Uitwerking Puzzel 92-5 **Wobien Doyer**
Knikken **Lieke de Rooij**

Als wiskundige krijg je op school al gauw de taak om te roosteren. Frans van Hoeve nam die taak ook op zich voor het maken van roosters voor een biljartcompetitie. Zijn bevindingen leidde tot allerlei mooie vragen en oplossingen die hij ons stuurde om er een puzzel van te maken. We maakten een selectie en ook enkele variaties op zijn bevindingen.

Het gaat om een aantal (n) teams van verschillende verenigingen, waarbij elk team één wedstrijd speelt tegen alle $n - 1$ andere teams. Dat noemen we een halve competitie. De wedstrijden worden gespeeld op verschillende speeldagen. Elk team speelt per keer ofwel thuis ofwel uit. De bedoeling is om dat zoveel mogelijk af te wisselen.
Als n even is ($n = 2k$) zijn er $2k - 1$ speeldagen. Ook als n oneven is ($n = 2k - 1$) zijn er $2k - 1$ speeldagen. In het laatste geval zal er op elke speeldag een team uitvallen.

We geven weer eerst kort de opgaven met de antwoorden. Daarna volgen de vragen en de antwoorden nog eens, nu met meer uitleg erbij. Dat geldt niet voor de opgaven waarin om een bewijs gevraagd werd. Die zijn alleen te vinden in het uitvoerige deel.

Bij een ideaal rooster voor $n = 2k - 1$ teams speelt elk team afwisselend uit en thuis, en dat blijkt ook te kunnen.

Opgave 1: Maak een ideaal rooster voor 5 teams. Geef daarbij aan wie tegen wie speelt en wie uit dan wel thuis speelt.

ronde 1		1 2 3 4 5	6
		11 10 9 8 7	
ronde 2	11	1 2 3 4 5	
		10 9 8 7 6	
ronde 3		11 1 2 3 4	5
		10 9 8 7 6	

figuur 1

De **oplossing** hiervan lijkt op een rupsband (zie figuur 1 voor de eerste 3 ronden met 11 teams dus $k = 6$). Plaats voor elk team een label op gelijke afstanden op een rupsband zodanig dat er steeds twee labels recht boven elkaar zitten. Vanwege het oneven aantal labels zit er dan ofwel vooraan ofwel achteraan een label precies op het verticale stukje van de band, zonder 'partner'.
Voor elke volgende ronde draaien we de rupsband een halve labelafstand vooruit, zodat weer steeds twee labels boven elkaar staan. Steeds is er één label zonder partner, vooraan als het de vorige keer achteraan was en omgekeerd.
Laat in elke ronde de teams waarvan de labels boven elkaar zitten tegen elkaar spelen, in de oneven ronden de bovenste (rood) thuis, de onderste (groen) uit, en in de even ronden andersom. Het team waarvan het label geen partner heeft speelt niet.

We gaan door tot vlak voordat de band een halve slag rond gedraaid is, zodat label 1 zonder partner

1-5	2-4	12 / 54 3
4-1	3-2	5 12 / 43
5-4	1-3	51 / 43 2
3-5	2-1	4 51 / 32
5-2	4-3	45 / 32 1

figuur 2

is. Ga na dat dan alle labels precies één keer zonder partner geweest zijn. Er zijn dan dus precies $2k - 1$ ronden gespeeld.
Dit levert een optimaal rooster op: elk team is 1x uitgevallen en elk team heeft tegen elk ander team gespeeld. Zolang het label van een team aan dezelfde kant van de band zit (boven/rood of onder/groen) speelt het afwisselend uit of thuis. Een label wisselt alleen van kant nadat het team is uitgevallen. Bij terugkeer van het label aan de andere kant speelt het team dan thuis als het de vorige keer uit gespeeld heeft en omgekeerd.
Voor 5 teams krijgen we dan het rooster in figuur 2 (het thuisspelende team staat steeds voorop, labels die ‘boven’ staan rood, onder groen). Ernaast de stand van de rupsband:
Opmerking: We kunnen de rupsband natuurlijk nog verder doordraaien. De wedstrijden die we dan toevoegen zijn dezelfde die we al hadden, waarbij rood en groen (onder en boven) verwisseld zijn, maar uit en thuis niet!

Voor $n = 2k$ lukt het niet om te zorgen dat alle teams afwisselend uit en thuis spelen. Er zullen dus teams zijn die ofwel twee keer achter elkaar uit ofwel twee keer thuis spelen. Dat noemt Frans een ‘knik’.

Stelling 1: In een halve competitie voor $n = 2k$ teams zijn er altijd minstens $n - 2$ teams met minstens één knik.

Als die stelling klopt is voor een even aantal van $n = 2k$ teams het beste rooster dat mogelijk is een rooster met 2 teams zonder knik en $n - 2$ teams met precies één knik. Dat noemen we een optimaal rooster voor $n = 2k$.

Het is mogelijk een ideaal rooster van $n = 2k - 1$ om te bouwen tot een optimaal rooster voor $n = 2k$.
Opgave 2: Maak een optimaal rooster voor 6 teams.
Oplossing: We kunnen, uitgaande van een optimaal rooster voor $2k - 1$ teams, een team toevoegen dat steeds speelt tegen de uitvaller. Dan heeft na $2k - 1$ ronden elk team tegen elk ander team gespeeld. Maar de uitvallers die voor én na dat uitvallen meespelen krijgen dan een knik. Als ze vóór het uitvallen thuis speelden, dan speelden ze daarna uit, dus de tussengevoegde wedstrijd levert altijd een knik op.

1-5	2-4	3-6	12 / 54 3
4-1	3-2	6-5	5 12 / 43
5-4	1-3	2-6	51 / 43 2
3-5	2-1	6-4	4 51 / 32
5-2	4-3	1-6	45 / 32 1

figuur 3

We hebben voor het uit en thuis spelen van het nieuwe team meerdere mogelijkheden. De simpelste is om het afwisselend uit en thuis te laten spelen, bijvoorbeeld thuis tegen de uitvallers met label vooraan de rupsband, uit tegen de uitvallers achteraan. Het nieuwe team heeft dan geen knik, Zie figuur 3 voor het zo ontstane rooster voor 6 teams. Tussen 2 ronden waar knikken plaatsvinden is een dikkere lijn getekend. De teams die voor de tweede keer achter elkaar uit of thuis spelen zijn onderstreept.
Op deze manier heeft, behalve het nieuwe team, ook de laatste uitvaller geen knik, maar de eerste wel. Het is dus een optimaal rooster.
Opmerking: als we het nieuwe team de eerste wedstrijd (en alle andere wedstrijden tegen een uitvaller achter) thuis hadden laten spelen heeft juist de eerste uitvaller geen knik en de laatste wel. Ook dat is een optimaal rooster.

Opgave 3: Bewijs stelling 1.
Oplossing: **Bewijs dat in een halve competitie voor $n = 2k$ teams er altijd minstens $n - 2$ teams**

met minstens één knik zijn.
Er bestaan precies twee verschillende uit-thuisschema's voor een team zonder knik. Beide schema's hebben afwisselend uit en thuis, de ene begint met thuis (schema a), de ander met uit (schema b). Teams zonder knik hebben dus één van deze schema's. Omdat alle teams om tegen elkaar te kunnen spelen een verschillend uit-thuis schema moeten hebben kunnen er dus hoogstens twee teams zijn zonder knik, één met schema a en één met schema b. Er moeten dus minstens $n - 2$ teams zijn met minstens één knik.

Opmerking: sommige inzenders veronderstelden bij (een deel van) de bewijzen van de stellingen (opgaven 3 en 5) dat het altijd moet gaan om optimale roosters die verkregen kunnen worden door ideale roosters voor $2k - 1$ spelers om te bouwen. Maar we hebben geen garantie dat alle mogelijke optimale roosters voor $2k$ spelers op die manier kunnen ontstaan. We mogen dus bij de bewijzen daar geen gebruik van maken. In opgave 6 zullen we zien dat er wel degelijk ook optimale roosters zijn die zo **niet** kunnen ontstaan.

In opgave 4 generaliseerden we de resultaten van opgave 1 en 2, in de uitwerking hebben we dat bij opgave 1 en 2 al gedaan:.
Opgave 4a: Bepaal een algoritme om voor $n = 2k - 1$ een ideaal rooster te maken.
Dit hebben we al gedaan bij de oplossing van opgave 1.
Opgave 4b: Bouw dit om tot een optimaal rooster voor $n = 2k$.
Dit hebben we al gedaan bij de oplossing van opgave 2.

Voor $n = 2k$ gaan we nu onderzoeken hoe bij een optimaal rooster de knikken over het rooster zijn verdeeld. Voor $n = 2k$ geldt:

Stelling 2: In een optimaal rooster voor $n = 2k$ teams is het aantal knikken tussen 2 speeldagen altijd 0 of 2.

Natuurlijk is, als dat aantal 2 is, er één die 2 keer achter elkaar uit speelt en één die 2 keer achter elkaar thuis speelt. We noemen dat een knikpaar.

Stelling 3: Er kunnen in een optimaal rooster nooit meer dan twee knikparen direct achter elkaar voorkomen.

Ter verduidelijking van stelling 3: in onderstaand fragment van een rooster komen twee knikparen direct achter elkaar voor, het paar 2, 5 na speeldag 1 en het paar 1, 3 na speeldag 2 :

	T U	T U	T U
speeldag 1:	3 - 1	2 - 5	6 - 4
speeldag 2:	2 - 3	1 - 6	4 - 5
speeldag 3:	6 - 2	5 - 3	1 - 4

Opgave 5a: Bewijs stelling 2.
Oplossing: **Bewijs dat in een optimaal rooster voor $n = 2k$ teams het aantal knikken tussen 2 speeldagen altijd 0 of 2 is.**
Ten eerste: Het aantal knikken na een bepaalde ronde moet altijd even zijn. Immers zowel in die ronde als in de ronde erna spelen er evenveel teams uit als thuis. Voor ieder team dat 2x uit speelt moet er dus een ander team 2x thuis spelen.

Vervolgens laten we (op twee manieren) zien dat het er nooit meer dan 2 kunnen zijn. Dan zijn het er dus 0 of 2.

Eerste manier: stel er zijn meer dan 2 knikken tussen twee ronden. Dan zijn er tussen die twee ronden minstens 2 knikparen. Er zijn dan twee teams die tegelijkertijd 2x uit spelen. Omdat elk team hoogstens één knik heeft, hebben die twee teams precies hetzelfde uit-thuis schema (behalve die 2x achter elkaar uit spelen ze allebei steeds om-en-om uit en thuis). Ze kunnen dan nooit tegen elkaar spelen en dat kan niet.

Hiermee is de stelling bewezen, maar we maken van de gelegenheid gebruik om te laten zien dat het verhelderend kan zijn om de optimale schema's (of ze nu afgeleid zijn van ideale schema's of niet) gezien kunnen worden als cykels die we, om een optimaal schema te krijgen, op verschillende plaatsen kunnen 'openknippen':

Het aantal wedstrijden in een optimaal schema voor $n = 2k$ teams is oneven. $n - 2$ teams hebben één knik. Die spelen dus ofwel in de eerste wedstrijd uit en de laatste wedstrijd thuis, of omgekeerd. 2 teams hebben geen knik en spelen dus ofwel uit ofwel thuis in zowel de eerste als de laatste wedstrijd. Dus als we de eerste wedstrijd als extra na de laatste nog eens zouden spelen, dan hebben precies de 2 teams die geen knik hadden een knik tussen de laatste en de extra wedstrijd.

Dat betekent dat we elk optimaal schema voor $n = 2k$ teams kunnen zien als een cykel van $2k - 1$ ronden waarin alle teams precies één knik hebben dus $2k$ knikken. We kunnen de cykel op verschillende plaatsen 'open knippen' om een rooster te krijgen, maar die roosters zijn niet allemaal optimaal. De knikken tussen de twee ronden waartussen we knippen verdwijnen. Knippen we dus tussen twee ronden waartussen 2 knikken zitten, dan hebben we weer een optimaal rooster.

Ook hieruit kunnen we laten zien dat meer dan 2 knikken tussen twee ronden niet kan. Zouden we kunnen knippen tussen twee ronden waartussen meer dan 2 knikken zitten dan zouden we een rooster krijgen dat beter is dan optimaal, maar we weten uit stelling 1 dat dat niet kan.
Tussen 2 ronden van het oorspronkelijke optimale rooster zitten dus nooit meer dan 2 knikken.

Opgave 5b: Bewijs stelling 3.
Oplossing: **Bewijs dat er in een optimaal rooster nooit meer dan 2 knikparen direct achter elkaar kunnen voorkomen**.
We zullen laten zien dat als we een optimaal rooster zouden hebben met 3 knikparen achter elkaar het onmogelijk is dat alle teams tijdens dat rooster tegen elkaar spelen. Dat is dus een bewijs uit het ongerijmde:

Stel we hebben een optimaal rooster met 3 knikparen achter elkaar.
Dan zijn daar 4 ronden bij betrokken die we even ronde 1, 2, 3 en 4 noemen (dat hoeven dus niet de eerste vier ronden van het toernooi te zijn).
Ook zijn er 3 knikparen bij betrokken: het eerste tussen ronde 1 en 2, het tweede tussen ronde 2 en 3 en het derde tussen ronde 3 en 4.
Er zijn 3 teams die zowel in ronde 1 als in ronde 4 uit spelen. Die moeten dan natuurlijk ergens tussen ronde 1 en ronde 4 een knik hebben. Het gaat om:
1: het team van het eerste knikpaar dat 2x uit speelt (uit-thuis schema: uit, uit, thuis, uit).
2: het team van het tweede knikpaar dat 2x thuis speelt (uit-thuis schema: uit, thuis, thuis, uit).
3: het team van het derde knikpaar dat 2x uit speelt (uit-thuis schema: uit, thuis, uit, uit).
Omdat deze 3 teams voor of na onze 4 ronden geen knikken meer hebben en ze in ronde 1 en 4 allemaal uit spelen hebben ze, behalve in ronde 2 en 3, steeds alle drie hetzelfde uit-thuis schema.

Ze moeten dus alle drie in ronde 2 of 3 tegen elkaar spelen, en dat kan niet.

Hiermee is de stelling bewezen, maar we laten ook hier zien dat het zinvol kan zijn om het rooster als een cykel te zien.

Stel we zouden een rooster hebben met 3 knikparen achter elkaar. We kunnen dat rooster dan eerst sluiten tot een cykel en weer openknippen op de eerste van de 3 knikparen. Het eerste knikpaar is dan verdwenen. Maar we hebben dan een rooster met 2 knikparen achter elkaar direct na de eerste ronde.

We laten nu zien dat 2 knikparen direct na het begin van het rooster niet kan.

Van het knikpaar tussen ronde 1 en 2 is er één team dat in ronde 1 en 2 thuis speelt en vanaf ronde 3 dus steeds in de oneven ronden uit en in de even thuis.
Van het knikpaar tussen ronde 2 en 3 is er één team dat in ronde 2 en 3 uit speelt en dus ook vanaf ronde 3 steeds in de oneven ronden uit en in de even thuis.
En er is een team zonder knik dat in alle oneven ronden uit speelt en in de even thuis.

Deze 3 teams kunnen dus na ronde 2 niet meer tegen elkaar spelen en dus moeten ze alle drie in de eerste 2 ronden tegen elkaar spelen, en dat kan niet.

Frans vroeg zich ook af of er voor $n = 2k$ meer dan één echt verschillend rooster mogelijk is. Om daar antwoord op te geven moeten we eerst vaststellen wat echt verschillende roosters zijn.

We zagen al dat we een optimaal rooster ook kunnen zien als een cykel waarin alle teams precies één knik hebben. Als we die cykel 'openknippen' tussen 2 speeldagen waartussen een knikpaar zit, dan ontstaat weer een optimaal rooster. In de verschillende roosters die zo kunnen ontstaan zijn de speeldagen cyclisch verwisseld.
Ook krijgen we natuurlijk opnieuw een optimaal rooster als we in een bestaand optimaal rooster de volgorde van de speeldagen omkeren, van alle thuiswedstrijden uitwedstrijden maken en omgekeerd of een permutatie uitvoeren op de nummers van de teams.

We geven daarom de volgende definitie:

Definitie: twee roosters zijn echt verschillend als de ene niet door cyclisch verwisselen van de speeldagen, het omkeren van de volgorde van de speeldagen, het verwisselen van alle uit- en thuiswedstrijden, een permutatie van de nummers van de teams of een combinatie daarvan in de ander kan overgaan.
Voor $n = 6$ blijken er geen echt verschillende optimale roosters te zijn, voor $n = 8$ of groter wel.

1-7	2-6	3-5	8-4
6-1	5-2	4-3	7-8
7-6	1-5	2-4	8-3
5-7	4-1	3-2	6-8
6-5	7-4	1-3	8-2
4-6	3-7	2-1	5-8
5-4	6-3	7-2	8-1

figuur 4

Opgave 6: Laat zien dat er voor $n = 8$ wel echt verschillende optimale roosters bestaan.
Oplossing: We zagen dat we optimale roosters voor een even aantal teams konden afleiden uit ideale roosters voor een oneven aantal teams. De ideale roosters voor een oneven aantal teams die we maken via een rupsband hebben een opvallende eigenschap: de volgorde waarin een team tegen alle andere speelt is een cyclische verwisseling van steeds dezelfde reeks. Op de plaats in die reeks waar het team zelf staat speelt het betreffende team niet. We vinden deze eigenschap terug in de optimale roosters van $n = 2k$ die we eruit afleiden.
Het enige verschil is dat er nu één team is waarvoor de volgorde afwijkt, en dat de andere op de plaats in de reeks waar ze zelf staan tegen precies dat team spelen.
In figuur 4 zien we zo'n rooster voor 8 teams.
Het speellijstje van team 1 daarin is: 7, 6, 5, 4, 3, 2, 8.
Van team 2: 6, 5, 4, 3, 8, 1 Veranderen we de 8 in het eerste lijstje in een 1 en in het tweede in een 2, dan zijn de lijstjes na cyclisch verwisselen gelijk. Dit geldt voor alle lijstjes behalve voor dat van

team 8.
Die eigenschap verandert niet door de transformaties uit de definitie van ‘echt verschillend’: hierboven: cyclisch verwisselen van de speeldagen verwisselt de reeks alleen cyclisch, het omkeren van de volgorde van de speeldagen keert alle reeksen om, zodat ze nog steeds cyclische verwisselingen van elkaar zijn, het verwisselen van uit en thuis verandert niets aan de reeksen en permutatie van de nummers van de teams levert in alle lijstjes dezelfde permutatie op.

Slagen we er dus in een optimaal schema op te stellen dat deze eigenschap niet heeft dan kunnen we een schema dat is ontstaan uit het rupsbandschema niet met behulp van die transformaties omzetten in dat nieuwe schema, en dus is het nieuwe schema ‘echt verschillend’ van de schema’s die we al hadden.

1-6	2-5	3-4	8-7
7-1	6-2	5-3	4-8
$\underline{7}$-6	1-5	2-4	8-$\underline{3}$
5-7	4-1	3-2	6-8
$\underline{6}$-5	7-4	1-3	8-$\underline{2}$
4-6	3-7	2-1	5-8
$\underline{5}$-4	6-3	7-2	8-$\underline{1}$

figuur 5

In figuur 5 zien we een iets gewijzigd schema. Net als in figuur 4 geven de dikkere horizontale lijnen tussen de ronden aan waar de knikken zitten, teams die voor de tweede keer achter elkaar uit of thuis spelen zijn onderstreept. Ook dit is een optimaal rooster, er zijn 3 knikparen op 8 teams en niemand heeft meer dan 1 knik.
We geven nu de speellijstjes voor de eerste 3 teams:
Team 1: 6, 7, 5, 4, 3, 2, 8
Team 2: 5, 6, 4, 3, 8, 1, 7
Team 3: 4, 5, 8, 2, 1, 7, 6
Eén van deze 3 teams zou het ‘toegevoegde’ team kunnen zijn, maar 2 van deze 3 lijstjes zouden dan, op één plaats in elk lijstje na, een cyclische verwisseling van elkaar moeten zijn. Dat is overduidelijk niet het geval.

Dit schema is dus niet op de aangegeven manier uit een rupsband schema af te leiden, en dus echt verschillend van schema’s die dat wel zijn.

Overigens is dit schema vrij gemakkelijk af te leiden uit het schema uit figuur 4, door de eerste twee ronden te verwisselen en in die twee ronden uit en thuis te verwisselen.

Algemeen kunnen we in elk schema twee opvolgende ronden zonder knik ertussen op deze manier verwisselen. Als er voor de verwisseling geen knik ertussen is dan na de verwisseling ook niet. Verder speelt ieder team dat voor de verwisseling uit speelde na de verwisseling weer uit en omgekeerd, zodat de knikken vóór en na de verwisseling gelijk blijven.
Of dat leidt tot een ‘echt verschillend’ schema moet nog wel met de speellijstjesproef gecontroleerd worden. Ook in een schema met 6 teams kunnen we deze verwisseling toepassen, maar dan blijkt uit de speellijstjesproef toch dat het nieuwe schema kan worden afgeleid van een rupsbandschema, met een ander team in de rol van toegevoegd team.

Je zou je ook nog af kunnen vragen of we een afwijkend schema kunnen krijgen uit een ideaal schema voor $2k - 1$ teams dat afwijkt van het rupsbandschema. Dat kan niet.

Figuur 6 laat zien dat er nog andere ‘echte’ veranderingen mogelijk zijn. In dat schema zijn er 3 ronden achter elkaar zonder knik ertussen, wat in een uit het rupsbandschema afgeleide schema’s niet kan, ook niet na het type verwisseling van figuur 4 naar figuur 5. Ook de speellijstjesproef klopt niet.

1-8	2-7	3-6	4-5
7-1	8-2	5-3	6-4
1-6	2-5	4-3	7-8
3-1	4-2	5-7	6-8
1-4	2-3	7-6	8-5
5-1	6-2	3-7	4-8
2-1	8-3	6-5	7-4

figuur 6

Hans Linders vond een vergelijkbare oplossing zoals in figuur 6.
Ook enkele andere inzenders geven een schema waarvan ze claimen dat het ‘echt verschillend’ is van de rupsbandschema’s, maar de speellijstjesproef laat zien dat dat niet klopt.

Overigens, de ideale schema’s voor een oneven aantal teams zijn wel uniek.
Je kunt bewijzen dat alle ideale schema’s voor $2k - 1$ teams door een permutatie van de teamnummers en/of verwisseling van uit/thuis overgaan in ons rupsbandschema. We geven het bewijs hier niet, Jos Remijn stuurde ons een van internet te downloaden bewijs toe.[1]

Ten slotte had Frans in de praktijk nog heel wat andere voorwaarden. Zoals in het geval dat van een vereniging meerdere teams competitie spelen en het aantal biljarttafels beperkt is. Dan is ook het aantal thuis spelende teams per speeldag van die vereniging beperkt.
Als extra zou u daarover uw licht kunnen laten schijnen, bijdragen daaraan zijn welkom!

[1] Fronček D., Meszka M. (2005) Round Robin Tournaments with One Bye and No Breaks in Home-Away Patterns Are Unique, http://link.springer.com/chapter/10.1007/0-387-27744-7_16