

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

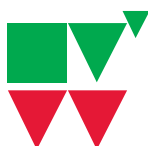
Pythagoras in meer dimensies

Vroege Chinese wiskunde: het
bamboeprobleem

Open en gepersonaliseerd
statistiekonderwijs

Afstemming examenwerkwoorden
wiskunde en natuurkunde

NR. 7



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 92 - JUNI 2017

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 92 NR. 7

IN DIT NUMMER

PEER INSTRUCTION: LEREN VAN JE KLASGENOTEN

HAYDEÉ CEBALLOS
JEROEN SPANDAW

4

BOEKBESPREKING

LAURENS QUINTEN

6

KLEINTJE DIDACTIEK

LONNEKE BOELS

7

PYTHAGORAS IN MEER DIMENSIES

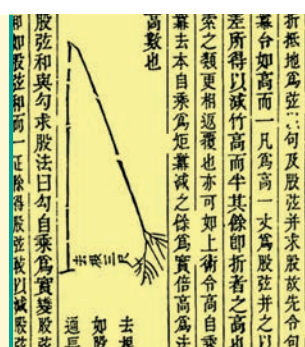
MARTIN KINDT

8

WORTELS VAN DE WISKUNDE

DESIREE VAN DEN BOGAART

11



HET FIZIER GERICHT OP...

WOUTER VAN JOOLINGEN
SIETSKÉ TACOMA

14

EXAMENWERKWOORDEN VAN WISKUNDE EN NATUURKUNDE AFGESTEMD

JACQUELINE WOONING

17

WIS EN WAARACHTIG

22

UITDAGENDE PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

24

ETNOMATEMÁTICAS IN COLOMBIA

FUNDACIÓN GRUPO PROA
JULIËTTE FEITSMA

29

NETWERKEN TIJDENS DE VAKANTIECURSUS WISKUNDE

SIETSKÉ TACOMA

31

HOE VAAK IS ONEINDIG?

VERSLAG VAN DE 23E NWD
ROB VAN OORD

34



Antilope canyon,
Arizona, Verenigde Staten

foto: Joris Mellema

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

RAAKLIJNEN ZONDER LIMiet
COR FORTGENS

38

VERENIGINGSNIEUWS

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2017



40

BOEKBESPREKING
HARM BAKKER

42

WISKUNDE DIGITAAL
LONNEKE BOELS

44

PUZZEL

46

VAKANTIECURSUS

48

VASTGEROEST
AB VAN DER ROEST

49

SERVICEPAGINA

50

Kort vooraf

Hoe zou het toch met Max zijn? Op 22 mei jl werd landelijk bekend dat Max was getroffen door acute hemolytische anemie en dat er een kans van 6,7% was op een levensbedreigende afweerreactie bij een eventuele tweede bloedtransfusie. Dat laatste heb ik gespiekt in het CV van het vwo examen biologie waarin de arme Max een hoofdrol speelt in de laatste opgaven. Het is interessant om eens te kijken hoe wiskunde opduikt in de examens van andere vakken. En om je dan vervolgens heel eerlijk de vraag te stellen of je eigenlijk wel wist dat je collega's jouw vak zo mooi toepassen. Zou er misschien niet iets meer dialoog moeten komen, of gezamenlijke afspraken of zelfs vakoverstijgende projecten? Onlangs deed ik met mijn collega biologie Stefan Bosmans een experiment bij vakdidactiek in de master lerarenopleiding wiskunde. Eerst een kort college over enzymkinetiek, vervolgens gingen de studenten zelf aan de slag om de Michaelis Menten vergelijking af te leiden. En om zélf te ervaren hoe het is om redelijk elementaire wiskundevaardigheden in een écht andere context (dus geen wiskundeboek waar onze eigen conventies gebruikt worden) te zien. Dat valt verrassend tegen en je zou daar dus best méér aandacht aan moeten besteden. Qua taal worden de examens in ieder geval wel op elkaar afgestemd. Zie het artikel over de examenwerkwoorden van het CvTE in deze *Euclides*, dat ook in de *NVOX* gaat verschijnen. Tot slot: geniet van een welverdiende zomervakantie!

Tom Goris

PEER INSTRUCTION: LEREN VAN JE KLASGENOTEN

Haydeé Ceballos
Jeroen Spandaw

Haydeé Ceballos en Jeroen Spandaw laten de leerlingen elkaar in groepjes nieuwe stof uitleggen. Dat gaat verder dan 'gewoon' groepswork; het is *peer instruction*. In dit artikel beschrijven zij de resultaten van een aantal experimenten in de klas.

Inleiding

Combinaties en permutaties in havo 4 of havo 5. Altijd lastig. Op het smartboard staat de vraag: 'Uit een klas worden zes leerlingen gekozen om een volleybalteam te vormen. Combinatie of permutatie?' Leerlingen krijgen even de tijd om hierover na te denken. Overleg is verboden. De docent telt af en op *drie* steken de leerlingen een rood of groen kaartje in de lucht. Rood betekent 'combinatie', groen betekent 'permutatie'. Het resultaat is ongeveer fifty-fifty. Niet verwonderlijk, want in havo 4 hadden de leerlingen voor het eerst met deze begrippen kennisgemaakt en in havo 5 hadden de leerlingen een jaar lang de tijd gehad om deze stof weer te vergeten. Vervolgens gaan leerlingen in groepjes van vier een paar minuten met elkaar in discussie. Na deze discussie telt de docent weer af en op *drie* gaan de kaartjes weer in de lucht. Resultaat: veel meer rode kaartjes.

Voordelen

Deze werkvorm, *peer instruction* genoemd, is in de jaren '90 ontwikkeld door Eric Mazur, hoogleraar natuurkunde aan Harvard. In zijn boek^[1] en in zijn filmpjes op YouTube laat hij zien hoeveel effectiever deze werkvorm kan zijn dan een traditioneel college. Nu geeft Mazur natuurkunde aan Harvard, terwijl wij het hebben over wiskunde voor bijvoorbeeld havisten in Almere. Toch denken we dat Mazurs ideeën ook voor ons onderwijs nuttig kunnen zijn, omdat zijn argumenten voor *peer instruction* en die van Rijkje Dekker^[2] voor leren in kleine heterogene groepen hier ook van toepassing lijken. Ten eerste vergroot deze werkvorm de betrokkenheid van de leerlingen. Ten tweede zijn er opeens heel veel uitleggers in de klas in plaats van één docent. Ten derde overtuigen leerlingen elkaar hopelijk op basis van argumenten, terwijl uitleg van leraren vaak geaccepteerd wordt op basis van autoriteit. Ten vierde kan het voorkomen dat leerlingen de begripsproblemen van medeleerlingen beter begrijpen dan de docent, omdat ze de stof zelf ook pas net geleerd hebben. Ten vijfde leren ook goede leerlingen van het uitleggen en het verwoorden en verantwoorden van hun argumentatie, terwijl alle leerlingen kunnen profiteren van inhoudelijke discussies op hun niveau. In dit artikel beschrijven we enkele ervaringen met *peer instruction* door brugklassers, gymnasiasten, havisten en studenten in de lerarenopleiding.

Ervaringen

We beginnen met de successen van onze *peer instruction* in twee vwo-1-klassen, een gymnasium-3-klas, een havo-4-klas en twee havo-5-klassen wiskunde A in Almere en Den Haag en een groep van ruim 70 leraren in opleiding aan de TU Delft. In de brugklassen was het thema meetkunde, in de gymnasiumklas ging het over algebraïsche eigenschappen van wortels, in havo 4 en 5 over permutaties en combinaties en aan de TU werd gediscussieerd over 0,999..., de houtkachel van Anne van Streun, 17 miljoen Nederlanders op Texel, de derde wet van Newton en significantie. In al deze groepen was aanvankelijk grote onenigheid over het correcte antwoord op de meerkeuzevragen en in alle groepen werd enthousiast gediscussieerd en inhoudelijk geargumenteed. Alle studenten en leerlingen waren daarbij betrokken. Na de *peer discussion* had een grote meerderheid van de Delftse studenten en van de leerlingen in havo 4 en 5 het correcte antwoord op de vraag.

In de gymnasium-3-klas was niet zozeer sprake van één les met *peer instruction*, maar van een hele lessenserie waarin leerlingen in kleine heterogene groepjes werkten aan het ontdekken van de rekenregels voor wortels. Het ging hierbij om vragen als waarom een bewering als $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ of $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ wel of niet geldt, hoe je dat kunt (her)ontdekken, of één (tegen)voorbeeld voldoende is en of je dergelijke beweringen wel of niet kunt bewijzen of weerleggen door een numerieke berekening op je rekenmachine. De resultaten van deze lessenserie waren zeer hoopgevend. Vooral zwakkere leerlingen hadden veel betere resultaten dan bij meer traditionele lessenseries. Maar het was niet altijd feest. In vorige edities van het college over *peer instruction* aan de TU Delft werd door sommige groepen studenten geen vooruitgang geboekt in hun begrip van het concept 'significantie', omdat in die groepen niemand over de noodzakelijk kennis beschikte. In één havo-5-klas van 24 leerlingen waren twee jongens aanvankelijk niet gediend van *peer instruction* om de weggezakte voorkennis op te frissen. Ze eisten dat de leraar de voorkennis opnieuw zou uitleggen, want zelf konden ze toch onmogelijk dat probleem over het volleybalteam oplossen. Na vier van dergelijke vragen, waarbij de feedback van de docente beperkt bleef tot het noemen van het correcte antwoord (uiteraard pas na

de *peer discussion*), zeiden ze: 'Mevrouw, u heeft nog twintig minuten om het uit te leggen.' Intussen kwam de rest van de klas met steeds betere formuleringen van het verschil tussen combinaties en permutaties. Daardoor viel het kwartje ook bij de twee opstandelingen. De concrete berekeningen met behulp van de rekenmachine in de laatste tien minuten van de les werden door de *hele* klas gemakkelijk gevonden en correct gemaakt.

In de andere havo-5-klas hadden enkele leerlingen voor de les de stof al zelfstandig opgefrist. Daardoor was het verschil tussen combinaties en permutaties al na de eerste *peer discussion* duidelijk voor iedereen. De vervolgvragen en bijbehorende discussies voegden daarom weinig toe. Zoals Mazur al beschrijft, werkt *peer instruction* niet goed als te veel of te weinig studenten het goede antwoord geven op de multiplechoicevraag.

De *peer instruction* les in havo 4 werd bezocht door een teamleider. Hij bemerkte dat groepjes goed discussieerden, zolang de docente maar niet in de buurt was. We vermoeden dat deze leerlingen bang waren iets wiskundig onjuists te zeggen in de nabijheid van hun wiskundeleraar. Misschien werd dit versterkt door het feit dat die docent in het begin van de les de stof had uitgelegd. Rijkje Dekker^[2] beschrijft een ander, maar vergelijkbaar geval waarbij de aanwezigheid van de docent de leerlingendiscussie belemmert. Na de succesvolle lessenserie in gymnasium 3, waarbij leerlingen in kleine heterogene groepjes werkten aan de algebraïsche eigenschappen van wortels, zei een leerling die nota bene een 4 stond voor wiskunde maar nu een 7,5 had gehaald voor de toets: 'Meneer, legt u het volgende hoofdstuk weer zelf uit?' Collega's vertellen ons dat dit komt doordat de leerlingen in zo'n lessenserie harder moeten werken dan hen lief is. Intussen vermoeden we op grond van onze latere ervaring met *peer instruction* dat er nog een tweede reden is: leerlingen hebben na hun discussies met hun gelijken meer bevestiging nodig van een autoriteit dan ze destijds bij die lessenserie hebben gekregen.

Het minst succesvol was onze eerste *peer instruction* poging in de twee brugklassen. In hun eerste lessenserie over meetkunde hadden de brugklassers in groepjes van zes leerlingen zelfstandig enkele ruimtelijke figuren onderzocht. Bij de afsluitende presentaties meenden we verschillende misconcepties te ontdekken. Bijvoorbeeld leken ze te denken dat vierkanten geen rechthoeken zijn, dat parallelle lijnstukken even lang zijn, en dat drie evenwijdige lijnen niet parallel zijn als de middelste lijn niet even ver verwijderd is van de twee buitenste lijnen. Deze misconcepties hebben we geprobeerd recht te zetten door middel van een *peer instruction* les à la Mazur. De les was rumoeriger dan de *peer instruction* lessen in de hogere klassen. (Eric Mazur benadrukt ook de ongebruikelijke levendigheid in zijn collegezaal in Harvard. De website^[3] van de KU Leuven spreekt in dit verband van 'roezemoesgroepen'). Bovendien bleek dat de brugklassers zich niet lieten overtuigen door de argumenten

van hun klasgenoten, ondanks de geanimeerde discussies. Wel waren ze geschokt door hun misverstanden. Sommigen vertelden zelfs thuis verontwaardigd aan hun ouders dat niet alles wat ze op de basisschool hadden geleerd correct was. Een ander effect van de les was het inzicht 'dat andere leerlingen soms ook best goede ideeën hebben'.

Conclusie

We hebben ervaren dat *peer instruction* niet alleen werkt voor Harvardstudenten, maar ook positieve effecten kan hebben in het voortgezet onderwijs. Dat gold zelfs al voor onze eerste experimenten, die we hierboven hebben beschreven. Het minst succesvol waren we in de brugklas, omdat de leerlingen daar niet overtuigd werden door de argumenten van hun klasgenoten. Misschien is onze vorm van *peer instruction* niet geschikt voor deze leeftijdsgroep? Toch willen we ook in die klassen doorgaan met *peer instruction*. We hopen dat dit beter zal gaan als *peer instruction* gewoner is geworden voor de leerlingen, als ze de ideeën achter *peer instruction* beter begrijpen of als ze wat ouder zijn geworden. (Sommige leerlingen waren nog geen 12). Verder zijn we voor alle leeftijdsgroepen benieuwd naar effecten op de lange termijn, zoals retentie, beeldvorming, zelfvertrouwen en behoefte aan bevestiging door een autoriteit. We willen verder werken aan goede vragen voor *peer instruction* lessen en effectiever leren omgaan met situaties waarin *peer instruction* minder goed werkt, bijvoorbeeld doordat er te veel of te weinig kennis in de groepjes aanwezig is. *Peer instruction* is *hot*. Docenten aan verschillende onderwijsinstellingen zijn ermee aan het experimenteren. Wij horen het graag als je ons iets kunt leren over *peer instruction* (zoals een goed Nederlands woord ervoor) of als je er zelf mee aan de slag wilt.

Noten

- [1] Mazur, E. (1997). *Peer Instruction, A User's Manual*. New Jersey: Prentice Hall.
- [2] Dekker, R. (2012). *Eindeloos praten*, voordracht NWD. Noordwijkerhout.
- [3] KU Leuven, *Peer instruction*. geraadpleegd op 18 mei 2017, van https://www.kuleuven.be/onderwijs/werkvormen/activeren_students/peer_instruction#section-3

Over de auteurs

Haydeé Ceballos is zeventien jaar docente wiskunde aan het Oostvaarders College in Almere. Samen met Jeroen Spandaw ontwerpt zij lessenseries waarin havo-leerlingen leren zo zelfstandig mogelijk meetkundige problemen op te lossen. E-mailadres: m.h.ceballos@tudelft.nl. Jeroen Spandaw is gepromoveerd en gehabiteerd in de algebraïsche meetkunde. Sinds 2007 werkt hij als universitair docent en lerarenopleider wiskunde aan de TU Delft. E-mailadres: j.g.spandaw@tudelft.nl.

BOEKBESPREKING

HET WISKUNDEHONDJE

Laurens Quinten



Titel: Het wiskundehondje

Ondertitel: En meer verhalen over vormen en getallen

Met illustraties van Iris van der Graaf

Auteur: Margriet van der Heijden

Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam, 2015

ISBN 9789057124501

128 pagina's, € 14,95

Margriet van der Heijden, natuurkundige en journalist, schreef korte verhalen (zo'n 200 à 300 woorden) voor de rubriek 'Vormen en Getallen' van de kinderwetenschapspagina van *NRC Handelsblad* die nu zijn gebundeld in *Het wiskundehondje*. Het boekje heeft lang op mijn bureau gelegen, wachtend op inspiratie mijnerzijds om er een mooie bespreking van te maken. Dat is dan niet gelukt. Zeker, er staan heel aardige stukjes in. Dat was ook de mening van enkele leerlingen die ik zo'n stukje liet lezen, zij vonden dat 'best leuk'. Maar ik vind het niet zo'n wiskundeboekje, meer een boekje over getallen – en patronen die daarin te herkennen zijn. Artikelen over ronde, zielige of bevriende getallen bieden op zichzelf best vijf minuten leesplezier. Maar 'oneindige getallen', daarvan krullen de tenen van een wiskundeleraar toch. Er staat ook echte wiskunde in. Zo wordt het thema 'rekenen met oneindig' mooi geïllustreerd met de afbeelding tussen een lijnstuk en een ander lijnstuk dat ontstaat door het eerste met zichzelf te verlengen. Dat laatste zou 'twee maal zoveel punten moeten hebben', de afbeelding geeft een 1-1 relatie en dat zou pleiten voor 'even veel punten'. Toch heeft het tweede lijnstuk aanwijsbaar meer punten dan het eerste, namelijk alle punten die erbij zijn gekomen. De paradox in het rekenen met oneindig is daarmee mooi weggezet. Ook het bewijs van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen bestaan mag er zijn.

17 symmetrieën

Ik ben ervan overtuigd dat de artikelen op de wetenschapspagina kinderen geboeid zullen hebben. Daarna komt de vraag voor wie dit boekje bedoeld is. Zeker niet voor wiskundeleraren, voor hen zal er weinig nieuws in staan. Toch ook niet voor kinderen, voor hen is het veel te springerig en fragmentarisch. Een aardig voorbeeld daarvan is '17 in het Alhambra'. Na een inleiding over de tegels in het paleis valt de opmerking 'en in die herhalende patronen zit 17 verstopt'. Dan volgt een uitleg over symmetrie, meer dan de helft van het artikeltje, eindigend met 'O is rotatie-symmetrisch', en dan gaat het zonder enige overgang naar 'Zo kun je in het platte vlak nog meer symmetrieën bedenken. Hoeveel? 17.' Die overgang heeft alleen betekenis als je veel dieper in de materie van de symmetrieën duikt en dat vraagt wel veel van de lezer. Het kader is mooi versierd met van elke symmetrie een voorbeeld. Ik vergelijk dit artikel graag met het stukje dat Jeanine Daems en Jonica Smeets in *Ik was altijd heel slecht in wiskunde* over hetzelfde onderwerp schreven en waarin ze op één niveau en met begrijpelijke overgangen de 17 mogelijke symmetrieën mooi in kaart brengen; daar zitten echt aanknopingspunten in om verder te puzzelen. Dat boek heeft meer doublures met het *Wiskundehondje*, die ik stuk voor stuk veel beter vind. Misschien dat de eisen die aan de column in *NRC* werden gesteld inzake het aantal woorden een rol heeft gespeeld, naar mijn mening rechtvaardigt dat niet het grote kwaliteitsverschil.

Sneeuwvlokken en dieren

Een aardig stukje gaat over de sneeuwvlok van Koch, geconstrueerd vanuit een gelijkvormige driehoek. De beschrijving is duidelijk en nodigt uit om te proberen er zelf een te maken. De schrijver vertelt dat de omtrek van de sneeuwvlok een oneindige lengte heeft door te stellen dat 'één lijnstukje weg, twee erbij' tot die conclusie leidt. Over de oppervlakte – die ook steeds toeneemt – is de conclusie dat die uiteindelijk $\frac{8}{5}$ van de oppervlakte van de begindriehoek benadert. Beide conclusies zijn juist, maar ze komen erg uit de lucht vallen.

Een gezellig stukje gaat over grote aantallen dieren. Het gaat over duizenden pinguïns, tienduizenden bijen en zwermen vraatzuchtige sprinkhanen, de grootste met wel 50 miljard sprinkhanen. Over die sprinkhanen besluit de auteur het artikel helaas met een schets van de omvang van die zwerm: een oppervlak van wel 1000 vierkante kilometer en een hoogte van wel één kilometer. Beangstigend! Of toch niet? In die ruimte leeft er gemid-

deld maar één sprinkhaan in 20 m³, dat zijn er een stuk of vijf in een gemiddelde woonkamer. Het lijkt bang maken met grote getallen.

Bevriende getallen

Een alleraardigst stukje gaat over bevriende getallen, met een prima uitleg vanuit 220 en 284, dat eindigt met de anekdote over een jongen die een pannenkoek voor zijn vriendinnetje breide met aan de ene kant het getal 124.155 en aan de andere kant 110.485. Jammer dat de auteur besluit met de opmerking dat het wel wat tijd zou kosten om dat na te gaan. En in een boekje met zo veel knipogen naar oneindig is dat schromelijk overdreven; een ontbinding in priemfactoren en dan systematisch met combinaties alle delers berekenen zou zelfs met potlood en papier goed te doen zijn; van 124.155 zijn het tenslotte maar 23 delers.

Ook didactisch vind ik niet alles top. Wat te denken van 'je kunt bijvoorbeeld zeggen $2 + 2 = 4$; $3 + 3 = 6$; $4 + 4 = 8$; je kunt ook zeggen $a + a = 2 \cdot a$??? De auteur weet eigenlijk wel beter, in een ander artikel begint ze met $3 + 3 = 2 \cdot 3$; $4 + 4 = 2 \cdot 4$; $5 + 5 = 2 \cdot 5$ en dan de keurige overgang naar een variabele. Daarbij komt dat dit stukje wiskunde qua niveau echt ver af staat van 'De mooiste formule', uiteraard $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Tot slot

Ondanks een aantal artikeltjes die best aanvaardbaar zijn, kan ik er dus niet toe komen om dit boekje een aanrader voor de vaak al overvolle boekenkast te noemen. Op het boekenplankje in het klaslokaal past het prima, leerlingen kunnen in een paar verloren momenten een artikeltje lezen en dan wellicht verder in gesprek gaan met klasgenoten of docent of er inspiratie voor een (profiel)-werkstuk in vinden.

Over de auteur

Laurens Quinten was ruim veertig jaar wiskundeleraar aan Gymnasium Juvenaat in Bergen op Zoom en het Newmancollege in Breda. Sinds zijn prepensioen heeft hij enkele keren ingevallen en heeft hij twee keer een kwartaal als vrijwilliger wiskundelessen gegeven aan een highschool in Kenia. Momenteel vervult hij een zwangerschapsvervangende op het Mill-Hillcollege te Goirle. E-mailadres: ljiquinten@home.nl

KLEINTJE DIDACTIEK

REKENVOLGORDE

Lonneke Boels

De rekenvolgorde die we bij wiskunde leren kun je met een ezelsbrug onthouden. Eén van de mogelijkheden is deze: Heel Wat Meer Vrije Dagen Op Aanvraag (iets wat veel leerlingen graag zouden willen; een soort ATV-dagen of baaldagen die ze zelf kunnen inplannen) maar er zijn er nog veel meer te vinden op internet zoals: Hoe Moeten Wij Van Die Onvoldoendes Afkomen. De eerste letter van deze woorden staat voor de rekenvolgorde: Haakjes eerst, dan Worteltrekken en Machtsverheffen, dan Vermenigvuldigen en Delen van links naar rechts en tot slot Optellen en Aftrekken van links naar rechts.

Daarnaast hebben we nog rekenregels van de machten en haken die hier lijnrecht tegenin (lijken te) gaan. Want als machtsverheffen voor vermenigvuldigen gaat (en haakjes ook), waarom is dan $(a \cdot b)^2$ uit te rekenen en gelijk aan $a^2 \cdot b^2$? Sommige leerlingen denken dat dit zo is omdat het bij letters nu eenmaal anders is dan bij getallen. Andere leerlingen leren dit uit hun hoofd

zonder te begrijpen waarom deze rekenregel geldt – en raken dan in de war zodra het desbetreffende hoofdstuk is weggezaakt.

Een tweede voorbeeld waarin de rekenvolgorde met voeten wordt getreden is deze uitdrukking: $a(b + c) = ab + ac$. Er wordt nu immers eerst vermenigvuldigd en niet eerst uitgerekend wat er tussen de haken komt. Mijn ervaring is dat het probleem van de tegenstrijdige regels niet opduikt bij leerlingen van het vmbo maar wel speelt bij een aantal leerlingen van havo en vwo. Wat helpt hen? Ten eerste om getallenvoorbeelden te gebruiken en daarmee te laten zien dat de gelijkheden in die specifieke gevallen gelden. Vervolgens kun je bijvoorbeeld één letter gebruiken en de andere letter(s) vervangen door een getal. Tot slot kun je de uitdrukking $(a \cdot b)^2$ herschrijven als $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ waarna ik bespreek waarom je in een vermenigvuldiging de getallen (dus ook letters) van plek mag wisselen en je dus de uitdrukking kunt herleiden tot $a^2 \cdot b^2$.

Bij het voorbeeld met de haakjes zoals $a(b + c) = ab + ac$ gebruik ik vaak het oppervlakte- of rechthoekmodel zoals ik dat in Kleintje didactiek 'Haakjes wegwerken in expressies met letters' heb beschreven (Euclides 92-5). Daarmee zijn niet alle problemen voorbij, maar zijn ze in elk geval wel benoemd.

PYTHAGORAS IN MEER DIMENSIES

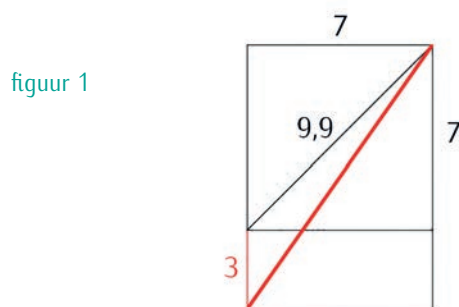
Martin Kindt

Analogie in de wiskunde is een thema dat wel wat meer aandacht zou mogen krijgen in het onderwijs. In dit artikel bespreekt Martin Kindt analoge versies van de stelling van Pythagoras in de drie- en vierdimensionale ruimte.

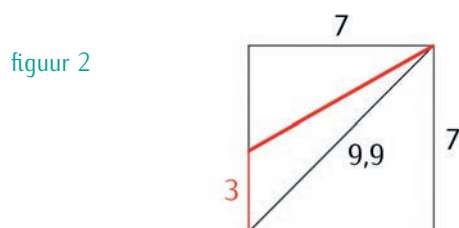
Langste stok in het lokaal

In 1980 schreef ik in de krant van het IOWO^[1] een stukje over een ervaring in een tweede klas van het leao^[2]. Met de lerares Nanda Querelle was afgesproken dat ze een idee van Polya^[3] aan de klas zou voorleggen. Vraag: *hoeveel meter is de langste stok die in het wiskunde-lokaal past?*

Het duurde niet lang of vingers zwaaiden door de ruimte, wezen van een punt in de hoek van de vloer naar het diametraal gelegen punt van het plafond. En daar kwamen de vragen: 'juf, hoe breed is het hier?', 'de hoogte moet je toch weten?', 'mag je schuin meten?' Na de nodige meetactiviteiten werd besloten dat de vloer 7 bij 7 m was en de hoogte 3 m. De diagonaal op de vloer meten was lastig met al die tafels en stoelen, dan maar Pythagoras. De wortel uit $7^2 + 7^2$ is ongeveer 9,9. Hoe nu verder? Er worden voorstellen gedaan, toegelicht met een figuur. Bijvoorbeeld zo, zie figuur 1.

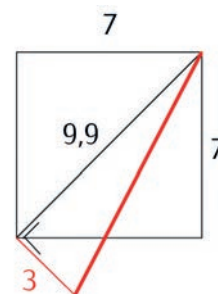


Protest: 'die 3 moet recht naar boven'. Zo dan?, zie figuur 2.



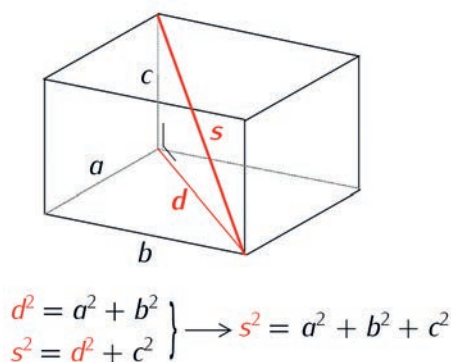
Dit is duidelijk nog foutter! Met vereende krachten komt er ten slotte figuur 3 op het bord.

figuur 3



Eén groepje had meteen de wortel uit $7^2 + 7^2 + 3^2$ berekend: 10 meter en 34 centimeter. 'Hoe hebben jullie dat bedacht?', vroeg Nanda. Gewoon, Pythagoras, maar dan met drie zijden. Een onverwacht en speculatief staaltje analogiedenken. Analogie in de wiskunde is een mooi en vaak productief principe. Maar je moet natuurlijk wel oppassen. In de ruimtefiguur 4 is te zien waarom Pythagoras-met-drie-zijden hier een goed idee is:

figuur 4



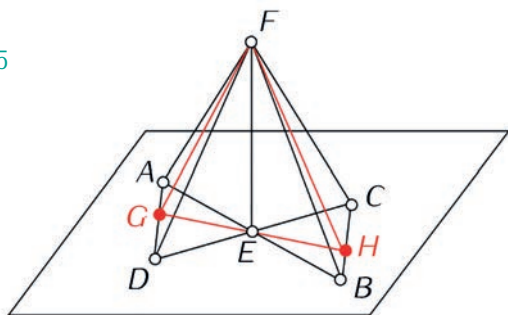
Mooi toch? Hoewel je je kunt afvragen waarom de driehoek met zijden c , d en s rechthoekig is. Serieuze wiskundigen doen dat.

Stelling van Euclides

Zo'n serieuze wiskundige was Euclides die onder de naam *Elementen* dertien wiskundeboeken schreef. In boek 11 begint de ruimtemeetkunde, vroeger op school stereometrie genoemd. Een tak die na een opleving tussen 1985 en 1998 nu weer grotendeels verdwenen is uit het onderwijs aan havo en vwo. Helaas!

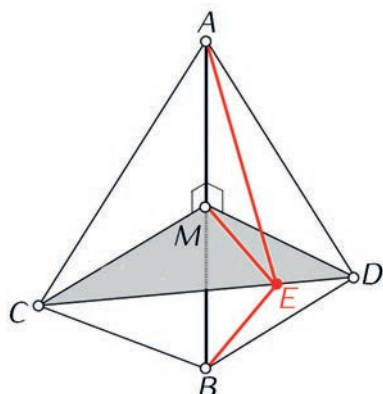
Euclides begint zijn elfde boek met 28 (!) definities. De derde daarvan luidt in vertaling: *Een rechte lijn staat loodrecht op een vlak als hij rechte hoeken maakt met elke lijn die hij snijdt en die in dat vlak ligt*. Dan komen de talloze stellingen ('proposities'), stuk voor stuk voorzien van strikte bewijzen. Ik richt me nu op propositie 4. Die zegt dat het voldoende is voor een lijn om loodrecht op een vlak te staan, als die lijn loodrecht staat op twee snijdende lijnen uit dat vlak. Bij het bewijs gebruikt Euclides figuur 5:

figuur 5



Gegeven is dat FE loodrecht staat op AB en CD . De punten A, B, C en D zijn zo gekozen dat de vier lijnstukken EA, EB, EC en ED even lang zijn. Euclides bewijst dan dat FE ook loodrecht staat op de lijn GH door E , waarbij G en H respectievelijk punten zijn van de lijnen AD en BC . In zijn bewijsvoering maakt hij gebruik van paren congruente driehoeken. Eerst $\triangle AED$ en $\triangle BEC$ (twee zijden gelijk en de ingesloten hoek, zeg **ZHZ**). Vervolgens $\triangle AEG$ en $\triangle BEH$ (**HZH**), zodat $EG = EH$. Via de congruentie van eerst $\triangle ADF$ en $\triangle CBF$ en daarna $\triangle AGF$ en $\triangle BHF$ volgt dat $FG = FH$. In de inmiddels als gelijkbenig verklaarde driehoek $\triangle FGH$ is E het midden van de basis, dus FE staat loodrecht op GH . Hetgeen te bewijzen was. Dit is in het kort Euclides' betoog. Een concreet beeld dat bij dit bewijs kan worden opgeroepen, is dat men, om een mast loodrecht op een vlakke ondergrond te plaatsen, vier even lange tuitouwen kan gebruiken, twee is duidelijk onvoldoende. In de meeste schoolboeken voor stereometrie stond vroeger een wat ander bewijs, vermoedelijk afkomstig van Cauchy, maar dat in essentie op hetzelfde neerkomt, zie figuur 6.

figuur 6



CM en DM zijn middelloodlijnen van AB , zodat de driehoeken $\triangle ACD$ en $\triangle BCD$ congruent zijn (**ZZZ**). Daaruit volgt (**ZHZ**) dat de driehoeken $\triangle AED$ en $\triangle BED$ congruent zijn, zodat $AE = BE$ en ME ook een middelloodlijn van AB is. Q.E.D.

De 3D-stelling van Pythagoras is hiermee afdoende bewezen en zij leidt tot een formule voor de afstand van twee punten A en B in de euclidische ruimte R^3 :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

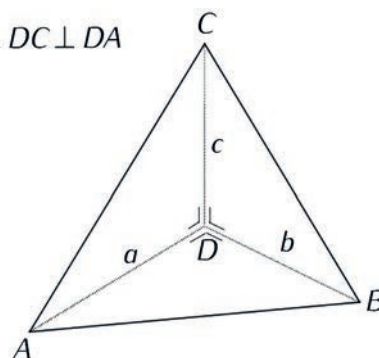
Dit laat zich generaliseren tot een formule voor de afstand van twee punten in de n -dimensionale ruimte R^n , maar dan als definitie.

Ander analogon van 'Pythagoras'

Polya behandelt een alternatieve stelling van Pythagoras in de ruimte.^[4] Het driedimensionale analogon van een rechthoekige driehoek is een viervlak, waarbij drie in één punt samenkommende ribben twee aan twee loodrecht op elkaar staan, zie figuur 7.

$$DA \perp DB \perp DC \perp DA$$

figuur 7



De drie rechthoekige driehoeken $\triangle BDC$, $\triangle ADC$ en $\triangle BDA$ noem ik de rechthoekszijvlakken, en driehoek $\triangle ABC$ noem ik het schuine zijvlak. De oppervlakten van de vier driehoeken noem ik in volgorde α, β, γ en δ . Zou er nu een mooie relatie bestaan tussen deze vier oppervlakten? Polya vertelt dat een *highschool*-leerling het voorstel

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \delta^3$$

deed. Een spannende suggestie, die het waard is om onderzocht te worden. Polya beschrijft dan een stapsgewijze aanpak die echter leidt tot:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2.$$

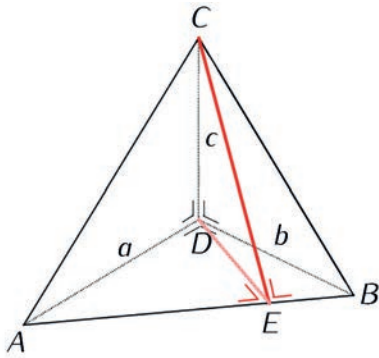
Een toch verrassend analogon van de stelling van Pythagoras. Hoe kan dit resultaat worden bereikt?

Om te beginnen laten de oppervlakten α, β en γ zich vanwege die rechte hoeken gemakkelijk uitdrukken in a, b en c :

$$\alpha = \frac{1}{2} bc, \beta = \frac{1}{2} ab \text{ en } \gamma = \frac{1}{2} ac.$$

Het doel is nu om ook δ uit te drukken in a, b en c . Daarbij helpt de hoogtelijn CE van driehoek $\triangle ABC$, zie figuur 8.

figuur 8



Maar om Pythagoras toe te passen in driehoek $\triangle CDE$ moet ik de lengte van DE weten. En nu kan de goede oude stereometrie in stelling worden gebracht!

(1) Omdat CD loodrecht staat op twee snijdende lijnen van het vlak door A , B en D , snijdt of kruist hij alle lijnen van dit vlak loodrecht, in het bijzonder de lijn AB .

(2) De lijn AB op haar beurt staat loodrecht op CE en kruist CD loodrecht, en staat daarom loodrecht op vlak CDE en dus op de lijn DE .

Dit betekent dat DE een hoogtelijn in driehoek $\triangle ABD$ is en via de oppervlakte is de lengte ervan nu eenvoudig te berekenen:

$$\text{Oppervlakte } \triangle ABD = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} DE \cdot AB =$$

$$\frac{1}{2} DE \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \text{ zodat } DE = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

De hoogte CE van driehoek ABC wordt nu gevonden uit:

$$CE^2 = c^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2}$$

En er volgt:

$$\delta^2 = \frac{1}{4} \cdot AB^2 \cdot CE^2 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2) \cdot \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4} \cdot (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) = \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2$$

Ziedaar!

Met coördinaten

De oppervlakte van driehoek $\triangle ABC$ kan ook via coördinaten worden berekend. Laat D de oorsprong zijn van een orthonormaal assenstelsel. De lijn AB wordt gerepresenteerd door het stelsel:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ én } z = 0 \quad (\text{i})$$

en heeft de richtingsvector $(a, -b, 0)$. Het punt $E(x_E, y_E, 0)$ ligt op AB zodat $CE \perp AB$. Het inproduct

van de vectoren $\overrightarrow{CE} = (x_E, y_E, -c)$ en $\overrightarrow{BA} = (a, -b, 0)$ moet nul zijn, dus:

$$ax_E = by_E \quad (\text{ii})$$

Combinatie van (i) en (ii) geeft:

$$x_E = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad y_E = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}, \quad z_E = 0$$

Nu kan de lengte van CE worden berekend met hetzelfde resultaat als in de vorige afleiding.

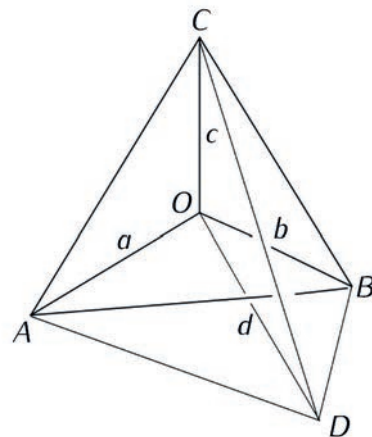
Voor de lezer die kennis heeft van het vectorieel product ('uitproduct') van twee vectoren, kan het aanzienlijk sneller, maar dit terzijde.

In de vierde dimensie

Zelf was ik benieuwd of ook in $\mathbb{R}^4$ zo'n Pythagoras-versie geldig zou zijn. Het vierdimensionale analogon van het viervlak heet *simplex*.

Een simplex heeft vijf hoekpunten, zeg $ABCD O$, die niet in één 3D-ruimte liggen. Zo'n simplex telt tien ribben, tien driehoeken en vijf viervlakken. Veronderstel dat de vier ribben die in O samenkomen twee aan twee loodrecht op elkaar staan, zes rechte hoeken dus. Je zou dan wensen dat het kwadraat van het volume van het 'tegenover' O liggende viervlak (dat is $ABCD$) gelijk is aan de som van de kwadraten van de volumes van de overige vier viervlakken.

figuur 9



De volumes van de vier viervlakken (zie figuur 9) om O zijn gelijk aan $\frac{1}{6}$ van respectievelijk abc , abd , acd en bcd . Maar hoe vind ik de inhoud van viervlak $ABCD$? Een kwestie van analogiseren van de analytische aanpak in $\mathbb{R}^3$. Ik noem de 4-dimensionale coördinaten nu x, y, z, t . Het vlak ABC wordt gerepresenteerd door:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ én } t = 0 \quad (\text{iii})$$

Dit vlak heeft als richtingsvectoren $(a, -b, 0, 0)$ en $(a, 0, -c, 0)$. Ik zoek het punt E in vlak ABC zodat $DE \perp ABC$. Stel $E = (x_E, y_E, z_E, 0)$. Het inproduct van $(x_E, y_E, z_E, -d)$ met $(a, -b, 0, 0)$ en met $(a, 0, -c, 0)$ moet nul zijn.

Dit leidt na combinatie met (iii) tot:

$$x_E = \frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \quad y_E = \frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$z_E = \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \quad t_E = 0$$

Het kwadraat van de lengte van DE is gelijk aan $x_E^2 + y_E^2 + z_E^2 + d^2$ en dit laat zich zowaar herleiden tot:

$$\frac{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Het kwadraat van de oppervlakte van driehoek $\triangle ABC$ is al bij de berekening in R^3 gevonden:

$$\frac{1}{4} \cdot (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Via $\frac{1}{3}$ grondvlak maal hoogte, komt er voor het kwadraat van de inhoud van $ABCD$:

$$\frac{1}{36} \cdot (a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2)$$

dus juist gelijk aan de som van de kwadraten van de inhouden van ABC , ABD , ACD en BCD .

Noten

- [1] De voorloper van het Freudenthal Instituut
- [2] leao = Lager Economisch en Administratief Onderwijs
- [3] Polya, G. (1957). *How to solve it* (tweede druk). Princeton: Princeton University Press.
- [4] Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery*, vol. I., Hoboken: Wiley & Sons.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE

5: HET BAMBOEPROBLEEM



Desiree van den Bogaart

In de rubriek *Wortels van de Wiskunde* bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: het bamboeprobleem.

We weten niet veel over de vroege Chinese wiskunde. Dat heeft te maken met de vergankelijkheid van het materiaal waar de Chinezen op schreven voordat het papier werd uitgevonden (bamboe, boomschors), maar zeker ook met de grootschalige boekverbranding die werd opgelegd door de eerste keizer aan het begin van de Qin-dynastie (221 v. Chr.). Later werden, naar het schijnt, heel wat van de verloren teksten uit het hoofd weer opgeschreven.

De negen hoofdstukken

De belangrijkste vroege Chinese tekst over wiskunde wordt over het algemeen aangeduid als *De Negen Hoofdstukken van de kunst van de wiskunde*, kortweg *De Negen Hoofdstukken* (in het Chinees: *Chiu Chang*). Er is veel onzekerheid over de datering van dit werk. Net zoals bij *De Elementen* van Euclides is er sprake van verschillende edities die zijn aangevuld of anders gerangschikt door de eeuwen heen. De oerversie gaat mogelijk terug tot maar liefst de elfde eeuw voor Christus, maar de meest gangbare versie lijkt zo rond de eerste eeuw voor Christus te zijn ontstaan.

De invloed van *De Negen Hoofdstukken* was zeer groot (ook hier valt een parallel te zien met *De Elementen*). Maar doordat de inhoud van *De Negen Hoofdstukken* veel minder meetkundig was, heeft de Chinese wiskunde zich op een hele andere manier ontwikkeld. Waar in de Griekse wiskunde de meetkunde een centrale plaats innam, en men zich daar langzamerhand verder van af durfde te bewegen richting bijvoorbeeld algebra, was de inhoud van *De Negen Hoofdstukken* veel gevarieerder en werden er daardoor al eerder andere paden ingeslagen. Ook de aanpak wijkt af: waar de Griekse traditie gericht was op deductie via axioma's, stellingen en bewijzen, zien we in de vroege Chinese traditie uitsluitend aandacht voor algemene methoden en aanpak van problemen.

Figuur 1 laat de negen (vertaalde) hoofdstuktitels zien, en geeft een korte opsomming van de wiskundige inhoud (en de moderne westerse naamgeving van een deel daarvan). Daarbij is het goed om nogmaals de datering te vermelden: een tot meerdere eeuwen vóór Christus.

De negen hoofdstukken zijn:

方田 Fang tian – Rechthoekige velden

Oppervlaktes van percelen van verschillende vormen; manipulatie van gewone breuken.

粟米 Su mi – Gierst en rijst

Uitwisseling van goederen bij verschillende tarieven; prijzen.

衰分 Cui fen– Proportionele distributie

Distributie van goederen en geld tegen proportionele tarieven.

少廣 Shao guang – Kleinere breedtes

Delen door gemengde getallen; worteltrekken en derde-machtswortels; dimensies, oppervlaktes en inhouden van cirkels en bollen.

商功 Shang gong – Overleggen over bepaalde werken

De inhoud van verschillende vormen.

均輸 Jun shu – Eerlijke belastingheffing

Geavanceerde problemen met betrekking tot proporties.

盈不 Ying bu zu – Overcapaciteit en tekorten

Lineaire problemen opgelost door gebruik te maken van regula falsi.

方程 Fang cheng – De rechthoekige tabel

Problemen met meerdere onbekenden, opgelost door een principe dat lijkt op Gauss-eliminatie.

勾股 Gou gu – Basis en hoogte

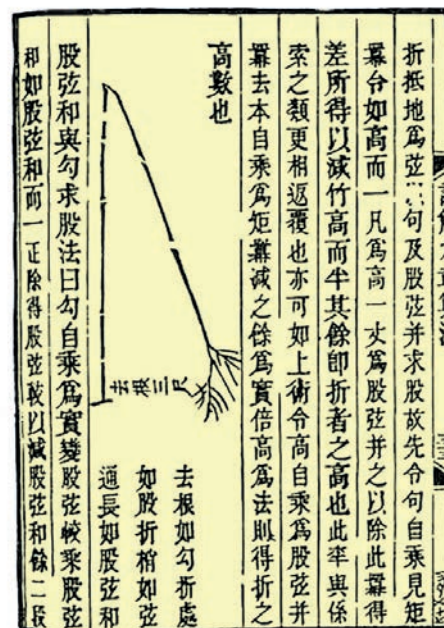
Problemen met de Stelling van Pythagoras.

figuur 1 Inhoudsopgave van *De Negen Hoofdstukken* (bron: Wikipedia)

Gou gu: stelling van Pythagoras

De primaire bron die ik in dit artikel wil bespreken, komt uit het negende hoofdstuk. De stelling van Pythagoras, in het Chinees *Gou gu* genoemd, wordt in dit hoofdstuk op verschillende manieren toegepast om originele opgaven op te lossen. Het gaat hier dan wel steeds om een oplossingsstrategie, en niet om een bewijs, maar dat kunnen we desgewenst zelf zoeken.

Figuur 2 komt uit *De Negen Hoofdstukken* en laat het beroemde bamboeprobleem zien. Zoals we in deze rubriek altijd doen, vraag ik je eerst om eens rustig te kijken



figuur 2 Het bamboeprobleem uit *De Negen Hoofdstukken*

naar het plaatje. Welke vragen zou je bij dit plaatje kunnen stellen aan een leerling? Op het plaatje zie je een geknakte bamboestengel. In de Chinese tekst eromheen wordt verteld dat de stengel oorspronkelijk hoogte 10 had, maar nu geknakt is. De top van de stengel is op een afstand van 3 van de voet van de stengel terechtgekomen. De vraag ligt nu voor de hand: op welke hoogte is de stengel geknakt? Als ik dit probleem behandel op de lerarenopleiding, wil ik ook graag een uitstapje maken naar het onderwerp realistische wiskundendidactiek. Het gebruiken van contexten in de wiskunde is van alle tijden. Je kunt je dan gaan afvragen wat deze specifieke context bijdraagt aan het oplossen van het probleem, of dat hij wellicht een andere functie heeft gehad. Maar laten we het dan eerst maar eens oplossen.

Schatten en logisch redeneren

De benodigde voorkennis is uiteraard de stelling van Pythagoras, die we vanaf nu aanduiden met de Chinese naam. Als je met je leerlingen dit probleem bespreekt, probeer dan ook echt ruimte te geven voor oplossingen die niet gelijk variabelen willen invoeren of een exact antwoord kunnen geven. Met schatten en logisch redeneren, bijvoorbeeld, kun je al aardig in de buurt van de oplossing komen. Dat zou de volgende tabel kunnen opleveren.

tabel 1 Het schatten van de oplossing door inklemmen

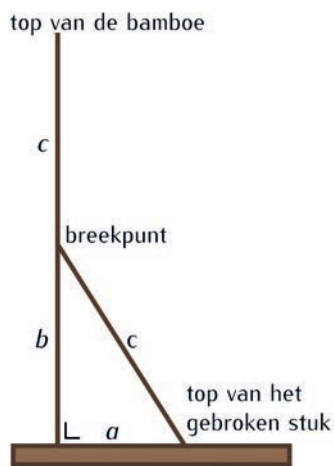
Schatting hoogte breuk	5	4	4,5	4,8
Schuine zijde	5	6	5,5	5,2
Berekening met Gou gu	Kan niet, schuine zijde moet langer zijn dan langste rechthoekszijde	$3^2 + 4^2 = 25$ veel kleiner dan $6^2 = 36$	$3^2 + 4,5^2 = 29,25$ bijna gelijk aan $5,5^2 = 30,25$	$3^2 + 4,8^2 = 32,04$ stuk meer dan 27,04

Nauwkeuriger inklemmen zal leiden tot de juiste oplossing en is een mooie rekenoefening.

Invoeren van een variabele

Leerlingen met iets meer algebraïsche vaardigheden zullen waarschijnlijk willen overgaan tot het invoeren van een variabele. Het werken met letters is in ons onderbouwcurriculum al aan de orde geweest voordat de stelling van Pythagoras wordt geleerd, dus dat is op zich niet nieuw voor leerlingen, maar dit probleem zou daar ook een mooie aanvulling op kunnen vormen. Letterrekenen komt vaak uit de lucht vallen, en heeft, afgezien van korter schrijven van formules, niet direct zichtbare toepassingen. Maar een situatie zoals deze laat zien dat het juist kan helpen om een onbekende lengte met een symbool of letter aan te duiden, om zo op te kunnen schrijven wat je wél weet. We schrijven voor de hoogte van de breuk even een x en gaan daarmee, en met behulp van *Gou gu*, opschrijven wat we dan weten: $3^2 + x^2 = (10 - x)^2$. Dit lijkt een kwadratische vergelijking. Maar na uitwerken van de haakjes blijft slechts een lineaire vergelijking over! Dat maakt dit dus haalbaar voor klassen waarin het oplossen van kwadratische vergelijkingen (nog) niet is behandeld. $20x = 91$ dus $x = \frac{91}{20} = 4,55$. (Merk op dat het antwoord

geen geheel getal is. Kommagetallen waren nog lang niet bekend, breuken/verhoudingen uiteraard wel.)



figuur 3 Het bamboeprobleem

iets formeler wordt het als we meerdere letters gaan gebruiken. (Merk op: de keuze voor het abstractieniveau ligt dus bij de docent.)

Figuur 3 toont nogmaals het bamboeprobleem, in een modernere weergave. Hierin staan de letters a , b en c voor de zijden van een rechthoekige driehoek. De gegevens in deze situatie zijn dus $a = 3$ en $c + b = 10$. Hiermee kunnen we b uitrekenen, aangezien $a^2 + b^2 = c^2$. Dat hebben we zojuist ook met x gedaan, en dat leidt dus tot $b = 4,55$. In de Chinese tekst staat een rechtstreekse manier om b te berekenen, waarin je niet direct *Gou*

gu herkent: *Neem het kwadraat van de afstand van de bamboe tot het punt waar de top de grond raakt en deel dat door de lengte van de bamboe, trek het resultaat af van de lengte van de bamboe en halveer de uitkomst.*

In moderne notatie: $b = \frac{1}{2}(c + b - \frac{a^2}{c + b})$. Als we de ons

bekende gegevens ($a = 3$ en $c + b = 10$) invullen in deze formule, komen we op hetzelfde antwoord voor b uit. Laat je leerlingen dit controleren.

Hogere klassen

Je kunt op dit moment stoppen met de constatering dat de Chinese werkwijze correct is. Maar in hogere klassen zou je ook nog kunnen kijken of we de moderne formule met wat algebraïsch manipuleren kunnen verklaren vanuit de *Gou gu*-stelling:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$$

$$c - b = \frac{a^2}{c + b}$$

$$b = c - \frac{a^2}{c + b}$$

$$2b = c + b - \frac{a^2}{c + b}.$$

Halveren van beide kanten levert de gezochte formule.

Leuk om aan de leerlingen te vragen is: waarom kun je bij de voorlaatste stap niet al stoppen? Antwoord: je weet niet wat c is, maar wel wat $c + b$ is.

Een andere manier om de formule af te leiden, is veralgemeniseren van $3^2 + b^2 = (10 - b)^2$. De totale lengte is $c + b$ en de afstand op de grond is a . Dan heb je $a^2 + b^2 = ((c + b) - b)^2$. Uitwerken geeft $2(c + b)b = (c + b)^2 - a^2$.

Daaruit volgt $b = \frac{1}{2}(c + b - \frac{a^2}{c + b})$. Het is moeilijk voor te stellen dat deze kennis al meer dan 2000 jaar oud is.

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Joseph, G.G. (1992). *The crest of the peacock – Non-European Roots of Mathematics*. Londen: Penguin Books.
- Struik, D.J. (2001). *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht: Uitgeverij Het Spectrum. http://www.dbnl.org/tekst/stru008gesc01_01/stru008gesc01_01_0004.php
- https://nl.wikipedia.org/wiki/De_negen_hoofdstukken_van_de_wiskundige_kunst. Geraadpleegd op 29 april 2017.

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl

HET FIZIER GERICHT OP...

VOORBEREIDEN OP STATISTIEK

OPEN EN GEPERSONALISEERD STATISTIEKONDERWIJS

Wouter van Joolingen
Sietske Tacoma

In Fzizer belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering belichten Wouter van Joolingen en Sietske Tacoma online statistiek-materiaal, bedoeld voor bijvoorbeeld studenten die het nodig hebben in een vervolgopleiding, maar niet hebben gehad in hun vooropleiding.



Struikelen over statistiek

Het komt vaak voor: struikelen over statistiek. Hoewel statistiek een belangrijk hulpmiddel is in veel wetenschappen is het vaak niet de reden waarom studenten voor een studie kiezen. Studenten vinden het vak vaak moeilijk en zien het als een verzameling technieken die op het goede moment moeten worden toegepast. Ze missen daarbij het globale beeld op de belangrijke statistische begrippen en principes. Om die globale blik te versterken heeft het Freudenthal Instituut, gesubsidieerd door SURF open en online onderwijs, acht basismodules statistiek ontwikkeld. De doelgroep van die modules bestaat uit eerstejaarsstudenten van opleidingen waar statistiek een rol in speelt en leerlingen van de hoogste leerjaren vwo die zich op zo'n studie oriënteren, met name de leerlingen met wiskunde B, waarin geen statistiek zit. Dit zijn de modules:

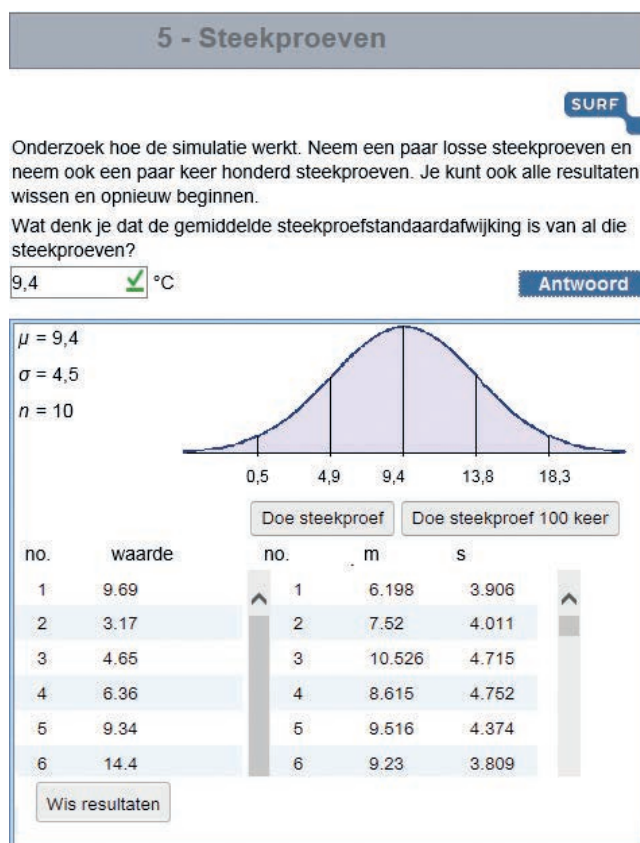
- 1 Kansen en variabelen
- 2 Beschrijvende statistiek
- 3 Verdelingen
- 4 De normale verdeling
- 5 Steekproeven
- 6 Uitspraken over data
- 7 Hypothesetoetsen
- 8 Z-toets en t-toets

Uitgangspunten

Bij het ontwikkelen van de modules hanteerden we de volgende uitgangspunten.

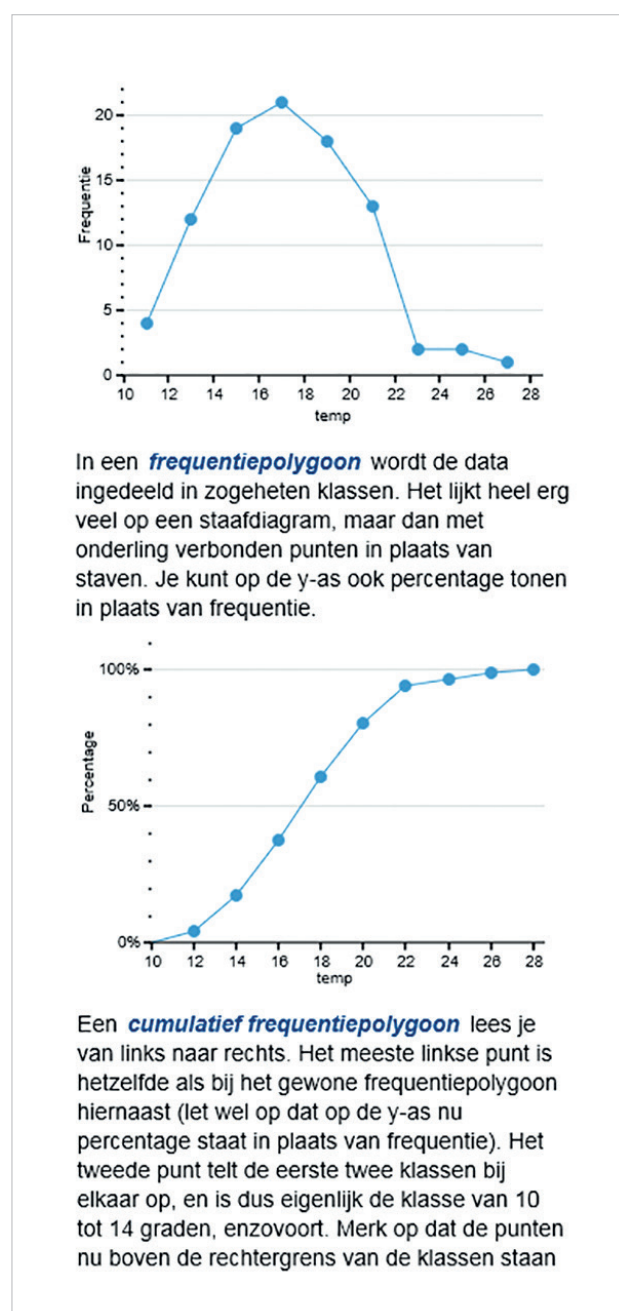
1. Het doorlopen van een module kost ongeveer een uur. De modules moeten ook onafhankelijk van elkaar zijn te volgen, hoewel latere modules wel kennis uit eerdere modules kunnen vooronderstellen.
2. Het is belangrijk dat de modules zich richten op statistisch *begrip*, en niet op het aanleren van trucs en procedures. Dus niet: 'Als aan voorwaarden x , y en z is voldaan kan toets T worden toegepast', maar: 'Wat betekent toets T , en welke vraag kun je ermee beantwoorden?'

3. De modules zijn onafhankelijk van een specifiek statistiekprogramma, zoals SPSS of R. Dit hangt samen met het vorige punt. We willen geen knoppen-cursus voor één van die programma's maar modules die toewerken naar begrip.
4. Modules zijn gebaseerd op echte vragen en echte data. Vanuit dit principe kiezen we dus niet voor gefingeerde en flauwe data zoals lengte en schoenmaat van een groep leerlingen, maar zijn we op zoek gegaan naar reële, toegankelijke databronnen waarover interessante statistische vragen kunnen worden gesteld.



figuur 1 Simulatie voor het trekken van steekproeven

Deze principes werkten we op verschillende manieren uit. Het eerste uitgangspunt werd in het ontwerp gerealiseerd en geëvalueerd met de pilot. Een voorbeeld van het tweede uitgangspunt is te vinden in module 5, zie figuur 1, waarin de student het trekken van een steekproef simuleert. Door trekkingen te simuleren en de verdeling van de uitkomsten te bekijken wordt de student geconfronteerd met de eigenschappen van een verdeling. Het derde uitgangspunt heeft geleid tot het gebruik en ontwerp van manipuleerbare representaties die het mogelijk maken om data op meerdere manieren te bekijken. Daarbij is veel gebruik gemaakt van de representaties die de Digitale Wiskunde Omgeving biedt, zie figuur 2.



figuur 2 Twee representaties uit de Digitale Wiskunde Omgeving

Tot slot zijn we ten behoeve van uitgangspunt 4 op zoek gegaan naar databronnen die open te gebruiken zijn en waarover interessante vragen zijn te stellen. Uiteindelijk kwamen we uit op data afkomstig uit een grote afname van de rekentoets en op weerdata van de afgelopen honderd jaar. Daarover waren vragen te stellen als: 'Maakt het echt uit of een opgave met of zonder een plaatje wordt aangeboden?' en 'Is de gemiddelde temperatuur in het jaar 2015 extreem te noemen?'

Een module begint steeds met een vraag zoals deze. Vervolgens worden de begrippen aangereikt waarmee de vraag in statistische termen kan worden geformuleerd en, uiteindelijk, beantwoord. Aan het eind van elke module is een zelftoets opgenomen waarmee de studenten kunnen testen of ze de stof beheersen. De modules kunnen los van elkaar worden gevolgd. Gezamenlijk bouwen ze wel op naar een basis waarmee een student begripsvol aan de slag kan met statistiek.

Evaluatie

In twee sessies van elk drie uur zijn de modules getest met leerlingen uit 6 vwo. Naast het feit dat deze tests hielpen fouten uit de modules te halen gaven ze ook inzicht in hoe de leerlingen konden leren met de modules. In een interview na afloop konden ze de inhoud van de modules goed samenvatten en gaven ze aan de modules interessant en aantrekkelijk te vinden. Leerlingen en studenten kunnen direct met deze modules aan de slag. Ze zijn bedoeld om zelfstandig mee te kunnen werken en zijn te vinden op <http://bit.ly/surfstat>.

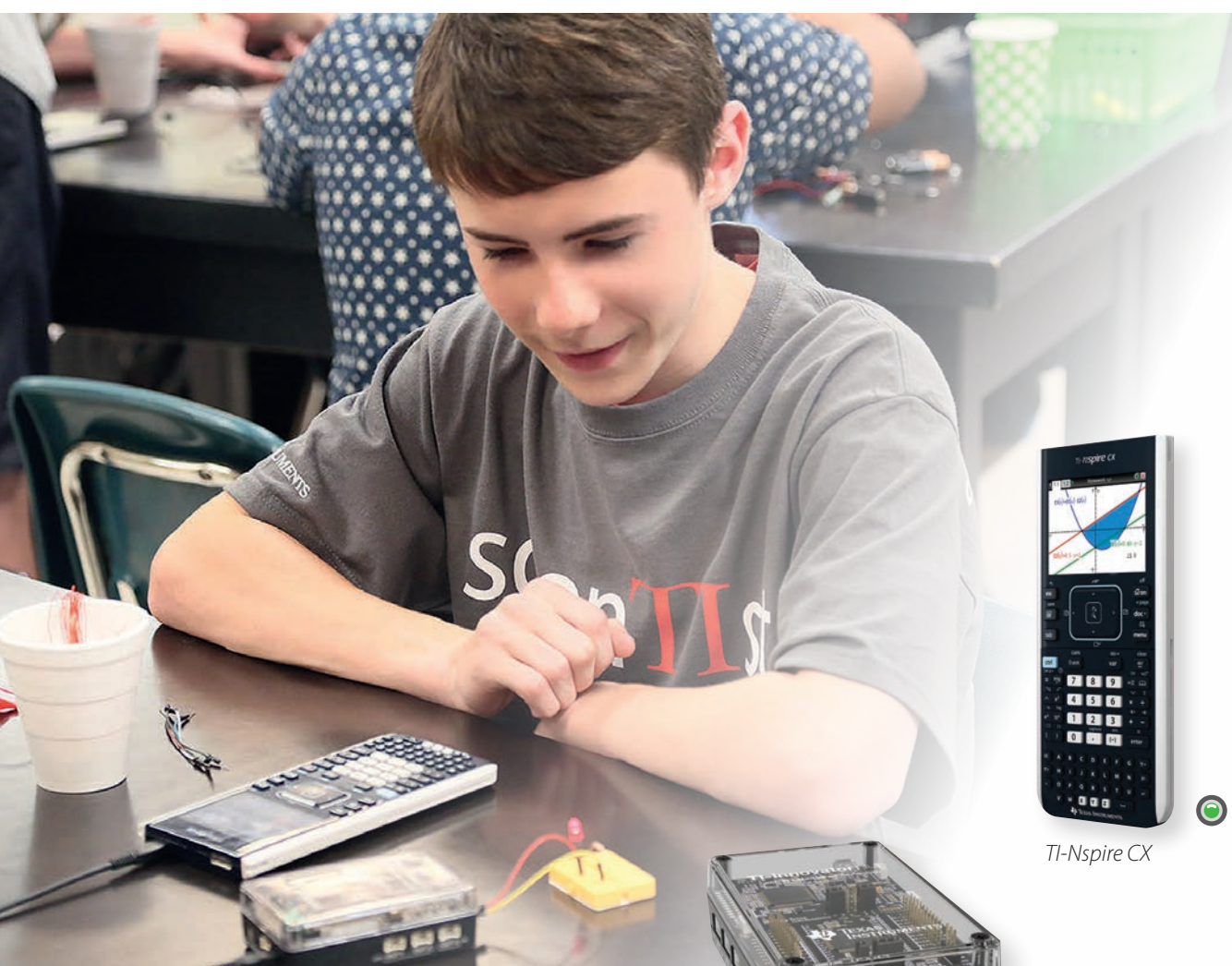
Over de auteurs

Wouter van Joolingen is wetenschappelijk directeur van het Freudenthal Instituut en was projectleider van het SURF-project waarin de besproken modules ontwikkeld zijn. E-mailadres: w.r.vanjoelingen@uu.nl. Sietske Tacoma doet bij het Freudenthal Instituut promotie-onderzoek naar het gebruik van automatische feedback in universitair statistiekonderwijs en is mede-ontwikkelaar van de besproken modules. E-mailadres: s.g.tacoma@uu.nl.

TI-INNOVATOR™ HUB MET TI LAUNCHPAD™ BOARD

PROGRAMMEREN ONTWERPEN BESTUREN

TI technologie in combinatie met de nieuwe TI-Innovator™ Hub
hét voorbeeld van integratie van wiskunde met natuurwetenschappen.



TI-84 Plus CE-T



TI-Nspire CX



TI-Innovator™ Hub met
TI-Launchpad™ Board



www.education.ti.com/nederland
www.education.ti.com/go/innovator

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

EXAMENWERKWOORDEN VAN WISKUNDE EN NATUURKUNDE AFGESTEMD

Jacqueline Wooning

In de syllabi voor de examenprogramma's natuurkunde en wiskunde havo en vwo zijn *examenwerkwoorden*^[1] opgenomen. Onder *examenwerkwoorden* verstaan we woorden die in de vragen van een examen worden gebruikt om de kandidaat duidelijk te maken wat er van hem verwacht wordt.

Voorbeelden zijn: *bereken, bepaal, leg uit*. De lijst van examenwerkwoorden is niet uitputtend. Er mogen in examens ook andere woorden gebruikt worden dan die in de lijst. Maar als een woord uit de lijst gebruikt wordt, ligt de betekenis ervan vast.

In de examens natuurkunde werden deze woorden al lange tijd gebruikt, maar de exacte betekenis was nergens vastgelegd. In de natuurkundesyllabi voor het nieuwe programma is dat nu wel gebeurd.

Voor wiskunde werd al vele jaren gebruikgemaakt van het *Nomenclatuurrapport* van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, waarin de betekenis van diverse examenwerkwoorden is omschreven. Een update van deze lijst is in de wiskundesyllabi 2014 havo en vwo opgenomen en heeft daarmee een officiële status gekregen.^[2]

Afstemming?

Leerlingen met wiskunde en natuurkunde in hun vakkenpakket krijgen in hun examens te maken met examenwerkwoorden die bij wiskunde een andere omschrijving (en soms betekenis) hebben dan bij natuurkunde. Ondanks de aandacht die docenten in de klas besteden aan de betekenis van de examenwerkwoorden is dit geen wenselijke situatie. Daarom heeft het CvTE besloten – mede op advies van de SLO-werkgroep *Afstemming wiskunde-natuurkunde tweede fase*^[3] – een commissie in te stellen

met de opdracht, op basis van de bestaande twee lijsten, nieuwe lijsten te maken met een zo groot mogelijke onderlinge afstemming van de examenwerkwoorden. De commissie bestaat uit leden van de vaststellingscommissies natuurkunde, wiskunde AC en wiskunde B en toetsdeskundigen van Cito. Inmiddels zijn de nieuwe lijsten klaar; ze worden in 2019 van kracht en zullen te vinden zijn in de syllabi 2019 van natuurkunde en wiskunde. De gecombineerde lijst is gepubliceerd op examenblad.nl (www.examenblad.nl/nieuws/20170322/nieuwe-lijsten-examenwerkwoorden/2019).

Aan het werk

Bij het bestuderen van de oorspronkelijke lijsten viel het de commissie op dat de diverse examenwerkwoorden op zeer verschillende wijze beschreven waren. Bij natuurkunde werd voor elk examenwerkwoord een definitie gegeven, bij wiskunde was er vaak geen omschrijving, maar werd een toelichting gegeven over de aanpak of het gebruik van hulpmiddelen. Zie het voorbeeld in tabel 1. De commissie is begonnen de bestaande omschrijvingen in beide lijsten zó te herformuleren, dat deze voor natuurkunde en wiskunde zo eensluidend mogelijk zijn en uit de omschrijving duidelijk is op welke wijze en met welke hulpmiddelen de kandidaat het gevraagde moet beantwoorden. Daarom begint elke omschrijving met een beschrijving van de activiteit of handeling.

natuurkunde (oude lijst)	wiskunde (oude lijst)
Bepaal De kandidaat moet de waarde van een grootheid vaststellen en/of uitrekenen, uitgaande van gegevens in grafieken of figuren of door het maken van een constructie. Uit de uitwerking moet duidelijk blijken welke formules en/of principes zijn toegepast, welke waarden de kandidaat heeft gebruikt en welke stappen zijn gezet.	Bepalen De wijze waarop het antwoord gevonden wordt is vrij. Een toelichting is vereist.

tabel 1 Verschil examenwerkwoord *bepalen* tussen natuurkunde en wiskunde in de oude lijsten

Als door verschillen tussen natuurkunde en wiskunde één gemeenschappelijke omschrijving niet mogelijk is, zijn twee omschrijvingen naast elkaar geplaatst, zodat overeenkomsten en verschillen in beeld worden gebracht. Bij het bespreken van de examenwerkwoorden in de klas is zo voor leerlingen duidelijk wat van hen bij elk van deze twee examenvakken wordt verwacht.

Verschillen in de omschrijving van examenwerkwoorden komen voort uit de karakterverschillen tussen natuurkunde en wiskunde. Ook stelt natuurkunde andere eisen aan het (eind)antwoord dan wiskunde.

Bij natuurkunde wordt gewerkt met significantie. Daarbij worden regels gehanteerd voor het aantal significante cijfers dat een uitkomst dient te hebben na het toepassen van wiskundige bewerkingen zoals optellen en vermenigvuldigen.

Bij wiskunde moet de berekening zó worden gemaakt, dat het antwoord een nauwkeurigheid heeft die in overeenstemming is met het gevraagde aantal decimalen. In de wiskundesyllabi valt te lezen: *'een kandidaat moet weten dat tussentijds afronden gevolgen kan hebben voor het eindantwoord en dient hiernaar te handelen.'* In context-opgaven moet de gewenste nauwkeurigheid soms uit de probleemsituatie worden afgeleid.

Daarnaast verschillen de toegestane hulpmiddelen. Bij natuurkunde gebruikt men een informatieboek (*Binas* of *ScienceData*) en een gewone rekenmachine, bij wiskunde is de grafische rekenmachine toegestaan, zodat ook onderzoek kan worden gedaan naar bijvoorbeeld eigen-

schappen van formules en grafieken. In de wiskundelijst zijn voor wiskunde B de bijwoorden *algebraïsch* en *exact* opgenomen om aan te kunnen geven dat gebruik van 'specifieke opties van de grafische rekenmachine',^[4] niet is toegestaan. Als naar een *exacte* of *algebraïsche* oplossing wordt gevraagd, mag de grafische rekenmachine alleen worden ingezet voor het gewone rekenwerk en niet voor procedures zoals het oplossen van vergelijkingen, het zoeken naar of bepalen van nulpunten en het benaderen van hellingen en oppervlakten. Bij een *exacte* oplossing mogen tussenantwoorden en eindantwoord niet benaderd worden, bij *algebraïsch* is dit wel toegestaan, zowel bij tussenantwoorden als bij het eindantwoord.^[5]

Hieronder volgt een toelichting op enkele examenwerkwoorden uit de nieuwe lijsten.

Voorbeelden: bepalen en berekenen

In tabel 2 zijn twee examenwerkwoorden gegeven waarvan de omschrijvingen verschillen.

Hier is te zien dat de examenwerkwoorden *bepalen* en *berekenen* bij natuurkunde voorkomen bij vragen in context: de kandidaat moet gegevens gebruiken uit de opgave of uit het informatieboek (zie figuur 1: vragen 6 en 7) of bij *bepalen* in een grafiek of figuur (zie figuur 1: vraag 9).^[6]

Bij wiskunde worden naast een formuleblad geen andere informatiebronnen dan de opgave gebruikt. *Bepalen* komt zowel bij vragen naar aanleiding van een context als in

	Algemeen: Tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.	
	natuurkunde	wiskunde
<i>Bepalen</i>	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen, uitgaande van gegevens in: • een grafiek • een figuur in de opgave of • andere informatiebronnen • door het maken van een constructie Uit de uitwerking moet blijken welke formules en/of principes zijn toegepast, welke waarden zijn gebruikt en welke stappen zijn gezet.	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
<i>Berekenen</i>	Het gevraagde uitrekenen, uitgaande van gegevens in de opgave en/of andere informatiebronnen. Uit de uitwerking moet blijken welke formules en/of principes zijn toegepast, welke waarden zijn gebruikt en welke stappen zijn gezet.	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

tabel 2 Verschillen tussen natuurkunde en wiskunde bij *bepalen* en *berekenen* in de nieuwe lijsten

Fontein van Genève

In het Meer van Genève bevindt zich een van de grootste fonteinen ter wereld. Bij de fontein hangt een informatiebordje. De tekst op dit bordje staat, vertaald, weergegeven in figuur 1.

figuur 1



De pompen zijn parallel aangesloten op een spanning van 2400 V.

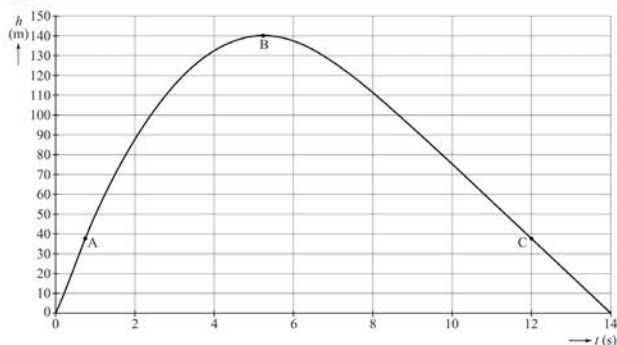
6 Bereken de stroomsterkte door de kabels naar de fontein als beide pompen aan staan.

De twee elektrische pompen hebben elk een vermogen van 500 kW. Het water wordt met een snelheid van 200 km h⁻¹ uit de spuitmond gespoten.

- 7 Bereken het rendement van de elektrische pompen. Neem hierbij voor de dichtheid van water 1,00 kg L⁻¹.
- 8 Toon met een berekening aan of het water de maximale hoogte die op het bordje staat kan halen.

Van de beweging van een waterdruppel in de straal van de fontein is, met een computer, een model gemaakt. In dit model is rekening gehouden met de zwaartekracht en de wrijvingskracht op de druppel. In figuur 2 is het (h,t)-diagram weergegeven dat bij het model hoort.

figuur 2



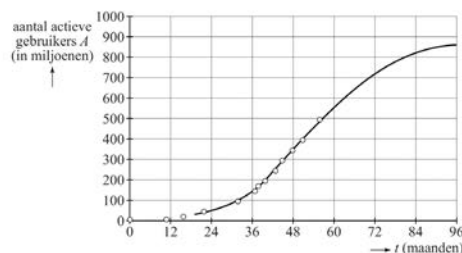
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

- 9 Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage de snelheid van de druppel als deze druppel het wateroppervlak weer raakt.

figuur 1 Fontein van Genève uit examen havo natuurkunde 2016-I

wiskundevraagstukken voor. Bij vraag 18 van het examen wiskunde A havo 2015-I (zie figuur 2) is sprake van een context en moet de kandidaat redeneren over en rekenen aan een gegeven formule, waarbij de grafiek helpt om de juiste strategie te bedenken.

Bij vraag 4 van het examen havo wiskunde B 2015-I [6] zijn een functie en een grafiek gegeven en wordt gevraagd de afgeleide te *bepalen*: zonder de figuur of andere informatiebronnen te gebruiken. Hier volstaat een uitwerking waaruit blijkt welke stappen zijn gezet.



Bij deze grafiek hoort de formule:

$$A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,926^t}$$

Hierin is A het aantal actieve gebruikers in miljoenen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 december 2005.

- 17 Bereken voor welke gehele waarde van t er volgens de formule voor het eerst meer dan 730 miljoen actieve gebruikers zijn.

Volgens de formule zal het aantal actieve gebruikers uiteindelijk nauwelijks meer toenemen en een grenswaarde benaderen.

- 18 Bepaal deze grenswaarde met behulp van de formule.

figuur 2 Sociaal netwerk uit examen havo wiskunde A 2015-I

Bij *berekenen* zijn in wiskundeopgaven vaak verschillende oplossingsstrategieën mogelijk. Bij vraag 14 van het examen vwo wiskunde A 2016-I [6] leest de kandidaat eerst een of twee punten van de lijn uit de grafiek af, waarna hiermee een berekening volgt. Bij vraag 21 van het pilot-examen vwo wiskunde A 2016-I [6] helpen de figuren 2 en 3 de kandidaat een handige oplossingsstrategie te kiezen: systematisch tellen of handig tellen, daarbij rekening houdend met bijvoorbeeld symmetrie of terugkerende patronen. Bij natuurkunde kan het nodig zijn andere informatiebronnen te raadplegen.

Zowel bij *bepalen* als bij *berekenen* is bij natuurkunde én bij wiskunde alleen een antwoord niet voldoende zoals blijkt uit de toevoeging: *uit de uitwerking moet blijken (natuurkunde: welke formules en/of principes zijn toegepast, welke waarden zijn gebruikt en) welke stappen zijn gezet*.

Voorbeelden: aantonen en onderzoeken

Een deel van de nieuwe lijst met voorbeelden van examenwerkwoorden met één gemeenschappelijke omschrijving is in tabel 3 te vinden.

Bij het maken van de nieuwe lijsten werd duidelijk dat het werkwoord *aantonen* bij natuurkunde anders kan worden gebruikt dan bij wiskunde. Bij natuurkunde kan worden gevraagd *aan te tonen of* het gestelde juist is (zie vraag 8 in figuur 1), terwijl bij wiskunde een vraag van dit type wordt geformuleerd als: *onderzoek of* dit juist is (zie vraag 3 in figuur 3). Bij deze beide vraagstellingen is niet a priori duidelijk of het gestelde daadwerkelijk juist is en moet de kandidaat dus eindigen met een conclusie als: 'de bewering is waar' of 'de bewering is niet waar'.

	Algemeen: Tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.
Aantonen dat, laten zien dat	natuurkunde en wiskunde Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Aantonen of (natuurkunde), onderzoeken of (wiskunde)	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

tabel 3 Examenwerkwoorden *aantonen*, *laten zien* en *onderzoeken* in de nieuwe lijst



De hangar op de foto is 175 meter lang. De opening in het vooraanzicht van de hangar heeft de vorm van een parabool.

In figuur 1 zie je deze parabool in een assenstelsel waarvan de x -as op de grond gekozen is en de y -as door de top gaat. Voor de coördinaten van de punten van deze parabool geldt bij benadering de volgende formule:

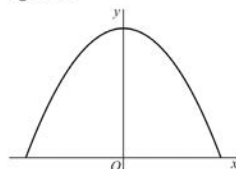
$$y = -0,0306x^2 + 56,6$$

Hierbij zijn x en y in meter.

De hangar op de foto is zo groot dat zelfs een Boeing 747, lange tijd het grootste passagiersvliegtuig ter wereld, er met gemak in past. In 2012 was de Airbus A380 het grootste passagiersvliegtuig ter wereld. De lengte van de Airbus A380 is 72,8 meter. De maximale breedte – van het ene vleugeluiteinde naar het andere – van de Airbus A380 is 79,8 meter. De hoogte boven de grond van de vleugeluiteinden is 11,0 meter.

- 3 Onderzoek of de Airbus A380 in de lengterichting in de hangar past.

figuur 1



figuur 3 Hangar uit examen havo wiskunde B 2015-I

Met de nieuwe lijst is ervoor gekozen beide te handhaven: *aantonen of* bij natuurkunde en *onderzoeken of* bij wiskunde. Bij wiskunde sluit zo voor kandidaten het onderscheid tussen *onderzoeken of* en *aantonen dat* (waar de juistheid van het gestelde al vastligt, zie vraag 10 in figuur 4) beter aan bij de onderwijspraktijk.

Omdat bij natuurkunde het examenwerkwoord *onderzoeken* verband houdt met het praktische onderzoek en meestal is gekoppeld aan practicumopdrachten, is de betekenis compleet anders dan bij wiskunde. Daarom zijn bij natuurkunde *aantonen dat* en *aantonen of* beide in gebruik.

Voorbeeld: afleiden van ...

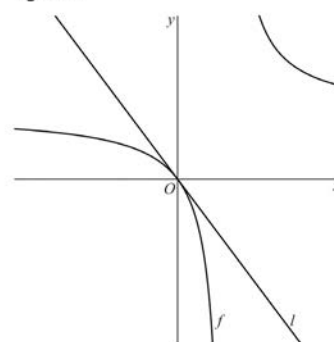
Het *afleiden van een formule of eenheid* in een gegeven situatie is bij natuurkunde gebruikelijk. Bij wiskunde wordt meestal gevraagd een formule af te leiden. In dergelijke gevallen moet de kandidaat aangeven welke stappen zijn gezet.

In vraag 16 van het examen vwo wiskunde A 2016-2^[6] wordt gevraagd aan te tonen dat euro per maand de eenheid van TO is. Bij deze vraag had ook gevraagd kunnen worden deze eenheid van TO af te leiden uit de gegeven eenheden.

Gebroken functie en raaklijn

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{12}{x-3} + 4$. Lijn l raakt in de oorsprong aan de grafiek van f . Zie figuur 1.

figuur 1



De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{4}{3}$.

- 10 Toon met behulp van differentiëren aan dat de richtingscoëfficiënt van l inderdaad $-\frac{4}{3}$ is.

figuur 4 Gebroken functie en raaklijn uit examen havo wiskunde B 2016-I

Voorbeeld: bewijzen

Bewijzen (dat) (alleen wis- kunde B)	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt
--	--

tabel 4 Het examenwerkwoord *bewijzen* in de nieuwe lijst voor alleen wiskunde B.

De wiskundelijst bevat het 'strengere' examenwerkwoord *bewijzen*, dat alleen bij wiskunde B wordt gebruikt. Als een bewijs wordt gevraagd, moet de kandidaat redeneren of een *exacte* berekening uitvoeren, dus zonder gebruik te maken van de specifieke eigenschappen van de grafische rekenmachine. Elke bewijssap moet worden beschreven. Controle door een of meer voorbeelden is onvoldoende. In sommige gevallen is het geven van een tegenvoorbeeld wél voldoende, namelijk als hiermee de onjuistheid van het gestelde wordt bewezen.

Tot slot

We hopen dat de nieuwe lijsten examenwerkwoorden voor de vakken natuurkunde en wiskunde meer duidelijkheid geven aan onze eindexamenkandidaten. En we nemen aan dat de gecombineerde lijst bij het voorbereiden op het eindexamen zal helpen bij het bespreken van de overeenkomsten en verschillen in vraagstelling bij natuurkunde en wiskunde. Wellicht kan deze lijst zelfs een eerste stap zijn op weg naar verdere afstemming met de andere bèta-vakken.

Alle voorbeelden van examenopgaven (ook de voorbeelden die niet afgebeeld zijn) zijn terug te vinden op de site.



vakbladeuclides.nl/927cvte

Noten

- [1] In de examen(werk)woordenlijst voor wiskunde worden ook de bijwoorden 'algebraïsch' en 'exact' omschreven. In verband met het leesgemak van dit artikel worden desondanks de in de lijst beschreven woorden 'examenwerkwoorden' genoemd.
- [2] Zie artikel '(Werk)woorden in de centrale examens' in *Euclides* 88-4 (februari 2013).
- [3] Voor het adviesrapport van deze werkgroep zie www.slo.nl/organisatie/recentepublicaties/afstemmingwina
- [4] Met 'specifieke opties' wordt bedoeld op alles wat het gewone rekenwerk ontstijgt, zoals procedures om vergelijkingen op te lossen, nulpunten te zoeken of hellingen en oppervlakten te benaderen. Omdat technologie zich blijft ontwikkelen en de grafische rekenmachine veel stof doet opwaaien onder wiskundedocenten, heeft het CvTE de werkgroep *ICT bij het CE wiskunde havo/vwo* ingesteld met de opdracht de toekomst van ICT bij de centrale examens wiskunde nader te onderzoeken, zodat mogelijk de grafische rekenmachine als hulpmiddel kan worden vervangen door GeoGebra in een omgeving van Facet.
- [5] Als de vergelijking $7 \cdot \log(x) - 2 = 0$ exact moet worden opgelost, noteert de kandidaat bijvoorbeeld $7 \cdot \log(x) = 2$ dus $\log(x) = 2/7$ dus $x = 10^{2/7}$. Bij een algebraïsche oplossing worden deze laatste twee stappen: $\log(x) \approx 0,29$ dus $x \approx 1,93$.
- [6] vakbladeuclides.nl/927cvte

Over de auteur

Jacqueline Wooning is clustermanager exacte vakken havo/vwo bij het College voor Toetsen en Examens. Dit artikel is tot stand gekomen in samenwerking met de voorzitters van de vaststellingscommissies natuurkunde, wiskunde AC en wiskunde B en de toetsdeskundigen van het Cito. E-mailadres: info@cvte.nl

Angst voor wiskunde mogelijk genetisch bepaald

Genen spelen mogelijk een significante rol in de mate van angst en nervositeit die personen kunnen ervaren voor wiskundige opdrachten, maar ook rond ruimtelijk inzicht en meetkunde. Dat komt naar voren in een nieuw onderzoek. De studie is bedoeld om aan te tonen dat mensen die niet goed zijn in wiskunde dat niet per definitie hoeven te wijten aan een gebrek aan vaardigheid, maar simpelweg aan angst voor het betreffende onderwerp. Onderzoekers van King's College London bestudeerden 1400 tweelingen en identificeerden de verschillende soorten angsten van de deelnemers, die tussen de 19 en 21 jaar waren. Alle soorten angst, voor wiskunde, ruimtelijk inzicht of angst in het algemeen, bleken een wezenlijk verband met genen te hebben.

Bron: *NU.nl*

Klopt dit wel?

In de rubriek 'Klopt dit wel?' van *de Volkskrant* zijn de beweringen uit bovenstaand artikel onder de loep genomen. Biopsycholoog Elsje van Bergen waagt de stelling te betwifelen. Zij stelt dat angst voor wiskunde ook zou kunnen voortkomen uit gebrek aan aanleg voor wiskunde. Daarnaast valt haar op dat alleen meisjes aanleg voor wiskundeangst bleken te hebben. Dat kan bijvoorbeeld betekenen dat juist de schoolomgeving iets bij meisjes aanwakkert dat aan jongens voorbijgaat. De wetenschapper van de VU noemt het preventief meten van wiskundeangst in het DNA onzin. 'Voor wiskundevaardigheden zijn bijvoorbeeld maar een paar genen bekend en die verklaren maar drie procent van die eigenschap. Voor wiskundeangst is nog nooit naar zulke genen gezocht. Je kunt voorlopig maar beter kijken of kinderen achterlopen met hun vaardigheden en ze dan helpen.'

Bron: *de Volkskrant*



figuur 1 Van links naar rechts: Anouk Eggink, Esther Steenkamer, Aimée Jacobs, Christel van Diepen

Succes voor Nederlandse dames bij Europese Olympiade

Bij de zesde European Girls' Mathematical Olympiad begin april in het Zwitserse Zürich heeft het Nederlandse team een zilveren en een bronzen medaille behaald. De zestienjarige Christel van Diepen uit Malden (Stedelijk Gymnasium Nijmegen) loste drie van de zes opgaven in de wedstrijd foutloos op, scoorde 25 punten en sleepte hiermee zilver in de wacht. Esther Steenkamer (16) uit Roggel (Scholengemeenschap Sint Ursula, Horn) behaalde 16 punten en kwam daarmee voor brons in aanmerking. Aimée Jacobs (17) uit Nieuw-Vennep (Katholieke Scholengemeenschap Hoofddorp) loste een opgave foutloos op en verdiende hiermee een eervolle vermelding. Het Nederlands kwartet werd gecompleteerd door Anouk Eggink (16, Eetty Hillesum Lyceum Het Vlier, Deventer).

Aimée, Christel en Esther vertegenwoordigden ook vorig jaar Nederland bij deze olympiade. Toen behaalden Christel en Esther beiden een bronzen medaille. Beide meisjes waren trots opnieuw een medaille te hebben behaald. Christel: 'De opgaven bij dit soort wedstrijden zijn echt heel moeilijk, dus is het enorm cool om er drie op te lossen. Volgend jaar mag ik weer meedoen en dan ga ik voor goud!'

Bron: *WiskundePersDienst*

Hogere omzet bij hotelboekingen

Met een nieuwe wiskundige methode kan een hotel op langere termijn gemiddeld 5% meer omzet halen als er rekening wordt gehouden met online reviews. Dirk Sierag, promovendus van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam, analyseerde met boekingsgegevens uit het verleden het gedrag van consumenten die hotelkamers boeken. Aan de hand van de resultaten maakte hij wiskundige modellen die hotels kunnen ondersteunen bij het bepalen van een optimale prijs van hotelkamers. Eind maart promoveerde hij aan de Vrije Universiteit Amsterdam op zijn proefschrift *Revenue Management in the Hotel Industry*. De onderzoeksresultaten zijn niet alleen toepasbaar op hotel- en Airbnb-kamers maar ook op films, concerten, sportevenementen en bijvoorbeeld Uber-taxiritten. Sierag bestudeerde welke factoren belangrijk zijn bij het boeken van hotelkamers, en hoe hotels hier optimaal rekening mee kunnen houden om hun winst te maximaliseren, bijvoorbeeld door hun prijzen aan te passen. De modellen die hij ontwikkelde houden onder meer rekening met annuleringsgedrag, de invloed van online reviews en de onzekerheid in de vraag. Sierag: 'Reviews hebben een tweezijdig effect, dat het optimaliseren van bijvoorbeeld hotelprijzen compliceert: aan de ene kant hebben reviews invloed op de vraag, en aan de andere kant heeft de perceptie van de prijs-kwaliteitsverhouding van de klant invloed op de review of rating die hij zal geven. Op de lange termijn kan het dan in het voordeel van het hotel zijn om eerst zijn prijs niet te hoog te zetten. De klant zal dan namelijk een positievere rating geven. Dit resulteert in een hogere vraag naar het hotel, wat op de lange termijn hogere opbrengsten oplevert. Ik zie ook mogelijkheden voor toepassing van mijn modellen op *collaborative consumption*, waarbij producten of diensten worden gedeeld onder relatieve onbekenden, zoals Couchsurfing, Airbnb, Blablacar, Lyft en Uber.'
Bron: CWI Persbericht

Waarom hebben paspoorten geen pincode?

Ieder jaar maken miljoenen EU-burgers hun paspoort zoek, waarvan er veel in het criminele circuit terechtkomen. Dat roept de vraag op waarom paspoorten niet beveiligd zijn met een pincode, net als een bankpasje. De cryptografische techniek – een wachtwoord in combinatie met een hashcode – is al decennia beschikbaar, en het paspoort hoeft niet eens een chip te bevatten. Maar de praktijk is weerbarstig, en cryptografen zien toch meer in biometrische beveiliging. Meer informatie: <https://www.nemokennislink.nl/publicaties/waarom-hebben-paspoorten-geen-pincode>
Bron: WiskundePersDienst

Nellie Verhoef geridderd

Op 26 april jl werd door de burgemeester van haar woonplaats Raalte aan ons lid Nellie Verhoef namens de koning medegedeeld dat zij benoemd was tot ridder in de orde van Oranje Nassau. Een welverdiende onderscheiding voor een bescheiden, zeer hardwerkend en altijd tot helpen en ondersteunen bereid persoon. Voor ons, haar studenten en haar collega's telt haar passie voor goed wiskunde-onderwijs. De passie voor 'haar' studenten ging vaak zover dat ze 24/7 voor hen bereikbaar was en is, ook in vakanties. Daarnaast heeft ze al sinds haar studie in Utrecht een passie om wiskunde op een aantrekkelijke manier te onderwijzen. Wij denken daarbij niet alleen aan haar bijdrage aan het *Handboek voor Wiskundendidactiek* (2012), maar ook haar redacteurschap van *Nieuw Archief voor Wiskunde* en haar onderwijs en onderzoek betreffende Lesson Study. Samen met Siebrich de Vries en Sui Lin Goei schreef zij daarover een praktische gids voor het onderwijs. Om in aanmerking te komen voor haar 'lintje' telde zeker haar sociale betrokkenheid mee; ze heeft veel bezoekwerk gedaan vanuit de kerk aan jongeren en ouderen. Ook heeft ze veel gespreksgroepen geleid en ook nu, na haar pensionering, werkt ze gestaag door en bezoekt daarnaast oude mensen in het carehotel en begeleidt ze een gespreksgroep over onderwerpen die leven en dood raken. Kortom: een (ex)collega om trots op te zijn.



figuur 2 Nellie Verhoef

KWADRATISCHE VERBANDEN

Driehoekige plankjes verzagen met David Wells, pannenkoeken versnijden met Ionica Smeets en kortingspercentages berekenen met Paul Drijvers. Jacques Jansen komt overal kwadratische verbanden tegen ...

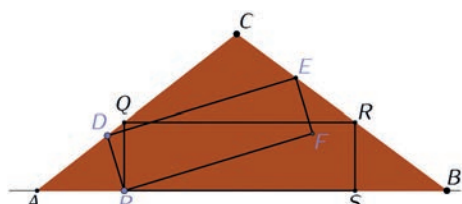


figuur 1

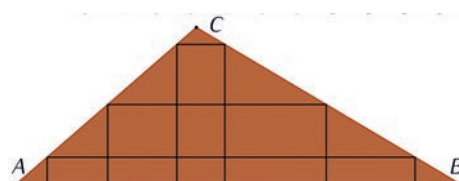
Optimaliseringsprobleem

Met een plankje en een zaag de klas in, dat doe je vast niet elke dag. We beginnen met een vraagstuk van puzzel-ontwerper David Wells^[1]: 'Wat is de grootste rechthoek die zich in één stuk uit een driehoekig stuk hout laat zagen? Bewijs ook je antwoord.' Wells gaat uit van een geheel willekeurige driehoek. Hij vraagt het bewijs niet, dat voegen wij eraan toe. De vraag is: 'Hoe open bied je zo'n probleem aan, bij de leerlingen?' En welke tips, met name op welk moment, ga je de leerlingen geven? Het zagen van een plankje gaan we in de les vervangen door het knippen van een papieren driehoek. Terug naar de vraagstelling. David Wells vertelt er niet bij hoe er gezaagd mag worden. Je kunt bijvoorbeeld een gaatje boren ergens in het binnengebied van het plankje en vandaaruit een zo'n groot mogelijk rechthoekig plankje zagen. Dat zal wel niet de bedoeling zijn, Wells had het alleen over zagen. De zaagsnede zetten we dus ergens op de omtrek van het plankje. Maar onder welke hoek gaan we dan zagen? Het is handig als de leerlingen het houden bij het knippen in papier en tijd krijgen om te experimenteren. Ik voorspel dat hieruit interessante discussies voort zullen komen. Dan komt er vast een moment om GeoGebra in te zetten, een willekeurige driehoek in te voeren en te gaan labelen. We nemen een willekeurig punt P op zijde AB . Daar gaan we nu virtueel in knippen. Zie figuur 2.

figuur 2

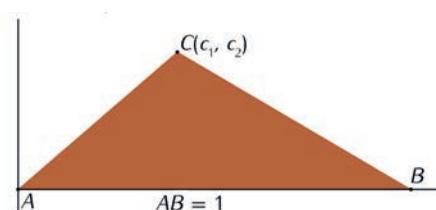


Punt P en punt D op zijde AC , zijn variabel. Punt P kunnen we over zijde AB verplaatsen en punt D over zijde AC . PQ stelt de haakse zaagsnede voor. Bijbehorende rechthoek $PQRS$ laten we vast staan. Punt D schuiven we beginnend bij punt Q richting punt A . We zien dan dat punt E zich verplaatst van punt R naar punt C . De oppervlakte van de veranderde rechthoek $PDEF$ vergelijken we met de oppervlakte van rechthoek $PQRS$. Dit experimenteren, zal nieuwe vragen oproepen. De bevindingen van de docent horen we graag. We leggen ons nu beperkingen op. We gaan haaks knippen of zagen op één van de zijden. Dat betekent dat de basis van de gevraagde rechthoek op zijde AB komt te liggen. In figuur 3 is een drietal van dit soort rechthoeken getekend.



figuur 3

We kunnen driehoek $\triangle ABC$ tekenen in een assenstelsel met punt A in de oorsprong en zijde AB op de X -as, zie figuur 4.

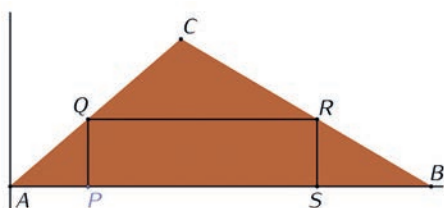


figuur 4

Een vraag aan de leerlingen is: hoe leg je een willekeurige driehoek vast? Je weet dat dit meestal gaat met drie gegevens. Een antwoord kan zijn: alle zijden van de driehoek zijn gegeven. Wij kiezen ervoor om voor AB de

lengte 1 te kiezen en de coördinaten te geven voor punt C. Zie figuur 4. Maar om de grootste rechthoek te vinden, zit je voordat je het weet in een woeste rekenpartij. Hoe kunnen we dat voorkomen?

Als we het hoekpunt linksboven van zo'n rechthoek verschuiven van punt A naar punt C, dan valt op dat de oppervlakte van de rechthoek toeneemt tot een vermoedelijk maximum en dan weer afneemt tot en met de waarde nul. Hoe vinden we nu die grootste rechthoek?



figuur 5

We gaan punt P aangeven met een getallenpaar $(p, 0)$. Dan willen we de coördinaten van punt Q weten. Punt Q

ligt op lijn AC met vergelijking $y = \frac{c_2}{c_1} \cdot x$ en kunnen we

dus aangeven met $Q(p, \frac{c_2}{c_1} \cdot p)$. We krijgen de neiging om

een formule op te stellen voor de oppervlakte van rechthoek PQRS...

Is het nodig om een formule op te stellen en de afgeleide te gebruiken?

De hoogte van rechthoek PQRS is recht evenredig met p . Als we punt P verschuiven vanaf punt A richting B, dan neemt de hoogte lineair toe. De breedte van de rechthoek neemt juist af. De breedte is ook in p uit te drukken. Er is een lineair verband tussen de breedte van de rechthoek

en p . (ga maar na dat $PS = 1 - \frac{p}{c_1}$). Het kan niet anders

dan dat er een kwadratisch verband is tussen de oppervlakte van rechthoek PQRS en p , de x -coördinaat van punt P. Een toenemende hoogte vermenigvuldigen we met een afnemende breedte. Grafisch gezien wijst dat op een bergparabool met als domein $[0, \text{eerste coördinaat van punt C}]$. Dat betekent dat punt P horend bij de grootste rechthoek – uit symmetrieoverwegingen – een x -coördinaat heeft die de helft is van de x -coördinaat van punt C. Punt Q is dus het midden van lijnstuk AC. Lijnstuk QR is een middenparallel van $\triangle ABC$. Daaruit kun je afleiden – laat leerlingen daar eens rustig over nadenken – dat de oppervlakte van de grootste rechthoek gelijk is aan de helft van de oppervlakte van $\triangle ABC$. Deze laatste conclusie is niet geheel onbelangrijk. Het maakt dus niet uit op welke zijde we de basis van de rechthoek leggen. Bij een stomphoekige driehoek hebben we geen keus maar bij een

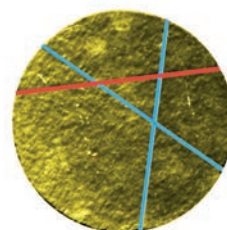
scherphoekige driehoek kunnen we uit drie zijden kiezen om de basis van de rechthoek op te leggen. Bij een rechthoekige driehoek hebben we twee keuzes.

Gerard Koolstra merkte al in zijn artikel in *Euclides* (92) op dat we misschien te snel grijpen naar de vaardigheid differentiëren.^[2]

Pannenkoekgetal

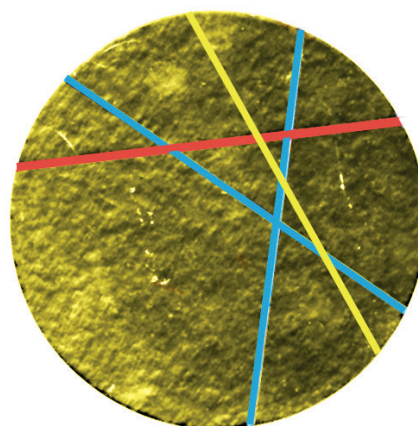
Elke week ziet Ionica Smeets minstens één getal.^[3] Je kunt haar leuke columns lezen in 'Sir Edmund', een van de zaterdagbijlagen van *de Volkskrant*. Maar welk getal zag zij eind december? Om daar achter te komen, moet je – of toch niet? – een pannenkoek bakken en in heel veel stukken snijden. In figuur 6 is een stukje van haar artikel over het pannenkoekgetal afgebeeld.

Wél bijzonder is dat 2017 een pannenkoekgetal is. Die getallen krijg je door te tellen in hoeveel stukken je een pannenkoek maximaal kunt verdelen met een aantal rechte sneden. Eén keer snijden: twee stukken. Twee keer snijden: vier stukken. Drie keer snijden (hier begint het al te wijken van wat normale mensen doen): zeven stukken. Met nog een keer snijden, krijg je er maximaal elf. Bij acht sneden kom je tot 37 stukken. En bij 63 keer snijden, krijg je er – in theorie – 2017, iets om eens te proberen dit jaar. Al kunnen mensen die niet als 63 lamsch 2, of handig zijn met een mes beter eens afleiden wat de formule is om het volgende pannenkoekgetal te vinden.



figuur 6

'Ionica mag er wat duidelijker bij vertellen dat de stukken niet even groot hoeven te zijn', was al snel mijn oordeel. Even later besef ik, dat ik beter had moeten lezen. Op dat idee moet je zelf komen. Je bent geneigd om te zorgen voor even grote stukken, maar dat hoeft dus niet. De derde snede doe je zo, dat je door drie van de vier eerder ontstane stukken gaat. Zo krijg je maximaal zeven stukken. Zie figuur 6. Bij nog een keer snijden krijg je maximaal elf stukjes. Zie figuur 7.



figuur 7

Ionica schrijft dat ze niet zo handig is met een mes, maar dat ze beter is in het afleiden van een formule. Maar hoe doe je dat? Je begint vaak met een tabel en je hoopt dan dat er een patroon in te ontdekken valt, zie tabel 1.

aantal sneden	0	1	2	3	4	5	6	7	8
aantal stukken	1	2	4	7	11	16	22	29	37
verschil		1	2	3	4	5	6	7	8
verschil van de verschillen			1	1	1	1	1	1	

tabel 1

Vermoeden

De tabel wijst op een kwadratisch verband:

$y = ax^2 + bx + c$ waarbij x het aantal keer snijden is en y het aantal stukken pannenkoek. We zien meteen zien dat $c = 1$. Met de getallenparen (1, 2) en (2, 4) kunnen we twee vergelijkingen opstellen en we vinden de formule $y = 0,5x^2 + 0,5x + 1$. En wat blijkt wanneer we $x = 63$ invullen? $0,5 \cdot 63^2 + 0,5 \cdot 63 + 1 = 2017$.

Andere aanpak

Voordat je de derde snede maakt, heb je vier stukken. De derde snede maak je zo dat je door zoveel mogelijk bestaande stukken gaat. Gaan we modelleren dan trekken we de derde koorde zo, dat de twee eerste korden gesneden worden in twee verschillende punten. In totaal heb je bij de derde snede de vier stukken van de tweede snede vermeerderd met drie en dat geeft in totaal zeven stukken. De vierde koorde trek je zo dat de eerste drie korden gesneden worden in drie verschillende punten. Het vorige aantal stukken wordt vermeerderd met vier. Dat doet vermoeden dat bij de n^e snede het totaal aantal stukken dat van de vorige snede vermeerderd met n is. Dat levert een recursieve betrekking op $U(n) = U(n-1) + n$ met startwaarde 1 en het GR-resultaat zie je in figuur 8.

Plot1 Plot2 Plot3	<table><tr><th>n</th><th>u(n)</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>11</td></tr><tr><td>5</td><td>16</td></tr><tr><td>6</td><td>22</td></tr></table>	n	u(n)	0	1	1	2	2	4	3	7	4	11	5	16	6	22	<table><tr><th>n</th><th>u(n)</th></tr><tr><td>60</td><td>1831</td></tr><tr><td>61</td><td>1892</td></tr><tr><td>62</td><td>1954</td></tr><tr><td>63</td><td>2017</td></tr><tr><td>64</td><td>2081</td></tr><tr><td>65</td><td>2146</td></tr><tr><td>66</td><td>2212</td></tr></table>	n	u(n)	60	1831	61	1892	62	1954	63	2017	64	2081	65	2146	66	2212
n	u(n)																																	
0	1																																	
1	2																																	
2	4																																	
3	7																																	
4	11																																	
5	16																																	
6	22																																	
n	u(n)																																	
60	1831																																	
61	1892																																	
62	1954																																	
63	2017																																	
64	2081																																	
65	2146																																	
66	2212																																	
nMin=0																																		
u(n)=u(n-1)+n																																		
u(nMin)=u(1)																																		
w(n)=																																		
w(nMin)=																																		
w(nMin)=																																		
Press + for Δ	Press + for Δ																																	

figuur 8

Verlaging - verhoging

Ik was benieuwd naar de cursus Wiskundige Denkactiviteiten gegeven op de TU/e door Paul Drijvers.^[4] Bij de eerste ontmoeting werd ik begroet met de opmerking 'dat weet jij toch allemaal al'. Niet dus. Bovendien hanteer ik de slogan 'een leven lang leren'. Bij de eerste sessie werd het probleem *Treinprijzen*, zie figuur 9, aangeboden. Het deed mij meteen denken aan het probleem van de caissière: 10% loonsverhoging gevolgd door 10% loonsverlaging, kom je dan weer uit op het oorspronkelijke loon? Bij het speeddaten – meer dan 10 minuten krijg je

niet- luidde een vraag: 'hoe zou je de wiskundig-denken-opdracht nog kunnen aanpassen om ander/meer wiskundig denken te stimuleren'? Mijn groepje van vier viel stil bij deze vraag. De volgende dag kreeg ik wel een idee: 'daag leerlingen uit om verschillende verhogingen en verlagingen te berekenen en om tot een formule te komen'.



figuur 9

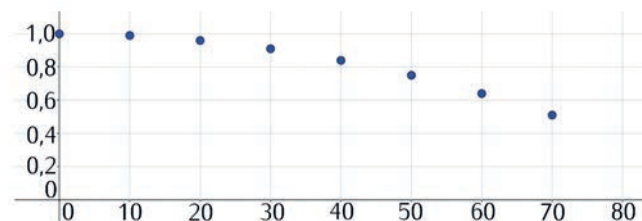
We gaan daarvoor verschillende prijspercentages bekijken. Ook kunnen we kijken naar een andere context. Eerst maar eens de caissière-context.

Voorbeeld

10% loonsverhoging en dan 10% loonsverlaging. Met groeifactoren geeft dat $1,1 \times 0,9 = 0,99$. Dat betekent een procentuele achteruitgang van 1%. Bij 20% verhoging en dan verlaging geeft dat $1,2 \times 0,8 = 0,96$. Dat betekent een daling van 4%. (Aan de leerlingen kan gevraagd worden waarom er altijd een daling uitkomt). Dit geeft reden tot verder onderzoek. Welk verband bestaat er tussen verhogen-verlagen met hetzelfde percentage en de echte procentuele daling die daarop volgt?

Hoe gaan leerlingen dat onderzoeken? We kunnen ze stimuleren tot het maken van een tabel. We nemen bijvoorbeeld een stapgrootte van 10%. We kunnen ook meteen overgaan tot $p\%$ verhoging en verlaging en een formule afleiden. Laat de leerlingen eerst maar werken met een tabel (zie tabel 2 op p. 27).

Leerlingen kunnen eventueel een losse-punten-grafiek tekenen met op de horizontale as het percentage. Zie figuur 10.



figuur 10

percentage	groefactor verhoging	groefactor verlaging	groefactor verhoging-verlaging	verschil	verschil van verschil
0	1	1	1		
10	1,1	0,9	0,99	0,01	
20	1,2	0,8	0,96	0,03	0,02
30	1,3	0,7	0,91	0,05	0,02
40	1,4	0,6	0,84	0,07	0,02
50	1,5	0,5	0,75	0,09	0,02
60	1,6	0,4	0,64	0,11	0,02

tabel 2

Blijkbaar is er sprake van een *kwadratisch verband* tussen percentage p en groefactor 'verhoging-verlaging' g_w . De formule is van de vorm: $g_w = ap^2 + bp + c$. Als het percentage gelijk is aan nul, dan is de bijbehorende groefactor gelijk aan 1 en volgt hieruit dat $c = 1$. De grootste waarde van groefactor g_w is 1. Als de top van de bijbehorende (halve)bergparabool op de verticale as ligt dan moet de waarde van b gelijk aan nul zijn. De groefactor wordt bij toenemende waarden van p steeds kleiner. Dus a zal negatief zijn. De formule zal dus van de vorm zijn: $g_w = 1 + ap^2$ met $a < 0$.

Bij invulling van $p = 10$ en $g = 0,99$ krijgen we:

$$0,99 = 1 + a(10)^2. \text{ Hieruit leiden we af: } a = -\frac{1}{10000}.$$

$$\text{Tot slot: de kwadratische formule wordt } g_w = 1 - \frac{p^2}{10000}.$$

De formule kunnen we ook rechtstreeks uit de twee groefactoren afleiden.

$$\text{Groefactor verhoging} = \frac{100\% + p\%}{100\%} = 1 + \frac{p}{100}.$$

$$\text{Groefactor verlaging} = \frac{100\% - p\%}{100\%} = 1 - \frac{p}{100}.$$

$$\text{Groefactor verhoging-verlaging} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1 - \left(\frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{p^2}{10000}.$$

Het lijkt mij zinvol om leerlingen nog eens te wijzen op het nut van het bijzondere product

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \text{ Oogst: } g_w = 1 - \frac{p^2}{10000}.$$

$$\text{Het effect is dus dat je gaat van } 100\% \text{ naar } 100\% - \frac{p^2}{100}\%.$$

Kun je naar nul procent gaan? Dat kan dus bij verhoging van 100% en daarna verlaging van 100%. Dus je gaat eerst de prijs verdubbelen en daarna kom je op nul uit.

Welke waarden kan p aannemen?

Praktisch gezien kun je een prijsverhoging geven van 200%. De prijs wordt driemaal zoveel. Een korting van meer dan 100% is niet realistisch. Maar waarom niet?

Ok, volgens auteur Marjolein Kool zijn er uitzonderingen. Zie haar boek *Alledaags rekenen*.^[5] Een citaat uit het boek: 'Neem de kapper die zijn modellen €25,- uitbetaalt. Normaal kost een kappersbeurt €50,-. Nu mag je gratis. Dat is 100% korting. Je krijgt zelfs €25,- uitbetaald. Dat betekent dus 150% korting. Soms kan iets dus tóch met meer dan 100% afnemen. Maar dat lukt dan weer niet als het gaat om het kortwieken van je haren.' In de context van prijsverhoging-prijsverlaging kunnen we p laten variëren van 0 tot en met 100.



figuur 11

Uitdaging

Probeer één van de drie problemen eens uit. Wij horen graag je bevindingen. En zeker hoe open of gesloten je het probleem of de problemen hebt aangeboden.

Noten

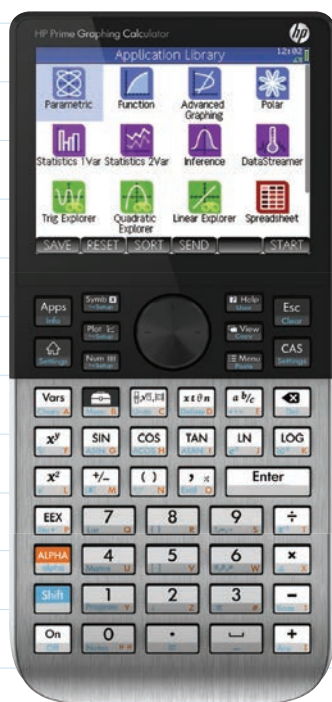
- [1] Wells, D. (2003). *Merkwaardige & interessante puzzels*. Amsterdam: Ooievaar.
- [2] Koolstra, G. (2016). Enkele optimaliseringsproblemen. *Euclides* 92(4), 14-17.
- [3] Smeets, I. (30-12-2016). Wat kunnen we op het getallenvlak van 2017 verwachten? *de Volkskrant*, bijlage Sir Edmund.
- [4] Paul Drijvers. *Cursus WDA*.
- [5] Kool, M. & Moor, E. de (2016). *Alledaags rekenen*. Amsterdam: Uitgeverij Bert Bakker.



vakbladeuclides.nl/927jansen

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl



New Body & New Brain

HP Prime



Wilt u meer weten over de krachtigste rekenmachine voor uw leerlingen?

Online support voor Noordhoff en Malmberg beschikbaar!

En voor een vergelijkbare prijs!

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met meer rekenkracht en geheugen dan welke andere machine dan ook.
- Nieuwe consistente menustructuur met krachtige educatieve applicaties op een touchscreen: het is tenslotte 2016.
- Examenmode op de Prime betekent 1 knop indrukken. Binnen een paar tellen een examenlokaal in de juiste CvTE examenstand.
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief gratis emulator (dus ook voor uw leerlingen)!

Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop, demo-units of een school-offerte neemt u contact op met **info@hp-prime.nl**



ETNOMATEMÁTICAS IN COLOMBIA

Fundación Grupo Proa
Juliëtte Feitsma

In 2015/2016 hielp het WWF een onderwijsinstituut in het zuiden van Colombia bij de ontwikkeling van een lesplan 'etnomatemáticas'. Voor een bedrag van 2600 euro werden didactische materialen aangeschaft en honoraria betaald.

Het doel van dit project was de integratie van lokale kennis in het studieplan van de zesde graad van het voortgezet onderwijs. Kinderen leren in dit project wat westerse en inheemse kennis ons kunnen vertellen over de oorsprong van het heelal, hemellichamen en sterrenbeelden. Daarnaast hebben zij leren werken en rekenen met hoeken, afstanden en geometrische figuren. De verslagen van Stichting Grupo Proa zijn vertaald en bewerkt door Juliëtte Feitsma.



figuur 1 Deelnemers aan het project 'etnomatemáticas', meetkunde en de sterren

Inheems en westers wereldbeeld

In het zuiden van Colombia (departement Amazonas) bevindt zich het inheemse onderwijsinstituut Francisco José de Caldas. De instelling heeft vier vestigingen, waarvan drie *primaria* (basisonderwijs) en een *secundaria* (middelbaar onderwijs). Samen hebben deze scholen 1100 leerlingen, afkomstig uit acht lokale gemeenschappen. Ouders, docenten en lokale bestuurders zien het als hun taak om jongeren voor te bereiden om in twee werelden te leven, de westerse en de inheemse wereld. Daarvoor is het nodig dat jongeren kennis hebben van het inheemse wereldbeeld, maar zich ook de universele en westerse kennis eigen maken. Dat is een grote uitdaging voor de inheemse organisaties en het ministerie van onderwijs. Het instituut Francisco José de Caldas kreeg de opdracht een samenhangend model van 'eigen' onderwijs te ontwikkelen voor de vier vestigingen.

Etnische wiskunde

Een van de thema's dat zich goed leent voor het in samenhang aanbieden van een westers en een inheems wereldbeeld is 'etnomatemáticas'. Om hier leerstof voor te

ontwikkelen is het noodzakelijk om toepassingsgebieden van de inheemse wiskunde te herkennen en die te koppelen aan competenties die in het nationale lesplan zijn geformuleerd. Op dat gebied is er nog weinig ervaring. Er bestaan in deze streek al wel experimenten die astronomie van de Tikuna (één van de lokale gemeenschappen) in de wiskunde gebruiken, en met succes. Dit gebeurt echter nog niet in het onderwijsinstituut Francisco José de Caldas. Vandaar dat verschillende organisaties dit project zijn gestart dat tot doel heeft om het onderwijs in 'etnomatemáticas' te verbeteren op deze school. Het project gaat uit van de nationale standaardcompetenties en het eigen-onderwijs-model, waarin een grote rol is weggelegd voor kennis en onderwijsmethoden vanuit de eigen traditie en cultuur.

Meetkunde en sterren

Een werkgroep bestaande uit schoolleiding, docenten, leden van de organisatie Mitote Astronómico en adviseurs van de stichtingen Grupo Proa en Mandioca heeft in overleg met twee lokale gemeenschappen twee kennisgebieden gekozen: inheemse sterrenbeelden en traditionele weefsels. 'Meetkunde en de sterren' is vervolgens als hoofdthema voor dit project aangewezen. De volgende competenties op het gebied van ruimtelijk denkvermogen en meetkunde zijn aan dit thema te koppelen:

- herkennen en benoemen van relaties tussen meetkundige elementen;
- objecten kunnen lokaliseren in een cartesisch coördinatenstelsel en ook geografisch via de ligging van sterrenbeelden;
- classificeren van veelhoeken met betrekking tot hun eigenschappen via Tikuna-sterrenbeelden;
- meetkundige begrippen gebruiken om de positie van elementen in de omgeving te bepalen;
- technieken en gereedschappen gebruiken voor de constructie van vlakke en ruimtelijke figuren op basis van gegeven aanwijzingen.

Pedagogisch leermodel

De basis van het te ontwikkelen lesplan is het 'eigen' pedagogisch leermodel. Dat model gaat ervan uit dat leren plaatsvindt volgens de volgende leermomenten:

- Vorming van lichaam en geest. Vaardigheden die je van jongs af aan leert vanuit je eigen leefomgeving.
- Mondelinge kennisoverdracht. Kennis die je ontvangt via grootouders, ouders, dorpsleiders, leraren.
- Praktische ervaring. Je verricht, alleen of samen met anderen, activiteiten of werkzaamheden die je in staat stellen de verkregen kennis in praktijk te brengen; ondertussen nemen je ervaring en kennis toe.
- Reflectie. Je stelt jezelf vragen over je handelingen, denkt na, analyseert en maakt anderen deelgenoot van je ervaringen. Dat doe je vóór, tijdens en na de activiteiten of werkzaamheden.
- Feedback. Je verricht opnieuw activiteiten, werkzaamheden en oefeningen. Dat geeft de gelegenheid nieuwe kennis te verkrijgen en benodigde *tools*.
- Acceptatie. Aanvankelijk is de acceptatie persoonlijk, maar daarna geldt die voor het gezin en de gemeenschap: familieleden, grootouders en leiders van gemeenschappen.

Lesactiviteiten

Bij de verschillende leermomenten zijn lesactiviteiten ontworpen. Een paar voorbeelden:

Leermoment 2 (mondelinge kennisoverdracht): een grootvader is naar school gekomen en heeft mythen verteld over het ontstaan van sterrenbeelden van de Tikuna. De leerlingen hebben geluisterd en getekend, eerst vrij, daarna op een blad waarop een rooster van punten is aangebracht. Leermoment 3 (praktische ervaring). De leerlingen hebben eerst een video bekeken over westerse sterrenbeelden. Daarna zijn ze naar een voetbalveld gegaan en hebben sterrenbeelden onderzocht met behulp van een astronomische laser.

Leermoment 4 (reflectie). De ontwikkeling van de volgende wiskundige vaardigheden komt aan de orde: de begrippen hoek, zijde, hoekpunt, het classificeren van veelhoeken, de begrippen cirkel, straal, diameter, sector, koorde, segment en het uitrekenen van omtrek en oppervlakte. Leerlingen passen deze kennis toe door zelf een sterrenbeeld te construeren met paaltjes en touw. Ze krijgen instructie over de locatie van de sterren, het aantal zijden, de grootte van hoeken en de lengte van zijden.

Leermoment 5 (feedback). Leerlingen ontdekken wiskunde met behulp van origami. Tijdens de constructie van het veelvlak benoemen de leerlingen bij elke stap de meetkundige figuren die ze zullen zien. Het is belangrijk dat elke stap goed wordt uitgewerkt en begrepen om later de figuur in elkaar te zetten die ze gaan construeren.

Resultaten

Aan het project deden 71 leerlingen mee, die dankzij dit project wiskundige vaardigheden opdeden op het gebied



figuur 2 Gekochte wiskundeboeken en didactisch materiaal

van de meetkunde met gebruikmaking van sterrenbeelden. Daarnaast is er door de betrokken docenten en leerlingen een expositie georganiseerd. Bij die expositie toonden de leerlingen hun nieuwe vaardigheden aan hun families en aan de overige docenten en leerlingen. Zodoende komt de opgedane kennis ten goede aan meer dan 900 leerlingen en acht gemeenschappen. Ook belangrijk om te vermelden is dat hoofddocente Solanlly heeft besloten om in haar onderzoek voor haar master een lesplan voor het basis-onderwijs te ontwikkelen met dit model. Daar kunnen dan weer meer dan vijftien onderwijzers hun voordeel mee doen.

Projectorganisatie

De ontwikkeling en uitvoering van dit project kwam mede tot stand dankzij:

de schoolleiding en drie wiskundedocenten.

Stichting Grupo Proa: voor promotie en beheer van duurzame ontwikkeling; adviseur bij dit project.

Organisatie Azcaita: vertegenwoordigt acht inheemse gemeenschappen van de gemeente Leticia bij culturele, sociale en politieke activiteiten op nationaal niveau.

Mitote Astronómico: sterrenkundevereniging die alternatief onderwijs verzorgt.

Stichting Mandioca: Nederlandse stichting die ontwikkeling van initiatieven op het platteland in de tropen ondersteunt en coördineert.

Zie ook de Facebookpagina's van Fundación Grupo Proa en Mitote Astronómico en de site van Stichting Mandioca.

Over de auteur

Dit artikel is een bewerkte vertaling van diverse verslagen die wij ontvingen van Stichting Grupo Proa. Onze contactpersoon was Camila María Pérez-Cubillos. Zij is de wettelijke vertegenwoordiger van Grupo Proa en zij maakte deel uit van de werkgroep voor dit project. De bewerkte vertaling is van Juliëtte Feitsma, lid van de werkgroep WwF. E-mailadres: JuliëtteFeitsma@kpnplanet.nl

NETWERKEN TIJDENS DE VAKANTIECURSUS WISKUNDE

Sietske Tacoma

Ieder jaar organiseert het PWN in samenwerking met het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren de Vakantiecursus Wiskunde. Sietske Tacoma schrijft over de editie van 2016.



figuur 1 PWN Vakantiecursus 2016

Volop netwerken

Begin september 2016 heb ik in Eindhoven deelgenomen aan de Vakantiecursus Wiskunde van het Platform Wiskunde Nederland en de NVvW. Voor mij was dit een mooie gelegenheid om aan de ene kant nieuwe wiskundekennis op te doen bij de zes lezingen over het thema netwerken en aan de andere kant (bij) te praten met wiskundedocenten en andere wiskundigen. Volop netwerken dus, als start van het nieuwe schooljaar. Binnen het thema netwerken passen veel verschillende onderwerpen, zowel theoretisch als meer toegepast. Johan van Leeuwen liet onder andere zien hoe netwerken van personen, zoals Facebook- of LinkedIn-relaties, in beeld gebracht en geanalyseerd kunnen worden. Ton Koonen vertelde hoe netwerken van glasvezelkabels kunnen zorgen voor veel snellere communicatie, terwijl Floske Spijksma metronetwerken en de storingsgevoeligheid hiervan behandelde. Meer theoretische bijdragen werden verzorgd door Jop Briët en Dion Gijswijt, die beiden enkele stellingen uit de grafentheorie inzichtelijk maakten en bewezen. Linda van der Gaag vertelde over Bayesiaanse netwerken en de rol van Bayesiaanse statistiek in onder andere de rechtszaak over Lucia de Berk en de voorspellingen van octopus Paul bij het WK voetbal in 2010. De stellingen die Dion Gijswijt behandelde, bleken een nuttig toepassing voor op school te hebben. Daarom doe ik deze stellingen in dit artikel wat verder uit de doeken. Voor de volledige inhoud van Dions voordracht

en de inhoud van de overige lezingen verwijs ik naar de syllabus van de vakantiecursus op de site van Euclides.

Projecten verdelen over leerlingen

De toepassing van Dion ging over het volgende: stel dat je leerlingen individueel aan een project gaan werken en je precies genoeg projecten beschikbaar hebt voor je leerlingen. Je geeft elke leerling de gelegenheid om aan te geven welke projecten hem of haar interessant lijken. Elke leerling mag hierbij zo veel projecten aangeven als hij wil. Zo'n overzicht van voorkeuren kan er bijvoorbeeld uitzien als in tabel 1. Hoe bepaal je vervolgens welke leerling aan welk project gaat werken?

Leerling	Projecten
Ada	2, 3
Bas	1, 2, 4, 5
Carl	2, 6
Diana	2, 6
Eef	3, 4, 5
Ferry	3, 6

tabel 1 Voorkeuren van leerlingen voor de beschikbare projecten

Een eerste vraag die hierbij speelt, is of je altijd de projecten zo kunt verdelen dat elke leerling een project van zijn of haar voorkeur krijgt. Dit is niet het geval en dat is snel in te zien: het kan zijn dat een leerling geen enkel project interessant vindt en dus een project krijgt dat hij of zij niet interessant vindt. Ook is het mogelijk dat een project door geen enkele leerling interessant gevonden wordt. Omdat er evenveel leerlingen als projecten zijn, is er toch een leerling die het oninteressante project krijgt toegewezen.

Maar ook als elk project door iemand interessant gevonden wordt en elke leerling minstens één project interessant vindt, is er niet altijd een toekenning van projecten mogelijk waarin iedereen tevreden is. Dit is een geschikt moment om pen en papier te pakken en zelf een voorbeeld van een tabel te zoeken waarin het niet mogelijk is om iedereen tevreden te stellen.

Een belangrijke voorwaarde

Heb je een voorbeeld gevonden? Ook tabel 1 is een voorbeeld van een voorkeurenlijst waarin elke leerling minstens één project interessant vindt en waarin elk project door minstens één leerling interessant wordt gevonden, maar waarin geen toekenning van projecten mogelijk is waarmee iedereen tevreden is. Voor het niet bestaan van deze toekenning kunnen we, na even zoeken, een duidelijke oorzaak aanwijzen: Ada, Carl, Diana en Ferry zijn met zijn vieren alleen maar geïnteresseerd in project 2, 3 en 6. Dat zijn drie projecten voor vier leerlingen, dus minstens één van deze leerlingen kan niet een project van zijn of haar voorkeur krijgen. En dit geldt ook in het algemeen: als de voorkeuren van een groepje van n leerlingen allemaal in een groepje van m projecten liggen en m kleiner is dan n , dan is het niet mogelijk om een toekenning te maken waarmee iedereen tevreden is. Wat Dion liet zien in zijn voordracht, is dat dit ook de enige situatie is waarin het niet mogelijk is een toekenning te vinden waarmee iedereen tevreden is. Dus: als elk willekeurig groepje leerlingen samen genoeg projecten interessant vindt, dan is een toekenning mogelijk waarin aan iedereen een project van zijn of haar voorkeur wordt toegekend.

Huwelijksstelling van Hall

Deze bewering staat bekend als de huwelijksstelling van Hall, in 1935 bewezen door Philip Hall. In die tijd was de context van deze stelling nog wat realistischer dan tegenwoordig: het ging namelijk om het koppelen van geschikte huwelijkspartners uit een groep dames en een even grote groep heren. Voor elke dame is vastgesteld welke heren een acceptabele huwelijkspartner zouden zijn. De stelling zegt dat het mogelijk is om alle dames aan één van de heren te koppelen, dan en slechts dan als elk groepje van k dames samen minimaal k heren acceptabel vindt, voor elke k kleiner dan het totaal aantal dames.

In de voordracht tijdens de vakantie cursus nam Dion ons mee in het bewijs van deze stelling. Dat ging via de stelling van König en K -alternerende paden. Dit bewijs laat ik in dit artikel achterwege; het is te vinden in de syllabus van de vakantie cursus. Maar het concept van K -alternerende paden is niet alleen voor het bewijs van de huwelijksstelling van Hall interessant, maar ook voor het bepalen van een koppeling tussen leerlingen en projecten. Daarom laat ik nog zien wat er met een K -alternerend pad wordt bedoeld.

Koppelingsprocedure

We gaan eerst even terug naar de voorkeurenlijst uit tabel 1. We hebben gezien dat hierin geen koppeling mogelijk is waarmee iedereen tevreden is. Maar het is goed mogelijk dat je als docent best kunt inschatten dat bijvoorbeeld Carl ook project 1 leuk zou vinden, als hij zich er eenmaal in verdiept. Zodra je Carl hiervan hebt overtuigd, ontstaat de voorkeurentabel uit tabel 2. En zoek gerust even, maar hierin is geen groepje van leerlingen te vinden dat samen

te weinig projecten interessant vindt. Dus volgens de huwelijksstelling van Hall is met deze voorkeurenlijst een koppeling van projecten aan leerlingen te maken waar iedereen tevreden mee is. Hoe gaat het vinden van die koppeling in zijn werk?

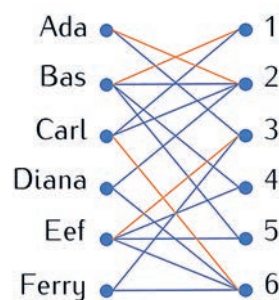
Leerling	Projecten
Ada	2, 3
Bas	1, 2, 4, 5
Carl	1, 2, 6
Diana	2, 6
Eef	2, 4, 5
Ferry	3, 6

tabel 2 Nieuwe voorkeuren van leerlingen voor de beschikbare projecten

Een koppelingsprocedure waarin we niet veel hoeven na te denken gaat als volgt: we beginnen bovenaan en kiezen voor elke leerling het eerste project dat nog beschikbaar is. Dus we beginnen bij Ada en koppelen haar aan project 2, vervolgens geven we project 1 aan Bas. Voor Carl zijn nu projecten 1 en 2 al vergeven, dus we koppelen hem aan project 6. In de volgende stap blijkt dat deze methode niet tot de gewenste koppeling leidt, want alle projecten van Diana's voorkeur zijn al vergeven zodra we bij Diana zijn angekommen. Maar we gaan toch nog even door en kennen project 3 aan Eef toe. Ook Ferry vist nu achter het net, want projecten 3 en 6 zijn al vergeven.

K -alternerende paden

Dit is niet de koppeling die we zochten, maar om een betere koppeling te krijgen, hoeven we niet helemaal opnieuw te beginnen. We kunnen namelijk gebruikmaken van K -alternerende paden. Hiervoor zetten we de voorkeurentabel om in een graaf. Elke leerling en elk project is een punt in deze graaf. Elke leerling wordt verbonden met de projecten van zijn of haar voorkeur. Die graaf ziet eruit als in figuur 2. De koppeling die we zojuist hebben gemaakt is hierin weergegeven in oranje. Deze koppeling duiden we in het vervolg aan met de letter K . De blauwe verbindingen geven voorkeuren weer die niet in K zitten.



figuur 2 Graaf van leerlingvoorkeuren met een eerste koppeling

Een K -alternerend pad is nu een pad door deze graaf, waarin alle verbindingen om en om wel en niet in K zitten. Als het begin- en eindpunt van een alternerend pad beide ongekoppeld zijn in K , dan noemen we het pad

K -verbeterend. Onze graaf bevat een heel aantal K -verbeterende paden. Twee voorbeelden zijn: Diana-2-Ada-3-Eef-4 en Diana-6-Carl-1-Bas-5. Merk op dat we in beide voorbeelden van K -verbeterende paden steeds over een verbinding die niet in K zit van leerling naar project (links naar rechts) lopen, en over een verbinding die wel in K zit weer terug van project naar leerling. Ook begint elk voorbeeld aan de leerlingkant en eindigt elk voorbeeld aan de projectkant. Dit betekent dat elk voorbeeld een oneven aantal verbindingen bevat. De truc voor het verbeteren van onze koppeling K is nu om voor de verbindingen in een K -verbeterend pad de rollen om te wisselen. Dat houdt in dat we de verbindingen die in het pad van project naar leerling lopen uit K halen en in plaats daarvan de verbindingen die van leerling naar project lopen aan K toevoegen. Dit is weer een geldige koppeling tussen leerlingen en projecten, want geen enkele leerling wordt aan meer dan één project gekoppeld en geen enkel project aan meer dan één leerling. Maar door deze wisseltruc is er wel één leerling en één project meer gekoppeld. We hebben dus een betere koppeling gevonden. Het is mogelijk om te bewijzen dat er altijd een K -verbeterend pad te vinden is, als er een volledige koppeling van leerlingen aan projecten bestaat. En ik denk ook dat zo'n pad met een beetje zoeken altijd wel te vinden is. Dus doe er, de volgende keer dat je opdrachten over leerlingen moet verdelen, je voordeel mee!

Tot slot

Het was de eerste keer dat ik de vakantiecursus van het PWN en de NVvW bezocht. Ik denk dat het voor veel docenten een interessant evenement is. Ik vond het erg leuk en inspirerend om weer eens twee dagen volop nieuwe wiskundekennis op te doen. De lezingen waren goed voorbereid en goed te volgen. In een aantal lezingen, zoals die van Dion Gijswijt, werd het publiek echt meegenomen in een wiskundig bewijs en zelf blijf ik dat één van de mooiste aspecten van wiskunde vinden: je ziet een stelling, die op het eerste gezicht wellicht moeilijk te geloven is, maar je kunt uiteindelijk het bewijs stap voor stap begrijpen en misschien zelfs navertellen. Daarnaast boden de meeste sprekers interessante aanknopingspunten voor in de klas. In dit kader wil ik vooral de korte colleges van Johan van Leeuwen aanraden, google op Johan van Leeuwen + youtube + netwerken. Kortom, ik raad iedereen aan eens een kijkje te nemen bij de vakantiecursus. Het thema voor 2017 is *De computer in de wiskunde: breekijzer of oud schroot?* Zie ik je daar?

Over de auteur

Sietske Tacoma doet bij het Freudenthal Instituut promotieonderzoek naar het gebruik van automatische feedback in universitair statistiekonderwijs. Daarnaast werkt zij aan de ontwikkeling van de Digitale Wiskunde Omgeving en maakt zij deel uit van de redactie van *Euclides*.

WORD MASTER OF EDUCATION IN WISKUNDE

EEN INVESTERING IN JEZELF DIE JE OP VOORSPRONG ZET!

Afgestudeerd maar nog niet uitgestudeerd?
Dat geldt zeker voor het beroep van leraar!

De vraag naar masteropgeleide leraren wiskunde neemt toe en als eerstegraads docent wiskunde ben je breed inzetbaar en heb je meer carrièremogelijkheden.

Kies voor de eerstegraads lerarenopleiding wiskunde bij Fontys in Tilburg (3-jarig) of Sittard (2-jarig).

Geen tijd voor een volledige opleiding?
In Tilburg kun je ook losse modules volgen.

Kijk op fontys.nl/educatie voor meer informatie.



HOE VAAK IS ONEINDIG?

Rob van Oord

VERSLAG VAN DE 23^E NWD

Blij en met een doos vol spullen ga ik, Rob van Oord, op weg naar Noordwijkerhout. Van de organisatie mag ik tot in lengte van dagen naar de NWD. Oneindig vaak als ik wil. Ik voel me vereerd en heb zin in de vol ingetekende workshop die ik samen met Rutger Kock ga geven. Deelnemers uitdagen en inspireren, dat gaan we doen.

Henk van der Vorst opende de 23^e NWD met een show van de passie die hij na zijn emeritaat heeft opgepakt: litho's ontwerpen en afdrukken. Omdat het maken van spiegelbeeld afdrukken van litho's niet mogelijk is, hergebruikt Henk eenzelfde litho door hem telkens een kwart slag te draaien. Daarna drukt hij volgende versies in andere kleuren er overheen.



figuur 1 Basistableau van zestien tegels

Door er dan zestien te combineren krijg je schitterende tableaux, zie figuur 1. Vervolgens heeft Henk banen van de basispatronen op een cirkelband getransformeerd. Tot slot werden deze banen naar binnen toe 'oneindig' vaak verkleind herhaald. Hierdoor lijken de cirkelvormige eindversies op plaatjes van Coxeter en Escher. Henk liet de op deze manier gevonden afbeeldingen op sierborden drukken. Alle sprekers kregen een van deze borden als dank voor hun inzet, zie figuur 2. Ook de poster van de NWD is een product van Henk.

De eerste lezing is een zinderend spannende presentatie waarin Mike Kestemont uitlegt dat met gebruikmaking van wiskundige vergelijkingsmethodes het Wilhelmus hoogstwaarschijnlijk niet door Marnix van St Aldegonde



figuur 2 Bord met NWD-postermotief

is geschreven. Aan de hand van een database van getelde functiewoorden in teksten kan worden bewezen dat ons volkslied het meest overeenkomt met geschriften van Petrus Datheen. ... blijf ik tot in den dood. Is dat ook tot in het oneindige?

Sofia Kovalevskaya

Luuk Hoevenaars nam ons in zijn boeiende lezing mee naar het leven van Sofia Kovalevskaya (1850-1891). Deze dame van Russische komaf viel Weierstrass op toen zij in Berlijn bij hem een promotie deed. Wellicht is ze geïnspireerd door het behang in haar kamer dat bestond uit bladzijden van een boek van de wiskundige Ostrogradsky, over differentiaal- en integraalrekening. Een hint voor collega's die op het punt staan de kamer van hun dochter te gaan behangen. Maar een witte wand waarop je doorlopend wiskundige teksten laat projecteren helpt misschien ook.

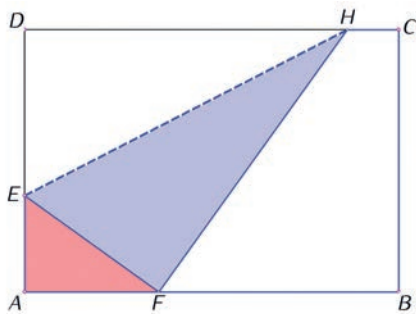
Ze heeft zelfs drie proefschriften geschreven, eentje over de uniciteit van analytische partiële differentiaalvergelijkingen die aan voorwaarden moeten voldoen die al eerder door Cauchy zijn geformuleerd. Voor haar werk over de mechanische beweging van een tol heeft ze de prestigieuze prijs van de Franse academie van wetenschappen, de

'Prix Bordin' gekregen. De oplossingen convergeren met een Taylorreeks naar een limiet als x naar oneindig gaat. Hoe ver moet je daarin gaan?

Ze ontdekte ook een tegenvoorbeeld van de bewering van Weierstrass dat elke hogere orde partiële differentiaalvergelijking een particuliere oplossing heeft. De oplossing van de zogeheten temperatuurstaf heeft een term die divergent is. De staf zal dus als het ware ontploffen. Na een ongelukkig huwelijk kreeg ze na de zelfmoord van haar man een aanstelling in Zweden aan de universiteit van Stockholm. Door een noodlottig voorval kreeg ze bij terugkeer van een vakantie de griep waaraan ze stierf op 41-jarige leeftijd.

Leuke les bij opgave uit het boek

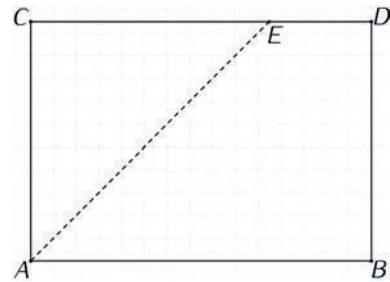
In de tweede ronde moest ik zelf aan de bak. In deze ronde draaiden allemaal workshops waar de deelnemers zelf aan de slag konden. Ook Rutger Kock en ik daagden de deelnemers uit om zelf actief te worden. *Van een som uit het boek naar een leuke les, hoe doe je dat?*



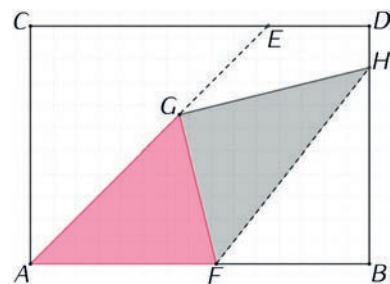
figuur 3 *Getal & Ruimte* vwo B deel 4 H14, opgave A28, blz 118

Het is veel leuker als je het verhaal bij een opgave in het boek eerst zelf gaat beleven. Wanneer er sprake is van een vouw in een blaadje waardoor er een driehoek ontstaat, dan moet je dat ook eerst laten doen. Je laat de klas dan willekeurige driehoeken omvouwen. In het voorbeeld in figuur 3 wordt hoekpunt D naar F op zijde AB gevouwen. Daarna moeten de leerlingen, door opmeten van de zijden, de oppervlakte van driehoek $\triangle AFE$ berekenen. Wie de grootste oppervlakte heeft gevonden krijgt wat lekkers. Je ziet dan bij de gegeven antwoorden (wie heeft een nog grotere oppervlakte?) ook meteen wie de factor $\frac{1}{2}$ is vergeten. Omdat blijkt dat er allemaal verschillende antwoorden tevoorschijn zijn gekomen kun je met de klas er dieper op in gaan. Het lijkt wel of er een grootste is. Waar denk je dan aan? Welke vraag zou je kunnen stellen? Dan zet je ze, liefst in groepjes, aan het werk. Ze zullen zelf een onbekende zijde x moeten stellen. In het boek wordt al aangegeven welke zijde je x moet stellen. Dan is het denkwerk al gedaan. Bovendien zijn er verschillende zijden die je x kunt stellen die allemaal

wel tot hetzelfde antwoord leiden. Leuk om te zien dat leerlingen ook op verschillende manieren het antwoord vinden.



figuur 4



figuur 5

Driehoek naar $y = x$

Naast de opgaven uit het boek kwamen er ook zelfbedachte vouwsels op tafel, vergelijkbaar met de opgave uit het boek.^[1] Een uitdaging voor de deelnemers was de opgave *driehoek naar $y = x$* . Neem een A4-tje. Ga voor het gemak uit van afmetingen 21×30 cm. Leg het blaadje dwars voor je. Vouw de bissectrice van de rechte hoek linksonder. Leg het blaadje weer open, zie figuur 4. Vouw het hoekpunt rechtsonder naar de schuine vouw, dus naar de zojuist gevouwen bissectrice. Onder de omgevouwen onderkant zie je een driehoek $\triangle AFG$ ontstaan met de gevouwen bissectrice en de onderkant van het blaadje, zie figuur 5.

Hoe zou je door meten de oppervlakte kunnen berekenen? Stel een formule op van de oppervlakte van de (roze) driehoek. Bereken de maximale oppervlakte van de op deze manier verkregen driehoek. Aan de lezer om eerst eens zelf te gaan vouwen en de maximale oppervlakte te vinden.

Het antwoord kan als volgt gaan. Stel $AF = x$.

Dan is $BF = FG = 30 - x$.

Neem AG als basis van driehoek $\triangle AFG$, dan is de hoogte

de loodlijn uit F op $AG = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Je kunt AG uitdrukken in x met behulp van de cosinusregel: $FG^2 = AF^2 + AG^2 - 2 \cdot AF \cdot AG \cdot \cos \angle GAF$;

$\angle GAF = 45^\circ$, dus krijg je $(30 - x)^2 = x^2 + AG^2 - 2 \cdot x \cdot AG \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oftewel $AG^2 - x \cdot \sqrt{2} \cdot AG + 60x - 900 = 0$. Met de abc-formule is nu $AG = \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{2} + \sqrt{(2x^2 - 240x + 3600)})$; de oppervlakte van $\triangle AFG$ is nu

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} (x \sqrt{2} + \sqrt{(2x^2 - 240x + 3600)}).$$

De afgeleide nul stellen levert een onprettige vergelijking op. Met de GR vind je $x = 15$ (dus precies als je op het midden van de onderkant zit) met een maximale oppervlakte van 112,5.

Wie kan het berekenen van de waarde van x waarbij de oppervlakte maximaal is exact oplossen?

Aan het eind van de workshop kon iedereen aangeven wat men ervan vond. Wij vroegen wie van de deelnemers van plan was ook echt van een som uit het boek een leuke les te gaan maken. Vrijwel iedereen stak zijn vinger op. We stellen het op prijs als degenen die dit ook hebben gedaan ons hierover een mailtje sturen.

Wiskundige verrassingen

Het avondprogramma werd verzorgd door Albrecht Beutelspacher. Hij is de directeur van het Mathematikum in Gießen.^[2] Dit museum trekt sinds de opening in 2002 jaarlijks vele bezoekers, jong en oud. Het is een interactief museum waarin allerlei spelletjes en puzzels gedaan kunnen worden met wiskundige principes en verrassingen. De reizende tentoonstelling was op de NWD te zien. Hij maakte indruk met een getallentrucje waarmee je zonder gebruik van een rekenmachine eenvoudig twee grote getallen kunt vermenigvuldigen. Bijvoorbeeld 996×885 .

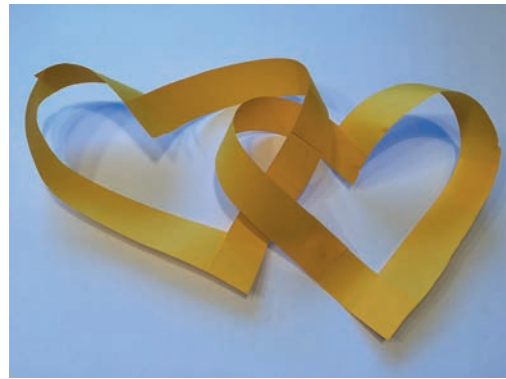
Bij een ander trucje liet hij zien hoe je vermenigvuldigen van grote getallen eenvoudig en snel kunt berekenen door wat aftrekkingen en een kleine vermenigvuldiging. Bijvoorbeeld 996×885 doe je als volgt: $996 = 1000 - 4$, $885 - 4 = 881$; de eerste drie cijfers van het antwoord zijn nu 881, $885 = 1000 - 115$, doe nu $4 \times 115 = 460$, dit zijn de laatste drie cijfers van het antwoord. Reken maar na: $996 \times 885 = 881460$. Hoe werkt de truc? Even uitgezocht.

$x = 996$ geeft $1000 - x = 4$, $y = 885$ geeft $1000 - y = 115$.

Dan is $y - (1000 - x) = x + y - 1000$ (dit is die 881); dus $(y - (1000 - x)) \cdot 1000 + (1000 - x)(1000 - y) = (x + y - 1000) \cdot 1000 + 1000000 - (x + y) \cdot 1000 + 1000000 + x \cdot y = x \cdot y$. Dit is dan $881 \times 1000 + 4 \times 115 = 881460$.

Het meest interessante trucje was het plakken en doormidden knippen van twee dwars op elkaar geplakte tegengesteld gedraaide Möbiusbanden. Je krijgt dan twee in elkaar gestrengelde harten.

's Nachts op mijn kamer meteen maar uitprobeerde. Gelukt! Zie figuur 6. Leuk om met Valentijnsdag in de les te doen.



figuur 6 Twee dwars op elkaar geplakte tegengesteld gedraaide Möbiusbanden

Voordat ik mij op de dansvloer waag probeer ik altijd een van de (nieuwe) spellen uit die elk jaar klaar liggen in de hal. Dit keer speelde ik een paar potjes Tzaar met Peter Donkelaar, een van de vrienden die ik ken van de staats-examens. Het is een zogenaamd abstract gezelschapsspel voor twee personen. Het is de bedoeling dat je als eerste van de tegenstander alle tzaren, tzarra's of totts van het veld hebt geslagen. Dit zijn allemaal ronde schijven met nul, een of twee ringen. Het lijkt op een veredeld dammen waarbij je naar hartenlust mag stapelen 'tot in het oneindige'.



figuur 7 Tzaar, een abstract spel voor twee personen

Avondprogramma

's Avonds werd de film *The man who knew infinity*, over het leven van Srinivasa Ramanujan, getoond. In de krant las ik er niet zulke goede recensies over. Maar collega's die ik sprak die hem gezien hadden vonden hem wel indrukwekkend.

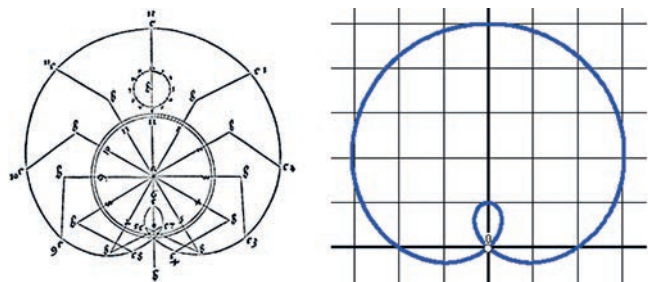
Op het eind van de avond de beentjes van de vloer. Volgend jaar komt er waarschijnlijk een Latin bandje. Ik ben van plan voor liefhebbers dan van tevoren samen met Marjan Botke een workshop *Chachacha*, *Rumba* en *Mambo* te geven. Dan kan het geleerde meteen in de praktijk worden gebracht.

Krommen van Dürer

Voor de ochtendlezing op zaterdag ging ik naar Martin Kindt. Op 27 januari werd Martin aan het eind van een symposium ter gelegenheid van zijn 80ste verjaardag benoemd tot officier in de orde van Oranje-Nassau. Zo de koning het heeft behaagd. Ik ben al vele jaren fan van Martin. Ook vandaag verraste hij ons weer met een mooi verhaal over de krommen van Dürer.

Uit een dik boek in het Duits in Gothische letters met de vertaling in het Engels ernaast heeft Martin uit dit leerboek voor kunstenaars over de drie dimensies en perspectief tekenen enkele krommen gehaald en aan ons uitgelegd. De slakkenspiraal, de Archimedische spiraal en de helix (trappenspiraal) werden getoond en uitgelegd. De limaçon van Pascal werd al door Dürer geconstrueerd als een spinkromme (1525). Hij tekende de hulplijntjes van de geconstrueerde punten er ook bij: een straal met bijbehorend stukje raaklijn. Op die manier lijkt het geheel op een spin met pootjes. Met $x = 3\sin(t) + 2\sin(2t)$ en $y = 3\cos(t) + 2\cos(2t)$ krijg je deze kromme op je scherm. Zie figuur 8.

In de voor Martin typerende stijl, rustig en bescheiden, liet hij ons zien hoe Dürer bewees dat de 'eikromme', die je krijgt bij het doorsnijden van een kegel, ook echt een ellips is. Al is het bewijs van Dandelin met de bollen in een kegel die onder en boven aan het doorsnijdingsvlak raken natuurlijk van een andere orde en eenvoud. Dürer was niet alleen een begenadigd schilder, maar had ook veel wiskundige kennis in huis. Dat is nu wel duidelijk.



figuur 8 Spinkromme van Dürer (l) en de limaçon van Pascal (r)

Bewegende 3D-plaatjes

De laatste blokles die ik bijwoonde was van Jos Leys.^[3] Sinds 1980 bij de intrede van de eerste computers is Jos gefascineerd door plaatjes op het scherm. Immer nog maakt hij met behulp van eenvoudige formules met complexe getallen de mooiste bewegende '3D'-plaatjes van bijvoorbeeld Mandelbrotverzamelingen. Je kunt zien wat er gebeurt als je oneindig vaak inzoomt. Net als het Droste-effect waar bij het inzoomen ook nog eens gedraaid wordt. Jos gebruikt matrixtransformaties en groepentheorie om complexe vlakken af te beelden. Net als bij Henk van der Vorst worden stroken tot cirkels gemaakt en cirkels tot bollen. Met de duizelingwekkende

beelden en een gevoel van bewondering, van zou ik dat ook ooit kunnen, verlaat ik de zaal.

Na de lunch vertrok ik met een halflege big shopper maar wel gevuld met mooie aandenken aan deze NWD voldaan naar huis.

Noten

[1] Zie www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen Archief, Slides/handouts

Ik ben bereid om bij secties die dat willen langs te komen en samen aan de slag te gaan om een leuke les bij opgaven uit het boek te maken.

[2] Zie www.Mathematikum.de

[3] Zie www.josleys.com

Over de auteur

Rob van Oord was sinds 1974 werkzaam als eerste-graads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen en is sinds 2014 met pensioen. Vorig jaar heeft hij ingevallen op Lyceum Ypenburg. Dit jaar deed hij dat op Gymnasium Novum in Voorburg. E-mailadres: robvanoord@tiscali.nl

RAAKLIJNEN ZONDER LIMIET

Cor Fortgens

Voor het bepalen van raaklijnen aan grafieken van polynomen gebruikt Cor Fortgens een algebraïsche methode die gebaseerd is op een speciale eigenschap van de raaklijnen in $x = 0$. Via translaties is dan iedere raaklijn te bepalen.

Raaklijnen aan polynomen in $x = 0$

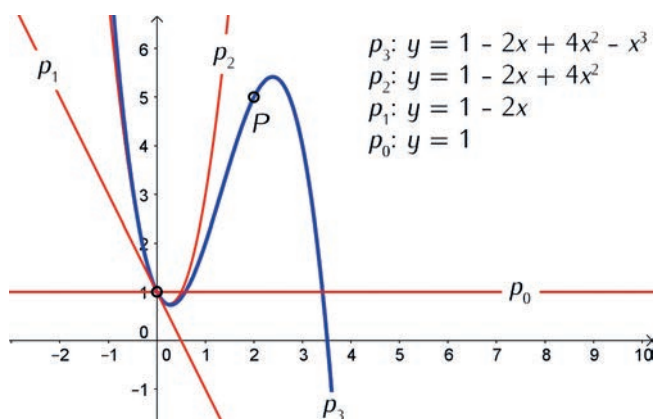
Laten we kijken naar de polynoom $p(x) = 1 - 2x + 4x^2 - x^3$. De methode om de raaklijn aan de grafiek van $p(x)$ te vinden in het punt $x = 0$ gaat in de meeste leerboeken met behulp van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn die we vinden via de afgeleide van de functie. Dat is hier dus: $p'(x) = -2 + 8x - 3x^2$. Met $x = 0$ geeft dit: $p'(0) = -2$. We weten nu de richtingscoëfficiënt voor $x = 0$. De vergelijking van de raaklijn is nu: $y = -2x + b$. De raaklijn gaat door het punt $(0, 1)$ dus moet gelden: $1 = 0 + b$. Waaruit volgt $b = 1$ en de gevraagde raaklijn is dus: $y = 1 - 2x$.

Als we goed naar de polynoom kijken dan zien we dat de raaklijn bepaald is door de uitdrukking $1 - 2x$, precies het lineaire deel (de constante en de eerste orde term) van de polynoom. We zullen dit deel van de polynoom $p_1(x)$ noemen, de 1^e orde subpolynoom van $p(x)$. We hadden ons dus de moeite van het differentiëren en het oplossen van een vergelijking kunnen besparen. Het antwoord ligt als het ware al op de plank. Deze waarneming kunnen we veralgemeniseren.

Stelling:

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van polynoom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ voor $x = 0$ is: $y = a_0 + a_1x$, ofwel $y = p_1(x)$.

Anders gezegd, de raaklijn aan de grafiek van de polynoom in $x = 0$ is de benadering van de kromme door weglating van alle termen van orde 2 en hoger.

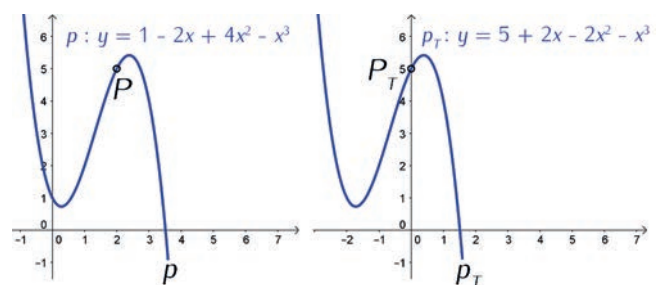


figuur 1

We zouden ook alle termen van orde 3 en hoger kunnen weglaten. Dan krijgen we de 2^e orde benadering van de kromme die we noteren als $y = p_2(x)$, zie figuur 1.

Raaklijnen in een ander punt dan voor $x = 0$

De raaklijn in punt $(0, a_0)$ is dus heel eenvoudig te vinden. Maar wat nu als we de raaklijn in een ander punt willen weten? Laten we bijvoorbeeld weer $p(x) = 1 - 2x + 4x^2 - x^3$ bekijken. Stel dat we de raaklijn in $P(2, p(2))$ willen bepalen, zie figuur 2 (links).



figuur 2

Dan werkt het weglaten van hogere orde termen niet zonder meer. Gelukkig is dit geen moeilijk probleem. Als we het assenstelsel 2 naar rechts transleren, dan ligt het punt van interesse weer op de y-as, zie figuur 2 (rechts). De translatie geeft polynoom

$p_T(x) = 1 - 2(x + 2) + 4(x + 2)^2 - (x + 2)^3$. Of in machten van x : $p_T(x) = 5 + 2x - 2x^2 - x^3$. Waarna volgt dat de vergelijking van de raaklijn aan $y = p_T(x)$ in $x = 0$ gelijk is aan $y = 5 + 2x$, zie figuur 3 (links). Nu rest ons nog het assenstelsel terug te transleren:

$p(x) = 5 + 2(x - 2) - 2(x - 2)^2 - (x - 2)^3$. De vergelijking van de raaklijn aan $p(x)$ voor $x = 2$ is dan:

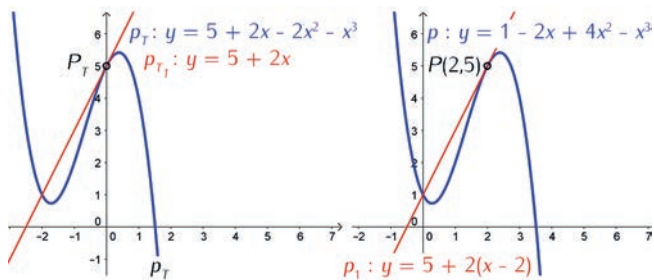
$y = 5 + 2(x - 2) = 1 + 2x$, zie figuur 3 (rechts).

Raaklijnen aan een willekeurige polynoom bij $x = c$

Wat we voor $x = 2$ deden, kunnen we voor iedere waarde voor x doen, zeg voor $x = c$, en voor een willekeurige polynoom $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ met $a_n \neq 0$.

Stap 1 Transleer assenstelsel

Vervang x door $x + c$: $p_T(x) = a_0(x + c)^0 + a_1(x + c)^1 + a_2(x + c)^2 + a_3(x + c)^3 + \dots + a_n(x + c)^n$



figuur 3

Stap 2 Zet gelijke machten van x bij elkaar

De termen $a_i(x + c)^i$ uitvermenigvuldigen en daarna gelijke machten bij elkaar zetten kan een hoop werk opleveren waarbij rekenfouten op de loer liggen. De coëfficiënten van $(x + c)^n$ zijn echter binomiaalcoëfficiënten die we handig kunnen noteren in de vorm van een driehoek van Pascal met horizontaal oplopende machten van c en verticaal oplopende machten van x , zie tabel 1.

	c^0	c^1	c^2	c^3	c^4		c^{n-1}	c^n	
x^0	$1a_0$	$1a_1$	$1a_2$	$1a_3$	$1a_4$	$1a_5$			$\leftarrow D_0$
x^1	$1a_1$	$2a_2$	$3a_3$	$4a_4$	$5a_5$	$\vdots$			$\leftarrow D_1$
x^2	$1a_2$	$3a_3$	$6a_4$	$10a_5$	$\vdots$				$\leftarrow D_2$
x^3	$1a_3$	$4a_4$	$10a_5$	$\vdots$					$\leftarrow D_3$
x^4	$1a_4$	$5a_5$	$\vdots$						$\leftarrow D_4$
$\vdots$									
x^{n-1}	$1a_{n-1}$								$\leftarrow D_{n-1}$
x^n	$1a_n$								$\leftarrow D_n$

tabel 1

Bijvoorbeeld de coëfficiënten van de term $a_3(x + c)^3 = a_3x^3 + 3a_3x^2c + 3a_3xc^2 + a_3c^3$ vinden we door de getallen langs de diagonaal $1a_3, 3a_3, 3a_3, 1a_3$ te vermenigvuldigen met de getallen c^0, c^1, c^2, c^3 bovenaan in hun kolom.

Het optellen van de termen met dezelfde macht van x komt nu overeen met het optellen van de getallen langs een horizontale lijn. De term met x^2 heeft bijvoorbeeld opgeteld de coëfficiënt $D_2 = (1a_2c^0 + 3a_3c^1 + 6a_4c^2 + 10a_5c^3 + \dots)$. Bijna zonder rekenwerk kunnen we nu opschrijven:

$$p_T(x) = D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + \dots + D_nx^n$$

waarin

$$D_0 = (a_0c^0 + a_1c^1 + a_2c^2 + \dots)$$

$$D_1 = (a_1c^0 + 2a_2c^1 + 3a_3c^2 + \dots)$$

$$D_2 = (a_2c^0 + 3a_3c^1 + 6a_4c^2 + \dots)$$

$\vdots$

De vergelijking van de raaklijn voor $x = 0$ is nu het lineaire deel van $p_T: y = D_0 + D_1x$. Merk op dat de algebraïsche coëfficiënten $D_i(c)$ en de niet-algebraïsche i^e afgeleide van $p(x)$ in c aan elkaar gerelateerd zijn:

$$D_i(c) = \frac{p^{(i)}(c)}{i!}.$$

Stap 3 Transleer assenstelsel terug

Vervang x door $x - c$: $p(x) = D_0 + D_1(x - c) + D_2(x - c)^2 + \dots + D_n(x - c)^n$. Dit is weer de polynoom $p(x)$, maar nu geschreven in machten van $(x - c)$. De vergelijking van de raaklijn voor $x = c$ is nu: $y = D_0 + D_1(x - c)$.

Laten we tot slot van deze uiteenzetting ons voorbeeld, waarin de raaklijn in $x = 2$ aan de grafiek van $p(x) = 1 - 2x + 4x^2 - x^3$ werd bepaald, 'narekenen' met de driehoek van Pascal. De coëfficiënten van p_T staan in tabel 2:

	c^0	c^1	c^2	c^3	c^4	
x^0	1	-2	4	-1		$\leftarrow D_0$
x^1	-2	8	-3			$\leftarrow D_1$
x^2	4	-3				$\leftarrow D_2$
x^3	-1					$\leftarrow D_3$

tabel 2

We lezen nu af (de 2^e kolom of 2^e rij):

$D_1(c) = -2 + 8c - 3c^2$ hetgeen overeenkomt met de eerste afgeleide van $p(x)$ voor $x = c$. De vergelijking van de raaklijn voor $x = 2$ wordt: $y = D_0(2) + D_1(2)(x - 2) = (1 - 4 + 16 - 8) + (-2 + 16 - 12)(x - 2) = 5 + 2x - 4 = 1 + 2x$, zoals we eerder al hadden gevonden.

Lessenserie

De geschetste techniek met translaties om raaklijnen te vinden is in een lessenserie toegepast die in een havo 4 wiskunde D klas werd gegeven. In deze lessen wordt veelvuldig gebruik gemaakt van GeoGebra. Leerlingen ontdekken hiermee eigenschappen van polynomen en kunnen de transformaties makkelijk uitvoeren, ook voor polynomen die ingewikkelder waren dan die in het voorbeeld. In de lessenserie worden ook de productregel en de kettingregel afgeleid, waarmee het rekenwerk voor standaardfuncties aanzienlijk wordt versimpeld. De lessenserie is te downloaden van de *Euclides*-site.



JAARVERGADERING/ STUDIEDAG 2017

Kees Garst

Toepasbaarheid

Raaklijnen vinden met behulp van translaties zonder gebruik te maken van afgeleiden werkt niet alleen voor polynomen. In de lessenserie komen ook functies als $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^{-3}$ en $f(x) = e^x$ aan bod. Ook bepalen leerlingen raaklijnen aan andere krommen dan de grafieken van functies, zoals aan de cirkel en aan het Lemniscaat van Huygens.

Conclusie

Leerlingen ontdekten de werking van GeoGebra sneller dan dat de docent het ze kon uitleggen. Het lesmateriaal konden de leerlingen grotendeels zelfstandig doorwerken. De leerlingen gaven aan de stof, vooral aan het begin, niet zo moeilijk te vinden, ondanks de vrees van de auteur dat de notaties weleens intimiderend zouden kunnen blijken.

Leerlingen hebben bestaande kennis (translaties en binomiaal coëfficiënten) opgehaald, verdiept en verbonden met een nieuw onderwerp (raaklijnen). De methode kan wellicht in het wiskunde D curriculum gebruikt worden voor een andere kijk op de begrippen afgeleide en raaklijn en het bepalen van raaklijnen en raakvlakken aan allerlei interessante 2D of 3D objecten. Het gebruik van de computer maakt het praktisch mogelijk ingewikkelder en misschien interessantere formules te onderzoeken.

Met dank aan: Leerlingen havo 4, collega's van Rijnlands Lyceum Sassenheim, Peter Kop voor zijn suggesties en Norman Wildberger voor een aantal van de gebruikte ideeën (<http://www.youtube.com/watch?v=fKi5wGTw31g>)



vakbladeuclides.nl/927fortgens

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2017 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 4 november 2017**.

Aanvang: 10.00 uur

Sluiting: 16.00 uur

Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.

Thema van de studiedag: WISKUNDE uit de KUNST

Zowel wiskundigen als kunstenaars raken snel gefascineerd door structuren, patronen en wetmatigheden. De combinatie wiskunde en kunst ligt voor de hand, maar heeft binnen de schoolwiskunde nog niet echt een plek veroverd. Tijdens deze studiedag wordt gekeken naar de mogelijkheden om wiskunde en kunst in de klas te combineren. Denk bijvoorbeeld aan de rol van wiskunde in vlakvullingen, muziek en architectuur, maar ook aan wiskunde met rap, animaties en 3D-printen. Kunstige contexten kunnen aanleiding zijn voor leerlingen om zich op een creatieve manier in een wiskundig onderwerp te verdiepen. Tenslotte is goede wiskunde geen wetenschap maar kunst: Wisconst! De relatie tussen wiskunde en kunst is spannend en soms gespannen. Wat is de verhouding tussen vaardigheid en creativiteit? En hoe verhouden zich didactische ideeën uit beide disciplines? Oefening baart vanzelf kunst? Tijdens deze studiedag laten we ons vooral door kunst inspireren. Daarbij denken we ook aan onderwerpen als wiskunde met kunstjes, wisconst van vroeger (Stevin e.a.) en de kunst van het onderwijzen van wiskunde.

Wil je zelf een workshop geven over dit thema of misschien wel over een heel ander onderwerp, mail dan naar Lidy Wesker-Elzinga (l.wesker@nvww.nl) of Michiel Doorman (m.doorman@nvww.nl) voor je bijdrage aan de inhoud van dit programmaonderdeel van deze dag.

Over de auteur

Cor Fortgens is docent aan het Amstelveen College te Amstelveen en De Vinse School te Amsterdam.

E-mail: cor.fortgens@gmail.com

Agenda

1. 10.00-11.00 uur – Jaarvergadering
2. Opening door de voorzitter, de heer S. Garst
3. Jaarrede van de voorzitter
4. Notulen van de jaarvergadering 2016
5. Jaarverslagen 2016/2017 van de NVvW en van *Euclides*
6. Jaarrekening en balans 2016/2017, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie.
7. Bestuursverkiezing.
Aftredend zijn: Ebrina Smallegange en Kees Garst. Zij stellen zich beiden herkiesbaar voor een tweede termijn. Ook onze voorzitter, Swier Garst, treedt af, maar stelt zich niet herkiesbaar (zoals bij zijn aantreden was afgesproken). Het bestuur nodigt leden van harte uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (e-mailadres: secretaris@nvvw.nl).
Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden. In het bijzonder worden leden die werkzaam zijn in de onderbouw van het voortgezet onderwijs uitgenodigd zich kandidaat te stellen.
In *Euclides* nummer 1 van september zal het bestuur in de tweede uitnodiging nieuwe bestuurskandidaten voorstellen.
8. Rondvraag
9. Sluiting van de jaarvergadering



Programma studiedag

- 11.00 – 11.15 Inleiding op de studiedag
- 11.15 – 12.00 Plenaire lezing
- 12.00 – 12.15 Pauze
- 12.15 – 13.05 Workshopronde 1A/lunch en markt
- 13.05 – 13.15 Wisseltijd
- 13.15 – 14.05 Workshopronde 1B/lunch en markt
- 14.05 – 14.15 Wisseltijd
- 14.15 – 15.05 Workshopronde 2
- 15.05 – 15.15 Wisseltijd
- 15.15 – 16.00 Plenaire voordracht en afsluiting

Iedereen volgt een workshop in ronde 1A óf 1B. De tijdsindeling van de studiedag biedt deelnemers ruim gelegenheid voor lunch en marktbezoek.

Dus reserveer in uw agenda: NVvW-dag op zaterdag 4 november 2017

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op 4 november 2017. Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich wenden tot Heleen van der Ree (e-mailadres: hoofdbureau@nvvw.nl)

BOEKBESPREKING

WISKUNDE IN JE VINGERS

Harm Bakker



Auteurs: Ronald Meester en Joost Hulshof

Titel: Wiskunde in je vingers

Ondertitel: Een oppepcursus voor liefhebbers en andere freaks

Uitgever: VU University Press, Amsterdam, 2015

ISBN 9 789086 597154

Prijs: € 19,95 (paperback, 182 blz)

Dit boek is geschreven naar aanleiding van twee nascholingscursussen die de auteurs hebben verzorgd op de Vrije Universiteit. Diverse onderwerpen die raken aan de wiskunde die op de middelbare school worden behandeld, passeren de revue. Zo komen we tegen: letterrekenen, differentiaal- en integraalrekening, combinatoriek en kansrekening en aan het eind een beetje complexe getallen. Bekende onderwerpen, maar hier aangevlogen op een manier die de meeste docenten onbekend zal zijn. Eén van de doelen van de auteurs was om gebruik te maken van minimale middelen. Weggezakte kennis van de middelbare school zou voldoende moeten zijn om aan het boek te beginnen.

Naast de zaken die op school aan de orde komen, zijn er uitstapjes die wat niveau betreft daar echt bovenuit gaan: (over-)aftelbaarheid, maattheorie, machtreksen.

Getallen en raaklijnen

In hoofdstuk 1 wordt eerst gekeken naar de decimale ontwikkeling van rationale getallen. Zo'n ontwikkeling breekt af of herhaalt zichzelf. Maar hoe zit het dan met andere decimale ontwikkelingen? Dat zijn de irrationale getallen. Eerst wordt beargumenteerd dat de rationale getallen zich laten aftellen; met een diagonaalconstructie wordt aangetoond dat de verzameling van reële getallen overaftelbaar is.

In hoofdstuk 2 wordt een poging gedaan om vast te leggen wat een normaal getal is. Er wordt een relatie gelegd met de wet van de grote aantallen, maar wat nu precies de bedoeling is, wordt niet duidelijk. Hoofdstuk 3 komt wat dichterbij de schoolwiskunde: raaklijnen. Of eigenlijk lineaire benaderingen van grafieken. Door in te zoomen op een grafiek, lijkt hij op een rechte lijn. Zoek dus bij een punt (a, b) op de grafiek van f de waarde van r zodat $y = b + r(x - a)$ het beste bij de grafiek past. Daar waar we op school doorgaans limieten van differentiequotienten inzetten om r te bepalen, wordt er in dit boek voor gekozen om met behulp van staartdelingen op het spoor van de afgeleide te komen: de auteurs hebben zich tot doel gesteld om die altijd lastige limieten zoveel mogelijk buiten de deur te houden. Uit een aantal voorbeelden komt zo het patroon ook wel naar voren en kan de bekende rekenregel voor differentiëren worden geformuleerd. Een en ander wordt toegepast bij het benaderen van nulpunten met de methode van Newton (-Raphson).

Taylorreeks en Sinterklaasprobleem

Als de bank in plaats van elk jaar een rentefractie a aan je tegoed toe te voegen elke maand een rentefractie $a/12$ bijschrijft, dan ga je er op vooruit. En met $a/52$ per week wordt het nog beter. Zit er ook een grens aan? En zo ja, wat is dan die grens? Dit is het vertrekpunt van hoofdstuk 4. De functie $\exp$ wordt gedefinieerd als de limiet

van de functie $e_n(x) = (1 + \frac{1}{n})^n$, waarbij het getal e dan de

functiewaarde is van $\exp$ bij argument 1. Via een reeks van eigenschappen wordt uiteindelijk de Taylorreeks van $\exp(x)$ afgeleid (zonder deze naam te noemen). Het is nog een heel gedoe om te laten zien dat dit ook goed gaat voor negatieve argumenten.

Hoofdstuk 5 start met het kijken naar binomiaalcoëfficiënten als coëfficiënten in de expansie van $(a + b)^n$. Centraal staat het Sinterklaaslootjesprobleem: hoe groot is de kans dat bij het verdelen van de lootjes iemand zijn eigen lootje krijgt. In de oplossing met behulp van het principe van inclusie-exclusie komen de binomiaalcoëfficiënten terug en wordt afgeleid dat de kans dat er opnieuw getrokken moet worden convergeert naar $1/e$. Vervolgens wordt de Poissonverdeling gezien als limiet van een binomiale verdeling.

Oppervlakten

Waarom zou je die lastige integraalrekening inzetten bij het berekenen van oppervlaktes van een vlakdeel dat wordt begrensd door $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ en $y = x^n$ als je het ook best zonder kunt? Hoofdstuk 6 doet het dus zonder, maar vraagt wel wat andere vaardigheden: volledige inductie en flink manipuleren met sommaties. Maar dan kom je uiteindelijk ook uit bij de bekende formule voor het integreren van een polynoomfunctie over het interval $[a, b]$. Het is daarna nog wel even stevig doorbijten om een prachtige integraal af te leiden voor $n!$. In hoofdstuk 7 wordt een uitstapje gemaakt naar maattheorie: kun je aan elke verzameling in het platte vlak wel een getal toekennen dat je als oppervlakte zou kunnen interpreteren? De Banach-Tarski paradox wordt geïllustreerd met behulp van verzamelingen op een cirkel, waarbij het keuzeaxioma om de hoek komt kijken. Hoofdstuk 8 gaat verder waar hoofdstuk 6 is geëindigd. De formule van Stirling is de rode draad in dit hoofdstuk. Langs een aantal afleidingen, waarbij lustig geschoven en geschaald wordt, komt uiteindelijk de formule van Stirling boven tafel. Gelet op de titel van paragraaf 8.2 (Een bewijs voor in de klas?) vragen de auteurs zich af of dit geschikt is om met leerlingen door te nemen. Ik denk dat ik het antwoord wel weet.

In het korte hoofdstuk 9 wordt met behulp van de formule van Stirling de kansdichtheidsfunctie afgeleid die we doorgaans de standaardnormale verdeling noemen en worden er enige woorden besteed aan de centrale limietstelling.

Machtreeksen en complexe getallen

Al in hoofdstuk 4 is de machtreeks voor $\exp(x)$ geïntroduceerd. In hoofdstuk 10 worden machtreeksen behandeld als polynomen van graad oneindig, waarbij er (op het convergentiegebied) termsgewijs wordt gedifferentieerd. En dat levert leuke resultaten op, zoals de eigenschap dat $\exp' = \exp$. Natuurlijk moet je wel even kijken of alles goed gaat, maar door te laten zien dat resttermen snel genoeg naar nul gaan, is dat wel rond te praten. Aan het eind van het hoofdstuk komen de reeksontwikkelingen van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ aan de beurt en wordt de relatie gelegd met $\exp(a \cdot x)$: als je veronderstelt dat $a^2 = -1$, dan is $\exp(a \cdot x) = \cos(x) + a \cdot \sin(x)$. Dit laatste is het vertrekpunt van het afsluitende hoofdstuk. Het complexe vlak wordt geïntroduceerd en de optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen wordt voorgedaan. Ook de poolvoorstelling van een complex getal mag natuurlijk niet ontbreken, evenmin als de stelling van De Moivre en het oplossen van hogere machtsvergelijkingen.

Besluit

In het nawoord schrijven de auteurs dat het boek geen systematische inleiding in de wiskunde is geworden. Dat klopt. Het is geen inleiding en het is niet systematisch. Het is een verzameling onderwerpen waar de auteurs met veel plezier aan hebben geschreven: dat spat ervan af. Voor iemand die de behandelde stof redelijk goed beheerst, biedt het vaak een verrassende niet-traditionele introductie en waarschijnlijk een mooie uitbreiding van kennis. Voor iemand die minder goed thuis is in deze materie is het in ieder geval niet aan te raden het boek vluchtig door te bladeren: de grote hoeveelheid ingewikkeld ogende formules is nogal imponerend.

De wens om alles met minimale middelen aan te pakken levert niet altijd de meest soepele behandeling op.

Door de tekst heen zijn er opgaven. Sommige zijn direct te doen met wat er is behandeld; andere zijn bijzonder lastig.

De achterflap belooft ook de nodige humor. Mogelijk worden daar de semi-lollige opmerkingen in de talloze voetnoten mee bedoeld. Het boek telt er maar liefst 306.

Over de auteur

Harm Bakker is leraar wiskunde aan de CSG Liudger in Drachten en docent aan de educatieve masteropleiding wiskunde van de NHL Hogeschool in Groningen. E-mail: h.bakker.marum@kpnmail.nl.

Voor het onderdeel statistiek in het nieuwe examenprogramma van havo en vwo is het zinvol als leerlingen werken met databases met echte gegevens. Het zoeken naar geschikte databases kost veel tijd. Lonneke Boels bespreekt daarom in dit artikel enkele geschikte databases en websites die naar dergelijke databases doorverwijzen. Wie zich in de zomervakantie hierin wil verdiepen, wordt zo snel op weg geholpen. Ook docenten HBO en WO zullen in dit artikel geschikte databases vinden, met name bij de websites die doorverwijzen.

De opzet van dit artikel is wat anders dan je gewend bent. Het is vooral een opsomming van websites met databases met per website een korte omschrijving. Het beoordelen wordt aan de lezer overgelaten. Op de website van de *Euclides* is een bestand te vinden met alle links, want anno nu is er natuurlijk niemand meer die nog urls intikt ...

Census At School

CensusAtSchool

NEW ZEALAND

Take part in the census

Explore the data

Resources for teaching statistics

Where NZ teachers come for information and support for their teaching of statistics.

Our quality teaching resources include: workshops, presentations, classroom activities, research papers, interactive data analysis tools, real student data sets and essential statistics website links.

Our biennial online census for Years 5-13 collects real, relevant student data as part of an international project.

CensusAtSchool / TataurangaKiTeKura aims to be accessible to all New Zealand teachers and students, and provides reo-Māori resources.



Dit zijn databases met gegevens van leerlingen uit verschillende Engelstalige landen. Als leerling vul je enerzijds de vragenlijst in waarmee je de database verder vult (let op: dit kan niet overal want je moet je land kunnen invullen). Anderzijds kun je de gegevens uit de database gebruiken (doorgaans zijn ze vrij beschikbaar).

Tuvalabs

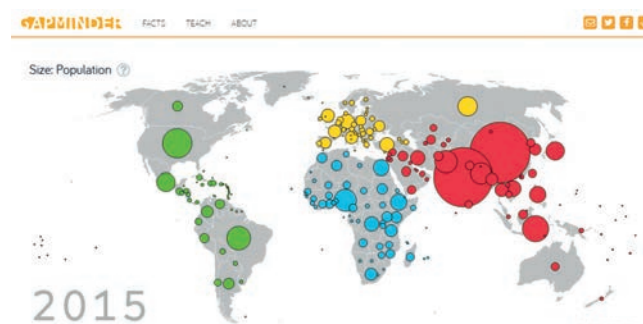
De data van Census At School zijn opgeschoond en worden hier in een programma getoond dat geschikt is om dotplots, histogrammen enzovoort te maken. Het is een vrij eenvoudig programma met *drag* en *drop* functionaliteit. Op Tuvalabs zijn ook nog andere databases te vinden, onder

andere een over films die ik in het artikel 'Online Course Statistiek' (*Euclides* 92-2) heb besproken.

Dobbelstenen

Dit is een simulatie met dobbelstenen in GeoGebra. Doel is om te ontdekken welke dobbelstenen echt zijn en welke vals.

Gapminder



Deze besprak ik eerder in het artikel 'Online Course Statistiek' (*Euclides* 92-2).

Leergang wiskunde

Met een flink aantal docenten van verschillende scholen hebben we databases verzameld die op of via deze site te vinden zijn, onder andere uit het gratis pakket R (een programma voor statistische analyses).

JSE dataset archief

Deze Engelstalige website bevat databases voor studenten die gebruikt zijn in onderzoek of statistiek-cursussen. De website geeft per database een korte beschrijving, de bijbehorende wetenschappelijke artikelen en documentatie met uitleg over de dataset inclusief tips waarvoor je de set zou kunnen gebruiken. Veel van

42.9 26.0 31.5 17.7 28.0 13.1 10.4 18.8 14.1 106.2 89.5 71.5 74.5 93.5 51.5 32.5 26.0 34.5 36.5 23.5 16.5 21.0 65.6 174.0 1
 43.7 28.5 33.5 19.9 31.7 13.9 10.9 19.7 14.1 115.1 97.5 79.0 86.5 94.8 51.5 34.4 28.0 36.5 37.5 24.5 17.0 23.0 71.8 175.3 1
 40.1 28.2 33.3 20.9 31.7 13.9 10.9 19.7 14.1 115.1 97.5 83.2 82.9 95.0 57.3 33.4 28.8 37.0 37.3 21.9 16.9 28.0 80.7 193.5 1
 44.3 29.9 34.0 18.4 28.2 13.9 11.2 20.9 15.0 104.5 97.0 77.8 78.8 94.0 53.0 31.0 26.2 37.0 34.8 23.0 16.6 23.0 72.6 186.5 1
 42.5 29.9 34.0 21.5 29.4 15.2 11.6 20.7 14.9 107.5 97.5 80.0 82.5 98.5 55.4 32.0 28.4 37.7 38.6 24.4 18.0 22.0 78.8 187.2 1
 43.3 27.0 31.5 19.6 31.3 14.0 11.5 18.8 13.9 119.8 99.9 82.5 80.1 95.3 57.5 33.0 28.0 36.6 36.1 23.5 16.9 21.0 74.8 181.5 1
 43.5 30.0 34.0 21.9 31.7 16.1 12.5 20.8 15.6 123.5 106.9 82.0 84.0 101.0 60.9 42.4 32.3 40.1 40.3 23.6 18.8 26.0 86.4 184.0 1
 44.4 29.8 35.2 21.8 28.8 15.1 11.9 21.0 14.6 120.4 102.5 76.8 80.5 98.0 56.0 34.1 28.0 39.2 36.7 22.5 18.0 27.0 78.4 184.5 1
 43.5 26.5 32.1 15.5 27.5 14.1 11.2 18.9 13.2 111.0 91.0 68.5 69.0 89.5 50.0 33.0 26.0 35.5 35.0 22.0 16.5 23.0 62.0 175.0 1
 42.0 28.0 34.0 22.5 28.0 15.6 12.0 21.1 15.0 119.5 93.5 77.5 81.5 99.8 59.8 36.5 29.2 38.3 38.6 22.2 16.9 21.0 81.6 184.0 1
 40.3 29.0 33.0 20.1 30.3 13.4 10.4 19.4 14.5 117.1 97.7 81.9 81.0 98.4 60.5 34.6 27.9 38.9 40.1 23.2 16.2 23.0 76.6 180.0 1
 43.7 29.0 31.3 20.5 29.7 15.0 11.7 20.9 16.0 123.5 99.5 82.6 82.5 95.0 58.5 38.5 30.4 39.0 38.4 24.3 18.2 22.0 83.6 177.8 1
 47.4 29.6 35.7 20.8 31.4 16.1 11.3 21.5 15.4 116.5 103.0 85.0 94.5 103.0 59.0 33.5 29.0 40.5 40.0 26.0 18.0 20.0 90.0 192.0 1
 40.3 27.5 31.4 21.7 28.0 13.3 10.3 18.8 13.2 113.0 99.6 85.6 89.2 98.0 59.1 35.6 29.0 35.8 36.0 21.5 16.6 26.0 74.6 176.0 1
 41.0 26.8 32.2 21.9 28.6 14.9 10.6 17.8 14.0 107.5 101.5 78.0 89.5 95.0 57.0 36.0 29.0 34.5 35.0 22.0 16.5 23.0 71.0 174.0 1
 45.0 27.0 33.2 21.7 30.6 13.7 11.1 20.7 14.0 112.0 104.1 82.0 84.0 97.0 56.0 34.5 29.5 39.0 35.7 24.0 17.5 22.0 79.6 184.0 1
 39.9 30.0 34.5 21.0 29.4 15.6 11.9 21.2 16.0 112.2 100.0 88.3 93.5 105.0 65.8 37.0 28.8 40.9 41.7 24.2 17.8 30.0 93.8 192.7 1
 43.0 26.5 30.3 19.3 30.0 14.8 11.2 19.7 14.7 120.0 93.8 73.6 74.9 90.1 54.1 31.2 26.9 36.4 35.6 22.0 17.1 22.0 70.0 171.5 1
 43.1 28.6 33.4 22.2 29.5 14.9 12.2 20.8 14.8 109.0 98.5 78.5 86.0 94.5 55.0 34.5 28.5 38.0 36.5 23.0 18.5 29.0 72.4 173.0 1
 43.6 29.3 34.4 20.2 32.6 15.4 10.9 20.7 15.5 118.5 104.0 87.3 88.0 101.1 59.5 37.0 30.5 39.8 42.0 26.5 18.8 22.0 85.9 176.0 1
 42.0 27.5 30.7 21.3 32.0 13.1 11.1 19.2 13.9 116.0 100.0 92.0 91.0 98.0 57.5 32.0 27.6 37.5 35.2 21.0 17.3 22.0 78.8 176.0 1
 43.8 28.0 33.2 20.0 32.0 15.0 11.5 20.4 14.4 111.0 100.0 80.0 83.7 99.5 57.0 37.0 30.0 37.5 35.5 23.0 18.0 20.0 77.0 180.5 1
 42.3 26.4 31.2 18.0 30.9 14.6 10.8 18.6 13.8 117.7 99.0 74.5 75.9 92.2 53.4 31.2 26.9 36.2 33.3 23.5 16.0 22.0 66.2 172.7 1
 42.7 29.9 35.0 21.8 32.8 14.3 11.2 19.8 14.1 123.9 101.0 90.6 89.6 101.2 59.5 37.0 28.3 35.4 40.6 22.9 17.0 24.0 86.4 176.0 1

de hier genoemde databases zijn bedoeld voor HBO en WO (College en University). Het merendeel lijkt geschikt voor het VO, afhankelijk van het beoogde lesdoel. De data staan in tekstbestanden (.txt) of csv-bestanden die vrij gemakkelijk in Excel te kopiëren zijn. Hiervoor is enige basiskennis van Excel vereist (tekst omzetten in kolommen).

Een voorbeeld: body.dat.txt. Deze set bevat gegevens van lichaamsmaten zoals borstomvang, vuistomvang, heupomvang, enkelomvang, bicepsomvang, enzovoort. Andere bestanden bevatten bijvoorbeeld informatie over automerken, oesters, batterijen van Aldi, Afrikaanse kinderen van 0 – 10 jaar en oogkleur.

Datasets verzameld door Vincent Arel-Bundock

Meer dan 680 datasets. Het bestandsformaat is .csv en er is uitleg in een Word-document. Je vindt er databases met geweldsdelicten in de VS, gegevens over Canadese lynxen, oppervlakte van landmassa's over de hele wereld, cijfers over doden onder dokters door roken, biomassage-gegevens, smaakproeven met appels, enzovoort.

Datasets die door gebruikers van statcrunch zijn gedeeld

StatCrunch			
Home • Explore • MyStatCrunch • Open StatCrunch • Resources • Support			
Data sets shared by StatCrunch members			
Showing 1 to 15 of 20610 data sets			
Data Set/Description	Share	Owner	Last edited
 Transfer Student Study	yes	gypymmermaids@yahoo.com	May 12, 2017
 Francisco Casero Final Comparisons of SAT scores across universities nationally.	yes	caseroif	May 11, 2017
 Unit 1: Exercise 1 The following data represent the number of times that a sample of residents in nursing homes who were aged 80 or older fell during a 12 month period.	yes	-253908-1_blackboardhtl_xpl	May 10, 2017

Data GOV

Soort Amerikaans CBS met speciale selectie van datasets voor onderwijs.

Dr. John Rasp's Statistics Website

Een overzicht van ongeveer dertig datasets voor gebruik in de klas. Dit zijn vrijwel allemaal Excel-bestanden.

Google datasets

Datasets verzameld door Google. Als je de taalinstellingen op Nederlands hebt staan, krijg je een ander overzicht dan als je de taal op Engels zet. In mijn overzicht (NL) staat o.a. de Wereldbank, Eurostat en brandstofprijzen Europa.

Mathforum

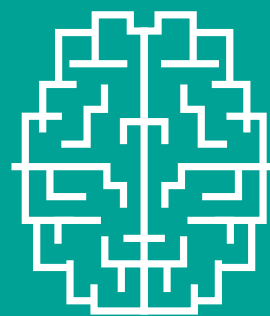
Iets meer dan twintig datasets met gegevens over salaris basketballers, elektriciteitsprijzen, tieners, enzovoort. Excelbestanden.

Deze lijst is niet compleet. Zoek bijvoorbeeld eens naar het gratis programma R voor statistische analyses en dan vind je met enig zoeken nog veel meer datasets. Maar voorlopig lijkt me dit wel genoeg voor de komende zomer.



vakbladeuclides.nl/927boels

ALLEMAAL GELIJK?



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Er zijn veel puzzels over het opsporen van één valse munt tussen een aantal goede munten met behulp van een balans. Bij deze puzzel is er echter sprake van een partij identieke munten die mogelijk is vermengd met een of meerdere valse munten. Die valse munten wegen allemaal evenveel, maar wel anders dan de echte. De enige vraag is of alle munten gelijk zijn, dus ofwel allemaal vals ofwel allemaal echt. En dat proberen we met enkel een balans (zonder gewichten, zodat we alleen munten tegen elkaar kunnen afwegen) in zo min mogelijk wegingen te bepalen.

Zodra er bij het wegen een keer geen evenwicht is kunnen we natuurlijk stoppen, dan zijn niet alle munten gelijk. Het gaat ons steeds om het aantal keren dat we moeten wegen als alle munten gelijk zijn.

We geven vast een voorlopige afschatting die we als standaard gebruiken.

Stelling: Voor $2^{k-1} < n \leq 2^k$ lukt het met n munten in k wegingen.

Opgave 1a: Bewijs de stelling.

Opgave 1b: Toon ook aan dat meer algemeen geldt: Als het lukt met $n = a$ munten in w keer wegen, dan lukt het voor $a < n \leq 2a$ in $w + 1$ keer wegen.

De grenzen uit de stelling nemen we als standaard en we gaan proberen of we die voor bepaalde waarden van n kunnen verbeteren. We onderzoeken dat steeds voor een bepaalde waarde van n . Stel we hebben een manier van wegen gevonden waarmee je kunt bepalen of die n munten allemaal al of niet gelijk zijn. Bij elke weging is er dan een aantal munten op de linker schaal, een zelfde aantal op de rechter schaal en eventueel munten die bij die weging niet meedoen. Munten die daarbij bij geen van de wegingen van elkaar zijn gescheiden noemen we een groep.

Onze manier van wegen wordt dan gekenmerkt door het aantal groepen en de aantallen munten per groep:

$A \leq B \leq \dots \leq \dots$, met $A + B + C + \dots = n$. We kunnen dan de wegingen noteren als bijvoorbeeld: $A + C \Leftrightarrow E + F$ enzovoort. Merk op dat hiermee de hele 'manier van wegen' wordt vastgelegd. Elke weging die in evenwicht is kunnen we dan weergeven met een vergelijking.

Een voorbeeld met $n = 27$ en $w = 4$: De grootte van de groepen A, B, C, D, E en F is 1, 1, 3, 5, 8, 9.

De wegingen zijn:

$$A + C + F \Leftrightarrow D + E$$

$$A + B + F \Leftrightarrow C + E$$

$$A + C + D \Leftrightarrow F$$

$$A + E \Leftrightarrow B + C + D$$

We kunnen nu vier onafhankelijke vergelijkingen opstellen in de variabelen a, b, c, d, e en f door de hoofdletters door kleine letters te vervangen en ' $\Leftrightarrow$ ' door ' $=$ '. De aantallen munten in de groepen zijn dus altijd een oplossing van het stelsel vergelijkingen. Als er evenwicht is, zijn ook de gewichten van de groepen dat, en omdat er maar twee soorten munten zijn, ook de aantallen van een van de twee muntsoorten in elk van die groepen. Aan jou de keuze welke betekenis je aan de kleine letters geeft, afhankelijk van je aanpak en/of de indeling in groepen.

Hoewel we hier dus maar vier vergelijkingen hebben en zes onbekenden, is het toch mogelijk om hiermee aan te tonen dat bij evenwicht alle munten van eenzelfde soort zijn, dus allemaal gelijk.

Opgave 2: Toon aan dat als deze 4 wegingen ($w = 4$) in evenwicht zijn, geldt dat alle 27 munten gelijk zijn, dus met w kleiner dan de standaard.

Ook voor $n = 10$ is het mogelijk de standaard te verbeteren. Daarbij gebruiken we groepen (A, B, C, D) met groottes $(1, 2, 3, 4)$, een opvolgend rijtje.

Opgave 3a: Toon aan dat we voor $n = 10$ slechts 3 wegingen nodig hebben.

En door gebruik van opgave 1b betekent dat, dat we voor $n = 11$ tot en met $n = 20$ met maximaal 4 wegingen klaar zijn. Dat is voor $n = 17, 18, 19$ en 20 een verbetering van de standaard.

We kunnen dus grenzen verleggen: de grens bij de standaard van $n = 16$ kan worden verlegd naar $n = 20$. En ook die van $n = 32$ naar 40 enzovoort. Merk op dat we hiermee nog niet voor alle n een verbetering hebben gevonden. Toch is dat wel mogelijk met behulp van de oplossing voor $n = 10$ in 3 wegingen. We kunnen dan de grootte van de groepen meerdere keren met 10 vermenigvuldigen waardoor we steeds 3 wegingen meer nodig hebben.

Merk op dat het niet vanzelfsprekend is dat we als $n = a$ in w wegingen kan, dat het dan voor $n = a^2$ in $2w$ wegingen lukt. Met $n = 10$ kan dat wel, maar dat moet je dan wel toelichten bij opgave 3b.

Opgave 3b: Vanaf welke waarde voor n kunnen we zo voor elke n met minder wegingen toe dan bij de standaard? Toon dit aan.

In opgave 3a met $n = 10$ hebben we een voorbeeld met groepen van opvolgende grootte. En er zijn meer van die rijtjes waarbij het lukt om de standaard te verbeteren. Die rijtjes kunnen langer zijn en hoeven niet per se bij één te beginnen.

Opgave 4: Onderzoek voor welke n de standaard is te verbeteren als we 5 groepen maken waarbij de groottes een rij opvolgende getallen vormen.

Bij die rijtjes is het aantal groepen steeds 1 groter dan het aantal wegingen. Dat dat niet altijd zo hoeft te zijn, blijkt uit het voorbeeld voor $n = 27$ (opgave 2), met 4 wegingen.

Opgave 5: Analooq aan dit voorbeeld, met het aantal groepen 2 groter dan het aantal wegingen, lukt het ook met sommige andere waarden van n , zoals $n = 24, 26$ en wellicht nog meer. Onderzoek hoe dit lukt voor minstens een van deze voorbeelden. Uiteraard met w kleiner dan de standaard.

Extra:

We hadden eerst enkele individuele waarden van n gevonden met w kleiner dan standaard. Het verschil was steeds slechts 1. In opgave 3a zagen we dat we dan voor bepaalde reeksen de waarde van w kunnen verlagen ten opzichte van de standaard, maar niet voor allemaal.

In opgave 3b zagen we, dat als het verschil 2 of meer wordt, we wel boven een bepaalde waarde van n met minder wegingen toe kunnen dan volgens de standaard.

We dagen je uit te proberen of dat ook al lukt vanaf kleinere waarden van n dan bedoeld bij opgave 3b.

Wij vonden daarvoor twee methoden.

De eerste gaat uit van de rijtjes van 5 in grootte opvolgende groepen uit opgave 4. Je kunt daar nog grotere groepen aan toevoegen die niet opvolgend hoeven te zijn.

De tweede gaat uit van een of twee al gevonden methoden. In veel (misschien wel alle) gevallen blijkt het mogelijk om voor een methode voor n munten en v wegingen en een methode voor m munten en w wegingen een methode af te leiden voor $n \cdot m$ munten in $v + w$ wegingen (als $n = m$ en $v = w$ heb je maar één methode nodig).

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op maandag 28 augustus a.s. binnen zijn.

LADDERSTAND

Top 10 van de ladderstand na puzzel 92-5 is:

Naam	Punten	Naam	Punten
F. van Hoeve	175	K. Vugs	84
G. Bouwhuis	167	F. Göbel	79
J. Guichelaar	154	K. van der Straaten	78
H. Bakker	146	H. Linders	76
J. Remijn	137	M. Rijnierse	71

We feliciteren Frans van Hoeve van harte met de ladderprijs.



vakbladeuclides.nl/927puzzel

VAKANTIECURSUS 'DE COMPUTER IN DE WISKUNDE: BREEKIJZER OF OUD SCHROOT'

Voor leraren exacte vakken van havo, vwo of hbo, voor studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden organiseert het Platform Wiskunde Nederland (PWN) in 2017 wederom een vakantiecursus, ditmaal met als thema: 'De computer in de wiskunde: breekijzer of oud schroot'.

In deze cursus zullen vele aspecten van de relatie tussen wiskunde, onderwijs en computer aan de orde komen. Er zijn weer zes voordrachten en twee practicum-uren. In de cursus zal Arjeh Cohen beginnen met een voordracht over hoe de computer gebruikt kan worden voor het bepalen van decimale ontwikkelingen van getallen, en voor het automatisch primitiveren van functies, waarbij de computer ons ook vertelt dat een functie geen primitieve in bekende functies heeft. Daarna spreekt Sander Dahmen over het abc-vermoeden, waarvan recent werd beweerd dat er een bewijs zou zijn. Joost Hulshof gaat vervolgens in op onderwijskundige aspecten. De zaterdagmorgen wordt geopend door Han Peters, die ons in sneltreinvaart door de ontwikkelingen in de complexe dynamica zal voeren. Een geheel ander onderwerp staat op stapel in de voordracht van Freek Wiedijk, als hij spreekt over het stapelen van bollen, zoals sinaasappels bij een groenteboer. Tenslotte spreekt Wil Schilders over de belangrijke en vrij nieuwe interdisciplinaire vakgebieden CSE en MSO.

Ook dit jaar wordt er weer ruimte voor zelfwerkzaamheid gemaakt. Er zal één practicum op vrijdag en één op zaterdag zijn, waarbij de deelnemers gaan werken aan vraagstukken die in direct verband staan met de voordrachten van de dag.

De vakantiecursus is een professionaliseringsactiviteit die is aangemeld bij het Lerarenregister (in de afgelopen jaren 10 registerpunten).

De cursus wordt gegeven in:

Eindhoven op **vrijdag 25 en zaterdag 26 augustus 2017** op de TU Eindhoven

Amsterdam op **vrijdag 1 en zaterdag 2 september 2017** bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI)

Op <http://www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus> vindt u de brochure van deze cursus en kunt u zich aanmelden. Voor vragen kunt u mailen naar: vakantiecursus@platformwiskunde.nl.



VASTGEROEST

EEN CHINESE OPGAVE

Ab van der Roest

Columnist Ab van der Roest verblijft een jaar in China. Ook daar heeft hij mooie observaties van wiskunde als menselijke activiteit. Deze keer werd Ab gefascineerd door een opgave in een Chinees wiskundeboek. En wiskunde mag dan wel een universele taal zijn, soms is het toch handig om de tekst bij de formules te kunnen lezen.

結皮

In een gesprek met een Chinese vrouw bleek dat ze lerares op een school in Kunming was. Brutaal vroeg ik haar of ik een paar wiskundelessen mocht bijwonen op haar school. Dezelfde dag kreeg ik een berichtje dat ik van harte welkom was. Ik kon vier verschillende lessen van vier leraren bekijken.

Bij het bezoek aan die school in Kunming, kreeg ik van de docent een lesboek mee. Het valt tegen om te begrijpen welke wiskunde er wordt behandeld, omdat ik geen Chinees kan lezen. Ik had verwacht dat het makkelijker zou zijn, maar de lay-out is heel anders dan we in Nederland gewend zijn. Voordeel hiervan is dat je zelf de sommen kan bedenken.

Ik kwam deze opgave tegen:

10. 判断下列各式是否成立:

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}.$$

类比上述式子, 再写出几个同类型的式子. 你能看出其中的规律吗? 用字母表示这一规律, 并给出证明.

Mijn eerste reactie: 'Dit kan niet waar zijn!' Maar het staat in het boek en daarom maar eens proberen:

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{4 \times \frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ook de andere beweringen zijn goed. Maar welke vraag staat er nu bij? Misschien deze: Laat zien dat je altijd het getal voor de breuk buiten de wortel kan zetten. Of: Je kunt hier een regel ontdekken. Formuleer de regelmaat en geldt die altijd? Ik denk dat ik het op deze houd: Zoals je ziet kun je de 'hele' voor het wortelteken zetten. Als dit de eerste drie elementen van een rij zijn, geef dan het vierde en het vijfde element. Geef een voorbeeld waarmee je laat zien dat je niet altijd de 'hele' voor het wortelteken kan zetten. (Makkelijk voorbeeld is $\sqrt{1\frac{1}{4}} = 1 \times \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.)

Er zijn oneindig veel voorbeelden te bedenken. Laat dit zien.

Dit laatste kan dan op de volgende manier:

$$\sqrt{n\frac{n}{p}} = \sqrt{\frac{np+n}{p}}. \text{ En de regel is: } \sqrt{n\frac{n}{p}} = n\sqrt{\frac{n}{p}} = \sqrt{\frac{n^3}{p}}.$$

Voor een geldige uitdrukking hebben we dus nodig dat $n^3 = np + n$ of $p = n^2 - 1$. Dit gaat natuurlijk fout als $n = 1$, maar voor gehele $n > 1$ is er altijd zo'n p te vinden.

Volgende week aan mijn lerares Chinees vragen wat de opgave nu was.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. Dit schooljaar verblijft hij voor een jaar op de MSG te Kunming, China en zal hij ons van daaruit berichten. E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvw.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075

E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2017

2/7
t/m
7/7

GRONINGEN

International workshop on statistical modelling
Organisatie: Rijksuniversiteit Groningen

vr
15/7

EINDHOVEN

Finale wiskunde olympiade 2017

vr/za
25/8
v/m
26/8

EINDHOVEN (aug) en AMSTERDAM (sep)

Vakantiecursus 'De computer in de wiskunde: breekijzer of oud schroot?'

Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

vr/za
1/9
v/m
2/9

19/9
t/m
22/9

UTRECHT

Fifth International Conference on the History of Mathematics Education

Organisatie: NVvW, Freudenthal instituut, Descartes Centr, Universiteit van Utrecht

wo
27/9

UTRECHT

Studiedag optimale examenresultaten

Organisatie: NVvW en SLO

vr
29/9

ROTTERDAM

Symposium aansluiting po-vmbo

Organisatie: NVvW, NVORWO en SLO

za
7/10

UTRECHT

Symposium Het meten van de wereld

Organisatie: Werkgroep geschiedenis van de NVvW

za
4/11

VEENENDAAL

Jaarvergadering / studiedag NVvW

Organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 93

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	5 september 2017	19 juni 2017
2	31 oktober 2017	28 augustus 2017
3	19 december 2017	16 oktober 2017
4	30 januari 2018	20 november 2017
5	20 maart 2018	8 januari 2018
6	8 mei 2018	5 maart 2018
7	26 juni 2018	30 april 2018

CASIO®

Casio fx-82EX

Pretty in Pink... Met een goed introductieaanbod!

De Casio fx-82EX onderscheidt zich door zijn enorme rekenkracht, hoge resolutie display, vele handige functies...en binnenkort ook zijn kleur. Voor het nieuwe schooljaar is deze krachtige calculator ook verkrijgbaar in roze. Wilt u hem als eerste ontvangen? Bestel dan nu en profiteer van ons introductieaanbod.

Introductie-
aanbod

€ 6,95*

Bestel direct

Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer. Zodra de Casio fx-82EX in roze beschikbaar is (juni 2017) ontvangt u deze direct.



CLASSWIZ

*U betaalt slechts € 6,95 inclusief btw en verzending. Dit introductieaanbod is alleen geldig voor wiskundedocenten, 1 exemplaar per docent.

Moderne Wiskunde vernieuwt!

Al 50 jaar dé innovatieve methode.

Nieuw bij onze 12e editie onderbouw:

- ✓ eenvoudig differentiëren;
- ✓ drie leerroutes;
- ✓ alle opdrachten ook digitaal:
 - adaptief;
 - met tussenstappen;
 - incl. inhoudelijke feedback.

Vraag nu
de Bèta-versie aan
van het digitale
materiaal!

modernewiskunde.noordhoff.nl

Beschikbaar voor schooljaar 2017/2018:
1 vmbo-k(gt), 1 vmbo-gt(h), 1 havo/vwo,
1 vwo en 1 vwo English.