f(x) = 3x - 2x^2$ één stap naar links door alle x 'n in de definitie van $f(x)$ (de definitie van $f(x)$ staat rechts van het = teken) te vervangen door $x + 1$: $g(x) = 3(x + 1) - 2(x + 1)^2$. In plaats van die hele formule in te voeren kun je korter invoeren: $g(x) = f(x + 1)$. Probeer beide manieren.

Als je één stap naar links wilt transleren vervang je de x door $x + 1$. Als je a stappen naar links wilt, vervang je x door $x + a$. Als je -2 stappen naar links transleert, transleer je in feite 2 stappen naar rechts.

Oefening 8 Voer Geogebra in $f(x) = -3x + x^3$.
Maak $g(x)$ zodanig dat $g(x)$ gelijk is aan $f(x)$, maar dan 5 stappen naar links verschoven.
Maak $h(x)$ zodanig dat $h(x)$ gelijk is aan $f(x)$, maar dan 2 stappen naar rechts verschoven.

Oefening 9 Voer in $f(x) = -3x + x^3$ en $h(x) = 2$. Plaats een punt A op $h(x)$ (2^e button van links). Als Geogebra dit punt een andere naam heeft gegeven dan A, dan kun je met de rechtmuisknop de naam veranderen in A. Het punt A kun je met de cursor naar links of recht verschuiven. Doe dat eens. Transleer nu $f(x)$ door in te voeren $g(x) = f(x + x(A))$. Voor Geogebra betekent $x(A)$ de waarde van de x-coördinaat van het punt A. Verschuif punt A met je cursor. Wat gebeurt er? Hoe verklaar je dat? Kun je een translatie bedenken die er voor zorgt dat A en $g(x)$ dezelfde kant op bewegen?

Oefening 10 Beantwoord de centrale vraag

Samenvatting: In deze les heb je geleerd hoe je in Geogebra grafieken naar links of rechts kunt verschuiven (transleren). Je hebt geleerd de x-coördinaat van een punt te

gebruiken bij de translatie van een grafiek.

3 Les 3 Het gedrag van polynomen 📖

3.1 Polynomen tekenen

CV 3-1. Hoe teken je de grafiek van polynoom $p = 1 + 2\alpha^2 - 5\alpha^3$?

In deze paragraaf leer je dat je polynomen ook kunt interpreteren als grafieken.

Polynomen hebben we al geïnterpreteerd als decimale getallen met grondtal 10.

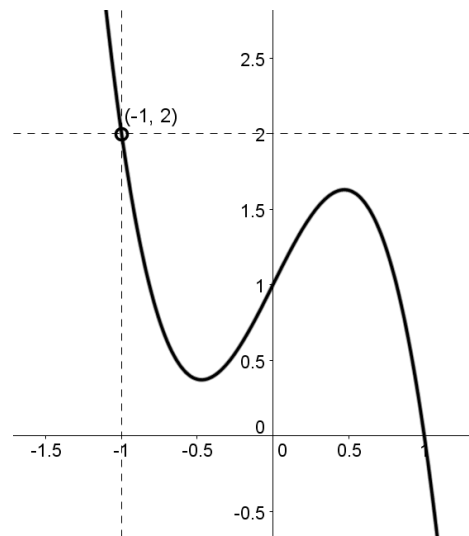
We kunnen polynomen ook interpreteren als grafieken.

Dat gaat als volgt.

Gegeven polynoom $p = 1 + 2\alpha - 3\alpha^3$.

Evalueer (zie 1.3.2) je p voor de waarde -1, dan krijg je het getal $p(-1) = 1 + 2 \cdot (-1) - 3(-1)^3 = 2$. Het getallenpaar of punt $(-1, 2)$ kun je tekenen in een x-y assenstel. Zet het 1^e getal, -1, langs de x-as en het 2^e getal, 2, langs y-as. Dat kun je voor elke waarde doen, zoals voor $p(2) = -19$. Bij een willekeurige waarde c vind je het punt $(c, p(c))$. In Figuur 3 is een groot aantal verschillende punten getekend waardoor een (kromme) lijn of curve is ontstaan.

De formule van deze lijn is $y = 1 + 2x - 3x^3$.



Figuur 3 $p=1+2x-3x^3$

Oefening 11 Teken met Geogebra de polynomen:

- $p = 1$
- $p = 1 + 2\alpha$
- $p = 1 + 2\alpha - 3\alpha^3$
- $p = 1 + 2\alpha - 3\alpha^3 + \alpha^4$
- Beantwoord de centrale vraag

Samenvatting:

We hebben gezien dat we de polynoom $p = 1 + 2\alpha - 3\alpha^3$ kunnen interpreteren als een grafiek met de vergelijking $y = 1 + 2x - 3x^3$.

3.2 De eigenschappen van een polynoom rond $x=0$

CV 3-2. Hoe bepaal ik de 1e en 2e orde raaklijn aan de grafiek van polynoom $p = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3$ in $x = 0$?

In deze paragraaf ontdek je hoe de afzonderlijke termen van een polynoom bijdragen aan de grafiek van die polynoom rond $x = 0$.

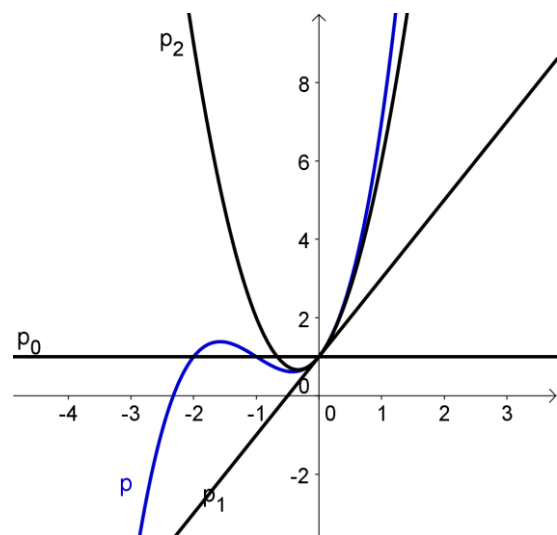
Hoe ziet zo'n grafiek van een polynoom er nu precies uit?

Neem als voorbeeld polynoom $p = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3$. p bestaat uit 4 termen. In Figuur 4 is de grafiek van p getekend als lijn p : $y = 1 + 2x + 4x^2 + x^3$.

Teken zelf deze grafiek in Geogebra.

We gaan de bijdragen van de afzonderlijke termen van de polynoom aan de grafiek van p onderzoeken. Dat doen we door van p kleinere polynomen af te leiden en wel op de volgende manier.

Laat de hoogste-orde term van p weg, hier de 3^e-orde term α^3 . Dan houden we een 2^e-orde polynoom over die we p_2 noemen: $p_2 = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2$.



Figuur 4 $y=1+2x+4x^2+x^3$

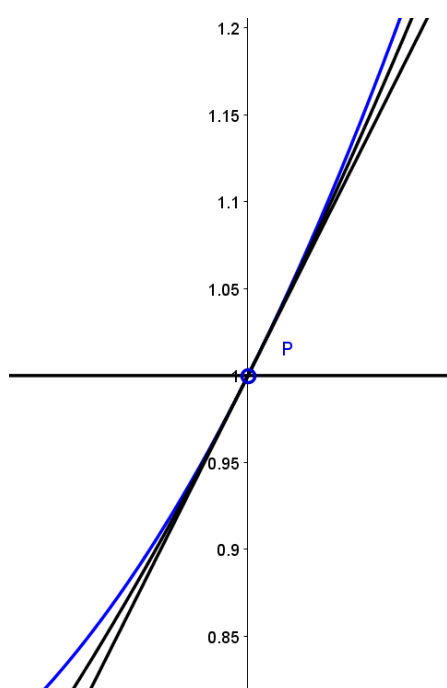
Van p_2 laten we 2^e-orde term weg. Dan houden we een 1^e-orde polynoom over die we p_1 noemen: $p_1 = 1 + 2\alpha$.

Dat kunnen we nog een keer doen waarna we $p_0 = 1$ over houden.

We hebben van de oorspronkelijke 3^e-orde polynoom p de polynomen p_2 , p_1 en p_0 afgeleid van een steeds lagere orde door weglating van termen. We noemen deze polynomen de 2^e, 1^e en 0^e orde subpolynomen van p .

Definitie

Gegeven een polynoom p in machten van x . De k^{e} -orde subpolynoom p_k van p is gelijk aan de uitdrukking voor p waarbij alle termen met een hogere orde dan k zijn weggelaten.



Figuur 5 Uitvergroting van grafiek in figuur 3

De grafieken van deze subpolynomen kunnen we uiteraard tekenen en staan afgebeeld in Figuur 4. Teken ze zelf ook met Geogebra.

De vergelijkingen van deze lijnen zijn:

Lijn $p_0: y = 1$ (de rechte horizontale lijn)

Lijn $p_1: y = 1 + 2x$ (de rechte schuine lijn)

Lijn $p_2: y = 1 + 2x + 4x^2$ (de parabool)

Je ziet dat de grafieken van al deze polynomen elkaar in het punt $P(0,1)$ snijden. De lijnen van p_1 en p_2 lijken de grafiek van p te schampen in het punt $P(0,1)$.

Deze lijnen heten daarom raaklijnen¹ aan p voor $x = 0$. Een raaklijn is dus de grafiek van een subpolynoom. De lijn p_1 heet 1^e-orde raaklijn of kortweg 'de raaklijn' aan p voor $x = 0$. De grafiek van p_2 schampt nog dichter langs p en heeft hier de vorm van een parabool. p_2 de 2^e-orde raaklijn of de kwadratische raaklijn. De lijn p_0 wordt wel de 0^e-orde raaklijn genoemd. In Figuur 5 is de grafiek rond snijpunt $P(0,1)$ uitvergroot

Definitie

Gegeven een polynoom p in machten van x . De k^{e} -orde raaklijn van polynoom p in het punt $x = 0$ is de grafiek van k^{e} -orde subpolynoom van p . De vergelijking van de 1^e-orde raaklijn of kortweg de raaklijn, bestaat uit de 0^e en 1^e orde termen van een polynoom.

¹ In het Engels tangent en tangent line

Het lijkt er op dat hoe hoger de orde van de raaklijn hoe dichter de raaklijn langs de grafiek van p gaat.

Dat kunnen we misschien zien, maar ook uitrekenen. Stel we willen weten hoeveel de raaklijnen afwijken van de oorspronkelijk polynoom voor een punt vlakbij $x = 0$, stel voor $x = 0,1$.

De exacte waarde p voor $x = 0.1$ is $p(0.1) = 1 + 2(0.1) + 4(0.1)^2 + 1(0.1)^3 = 1.241$ (controleer dit). De waarde van de 0^e-orde benadering $p_0 = 1$ is $p_0(0.1) = 1$ (zie je waarom?). Het verschil tussen p en de benadering p_0 is $1.241 - 1 = 0.241$.

De grafiek van de raaklijn $p_1 = 1 + 2x$ geeft een betere benadering. Voor $x = 0,1$ geldt $p_1(0.1) = 1 + 2(0.1) = 1,2$. Deze grafiek wijkt voor $x = 0.1$ nog maar $1.241 - 1.2 = 0.041$ af van de grafiek p .

De grafiek van de polynoom $p_2 = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2$ is een nog betere benadering. Voor $x = 0.1$ geldt dat $p_2(0.1) = 1 + 2(0.1) + 4(0.1)^2 = 1.24$. Deze grafiek wijkt nog maar $1.241 - 1.24 = 0.001$ af van de grafiek p .

Dit patroon zullen we steeds vinden: hoe hoger de orde van de subpolynoom, hoe beter de benadering van de oorspronkelijke polynoom vlak bij $x = 0$. Of anders gezegd, hoe dichter de raaklijn bij de oorspronkelijke grafiek ligt voor $x = 0$.

We hebben nu geleerd dat je van een gegeven polynoom de verschillende raaklijnen voor $x = 0$ simpelweg kan opschrijven door weglating van steeds de hoogste orde termen. Nu volgen enige voorbeelden en oefeningen.

Voorbeeld 1

Gegeven polynoom $p = 3\alpha - 6\alpha^2$.

Gevraagd: bepaal de raaklijnen aan p voor $x = 0$.

Oplossing:

De raaklijn van p voor $x = 0$ bestaat uit de 0^e- en 1^e-orde termen van p . De coëfficiënt van de 0^e-orde term is hier gelijk aan 0, zodat overblijft voor de raaklijn $p_1: y = 3x$. De 2^e-orde raaklijn is hier gelijk aan de oorspronkelijk polynoom. Je kunt ook zeggen dat p alleen een 0^e en 1^e orde raaklijn heeft.

Voorbeeld 2

Gegeven: polynoom $p = 1 - 2\alpha + 4\alpha^2 - 6\alpha^3 + \alpha^4$.

Gevraagd: bepaal de raaklijnen aan p voor $x = 0$.

Oplossing: De 0^e-orde raaklijn van p voor $x = 0$ bestaat uit de 0^e-orde term: $p_0: y = 1$.
 De 1^e-orde raaklijn of de raaklijn, bestaat uit de 0^e- en 1^e-orde termen van p . De vergelijking van de raaklijn is dus $p_1: y = 1 - 2x$.
 De 2^e-orde benadering levert $p_2: y = 1 - 2x + 4x^2$ en de 3^e-orde benadering is $p_3: y = 1 - 2x + 4x^2 - 6x^3$. Hogere orde raaklijnen zijn er niet omdat de orde van p gelijk is aan 4.

- Oefening 12**
1. Teken de voorbeelden met Geogebra.
 2. Beantwoord de centrale vraag.

Samenvatting: In deze les heb je geleerd hoe je uit polynomen lagere orde subpolynomen kunt afleiden. De grafiek van de subpolynoom is een raaklijn. Voor $x = 0$ bepaalt de 0^e orde raaklijn waar de grafiek van de polynoom de y -as snijdt. De 1^e orde raaklijn bepaalt de helling van de grafiek bij $x = 0$. Hoe hoger de orde van de subpolynoom, hoe beter de dichter de grafiek van die subpolynoom de grafiek van de oorspronkelijke polynoom benadert voor $x = 0$.

3.3 Onderzoek een polynoom rond $x=-2$

CV 3-3. Hoe bepaal je de 1^e en 2^e orde raaklijn aan de grafiek van polynoom $p = 1 + 2x + 4x^2 + x^3$ in $x = -2$?

In deze paragraaf leer je dat je raaklijnen kunt vinden in een punt als je dat punt (en de grafiek) eerst naar $x = 0$ transleert.

We gaan weer uit van

$$p = 1 + 2x + 4x^2 + x^3 \quad (7)$$

Teken deze polynoom met Geogebra.

Je hebt al ontdekt hoe je de raaklijnen voor punt $x = 0$ kunt bepalen door weglating van hogere orde termen. Maar hoe zit het met de raaklijnen in andere punten, bijvoorbeeld voor $x = -2$?

Voor $x = -2$ geldt $p(-2) = 1 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2)^2 + (-2)^3 = 5$.

In Figuur 6 is de grafiek van p getekend.

Het punt $P(-2,5)$ ligt op de grafiek. We zoeken de raaklijnen in het punt P aan de grafiek van p .

Simpelweg termen weglaten om raaklijnen te vinden kan nu niet meer (waarom niet?).

Het idee is dat we de grafiek van p naar rechts transleren, zover, dat het punt waarvoor we de raaklijnen zoeken, samenvalt met $x = 0$. Daarna hebben we de situatie waarvoor we de raaklijnen al kunnen opstellen.

Dat doen we in 4 stappen.

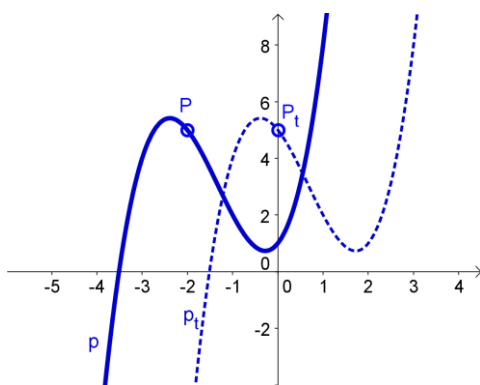
Stap 1 Transleer de grafiek 2 stappen naar rechts.

Hierdoor ontstaat een nieuwe grafiek die hoort bij de getransleerde polynoom p_t . Het getransleerde punt P is P_t en ligt nu precies bij $x = 0$ (Figuur 7).

Transleren over 2 stappen naar rechts doe je door voor x te schrijven $x + (-2) = x - 2$.

De vergelijking van de verschoven polynoom is:

$$p_t: y = 1 + 2(x - 2) + 4(x - 2)^2 + (x - 2)^3 \quad (8)$$



Figuur 7 Vershoven polynoom zodat de nieuwe P bij $x=0$ ligt.

Je ziet p_t in Figuur 7, waarbij de getransleerde polynoom gestippeld is. Teken deze polynoom met Geogebra.

Stap 2 Zet termen met gelijke machten bij elkaar

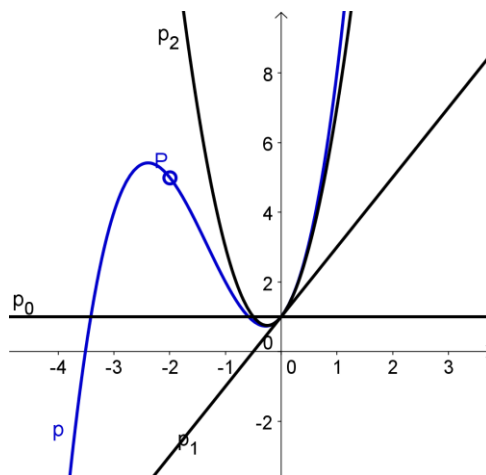
Uitschrijven van de formule van p_t met behulp van de driehoek van Pascal en termen met gelijke

machten bij elkaar zetten, levert:

$$\begin{aligned} p_t &= 1 + 2(x - 2) + 4(x^2 - 4x + 4) + 1(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \rightarrow \\ p_t &= 5 - 2x - 2x^2 + x^3 \end{aligned} \quad (9)$$

Controleer de berekening in (9).

We zien dat de coëfficiënten van de getransleerde polynoom anders zijn dan de oorspronkelijke polynoom. In de volgende paragraaf zullen we deze coëfficiënten de



Figuur 6 Punt P voor $x=-2$

subafgeleiden noemen, omdat ze (door translatie) zijn ‘afgeleid’ van de oorspronkelijke polynoom. De vergelijkingen van raaklijnen voor $x = 0$ van de verschoven polynoom kunnen we nu weer direct opschrijven door weglating hogere-orde termen:

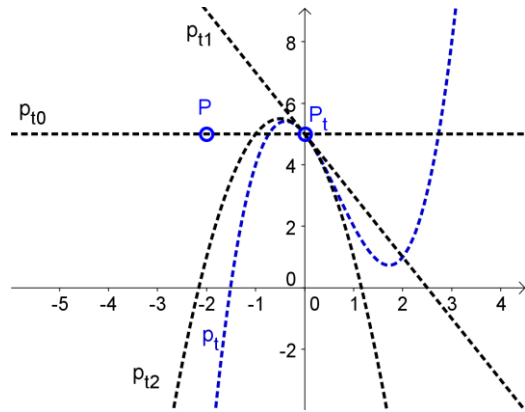
$p_{t0}: y = 5$, de 0^e -orde benadering van p_t .

$p_{t1}: y = 5 - 2x$, de raaklijn.

$p_{t2}: y = 5 - 2x - 2x^2$, de kwadratische raaklijn.

Deze raaklijnen zijn te zien in Figuur 8.

We hebben nu nog niet de raaklijnen gevonden aan p in het oorspronkelijke punt P , maar we zijn er bijna.



Figuur 8 Raaklijnen aan de verschoven polynoom p

Stap 3 Terugtransleren.

Om de raaklijnen bij P te vinden moeten we de gevonden raaklijnen 2 stappen naar links transleren. Dat doe je door x te vervangen door $x + 2$. Vul je dit in (9), dan krijg je:

$$p = 5 - 2(x + 2) - 2(x + 2)^2 + (x + 2)^3 \quad (10)$$

De polynoom uit (10) is hetzelfde als de polynoom uit (7), maar nu geschreven in machten van $x + 2$ in plaats van machten van x .

Stap 4 Raaklijnen bepalen door weglating van hogere orde termen

De vergelijkingen van de raaklijnen aan p vinden we nu weer door weglating van hogere orde termen:

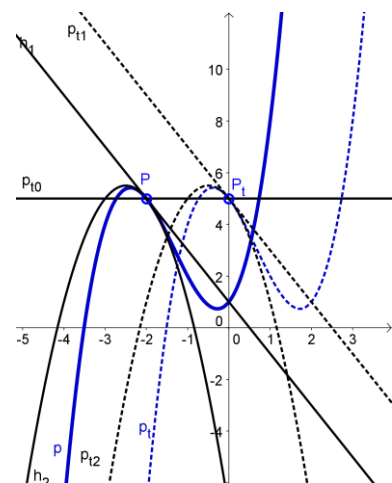
$p_0: y = 5$.

$p_1: y = 5 - 2(x + 2) = 1 - 2x$.

$p_2: y = 5 - 2(x + 2) - 2(x + 2)^2 = -7 - 10x - 2x^2$.

Deze raaklijnen zijn getekend als de doorgetrokken zwarte lijnen in Figuur 9.

Hiermee hebben we dus de raaklijnen gevonden aan de grafiek van p voor $x = -2$



Figuur 9 Raaklijnen in P

- Oefening 13
1. Bepaal de raaklijnen aan $p = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3$ (uit het bovenstaande voorbeeld) voor $x = 2$.
 2. Beantwoord de centrale vraag.

Samenvatting: We kunnen de raaklijnen voor $x = 0$ opschrijven door weglating van hogere orde termen. Raaklijnen voor andere waarden van x vinden we in 4 stappen: trans;eren, termen met gelijke machten bij elkaar zetten, terugtransleren en hogere orde termen weglaten.

4 Les 4 De subafgeleiden van een polynoom.

CV 4-1. Hoe bepaal ik de subafgeleiden en de Taylorpolynoom van $p = 3\alpha - \alpha^2$?

In deze paragraaf maken we kennis met het begrip subafgeleiden. Dat zijn de coëfficiënten van een polynoom die te voorschijn komen na translatie van de oorspronkelijke polynoom. We gaan ontdekken dat die coëfficiënten automatisch te voorschijn komen als we polynomen noteren als polygetallen.

In de vorige paragraaf heb je in een grafiek gezien dat als je een polynoom transleert je bijna automatisch stuit op de raaklijnen aan de grafiek van de polynoom in het punt dat na translatie bij $x = 0$ ligt. Als je daarna die raaklijnen “terugtransleert”, heb je de gezochte raaklijnen gevonden.

Daar gaan we nu dieper op in door beter te kijken naar de eerste twee van de stappen die we in de vorige les hebben gezien. We doen dit algebraïsch, dus zonder eerst grafieken te tekenen van de polynoom. In deze les definiëren we wat subafgeleiden zijn en in de volgende les gebruiken we deze subafgeleiden om raaklijnen op te schrijven aan iedere willekeurige polynoom.

We gebruiken weer (7) als voorbeeld de polynoom $p(\alpha) = 1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3$.

Stap 1: transleren

We gaan nu een truc toepassen. We vervangen α door $\alpha + \beta$. Dat kunnen we doen omdat α alle waarden kan aannemen, dus ook $\alpha + \beta$. Je hebt gezien dat dit in de grafiek neerkomt op een translatie naar links over een afstand β .

De polynoom p wordt nu:

$$p(\alpha + \beta) = 1 + 2(\alpha + \beta) + 4(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta)^3$$

Dit is een polynoom in 2 variabelen, α en β , we zijn dus overgegaan van 1 variabele naar 2 variabelen!



Figuur 10 Brook Taylor (1685-1731). Bron wikipedia

We noemen $p(\alpha + \beta)$ de Taylorpolynoom p_T van p , naar de Britse wiskundige Brook Taylor van het begin van de 18^e eeuw.

$$p_T = 1 + 2(\alpha + \beta) + 4(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta)^3 \quad (11)$$

We zien in (11) een reeks termen met merkwaardige producten: $(\alpha + \beta)$, $(\alpha + \beta)^2$ en $(\alpha + \beta)^3$. Denk aan Pascal!

We schrijven (11) uit met behulp van de driehoek van Pascal en de notatie van (5). Controleer dit!

$$p_T = 1 + 2(\alpha + \beta) + 4(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta)^3 \equiv \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & \\ 4 & 3 & & \\ 1 & & & \end{array} \quad (12)$$

In (12) staan horizontaal de machten van α uit en verticaal de machten van β .

Dit polygetal kunnen we uitschrijven als:

$$p_T = 1 + 2\alpha + 2\beta + 4\alpha^2 + 8\alpha\beta + 4\beta^2 + \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Stap 2: Termen met gelijke machten bij elkaar nemen

Driehoek van <i>Pascal</i>						
1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5		
1	3	6	10			
1	4	10				
1	5					
1						

We kunnen (12) ook uitschrijven als (machten van β bij elkaar nemen):

$$p_T = (1 + 2\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3) + (2 + 8\alpha + 3\alpha^2)\beta + (4 + 3\alpha)\beta^2 + (1)\beta^3 \quad (13)$$

En we kunnen (12) ook uitschrijven als (machten van α bij elkaar nemen):

$$p_T = (1 + 2\beta + 4\beta^2 + \beta^3) + (2 + 8\beta + 3\beta^2)\alpha + (4 + 3\beta)\alpha^2 + (1)\alpha^3 \quad (14)$$

Uitdrukkingen (13) en (14) zijn identiek. Dat hoeft ook niet te verbazen immers of je nu $(\alpha + \beta)$ of $(\beta + \alpha)$ substitueert in p , dat is allebei hetzelfde.

We kunnen (13) schrijven als:

$$p_T = D_0 + D_1\alpha + D_2\alpha^2 + D_3\alpha^3 \quad (15)$$

Met coëfficiënten

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 + 2\beta + 4\beta^2 + \beta^3, \\ D_1 &= 2 + 8\beta + 3\beta^2, \\ D_2 &= 4 + 3\beta, \\ D_3 &= 1 \end{aligned}$$

Deze coëfficiënten van de getransleerde polynoom p_T zijn dus zelf polynomen in alleen β . Vul je bijvoorbeeld $\beta = -2$ in (dus transleren naar rechts over afstand 2 zoals in (10), dan vindt je de coëfficiënten 5, -2, -2, 1 die we ook in (9) gevonden hebben. Controleer dit.

De coëfficiënten D_0, D_1, D_2 en D_3 noemen we de subafgeleiden² van p . Lees D_0 als de 0^e subafgeleide van p , D_1 als de 1^e subafgeleide, enzovoorts.

De 0^e subafgeleide D_0 is niets anders dan de oorspronkelijk polynoom in : $D_0 = p = 1 + 2\beta + 4\beta^2 + \beta^3$. Kijk dit goed na!

In de vorige paragraaf bij (9) hebben we gezien dat deze subafgeleiden de coëfficiënten vormen in de vergelijkingen van de raaklijnen.

Merk op dat de subafgeleiden van de polynoom automatisch te voorschijn komen in de kolommen (of rijen) van het Taylorpolygetal (16).

$$p_T = \begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 4 & 1 & \leftarrow D_0 \\ 2 & 8 & 3 & & \leftarrow D_1 \\ 4 & 3 & & & \leftarrow D_2 \\ 1 & & & & \leftarrow D_3 \end{array} \quad (16)$$

Voorbeeld

Gegeven: $p = -2\alpha^2 + 5\alpha^4$

Gevraagd: Bepaal de subafgeleiden van .

Oplossing:

We moeten nu de diagonalen van de driehoek van Pascal vermenigvuldigen met de coëfficiënten van : $\overline{0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 5}$. Zie hieronder. De driehoek van Pascal is rechtsonder nog een keer overgenomen.

$$p_T = \begin{array}{cccc|l} 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & \leftarrow D_0 \\ 0 & -4 & 0 & 20 & & \leftarrow D_1 \\ -2 & 0 & 30 & & & \leftarrow D_2 \\ 0 & 20 & & & & \leftarrow D_3 \\ 5 & & & & & \leftarrow D_4 \end{array} \quad \Delta Pascal = \begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 3 & 6 & & \\ 1 & 4 & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

Direct is af te lezen dat:

² In de wiskunde is de 'afgeleide' een veel gebruikt en uiterst belangrijk begrip. De naam 'subafgeleide' moet verwarring voorkomen met 'de afgeleide'. De afgeleide ontstaat op een heel andere wijze met behulp van limieten en reële getallen. Subafgeleiden zijn meer elementair: ze zijn algebraïsch en maken geen gebruik van limieten. Subafgeleiden zijn gedefinieerd in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. De afgeleiden zijn alleen gedefinieerd in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ komt de 1^e subafgeleide precies overeen de afgeleide. In deze lessen zullen beide als synoniem gebruiken: de afgeleide is hetzelfde als de 1e subafgeleide.

$$(0^{\text{e}} \text{ rij}): D_0 = -2\alpha^2 + 5\alpha^4$$

$$(1^{\text{e}} \text{ rij}): D_1 = -4\alpha + 20\alpha^3$$

$$(2^{\text{e}} \text{ rij}): D_2 = -4 + 30\alpha^2$$

$$(3^{\text{e}} \text{ rij}): D_3 = 20\alpha$$

$$(4^{\text{e}} \text{ rij}): D_4 = 5$$

- Oefening 14
1. Bepaal de subafgeleiden van $p = 2 - 2\alpha + 5\alpha^2$
 2. Laat zien dat de subafgeleiden in (14) voor $\alpha = -2$ precies overeenkomen met de coëfficiënten van (9).
 3. Beantwoord de centrale vraag

Samenvatting: In deze les hebben we geleerd hoe we van een gegeven polynoom p direct zijn Taylorpolynoom kunnen opschrijven (stap 1) met gebruikmaking van de driehoek van Pascal. Vervolgens (stap 2) zetten we termen met gelijke machten bij elkaar. Daarmee vinden we subafgeleiden van de polynoom. We zijn nu in staat om de raaklijnen voor ieder punt P op de grafiek van de polynoom te vinden zonder te rekenen of vergelijkingen op te lossen (volgende les).

5 Les 5 De raaklijnen aan een willekeurige polynoom

CV 5-1. Hoe vind ik de subpolynomen van een willekeurige polynoom $p = a + b\alpha + c\alpha^2$ door middel van de Taylorontwikkeling?

In deze paragraaf gaan we getransleerde polynoom p_T (15) terugtransformeren (stap 3). We vinden dan de Taylorontwikkeling van polynoom p voor iedere getal $\alpha = c$. Tenslotte in stap 4 bepalen we de subpolynomen van p . De grafieken van deze subpolynomen zijn de raaklijnen aan de grafiek van p .

We hebben nu alle gereedschap om subpolynomen van een willekeurige polynoom voor een willekeurig getal te kunnen opstellen.

We beginnen nu met de algemene uitdrukking voor een polynoom:

$$p = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \dots + a_n\alpha^n$$

Stap 1: Transleer de polynoom ofwel bepaal de Taylorpolynoom

Deze stap komt neer op de translatie naar links over afstand β .

De Taylorpolynoom van p is (α vervangen door $\alpha + \beta$), in navolging van (11):

$$p_T = p(\alpha + \beta) = a_0 + a_1(\alpha + \beta) + a_2(\alpha + \beta)^2 + a_3(\alpha + \beta)^3 + \dots + a_n(\alpha + \beta)^n$$

Stap 2: Gelijke machten van α bij elkaar zetten

Gelijke machten bij elkaar gebeurt automatisch met de verkorte schrijfwijze, het Taylorpolygetal. In feite kun je stap 1 overslaan als je direct het Taylorpolygetal opschrijft. In rij 0 en kolom 0 plaats je de polynoom zelf (D_0).

$$p_T = \begin{array}{cccccc|l} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \leftarrow D_0 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot & & & \leftarrow D_1 \\ a_2 & 3a_3 & \cdot & & & & \leftarrow D_2 \\ a_3 & \cdot & & & & & \leftarrow D_3 \\ \vdots & & & & & & \\ a_n & & & & & & \leftarrow D_n \end{array} \quad (17)$$

In de kolommen staan gelijke machten van α onder elkaar. Uitschrijven van p_T en gelijke machten van α bij elkaar zetten levert:

$$p_T = D_0(\beta) + D_1(\beta)\alpha + D_2(\beta)\alpha^2 + D_3(\beta)\alpha^3 + \dots + D_n(\beta)\alpha^n \quad (18)$$

(Als je het niet helemaal meer weet, kijk dan even terug naar de vorige les).

De coëfficiënten $D_0, D_1, \dots, D_n$ zijn de 0^e t/m n^e subafgeleiden van p , die alleen afhankelijk zijn van de translatie b .

De Taylorpolynoom met de subafgeleiden is nu bepaald. Als we $b = 0$ invullen vind je de raaklijnen voor $x = 0$ aan de polynoom (zie Les 3). Controleer dit.

Stap 3: Terugtransleren

We hadden p naar links verschoven door α te vervangen door $\alpha + \beta$.

Nu gaan we (18) terugtransleren door α te vervangen door $\alpha - \beta$:

$$\begin{aligned} p((\alpha - \beta) + \beta) &= \\ p(\alpha) &= D_0(\beta) + D_1(\beta)(\alpha - \beta) + D_2(\beta)(\alpha - \beta)^2 + \dots + D_n(\beta)(\alpha - \beta)^n \end{aligned} \quad (19)$$

We zijn nu terug bij de oorspronkelijke polynoom p , maar nu niet geschreven in machten van α maar in machten van $(\alpha - \beta)$.

Stap 4: Bepaal de subpolynomen door weglating van hogere orde termen in $(\alpha - c)$.

We gaan de translatie met een bepaald getal c bepalen. Evalueren voor $\beta = c$ geeft:

$$p(\alpha) = D_0(c) + D_1(c)(\alpha - c) + D_2(c)(\alpha - c)^2 + \dots + D_n(c)(\alpha - c)^n \quad (20)$$

Deze formule is in de wiskunde een belangrijk resultaat. Bètastudenten zullen dit gaan tegenkomen in hun studie. Het heet de Taylorontwikkeling van een polynoom p rond het getal c .

Uit deze formule kunnen de subpolynomen van p in een willekeurig punt c direct worden afgelezen (door telkens de hoogste orde term weg te laten).

Definitie

Gegeven een polynoom p in machten van $\alpha - c$. De k^e -orde subpolynoom van polynoom p voor $\alpha = c$ is de uitdrukking voor p met weglating van alle termen met een hogere orde

dan $\alpha = c$.

De 0^e-orde subpolynoom p_0 bestaat uit de 0^e-orde termen van (21). De 1^e-orde subpolynoom p_1 bestaat uit de 0^e- plus de 1^e-orde termen. De hogere orde subpolynomen volgen automatisch door er telkens een extra hogere machtsterm bij te nemen. Voor iedere polynoom p geldt samengevat:

$$p_0 = D_0(c) \quad (21)$$

$$p_1 = D_0(c) + D_1(c)(\alpha - c) \quad (22)$$

$$p_2 = D_0(c) + D_1(c)(\alpha - c) + D_2(c)(\alpha - c)^2 \quad (23)$$

$$p_n = D_0(c) + D_1(c)(\alpha - c) + D_2(c)(\alpha - c)^2 + \dots + D_n(c)(\alpha - c)^n \quad (24)$$

Hoe hoger de orde van de polynoom, hoe meer subpolynomen er zijn.

De grafieken van de subpolynomen zijn de raaklijnen aan de grafiek van de polynoom.

Definitie

Gegeven een polynoom p in machten van $\alpha - c$. De k^e -orde raaklijn aan de grafiek van polynoom p voor $x = c$ is de grafiek van de k^e -orde subpolynoom p_k .

De 1^e-orde raaklijn of raaklijn is de grafiek van de 1^e-orde subpolynoom van p .

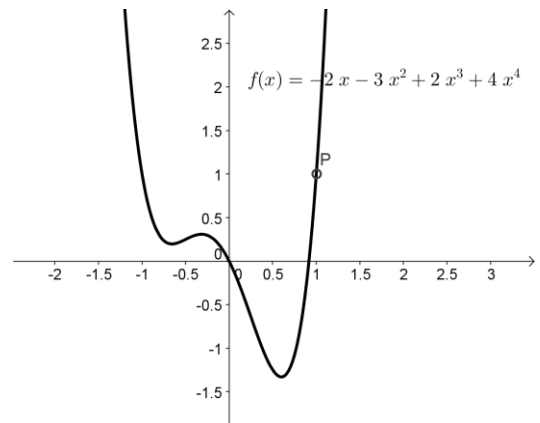
Voorbeeld:

Gegeven polynoom $p = -2\alpha - 3\alpha^2 + 2\alpha^3 + 4\alpha^4$.

Gevraagd: Bepaal de 1^e-orde en de 2^e-orde raaklijnen van p voor de waarde 1. In de grafiek van p zijn dit de raaklijnen aan p in het punt $P(1, p(1)) = P(1, 1)$.

Oplossing:

Stap 1 + stap 2:



Figuur 11 Polynoom p

Het Taylorpolygetal p_T kunnen we rechtstreeks opschrijven door de driehoek van Pascal te nemen en de diagonalen te vermenigvuldigen met de coëfficiënten van p (zie (5)). De horizontale rijen getallen zijn dan direct de subafgeleiden van p .

$$p_T = \begin{array}{ccccc|l} 0 & -2 & -3 & 2 & 4 & \leftarrow D_0 \\ -2 & -6 & 6 & 16 & & \leftarrow D_1 \\ -3 & 6 & 24 & & & \leftarrow D_2 \\ 2 & 16 & & & & \leftarrow D_3 \\ 4 & & & & & \leftarrow D_4 \end{array} \quad (25)$$

We hebben nu alle subafgeleiden van p bepaald. We hebben ze niet echt berekend of bedacht, maar ze komen automatisch te voorschijn als je een polynoom opschrijft in de vorm van een Taylorpolygetal.

Stap 3 Terugtransleren

Deze stap is gelijk aan (24) voor $n = 4$. De Taylorontwikkeling van p is:

$$p = D_0(c) + D_1(c)(\alpha - c) + D_2(c)(\alpha - c)^2 + D_3(c)(\alpha - c)^3 + D_4(c)(\alpha - c)^4$$

Stap 4 Subpolynomen opschrijven door weglating van hogere orde termen

De subpolynomen schrijven we niet uit, maar we schrijven direct de vergelijkingen op van grafieken van de subpolynomen p_1 en p_2 , de gevraagde raaklijnen dus.

De raaklijn of de 1^e-orde raaklijn voor $c = 1$ is nu (22):

$$p_1: y = D_0(1) + D_1(1)(x - 1) = 1 + 14(x - 1) = -13 + 14x$$

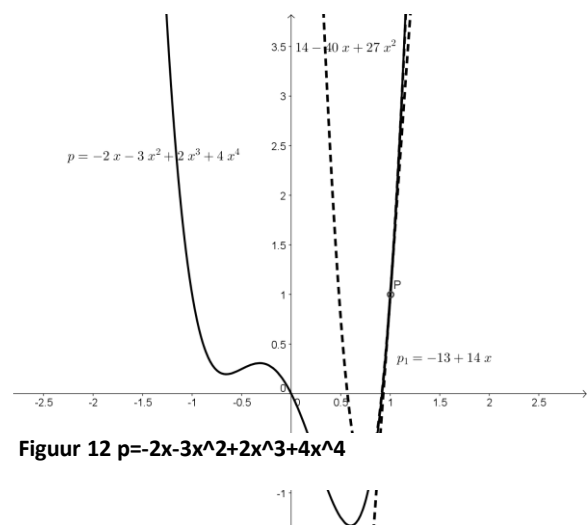
Controleer dit antwoord door de D_0 en D_1 uit te schrijven en $c = 1$ in te vullen.

De 2^e orde raaklijn voor $c = 1$ is:

$$p_2: y = D_0(1) + D_1(1)(x - 1) + D_2(1)(x - 1)^2 = 1 + 14(x - 1) + 27(x - 1)^2 = 14 - 40x + 27x^2$$

Controleer dit antwoord!

p_1 en p_2 (stippellijnen in Figuur 12) zijn de gevraagde lineaire en kwadratische raaklijnen.



- Oefening 15
1. Bepaal de subafgeleiden van $p = -5 + x$ door p te schrijven als polygetal en de subafgeleiden af te lezen uit de horizontale rijen zoals in (25).
 2. Bepaal de subafgeleiden van $p = -5 + x^2$, idem.
 3. Bepaal de subafgeleiden van $p = -5 + x^3$, idem.
 4. Bepaal de subafgeleiden van $p = -5 + x^4$, idem.
 5. Zie je een verband tussen je antwoorden?
 6. Beantwoord de centrale vraag in eigen woorden.

Oefening 16 Optionele opdracht, bij voorkeur in duo's:

Deze oefening is er een om een keer helemaal door te werken. Teken met Geogebra deze polynoom $p = -2x - 3x^2 + 2x^3 + 4x^4$. Teken op de grafiek van p het punt P . We gaan in P de raaklijnen bepalen. De x -coördinaat van P is $x(P)$. Voor ieder getal $x(P)$ levert (25) een serie subafgeleiden op:

$$D_0 = -2(x(P)) - 3(x(P))^2 + 2(x(P))^3 + 4(x(P))^4$$

$$D_1 = -2 - 6(x(P)) + 6(x(P))^2 + 16(x(P))^3$$

$$D_2 = -3 + 6(x(P)) + 24(x(P))^2$$

$$D_3 = 1 + 16(x(P))$$

$$D_4 = 4$$

Voer deze 4 getallen in in Geogebra.

De raaklijnen in P halen we direct uit (21), (22), (23) en (24). Voer deze raaklijnen in.

Zie je de raaklijnen in P ? Wat gebeurt er al je P verschuift met je cursor?



Optionele opdracht.ggb

Met behulp van de theorie die je geleerd hebt kun je de raaklijnen aan iedere polynoom vinden. Maar het kost eigenlijk best het nodige schrijfwerk en als je het een tijdje niet meer gedaan hebt, kan veel zijn weggezakt.

Gelukkig zijn er rekenregels waarmee we minder schrijfwerk de subafgeleiden. Samen met de Taylorontwikkeling (20) de de subafgeleiden kunnen we dan direct de raaklijnen opschrijven.

Samenvatting: We kunnen nu voor iedere polynoom p de raaklijnen in ieder punt opschrijven in 4 stappen. Stap 1 en 2 combineer je door het Taylorpolygetal (17) direct op te schrijven, je hebt dan de subafgeleiden bepaald. Stap 3 en 4 combineer je door de Taylorontwikkeling (19) direct op te schrijven en de vergelijkingen van de raaklijnen op te schrijven door weglating van hogere orde termen.

6 Les 6 Differentieerregels en verder onderzoek van de raaklijnen.

CV 6-1. Hoe bepaal je de afgeleide van $p = 1 - 3\alpha + 2\alpha^3$ met de machtenregel?

In deze paragraaf leer je de machtenregel kennen waarmee je van alle polynomen met 1 variabele de subafgeleiden en subpolynomen kunt bepalen en zonder eerst Taylorpolynomen helemaal uit te schrijven.

De machtenregel zegt dat je de 1^e subafgeleide of afgeleide van een polynoom kunt bepalen door term voor term de exponent er voor te plaatsen en de macht met 1 te verlagen. De 2^e subafgeleide van een polynoom kun je bepalen door term voor term de 1^e subafgeleide te nemen, de exponent er voor te plaatsen, de macht met 1 te verlagen en te delen door 2. De 3^e subafgeleide van een polynoom kun je bepalen door term voor term de 2^e subafgeleide te nemen, de exponent er voor te plaatsen, de macht met 1 te verlagen en te delen door 3. Enzovoorts.

De vergelijking van alle raaklijnen volgt dan uit de Taylorontwikkeling van p .

We beginnen met 2 voor de hand liggende differentieerregels, de som- en veelvoudregel.

6.1 De somregel

Met de somregel kunnen we de subafgeleide bepalen van som van 2 polynomen als we de subafgeleiden van de afzonderlijke polynomen kennen.

Somregel:

De k^e subafgeleide van de som r van 2 polynomen p en q is gelijk aan de som van de k^e subafgeleiden van beide afzonderlijk polynomen: $D_{k,r} = D_{k,p} + D_{k,q}$. Omdat we nu met 2 verschillende polynomen te maken hebben geven we met extra indices aan van welk polynoom een subafgeleide is.

Voorbeeld: $p = x^3$ en $q = -3x^2$. Dus $r = x^3 - 3x^2$.

Uitschrijven als polygetallen en de subafgeleiden aflezen:

$D_{1,p} = 3x^2$; $D_{1,q} = -6x$; $D_{1,r} = 3x^2 - 6x$. Hieruit volgt dat $D_{1,r} = D_{1,p} + D_{1,q}$.

Bewijs somregel

Het optellen van 2 polynomen is gelijk aan het optellen van de coëfficiënten van termen met gelijke machten (zie 1.3.1).

$$r = p + q$$

De Taylorpolynoom van r is:

$$r_T = r(\alpha + \beta) = p(\alpha + \beta) + q(\alpha + \beta) = p_T + q_T$$

Uitschrijven levert:

$$r_T = p_T + q_T = D_{0,p} + D_{1,p}\alpha + D_{2,p}\alpha^2 + \dots + D_{0,q} + D_{1,q} + D_{2,q}\alpha^2 + \dots$$

Termen met gelijke machten van α bij elkaar zetten:

$$r_T = (D_{0,p} + D_{0,q}) + (D_{1,p} + D_{1,q})\alpha + (D_{2,p} + D_{2,q})\alpha^2 + \dots$$

Hieruit volgt:

$$D_{k,r} = D_{k,p} + D_{k,q}$$

Hiermee is de somregel bewezen voor alle subafgeleiden ■

6.2 De veelvoudregel

Met de veelvoudregel kunnen je de subafgeleide bepalen van een veelvoud van een polynoom.

Veelvoudregel:

Als $r = c \cdot p$ dan is $D_{k,r} = c \cdot D_{k,p}$. Dus als alle termen van een polynoom $2x$ zo groot worden, worden alle subafgeleiden ook $2x$ zo groot.

Voorbeeld: $p = x^3$ en $c = -5$. Dus $r = -5 \cdot p = -5x^3$.

p en r uitschrijven als polygetallen en de subafgeleiden aflezen:

$$D_{1,p} = 3x^2; D_{1,q} = -15x^2; \text{ Hieruit volgt dat } D_{1,r} = -15 \cdot D_{1,p} 0.$$

Bewijs veelvoudregel

Het vermenigvuldigen van een polynoom met een getal is hetzelfde als het vermenigvuldigen van iedere term van die polynoom met dat getal (1.3.4).

Gegeven de polynoom p en getal c .

$$r = c \cdot p$$

$$r_T = c \cdot p(\alpha + \beta) = c \cdot p_T = c \cdot (D_{0,p} + D_{1,p}\alpha + D_{2,p}\alpha^2 + \dots + D_{n,p}\alpha^n) \rightarrow$$

$$r_T = c \cdot D_{0,p} + c \cdot D_{1,p}\alpha + c \cdot D_{2,p}\alpha^2 + \dots + c \cdot D_{n,p}\alpha^n \text{ (a)}$$

Per definitie:

$$r_T = D_{0,q} + D_{1,q}\alpha + D_{2,q}\alpha^2 + \dots + D_{n,q}\alpha^n \text{ (b)}$$

Uit (a) en (b) volgt:

$$D_{k,q} = c \cdot D_{k,p}$$

Hiermee is de veelvoudregel bewezen voor alle subafgeleiden ■

6.3 De machtenregel

Voor de machtenregel gebruiken we de notatie $n!$. Je leest $n!$ als 'n-faculteit' dat betekent $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$.

De machtenregel voor de afgeleide luidt formeel:

<i>Machtenregel voor de afgeleide</i>	Als $p = \alpha^n$ dan is $D_1 = n\alpha^{n-1}$. Een term van p wordt een term van D_1 door de exponent (macht) van α voor de term te plaatsen en de macht van α vervolgens met 1 te verlagen.
---------------------------------------	--

De machtenregel voor de k^e subafgeleide luidt formeel:

<i>Machtenregel voor de k^e subafgeleide</i>	Als $p = \alpha^n$ dan is $D_k = \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot \dots \cdot n-k+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \right) \alpha^{n-k} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) \alpha^{n-k} = \binom{n}{k} \alpha^{n-k}$. Deze formule komt neer op k keer de afgeleide bepalen en bij iedere keer te delen door het aantal keren dat je de afgeleide genomen hebt.
---	--

Voorbeeld 1

Gegeven: $p = 2\alpha^3$.

Gevraagd: de afgeleide D_1 van p

Oplossing:

De exponent van de term $2\alpha^3$ ervoor zetten en de exponent met 1 verlagen levert:

$$2 \cdot 3\alpha^2 = 6\alpha^2.$$

Daarmee is $D_1 = 6\alpha^2$.

Voorbeeld 2

Gegeven: $p = -2\alpha^5$.

Gevraagd: de afgeleide D_1 van p

$$\text{Oplossing: } D_1 = -2 \cdot 5\alpha^4 = -10\alpha^4$$

Voorbeeld 3

Gegeven: $p = -2\alpha^5$.

Gevraagd: alle subafgeleiden van p

Oplossing 1: herhaaldelijk de afgeleide nemen.

p is een 5^e orde polynoom. De 0^e afgeleide D_0 is p zelf:

$D_0 = -2\alpha^5$. De eerste keer de afgeleide nemen (en delen door 1):

$D_1 = -2 \cdot \left(\frac{5\alpha^4}{1}\right) = -10\alpha^4$. De tweede keer de afgeleide nemen en delen door 2:

$D_2 = -10 \cdot \left(\frac{4\alpha^3}{2}\right) = -20\alpha^3$. De derde keer de afgeleide nemen en delen door 3:

$D_3 = -20 \cdot \left(\frac{3\alpha^2}{3}\right) = -20\alpha^2$. De vierde keer de afgeleide nemen en delen door 4:

$D_4 = -20 \cdot \left(\frac{2\alpha}{4}\right) = -10\alpha$. De vijfde keer de afgeleide nemen en delen door 5:

$$D_5 = -10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = -2$$

Welke diagonaal van de driehoek van Pascal herken je?

Oplossing 2: gebruik de formule $\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) \alpha^{n-k}$

p is een 5^e orde polynoom. Dus $n = 5$.

De 0^e afgeleide D_0 is p zelf:

$$D_0 = -2 \left(\frac{5!}{0! 5!}\right) \alpha^5 = -2\alpha^5$$

$$D_1 = -2 \left(\frac{5!}{1! 4!}\right) \alpha^5 = -10\alpha^5$$

$$D_2 = -2 \left(\frac{5!}{2! 3!}\right) \alpha^5 = -20\alpha^5$$

$$D_3 = -2 \left(\frac{5!}{3! 2!}\right) \alpha^5 = -20\alpha^5$$

$$D_4 = -2 \left(\frac{5!}{4! 1!}\right) \alpha^5 = -10\alpha^5$$

$$D_5 = -2 \left(\frac{5!}{5! 0!}\right) \alpha^5 = -2\alpha^5$$

Verdieping - Bewijs Machtenregel

Als we een polynoom schrijven als een polygetal, dan zijn de subafgeleiden per definitie gelijk aan afzonderlijke getallen in het polygetal.

De machtenregel bewijzen komt dus neer op het bewijzen dat de machtenregel de coëfficiënten van het polygetal oplevert.

Voor wie al weet dat een getal in de driehoek van Pascal op de k^e kolom en de m^e rij geschreven kan worden als $(k+m)!/(k!m!)$ of, met $k+m=n$ als $n!/(k!(n-k)!)$ is het bewijs van de machtenregel geleverd ■

Voor de anderen gaan we terug naar hoe de driehoek van Pascal tot stand kwam.

De getallen ontstonden als coëfficiënten van bijvoorbeeld $(a + b)^4$.

Als we dit uitschrijven krijgen we: $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$

Uitvermenigvuldigen levert:

aaaa+aaab+aaba+abaa+baaa+aabb+abab+abba+baab+baba+bbaa+abbb+babb+bbab+ba+bbbb

Alles bij elkaar zijn dit 16 termen. Omdat bij een vermenigvuldigen de volgorde niet uitmaakt, zijn sommige termen gelijk aan andere termen.

Gelijke termen zetten we bij elkaar: $aaaa+4aaab+6aabb+4abbb+bbbb$

We herkennen de coëfficiënten van de driehoek van Pascal voor $(a + b)^4$. We zien ook dat die coëfficiënten op te vatten zijn als het aantal manieren om de a 's en b 's te verdelen over 4 posities. Er is maar 1 manier om 4 a 's op een rijtje te zetten. Er zijn 4 manieren om 3 a 's over 4 posities te verdelen. Er zijn 6 manieren om 2 a 's te verdelen. Er zijn 4 manieren om 1 a te verdelen en ten slotte is er maar 1 manier om helemaal geen a 's te plaatsen.

Een getal in de driehoek van Pascal, bijvoorbeeld het getal op de 2^e rij en de 3^e kolom, is dus het aantal manieren om 2 a 's en 3 b 's te verdelen over 5 plaatsen. Dat komt op hetzelfde neer op het aantal manieren om 2 a 's te verdelen, want als de a 's vastliggen, liggen de b 's ook vast.

Dat aantal manieren kunnen we in een formule schrijven. De eerste a kunnen we op 5 manieren verdelen. Voor de tweede a blijven er dan nog 4 manieren over. In totaal kunnen 2 a 's op $5 \cdot 4 = 20$ manieren worden verdeeld over 5 plaatsen. Dat is het geval als de beide a 's verschillend zijn. De volgorde van de beide a 's maakt echter niet uit. 2 a 's kun je op 2 manieren plaatsen, de ene a eerst en dan de andere, of omgekeerd. Daarom moet je 20 nog delen door 2. Dus in het totaal zijn er 10 verschillende manieren om 2 a 's en 3 b 's te verdelen over 5 plaatsen.

Waren we uitgegaan van de 3 b 's, dan zouden we hebben gevonden dat er $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ manieren zijn op 3 b 's over 5 plaatsen te verdelen en dat er $3 \cdot 2 = 6$ manieren zijn op 3 b 's te kiezen. Dat levert dan $60/6 = 10$ op. Precies hetzelfde dus als bij de 2 a 's.

Meer algemeen kun je zeggen dat als je k a 's en m b 's verdeeld over $k+m$ plaatsen, er $(k+m)(k+m-1) \cdots m / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ verschillende manieren zijn. Het getal op de k^e rij en m^e kolom is dus $(k+m)(k+m-1) \cdots m / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$.

Een andere manier om dit op te schrijven is $(k+m)!/k!m!$.

Hierin staat bijvoorbeeld $k!$ voor k -faculteit dat het getal $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ is.

Kies je $n=m+k$, dan ontstaan de formules $n!/k!(n-k)$. De lezer wordt uitgedaagd dit zelf af te leiden.

Ok, we kunnen nu ieder getal in de driehoek opschrijven. Hieronder staat nog een keer het polygetal voor een algemene polynoom.

$$p_T = \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \leftarrow D_0 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot & & & \leftarrow D_1 \\ a_2 & 3a_3 & \cdot & & & & \leftarrow D_2 \\ a_3 & \cdot & & & & & \leftarrow D_3 \\ \vdots & & & & & & \\ a_n & & & & & & \leftarrow D_n \end{array}$$

Bijvoorbeeld polynoom $p = a_2(\alpha + \beta)^2$ vinden we op diagonaal 2.

De 1^e subafgeleide vinden we op rij 1, dus $D_1 = 2a_2\alpha$.

De 2^e subafgeleide vinden we op de rij 2, dus $D_2 = a_2$.

Meer algemeen, de polynoom $p = a_n(\alpha + \beta)^n$ vinden we op diagonaal n .

De 1^e subafgeleide vinden we op rij 1 en kolom $n-1$. Het getal in de driehoek van Pascal dat daar bij hoort is $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, dus $D_1 = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) a_2 \alpha^{n-1}$.

De 2^e subafgeleide vinden we op de rij 2, kolom $n-2$, dus $D_2 = \left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right) a_2 \alpha^{n-2}$.

De 3^e subafgeleide vinden we op de rij 3, kolom 3, dus $D_3 = \left(\frac{n!}{3!(n-3)!}\right) a_3 \alpha^{n-3}$.

De n^e subafgeleide vinden we op de rij n , kolom n , dus $D_n = \left(\frac{n!}{n!(n-n)!}\right) a_n \alpha^{n-n} = a_n$.

Daarmee hebben we de machtenregel aangetoond. ■

Oefening 17

1. Bepaal de afgeleide van $p = 1 + 6\alpha$
2. Bepaal de afgeleide van $p = 1 + 6\alpha^3$
3. Bepaal de 2^e subafgeleide van $p = -3\alpha + 2\alpha^2 - 4\alpha^5$
4. Bepaal alle subafgeleiden van $p = (1 + 6\alpha)^2$
5. Bepaal alle subafgeleiden van $p = (1 + 6\alpha)^3$
6. Beantwoord de centrale vraag

Samenvatting: We hebben geleerd hoe je met de machtenregel alle subafgeleiden van een polynoom kunt opschrijven.

Met de machtenregel en de Taylorontwikkeling van de polynoom kun je de vergelijkingen van de raaklijnen opstellen: $p_k: y = D_0(c) + D_1(c) \cdot (x - c) + \cdots + D_k(x - c)^k$.

6.4 Oefenen en toepassen

CV 6-2. OK, ik kan afgeleiden en raaklijnen bepalen. Hoe begrijp ik hiermee de vorm van een polynoom beter?

In deze paragraaf onderzoek je eigenschappen van de grafiek van een polynoom zoals de toppen en buigpunten met behulp van zijn raaklijnen.

Je hebt nu (ruim) voldoende wiskundig gereedschap om in heel veel situaties de afgeleiden en de raaklijn te gaan bepalen. In de praktijk volstaat vaak dat je de raaklijn van een polynoom voor een bepaalde waarde van α kunt bepalen of zelfs alleen maar de afgeleide.

We gaan nog eens goed kijken naar die subafgeleiden en de raaklijnen kijken met behulp van Geogebra.

Dat doen we met de grafiek van $p = 1 - \alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3$. Teken de grafiek van p met Geogebra (je mag voor p ook een andere polynoom kiezen als je dat aandurft). Teken een punt P op deze grafiek.

Stap 1+ stap 2

Bepaal de subafgeleiden met de machtenregel:

$$D_0 = 1 - \alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3$$

$$D_1 = -1 + 6\alpha - 3\alpha^2$$

$$D_2 = 3 - 3\alpha$$

$$D_3 = -1$$

Voer de formules voor de subafgeleiden voor $x=x(P)$:

$$D_0(x) = 1 - (x(P)) + 3(x(P))^2 - (x(P))^3$$

$$D_1(x) = -1 + 6(x(P)) - 3(x(P))^2$$

$$D_2(x) = 3 - 3(x(P))$$

$$D_3(x) = -1$$

Deze formules leveren grafieken op, zet ze uit.

Stap 3 + stap 4

Voer nu de raaklijnen in:

$$p_0(x) = D_0$$

$$p_1(x) = D_0 + D_1 (x - x(P))$$

$$p_2(x) = D_0 + D_1 (x - x(P)) + D_2 (x - x(P))^2$$

Zie beschikbare Geogebra file.



Onderzoek oefening les 6.ggb

Oefening 18 Nu heb je de grafieken getekend van p en de raaklijnen van p in het punt P . Zoom zodanig in dat de toppen van de grafiek het beeld goed vullen.

Onderzoek het gedrag van de raaklijnen als je het punt P langs de grafiek van p schuift.

Mogelijke onderzoeksvragen:

1. Wat gebeurt er met de verschillende raaklijnen bij de toppen van de grafiek van p ?
2. Voor welke raaklijn in het bijzonder zijn de toppen bijzonder?
3. Ben je in staat uit te rekenen waar die toppen precies liggen?
4. Er is voor de 2^e orde raaklijn ook een bijzonder punt P op de grafiek van p . Welk punt zou dat kunnen zijn? En welke waarden van de subafgeleiden horen daarbij?

Oefening 19 1. Beantwoord de centrale vraag.

Samenvatting: In deze laatste les heb je enkele eigenschappen van de grafiek van een polynoom onderzocht door te kijken naar wat de raaklijnen van die polynoom doen. Met de raaklijnen kunnen we de toppen van de grafieken berekenen.

7 Extra opdrachten en antwoorden op opdrachten

- Oefening 20 Gegeven: $p = 1 + 3\alpha$
Gevraagd:
1. Teken de grafiek van p
 2. Bereken de afgeleide van p voor iedere $\alpha = c$.
 3. Bereken de afgeleide voor $c = 2$
 4. Bepaal de raaklijn aan p voor $c = 1$

- Oefening 21 Gegeven: $p = 2 - 3\alpha + 6\alpha^2$
Gevraagd:
1. Teken de grafiek van p
 2. Bereken de afgeleide van p voor iedere $\alpha = c$.
 3. Bereken de afgeleide voor $c = 2$
 4. Bepaal de raaklijn aan p voor iedere $\alpha = c$.

- Oefening 22 Gegeven: $p = -16\alpha^2$
Gevraagd:
1. Teken de grafiek van p
 2. Bereken de afgeleide van p voor iedere $\alpha = c$.
 3. Bereken de afgeleide voor $c = 2$
 4. Bepaal de raaklijn aan p

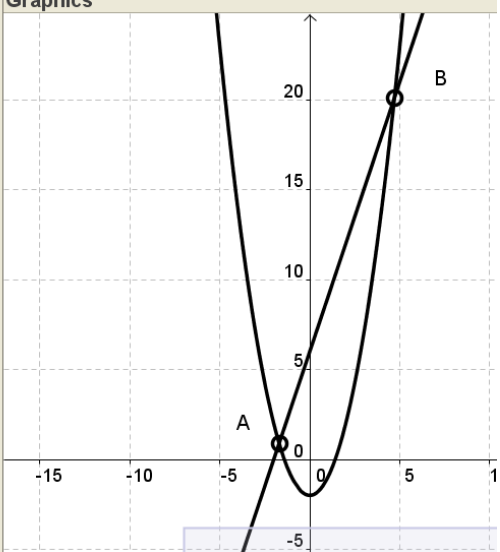
- Oefening 23 Gegeven: $p = 4\alpha + 4\alpha^2 + 3\alpha^3 - 16\alpha^4$
Gevraagd:
1. Teken de grafiek van p
 2. Bepaal p_T
 3. Bepaal de Taylorontwikkeling van p rond $\alpha = 2$
 4. Schrijf de 1^e, 2^e en 3^e-orde raaklijnen van p op.
 5. Teken deze raaklijnen bij de grafiek van p

- Oefening 24 Gegeven: $p = 4\alpha + \alpha^2 + 3\alpha^3 - 16\alpha^4$
Gevraagd:
1. Gebruik het resultaat van oefening Oefening 23.
 2. Teken op de grafiek van p het punt P .
 3. Teken de raaklijnen van p in bij je grafiek, maar in plaats van $x = 2$ vul je nu in $x = x(P)$.

- Oefening 25 Gegeven: de functie $f(x) = -3x^2 - x$.
Gevraagd: Voor welke x is $f(x)$ maximaal?
Hint: gebruik het feit dat in het maximum dat we zoeken de raaklijn aan de grafiek horizontaal zal lopen.

Antwoorden bij de oefeningen

Oefeningen	
Oefening 1	$ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & & \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & & & \\ 1 & 5 & 15 & 35 & & & & \\ 1 & 6 & 21 & & & & & \\ 1 & 7 & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \end{array} $
Oefening 2	$ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & \\ 1 & 3 & & \\ 2 & & & \end{array} = 1 + (a + b)^2 + a^3 - 2a^2b + 3b^2a + 2b^2 \text{ en} $ $ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \\ 1 & & \end{array} = 1 + a + b + a^2 + 2ab + b^2 $
Oefening 3	$ p = \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & \end{array} $ $ q = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 12 & \\ 3 & 12 & & \\ 4 & & & \end{array} $ $ r = \begin{array}{cccc} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & & & \end{array} $
Oefening 4	$ (a + b)^4 = \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \\ 0 & 0 & 6 & & \\ 0 & 4 & & & \\ 1 & & & & \end{array} $

Oefening 5	$p + q = 2 + 7\alpha - 3\alpha^3$ $p + q = 1 + 7\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3$ $p + q = 0$ $p + q = 2 + 14\alpha + 49\alpha^2$
Oefening 6	Algebra Graphics Free Objects $f(x) = 3x + 6$ $g(x) = -2 + x^2$ Dependent Objects $A = (-1.7, 0.9)$ $B = (4.7, 20.1)$ 
Oefening 7	pm
Oefening 8	$g(x) = f(x + 5)$ en $h(x) = f(x - 2)$
Oefening 9	De grafiek van $f(x)$ gaat naar links als je punt A naar rechts schuift. Bij de translatie $g(x) = f(x - x(A))$. Gaat de grafiek naar rechts als A naar rechts gaat.
Oefening 10-19	pm
	 Optionele opdracht.ggb

8 Extra module: Raaklijnen aan een cirkel

Voor het bepalen van raaklijnen aan figuren als cirkels en ellipsen stappen we over naar polynomen met 2 variabelen α en β .

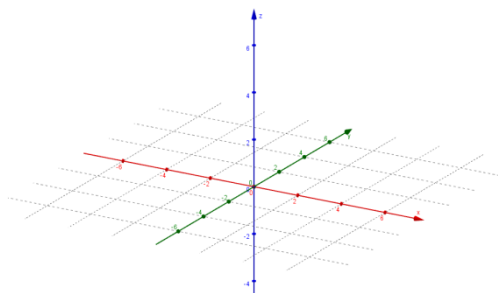
Voer in Geogebra de volgende formule in: $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Dit is de vergelijking van een cirkel met straal 1.

Aan de vergelijking zie je al dat deze wat anders is dan een rechte lijn of een parabool. Zowel de x als de y komt nu kwadratisch voor.

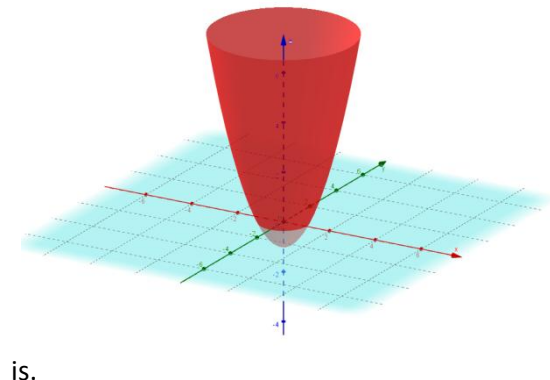
De bijbehorende polynoom is: $p = \alpha^2 + \beta^2 - 1$. Dit is geen polynoom meer met 1 variabele maar met 2. Dit is anders dan we tot nog toe gehad hebben!

Zo'n polynoom kunnen we ook tekenen op eenzelfde manier als we in 3.1 een polynoom met 1 variabele hebben getekend. Maar nu hebben we echter niet α en $p(\alpha)$, maar hebben we α , β en $p(\alpha, \beta)$. We tekenen de α langs de x-as en de β langs de y-as en $p(\alpha, \beta)$ langs de z-as uit te zetten. Dit is niet een lijn in een x-y vlak, maar een oppervlak in de 3-dimensionale x, y, z-ruimte. Zie

Figuur 13 waarin dit assenstelsel getekend



Figuur 14 3 dimensionale ruimte met x, y en z as.



is.

Figuur 13 $p=x^2+y^2-1$

In Figuur 14 is p getekend. De vergelijking van dit oppervlak is $x^2 + y^2 - 1 = z$. De figuur is dus niet een cirkel maar een hele verzameling van cirkels. De figuur ziet er uit als een parabool die om de z-as is gedraaid.

Kijk je naar $z = 0$ (dan krijg je het x-y-vlak) dan zie je de cirkel die je ook al in Geogebra hebt gezien, want daar heb je ingevoerd $x^2 + y^2 - 1 = 0$ en niet $x^2 + y^2 - 1 = z$.

We gaan echter op een vergelijkbare wijze te werk als bij een polynoom met 1 variabele, namelijk:

stap 1: translatie

stap 2: gelijke machten bij elkaar zetten,

stap 3: terugtransleren

stap 4: evalueren voor een punt c, d (we starten nu met een x - en een y -waarde) en schrijf de subpolynomen op. De raaklijn (eigenlijk raakvlak) is de subpolynoom met alleen 0^e en 1^e orde termen.

Dus nu in het geval van polynoom $p = \alpha^2 + \beta^2 - 1$ zoeken we de Taylorontwikkeling voor p voor het punt c, d .

Stap 1: Bepaal de Taylorpolynoom van p , maar nu voor α en β . Transleer beide variabelen. Vervangen α door $\alpha + \gamma$ en β door $\beta + \delta$.

Stap 2: Zet gelijke machten van α en β bij elkaar.

Stap 3: Terugtransleren: vervang de α door $\alpha - \gamma$ en β door $\beta - \delta$ (de Taylorontwikkeling) en

Stap 4: Vervang γ door c en δ door d . Voor de raaklijn: bepaal de 1^e orde subpolynoom van p door weglating van de 2^e orde termen.

Wie dit in een keer snapt hoeft niet verder te kijken ☺.

We gaan het voorbeeld nu helemaal uitwerken. Je volgt het voorbeeld stap voor stap in je schrift en maakt alle bijbehorende uitwerkingen.

Stap 1:

We hebben nu 2 variabelen en moeten de translatie voor beide uitvoeren

$$p_T = (\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2 - 1$$

Stap 2:

Zet de gelijke machten van α en β bij elkaar.

$$p_T = \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \beta^2 + 2\beta\delta + \delta^2 - 1$$

$$p_T = (\gamma^2 + \delta^2 - 1) + 2\gamma\alpha + 2\delta\beta + \alpha^2 + \beta^2$$

[De coëfficiënten van p_T voor de machten van α en β zijn weer de subafgeleiden. De naamgeving van deze coëfficiënten wordt echter complexer, omdat er nu ook combinaties van α of β zijn.]

Stap 3: Terugtranslatie

Transleer de polynoom terug. Vervang α door $\alpha - \gamma$ en β door $\beta - \delta$

$$p = (\gamma^2 + \delta^2 - 1) + 2\gamma(\alpha - \gamma) + 2\delta(\beta - \delta) + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2$$

Stap 4: Evalueer voor $\gamma = c$ en $\delta = d$ en bepaal de subpolynomen door weglating van hogere orde termen.

$$p = (c^2 + d^2 - 1) + 2c(\alpha - c) + 2d(\beta - d) + (\alpha - c)^2 + (\beta - d)^2$$

Dit is de Taylorontwikkeling van p rond het punt (c, d) .

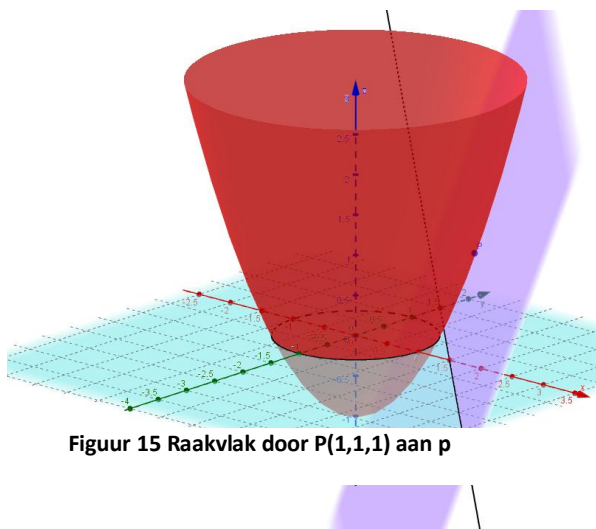
De 1^e orde subpolynoom bestaat uit de 0^e- en 1^e-orde termen van de Taylorontwikkeling.

$$\text{Dus } p_1 = (c^2 + d^2 - 1) + 2c(\alpha - c) + 2d(\beta - d)$$

Dit is een lineaire polynoom in α en β . Hiervan kun je een tekening maken als je α langs de x-as en de β langs de y-as uitzetten en $p_1(\alpha, \beta)$ langs de z-as. Dit is dus ook een 3-dimensionale tekening, maar nu van een plat vlak dat raakt aan het oppervlak van p .

De vergelijking van dit raakvlak is $p_1: z = (c^2 + d^2 - 1) + 2c(x - c) + 2d(y - d)$.

Dit is het 1^e orde raakvlak aan de 3-dimensionale figuur in het punt $(c, d, p(c, d))$.



Figuur 15 Raakvlak door $P(1,1,1)$ aan p

In Figuur 15 is dit vlak weergegeven voor het punt $P = (1,1,1)$ op het oppervlak van p .

Uitwerken van p_1 levert:

$$p_1: z = (c^2 + d^2 - 1) + 2c(x - c) + 2d(y - d)$$

$$p_1: z = (c^2 + d^2 - 1) + 2cx - 2c^2 + 2dy - 2d^2$$

$$p_1: z = -c^2 - d^2 - 1 + 2cx + 2dy$$

Dit is de vergelijking van het raakvlak door het punt $P(c, d, p(c, d))$ aan p .

Als het punt (c, d) op de cirkel ligt, dan is $c^2 + d^2 = 1$ (de vergelijking van de cirkel is immers $x^2 + y^2 = 1$) en wordt de vergelijking van het raakvlak $p_1: z = -2 + 2cx + 2dy$

Kijken we alleen naar wat er aan de hand is bij $z = 0$, dan wordt de vergelijking:

$$p_1: 0 = -2 + 2cx + 2dy, \text{ links en rechts delen door 2 levert:}$$

$$p_1: cx + dy = 1.$$

Dit is de vergelijking van een rechte lijn door een punt op de cirkel in het vlak waarvoor $z = 0$, dus het x-y-vlak. Dit is de raaklijn in dat punt aan de cirkel omdat de lijn in het raakvlak ligt en het punt $(c, d, 0)$ op de cirkel ligt. Controleer of het punt $(c, d, 0)$ inderdaad op deze lijn ligt.

Voorbeeld

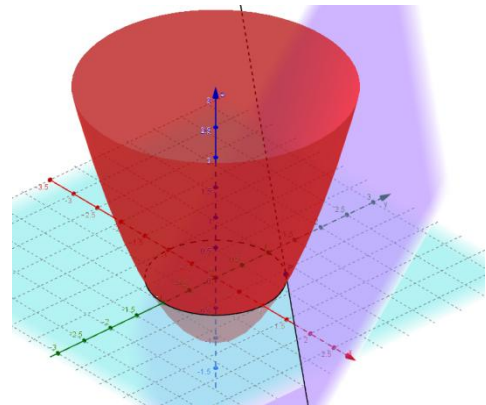
Het punt $P = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ligt op de cirkel omdat $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ (Pythagoras).

De vergelijking van de raaklijn p_1 in P wordt hiermee:

$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 1$, vermenigvuldigen met 5, om de breuken weg te werken:

$3x + 4y = 5$, dit is de vergelijking van de raaklijn aan de cirkel in het punt $P = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

In Figuur 16 is het raakvlak getekend door punt $P = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. De snijlijn met dit raakvlak en het vlak $z = 0$ is de raaklijn aan de cirkel.



Figuur 16 Raakvlak door P op cirkel

Opdracht 1

Voer in Geogebra in de formule $x^2 + y^2 = 1$. In het tekengebied is nu een cirkel met straal 1 en middelpunt $(0,0)$ getekend.

Plaats punt P willekeurig ergens op deze cirkel.

De vergelijking van de raaklijn in een punt van de cirkel is $cx + dy = 1$ (dit hebben we hierboven afgeleid). Kies $c = x(P)$ de x-coördinaat van P en kies $d = y(P)$, de y-coördinaat van P. Voer de vergelijking $x(A) \cdot x + y(A) \cdot y = 1$ in. Wat zie je nu? Wat gebeurt er als je P over de cirkel verplaats met je cursor?

Opdracht 2

Doe hetzelfde als in het voorbeeld, maar in plaats van een cirkel gebruik je nu een bepaalde ellips. Je gebruikt hiervoor de polynoom $p = \alpha^2 + 4\beta^2 - 1$. Vanuit de

Taylorontwikkeling van deze polynoom kun je direct de vergelijking $p_1: 0 = p_1(x, y)$ opschrijven. Je hoeft niet eerst naar die 3-dimensionale figuur.

9 Extra module: Raaklijnen aan het Lemniscaat van Huygens

Van polynomen kun je grafieken maken. Vaak zijn dat grafieken van standaard functies zoals lineaire functies (rechte lijnen) en parabolen (kwadratische functies).

Maar er zijn nog veel meer functies die je doorgaans niet op de middelbare school tegen komt en vaak ook niet eens op de universiteit.

In deze module zie je hoe je de 3 raaklijnen aan een in de 17^e en 18^e eeuw veel bestudeerde lemniscaat curve bepaald. Aan deze curve danken we het wiskundige symbool ∞ voor oneindig.

Het Lemniscaat van Huygens komt overeen met de polynoom $p(\alpha, \beta) = \alpha^4 - \alpha^2 + \beta^2$. Ook deze polynoom kunnen we grafisch weergeven. We zetten α uit langs de x-as, β langs de y-as en $p(\alpha, \beta)$ langs de z-as. Een grafiek van een polynoom met 2 variabelen is dus een 'grafiek' in 3 dimensies. In feite is het een oppervlak in 3 dimensies. Dat is lastig te tekenen. Het kan wel (zie de extra module voor de cirkel), maar tekenen we dit oppervlak alleen voor $z = 0$ dan krijgen dan weer kromme in het x-y-vlak.

Als je dit niet direct begrijpt kun je toch verder ☺.

Teken in Geogebra de lijn met de vergelijking $0 = x^4 - x^2 + y^2$ door in te voeren: $x^4 - x^2 + y^2 = 0$. Geef de curve een blauwe kleur. Klopt de curve met wat je op internet vindt over deze curve?

Zet nu een punt P ergens op deze curve. Geef dit punt ook een blauwe kleur.

De Geogebra-coördinaten van dit punt zijn $(x(P), y(P))$. Wij gebruiken daarvoor hieronder de notatie (x_P, y_P) . We gaan direct over naar x- en y-coördinaten.

Stap 1 Translatie

Transleer de curve zodanig dat P_t samenvalt met de oorsprong:

$p_t: 0 = (x + x_P)^4 - (x + x_P)^2 + (y + y_P)^2$. Teken deze curve.

Stap 2 Gelijke termen bij elkaar zetten

p_t uitvermenigvuldigen met behulp van de driehoek van Pascal:

$$p_t: 0 = (x^4 + 4x_Px^3 + 6x_P^2x^2 + 4x_P^3x + x_P^4) - (x^2 + x_Px + x_P^2) + (y^2 + 2y_Py + y_P^2)$$

En gelijke machten van x en y bij elkaar zetten:

$$p_t: 0 = (x_P^4 - x_P^2 + y_P^2) + (4x_P^3 + x_P)x + 2y_Py + (6x_P^2 - 1)x^2 + y^2 + 4x_Px^3 + x^4$$

Stap 3 Terugtransleren

Terugtransleren:

$$p: 0 = (x_P^4 - x_P^2 + y_P^2) + (4x_P^3 + x_P)(x - x_P) + 2y_P(y - y_P) + (y - y_P)^2 + 4x_P(x - x_P)^3 + (x - x_P)^4$$

Stap 4 Raaklijnen opschrijven door weglating van hogere orde termen

De vergelijking van de raaklijn is:

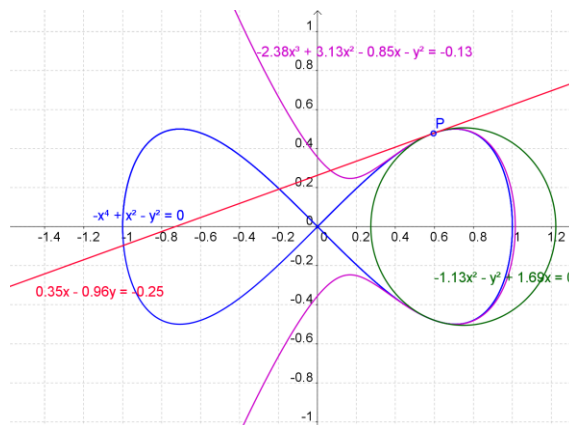
$$p_1: 0 = (x_P^4 - x_P^2 + y_P^2) + (4x_P^3 - 2x_P)(x - x_P) + 2y_P(y - y_P)$$

De vergelijking van de 2^e orde raaklijn is:

$$p_2: 0 = (x_P^4 - x_P^2 + y_P^2) + (4x_P^3 - 2x_P)(x - x_P) + 2y_P(y - y_P) + (6x_P^2 - 1)(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2$$

$$p_3: 0 = (x_P^4 - x_P^2 + y_P^2) + (4x_P^3 - 2x_P)(x - x_P) + 2y_P(y - y_P) + (6x_P^2 - 1)(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + 4x_P(x - x_P)^3$$

Teken deze raaklijnen in Geogebra en kleur ze rood, donkergroen en paars.



Je hebt nu getekend: de blauwe lemniscaat curve, het blauwe punt P op deze curve, de rode 1^e orde raaklijn, de donkergroene 2^e orde raaklijn, de paarse 3^e orde raaklijn en een zwarte getransleerde curve. Zet de zwarte lijn uit.

Onderzoek met Geogebra wat je nu gevonden hebt.

Mogelijke onderzoeksvragen:

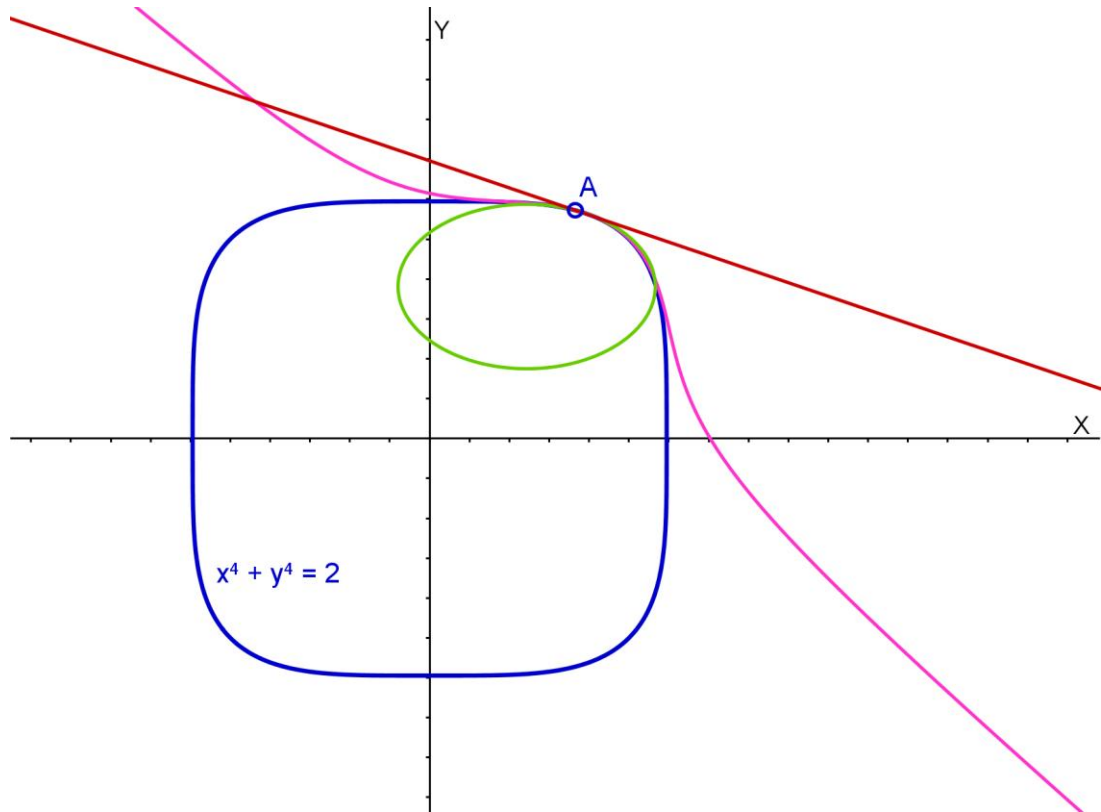
- Wat gebeurt er precies als je punt P over de Lemniscaat verschuift?
- Wat gebeurt er als P in de oorsprong komt? Kun je dat verklaren?
- Wat doet de 2^e orde raaklijn?
- De 2^e orde raaklijn is niet altijd automatisch een parabool. Welke andere vormen herken je?
- Klopt het dat de 3^e orde raaklijn nog dichter langs de oorspronkelijke polynoom gaat bij P?



Lemniscat van Huygens met raaklijnen.ggb

Extra opdracht:

Hetzelfde kun je doen met een 'vierkante' cirkel waarvan de vergelijking $x^4 + y^4 = 1$. De uitkomst is:



Je ziet in deze figuur de oorspronkelijke vierkante cirkel in blauw, de raaklijn door A in rood, de kwadratische raaklijn is A in groen (hier een ellips) en de 3^e orde raaklijn is paars.

10 Extra module: Productregel

We hebben als kennis gemaakt met de machtenregel en de somregel. Met de productregel kan de afgeleide van het product van 2 polynomen worden bepaald zonder eerst het product uit te vermenigvuldigen.

Met de productregel kunnen we de afgeleide bepalen van het product van 2 polynomen.

Productregel:

De afgeleide van het product r van de polynomen p en q is gelijk aan p keer de afgeleide van q plus de afgeleide van p keer q : $D_{r,1} = D_{p,0}D_{q,1} + D_{p,1}D_{q,0}$.

Voorbeeld

Gegeven:

$$p = 1 - 3\alpha + 2\alpha^3 \text{ en } q = -5 - 3\alpha + 4\alpha^4$$

Gevraagd:

Bepaal de afgeleide van $r = p \cdot q$

Oplossing:

We zouden $p \cdot q$ kunnen uitvermenigvuldigen en daarna de afgeleide bepalen met de machtenregel. We kunnen hier ook de productregel toepassen.

Dan is:

$$D_{p,0} = 1 - 3\alpha + 2\alpha^3 \text{ en } D_{p,1} = -3 + 6\alpha^2$$

$$D_{q,0} = -5 - 3\alpha + 4\alpha^4 \text{ en } D_{q,1} = -3 + 16\alpha^3$$

Volgens de productregel is:

$$D_{r,1} = D_{p,0}D_{q,1} + D_{p,1}D_{q,0} =$$

$$D_{r,1} = (1 - 3\alpha + 2\alpha^3)(-3 + 16\alpha^3) + (-3 + 6\alpha^2)(-5 - 3\alpha + 4\alpha^4)$$

Na uitvermenigvuldigen en gelijke machten van α bij elkaar zetten volgt:

$$D_{r,1} = 12 + 6\alpha - 30\alpha^2 - 14\alpha^3 + 36\alpha^4 + 56\alpha^6$$

Verdieping:

Bewijs productregel

Gegeven $p = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \dots + a_n\alpha^n$ en $q = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3\alpha^3 + \dots + b_m\alpha^m$
 $r = p \cdot q$

De Taylorpolynoom van r is:

$$r_T = p(\alpha + \beta) \cdot q(\alpha + \beta) = p_T \cdot q_T$$

Uitschrijven levert:

$$r_T = p_T \cdot q_T = (D_{p,0} + D_{p,1}\beta + D_{p,2}\beta^2 + \dots)(D_{q,0} + D_{q,1}\beta + D_{q,2}\beta^2 + \dots)$$

Nu moeten weer uitvermenigvuldigen en de gelijke termen bij elkaar zetten. Dit lijkt erger dan het is. Welke termen van r_T dragen bij aan de k^e subafgeleide $D_k(r)$? Dat zijn alle producten met factor β^k .

$$\text{Dat zijn de producten: } D_{r,k} = D_{p,0}D_{q,k} + D_{p,1}D_{q,k-1} + \dots + D_{p,k}D_{q,0}$$

Daarmee is de productregel bewezen voor iedere subafgeleide. In het bijzonder dus voor $k = 1$, de productregel voor de 1^e -subafgeleide of de afgeleide, welke luidt

$$D_{r,1}(r) = D_{p,0}D_{q,1} + D_{p,1}D_{q,0}.$$

Hiermee is het bewijs van de productregel geleverd ■

11 Extra module: Kettingregel

Tenslotte volgt de laatste differentieerregel, de kettingregel.

Kettingregel:

Gegeven polynoom $p(q(\alpha))$. Dit is een polynoom niet in machten van α maar in machten van een andere polynoom in α . Dan geldt $D_{p,1}(\alpha) = D_{p,1}(q) \cdot D_{q,1}(\alpha)$

Voorbeeld

Gegeven: $p = (1 - 3\alpha^2)^3$

Gevraagd: Bereken $D_{p,1}$, de afgeleide van p .

Oplossing:

Stap 1: Stel $q = (1 - 3\alpha^2)$ waardoor $p = q^3$

Stap 2: Machtenregel $\rightarrow D_{p,1}(q) = 3q^2$

Stap 3: Machtenregel $\rightarrow D_{q,1}(\alpha) = -6\alpha$

Stap 3: Kettingregel $\rightarrow D_{p,1}(\alpha) = D_{p,1}(q) \cdot D_{q,1}(\alpha) = (3q^2) \cdot (-6\alpha)$

Stap 4: Substitutie $q = 1 - 3\alpha^2 \rightarrow D_{p,1} = (3 \cdot (1 - 3\alpha^2)) \cdot (-6\alpha) = 54\alpha^3 - 18\alpha$

Verdieping

Bewijs kettingregel

We beginnen weer met de algemene polynomen $p(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + \dots + a_nq^n$ en $q(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3\alpha^3 + \dots + b_m\alpha^m$.

We moeten bewijzen dat $D_{p,1}(\alpha) = D_{p,1}(q(\alpha)) \cdot D_{q,1}(\alpha)$. Hierin is $D_{p,1}(q)$ de afgeleide van p naar q en is $D_{q,1}(\alpha)$ de afgeleide van q naar α .

We schrijven eerst de Taylorontwikkelingen voor $p(q)$ rond een willekeurig getal c en $q(\alpha)$ rond een willekeurig getal d .

$$p = D_{p,0}(c) + D_{p,1}(q - c) + D_{p,2}(q - c)^2 + \dots + D_{p,n}(q - c)^n$$

$$q = D_{q,0}(d) + D_{q,1}(\alpha - d) + D_{q,2}(\alpha - d)^2 + \dots + D_{q,m}(\alpha - d)^m$$

We hebben nu de vergelijkingen waarin de gezochte afgeleiden voorkomen. We moeten nu de q kwijtraken, want dat was een tijdelijke polynoom. We zoeken de afgeleide van p in α .

Dat kunnen we doen door de c zo te kiezen dat $c = q(d)$ en te beseffen dat $D_{q,0}(d) = q(d)$.

Nu kunnen we schrijven:

$$q = c + D_{q,1}(\alpha - d) + D_{q,2}(\alpha - d)^2 + \dots + D_{q,n}(\alpha - d)^m, \text{ dus}$$

$$q - c = D_{q,1}(\alpha - d) + D_{q,2}(\alpha - d)^2 + \dots + D_{q,n}(\alpha - d)^m$$

Deze uitdrukking substitueren we in (), waardoor we krijgen:

$$p = D_{p,0}(c) +$$

$$+ D_{p,1}(D_{q,1}(\alpha - d) + D_{q,2}(\alpha - d)^2 + \dots + D_{q,n}(\alpha - d)^m) +$$

$$+D_{p,2}(D_{q,1}(\alpha - d) + D_{q,2}(\alpha - d)^2 + \dots + D_{q,n}(\alpha - d)^m)^2 + \dots + \\ +D_{p,n}(D_{q,1}(\alpha - d) + D_{q,2}(\alpha - d)^2 + \dots + D_{q,n}(\alpha - d)^m)^n$$

Gelijke machten van $\alpha - d$ bij elkaar zetten:

$$p = D_{p,0}(c) + D_{p,1}D_{q,1}(\alpha - d) + (D_{p,1}D_{q,2} + D_{p,2}(D_{q,1})^2)(\alpha - d)^2 + \dots \quad (A)$$

Dit wordt al gauw erg ingewikkeld. Maar als we ons beperken tot de 1^e subafgeleide valt het nog mee. De coëfficiënt $D_{p,1}D_{q,1}$ voor de 1^e macht van $(\alpha - d)$ is de gezochte afgeleide $D_{p,1}$. Hiermee is de kettingregel voor de afgeleide bewezen ■

Als we (A) verder uitschrijven zouden we ook de ‘kettingregels’ voor hogere subafgeleiden kunnen vinden.

12 Extra module: Als de afgeleide van p gelijk aan p

Voor een algemene polynoom

$p = a_0 + a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2 + \dots a_n\alpha^n$ geldt voor zijn afgeleide:

$D_1 = a_1 + 2a_2\alpha + 3a_3\alpha^2 + \dots + na_n\alpha^{n-1}$, waar D_1 dus ook een polynoom is.

Zou het mogelijk zijn dat de afgeleide van een polynoom gelijk is aan zichzelf?

Dan moet gelden dat $p = D_1$ ofwel $\overline{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n} = \overline{a_1 \quad 2a_2 \quad 3a_3 \quad \dots \quad na_n}$

Deze vergelijking³ is op te lossen, maar niet met gehele getallen. Hiervoor heb je breuken of rationale getallen voor nodig.

De termen vergelijk je 2-aan-2.

$$a_1 = a_0$$

$$2a_2 = a_1 = a_0, \text{ dus } a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2!}$$

$$3a_3 = a_2 = \frac{a_0}{2!}, \text{ dus } a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{3!}$$

$$4a_4 = a_3 = \frac{a_0}{3!}, \text{ dus } a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!}$$

$\vdots$

$$na_n = a_{n-1} = \frac{a_0}{(n-1)!}, \text{ dus } a_n = \frac{a_0}{n!}$$

De laatste term $a_n\alpha^n$ van p is niet te matchen omdat de afgeleide 1 orde lager is dan de oorspronkelijk polynoom. Dus de afgeleide van een polynoom kan nooit helemaal gelijk zijn aan de polynoom zelf. Hoe hoger de orde van de polynoom, hoe kleiner de afwijking zal zijn.

Dit resultaat kun je schrijven als $p = \overline{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n} = a_0 \cdot \overline{\frac{1}{0!} \quad \frac{1}{1!} \quad \frac{1}{2!} \quad \dots \quad \frac{1}{n!}}$

Voor deze polynoom geldt dat zijn afgeleide gelijk is aan zichzelf (op de laatste term na).

Voor $a_0 = 1$ krijgen je $p = \left[\frac{1}{0!} \quad \frac{1}{1!} \quad \frac{1}{2!} \quad \frac{1}{3!} \quad \frac{1}{4!} \quad \dots \quad \frac{1}{n!} \right]$

Uitschrijven in de standaard vorm levert: $p = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \frac{\alpha^n}{n!}$. Deze polynoom is bekend als de definitie van de exponentiële functie e^α of e^x , voor n oneindig. De benadering van deze functie zit op je GR.

³ Zo'n vergelijking heet in de wiskunde een differentiaalvergelijking. Deze specifieke vergelijking komt dan tegen als $f(x) = f'(x)$ of $f(x) = \frac{df}{dx}$. Deze vergelijking komt bijvoorbeeld in de natuurkunde te voorschijn bij het afkoelen van een kopje water. De snelheid van afkoelen (afgeleide van de temperatuur) hangt af van de temperatuur. Het oplossen van differentiaalvergelijkingen is een belangrijke tak van de wiskunde, de differentiaalrekening.

Evalueer je p voor $\alpha = 0$ dan krijg je het getal e of het Euler getal:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!} \approx 2.7182818284$$

13 Extra module: Rekenregel voor de 2^e subafgeleide van het product van 2 polynomen

In module 10 heb je bepaald dat voor de afgeleide van het product $r = p \cdot q$ geldt:

$$D_{r1} = D_{p0} \cdot D_{q1} + D_{p1} \cdot D_{q0}$$

We hadden gevonden:

$$r_T = p_T \cdot q_T = (D_{p0} + D_{p1}\beta + D_{p2}\beta^2 + \dots)(D_{q0} + D_{q1}\beta + D_{q2}\beta^2 + \dots) \quad (26)$$

Een formule voor de 2^e subafgeleide kun je op dezelfde manier afleiden als dat je dat voor de voor 1^e subafgeleide hebt gedaan.

In plaats van termen met α^1 zoek je nu de termen met α^2 bij elkaar uit (26).

Die termen zijn 1x constante term van p , D_{p0} , vermenigvuldigd met de kwadratische term van q ($D_{p0}D_{q2}$), 2x de lineaire term van p vermenigvuldigd met de lineaire term van q ($2D_{p1}D_{q1}$) en 1x de kwadratische term van p vermenigvuldigd met de constante term van q ($D_{p2}D_{q0}$).

Opgeteld levert dit $D_{r2} = D_{p0}D_{q2} + 2D_{p1}D_{q1} + D_{p2}D_{q0}$.

Dit is dus de productregel voor de 2^e subafgeleide.

Zetten we de productregels bij elkaar:

$$D_{r0} = D_{p0}D_{q0}$$

$$D_{r1} = D_{p0}D_{q1} + D_{p1}D_{q0}$$

$$D_{r2} = D_{p0}D_{q2} + 2D_{p1}D_{q1} + D_{p2}D_{q0}$$

Zie je nu al het patroon ontstaan dat je eerder hebt gezien in deze lessen? Dat zag de beroemde 17/18^e eeuwse Duitse wiskundige en filosoof Leibnitz ook. Dit patroon heet nu de General Leibnitz rule. Niet nodig om te onthouden, maar prettig te weten dezelfde patronen zo vaak terugkomen en jij ze kan afleiden.

Rijnlands Sassenheim, Lessenserie Raaklijnen en afgeleiden zonder limiet

Vragen aan leerlingen

Lessen:

Datum:

Naam:

Vragen over de stof	
Wat vond je het leukste onderdeel van deze 2 lessen? Kun je dit toelichten?	
Wat vond je niet leuk aan deze 2 lessen? Kun je dit toelichten?	
Heb je de opgaven tijdens de les kunnen maken zonder hulp van je docent?	
Heb je de opgaven van het huiswerk goed kunnen maken?	
Hoeveel tijd heb je aan je huiswerk besteed?	
Heb je voldoende oefenstof gekregen?	
Vragen over de les	
Heeft de docent de stof duidelijk uitgelegd? Wat zou je graag anders zien?	
Was de stof te veel, voldoende of te weinig?	
Geef in je eigen woorden aan wat je in deze 2 lessen geleerd hebt.	

Rijnlands Sassenheim, Eindevaluatie: Lessenserie Raaklijnen en afgeleiden zonder limiet

Vragen aan leerlingen

Lessen:

Datum:

Naam:

Vragen over de stof	
Wat vond je het leukste onderdeel? Kun je dit toelichten?	
Wat vond je niet zo leuk aan deze? Kun je dit toelichten?	
Hoe is het zelfstandig werken met Geogebra je bevallen?	
Heb je de opgaven tijdens de les en het huiswerk kunnen maken zonder hulp van je docent?	
Hoeveel tijd heb je aan je huiswerk besteed?	
Was de leerstof ingewikkeld, goed te doen of te eenvoudig?	
Heb je voldoende oefenstof gekregen?	
Vragen over de docent	
Heeft de docent de stof duidelijk uitgelegd? Wat zou je graag anders zien?	
Heb je voldoende ruimte gekregen voor je eigen ideeën?	
Suggesties voor verbeteringen	

Rijnlands Sassenheim

Eindevaluatie: Lessenserie Raaklijnen en afgeleiden zonder limiet

Docent: Jan Bosman

Datum: 6 juni 2012

Didactische uitgangspunten	
Wordt in deze lessenserie (voldoende) expliciet gebruik gemaakt van de aanwezige relevante kennis?	
Zijn de ingevoerde wiskundige begrippen geschikt voor (lokaal) direct onderzoek?	
Geschiktheid voor voortgezet onderwijs	
Op welke wijze kan methode bijdragen aan de didactiek afgeleiden en raaklijnen?	
Sluiten de gevraagde vaardigheden aan bij wat 2 ^e fase leerlingen (kunnen) weten? En voor welke leerlingen wel en welke niet.	
Inhoudelijk	
Is de gebruikte wiskunde methode logisch en navolgbaar?	
In deze methode wordt de afgeleide op een totaal andere geïntroduceerd dan gebruikelijk. Welke voordelen en welke nadelen ziet u?	
Wat vond u van het gebruikte format (zelfstandig werken, Geogebra, poster presentatie)?	

--	--

