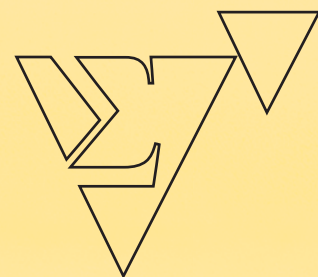
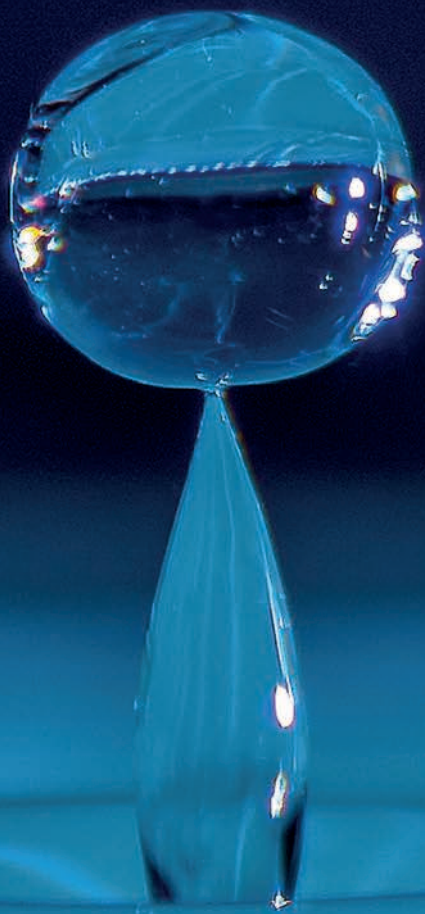


EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Anamorfosen op het vmbo

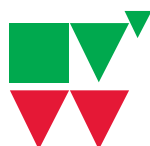
Hoe Euler aan zijn gamma-functie kwam

N-term in werking

Wiskunde in de Gouden Eeuw

Kiezen voor docent wiskunde

NR. 6



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 92 - MEI 2017

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 92 NR 6

IN DIT NUMMER

INTRODUCTIE VAN HET INPRODUCT

MARK TIMMER
TOM COENEN

4

BOEKBESPREKING 'BASISKENNIS EN BASISVAARDIGHEDEN'

JAAP GRASMEIJER

9

WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

10

META-METHODE

PLONIE NIJHOFF
RODICA ERNST-MILITARU
JORIS GHYSELS

13

GETUIGEN

DANNY BECKERS

17

BERICHTEN UIT HET VMBO

JOKE VERBEEK

19



HOE EULER AAN ZIJN GAMMA-FUNCTIE KWAM

ANDRÉ VAN DEN BERG

21

HET FIZIER GERICHT OP..

PETER BOON

25



N-TERM IN WERKING

CVTE

27

WIS EN WAARACHTIG

31

WORTELS VAN DE WISKUNDE

JEANINE DAEMS

33

KLEINTJE DIDACTIEK

LONNEKE BOELS

35

KIEZEN VOOR DOCENT WISKUNDE

HANKE KORPERSHOEK
FLOOR MIDDEL

37

foto: Siegfried Weitenberg
De vallende druppel wordt in de tijd 'bevoren' met de flitser die is ingesteld op de kortst mogelijke stand (1/280).

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

TEGENVOETER
ROLAND MEIJERINK

40

VERENIGINGSNIEUWS

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2017



42

PUZZEL

43

SERVICEPAGINA

46

Erratum

In ons artikel over PISA-2015 in *Euclides* 5 van februari 2015 maken we melding van de wijze waarop bij TIMSS geijkt wordt. Daarbij geven we aan dat er bij TIMSS geen vergelijking door de jaren heen mogelijk is. Vanaf 1995 was dat inderdaad het geval, maar bij nader inzien blijkt dit sinds ongeveer 2005 niet meer zo te zijn: de huidige werkwijze bij TIMSS is overeenkomstig de werkwijze bij PISA.

Ger Limpens en Ruud Stolwijk

Kort vooraf

De examens komen eraan! Hoe je het ook draait of keert, dat is toch altijd een moment van de waarheid. Voor de leerlingen uiteraard, maar ook voor u als docent en voor de school als geheel. En niet te vergeten voor de constructeurs van de examens, het Cito en de CvTE. De spanning bereikt traditioneel een hoogtepunt op de dag dat de N-termen bekend worden gemaakt, dit jaar op 14 juni 's morgens om 8.00 uur. De discussie over de hoogte van die N-termen barst dan meteen los op allerlei fora waar meningen gedropt kunnen worden. Een discussie over hoe die N-termen tot stand komen is niet meer nodig: het CvTE geeft daarover volledige openheid van zaken. Met een *webinar* op 9 maart jl. die is terug te zien op examenblad.nl en via het artikel 'N-term in werking' dat in deze *Euclides* is te vinden op bladzijde 27. In de volgende editie gaat het CvTE nader in op de examenwerkwoorden van de havo-vwo-examens wiskunde en natuurkunde. In een lijst die onlangs is gepubliceerd, worden die examenwoorden voor beide vakken beter op elkaar afgestemd. De redactie stelt het zeer op prijs dat het CvTE *Euclides* als een van zijn spreekbuizen heeft gekozen.

Een andere plezierige samenwerking eindigt in deze editie: tegenvoeter Roland Meijerink is terug uit Nieuw-Zeeland en daarmee eindigt zijn gelijknamige column. Roland, dank voor je bespiegelingen de afgelopen jaren en we hopen dat je oproep aan het einde van je laatste column het beoogde effect heeft!

Tom Goris

INTRODUCTIE VAN HET INPRODUCT

Mark Timmer
Tom Coenen

Met de komst van de nieuwe examenprogramma's die het afgelopen schooljaar van start zijn gegaan in de vierde klassen van de havo en het vwo, is analytische meetkunde toegevoegd aan de curricula van wiskunde B. Op het vwo omvat dit nieuwe onderwerp naast algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde ook vectormeetkunde. Hoewel de meeste concepten daaruit redelijk soepel en intuïtief geïntroduceerd kunnen worden, is er één concept waarbij dat minder het geval is: het inproduct. Mark Timmer en Tom Coenen vergelijken verschillende aanpakken voor de introductie van het inproduct.

Aanleiding

In een Lesson Study Team aan de Universiteit Twente is geruime tijd aandacht besteed aan de introductie van de vectormeetkunde in de vierde of vijfde klas van het vwo. De grootste meningsverschillen bleken zich daarbij voor te doen op het moment dat het inproduct om de hoek kwam kijken. Zoals u zich wellicht nog herinnert, zijn er twee gangbare definities voor het inproduct van twee vectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Algebraïsch wordt gesteld dat

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

en meetkundig wordt gesteld dat

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi)$$

waarbij ϕ de (kleinste) hoek is van de twee vectoren en

$$|\vec{a}| \text{ en } |\vec{b}| \text{ staan voor de lengtes van de vectoren.}$$

Via de cosinusregel kan betrekkelijk eenvoudig worden bewezen dat deze definities equivalent zijn. In de les kan dus een willekeurige definitie als uitgangspunt worden gebruikt, waarna de andere hieruit kan worden bewezen.

Tot zover geen vuiltje aan de lucht, zo lijkt het. Echter, welke van deze twee definities kies je om mee te beginnen in de les? Welke van de twee is een logisch uitgangspunt, een zinnige definitie waarbij leerlingen begrijpen wat het concept is dat wordt gedefinieerd? Voor de algebraïsche definitie lijkt dit zeer zeker niet het geval. Uiteraard kunnen leerlingen prima het kunstje nadoen als dat moet, maar wat stelt het getal precies voor dat verkregen wordt door de kentallen te vermenigvuldigen en vervolgens op te tellen? De meetkundige definitie lijkt al niet veel inzichtelijker: het lijkt om de (cosinus van de) hoek tussen twee vectoren te gaan, maar vervolgens wordt er nog mysterieus vermenigvuldigd met de lengtes van de vectoren. Wat zegt het op die wijze verkregen getal?

Bestaande aanpakken

Er zijn verscheidene manieren te verzinnen om het inproduct te introduceren. Een mogelijkheid is om simpelweg te stellen dat we de vermenigvuldiging van vectoren willen definiëren, omdat we nou eenmaal veel van die operatie houden. Als we uitgaan van een tweedimensionaal assenstelsel en ontbinden in componenten, vinden we

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y) \cdot (\vec{b}_x + \vec{b}_y) = \vec{a}_x \cdot \vec{b}_x + \vec{a}_x \cdot \vec{b}_y + \vec{a}_y \cdot \vec{b}_x + \vec{a}_y \cdot \vec{b}_y$$

met $\vec{a}_x = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b}$ evenzo ontbonden.

Door af te spreken dat de vermenigvuldiging van twee vectoren in dezelfde richting verkregen wordt door hun lengtes te vermenigvuldigen, en bovendien af te spreken dat de vermenigvuldiging van twee vectoren die loodrecht op elkaar staan 0 is, volgt hieruit de gangbare definitie

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \text{ Deze aanpak hangt echter aan}$$

elkaar van niet-beargumenteerde aannames en afspraken: waarom kies je er immers voor dat loodrechte vectoren vermenigvuldigd 0 opleveren en waarom is de distributieve wet (die we klakkeloos hebben toegepast) überhaupt van toepassing?

Een andere aanpak die in meerdere variaties voorkomt, is om te beweren dat je iets wilt kunnen zeggen over de mate waarin twee vectoren 'overeenkomstig' zijn. Uitgaande van twee vectoren van gelijke lengte is dat nog wel zinvol te definiëren: als ze precies dezelfde kant op wijzen dan zijn ze volledig overeenkomstig (bijvoorbeeld uitgedrukt in het getal 1), als ze precies in tegenovergestelde richting wijzen dan zijn ze op zich overeenkomstig afgezien van de spiegeling (bijvoorbeeld uitgedrukt in het getal -1) en als ze loodrecht op elkaar staan, dan lijken ze helemaal niet op elkaar (uitgedrukt in het getal 0). Vectoren die bijna dezelfde kant op wijzen zouden dan een overeenkomstigheid net onder 1 moeten hebben, terwijl vectoren die bijna loodrecht staan een overeenkomstigheid net verschillend van 0 moeten hebben. Op

basis van deze overwegingen ligt het voor de hand om de overeenkomstigheid van vectoren te definiëren als de cosinus van hun hoek – dat levert immers exact alle bovengenoemde eigenschappen op. Deze aanpak leidt echter niet tot de definitie van het inproduct, aangezien hij niet verklaart waarom het inproduct van vectoren met lengtes ongelijk aan 1 naast de cosinus ook nog de lengtes van de vectoren bevat. Worden vectoren ‘meer overeenkomstig’ als ze langer worden? Deze uitleg loopt dus uiteindelijk ook vast.

Weer andere aanpakken gaan uit van de loodrechte projectie van de ene vector op de ander (uitgaande van vectoren die vanuit hetzelfde punt beginnen), maar moeten dan vreemde kunstjes uithalen om bij het inproduct uit te komen, omdat zo’n projectie slechts afhangt van de lengte van één van de vectoren – de loodrechte projectie van $\vec{a}$ op $\vec{b}$ is immers onafhankelijk van de lengte van $\vec{b}$. *Moderne Wiskunde* kiest in de vierde klas voor een dergelijke aanpak in een natuurkundige context, waarbij vermeld wordt dat de vector $\vec{a}$ een kracht voorstelt en de vector $\vec{b}$ een weg. Vervolgens wordt gesteld dat de *arbeid* om een wagentje over de volledige lengte van weg $\vec{b}$ te verplaatsen gelijk is aan het product van die lengte en de lengte van de component van $\vec{a}$ in de richting van de weg (de loodrechte projectie van $\vec{a}$ op $\vec{b}$). Hoewel de zo verkregen uitdrukking voor arbeid inderdaad leidt tot de definitie van het inproduct, betwijfelen we of dit leerlingen nu echt leidt tot nuttig inzicht: waarom zouden we nou net $\vec{a}$ als kracht en $\vec{b}$ als weg willen definiëren en vervolgens het natuurkundige concept arbeid erbij pakken als we het product van twee vectoren definiëren? En wat moeten we ons erbij voorstellen als de kracht zich onder de weg bevindt, kan dat ook? Gekscherend: in dezelfde lijn hadden we net zo goed kunnen stellen dat de vector $\vec{a}$ de uitkomsten van een kansexperiment bevat en de vector $\vec{b}$ de bijbehorende kansen. Het inproduct is dan gedefinieerd als de verwachtingswaarde van dit kansexperiment (uitgaande van de wat onrealistische aanname dat de componenten van $\vec{b}$ niet negatief zijn en optellen tot 1). In dit voorbeeld, evenals in het geval van de natuurkundige arbeid, worden specifieke betekenissen toegerekend aan de vectoren die naar ons idee op de langere termijn problemen kunnen veroorzaken. Het begrip wordt dusdanig gekoppeld aan een context, dat leerlingen in verwarring kunnen raken over de betekenis van het inproduct in een setting waarin die context afwezig is (bijvoorbeeld bij het bepalen van de hoek tussen twee vectoren).

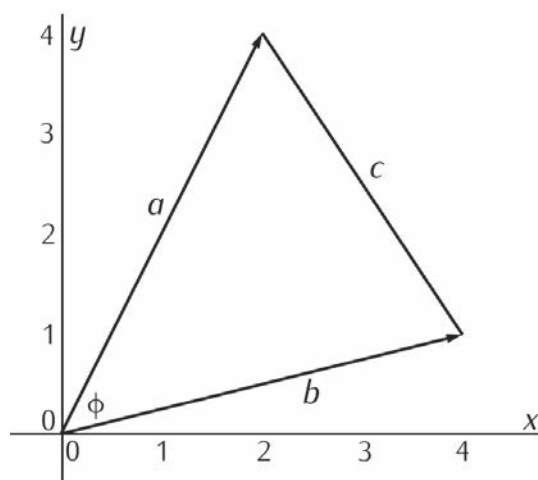
Tot nu toe hebben we een aantal mogelijke opties voor de introductie van het inproduct de revue laten passeren, waarbij we telkens tot de conclusie kwamen dat er iets anders nodig zou kunnen zijn. Is de hierboven telkens gekozen volgorde wel de juiste: waarom überhaupt *beginnen* met het inproduct te definiëren? Uiteindelijk is het zeer zeker nuttig om bekend te zijn met dit concept, aangezien het leerlingen bijvoorbeeld helpt de hoek

tussen twee vectoren te bepalen. Daarnaast helpt het om snel loodrechte vectoren op te kunnen stellen, als eenmaal bekend is dat dit het geval is als het inproduct 0 is. Echter, het feit dat het inproduct nuttig is wil nog niet zeggen dat het verstandig is om te beginnen met ons in allerlei bochten te wringen om het concept te introduceren.

In dit geval lijkt een didactisch logische route te zijn om te beginnen met een probleem dat we willen oplossen: een toepassing van het inproduct. Op basis van die overweging hebben wij een aanpak ontwikkeld voor het introduceren van het inproduct, zoals hierna beschreven. Na het beschikbaar komen van de boeken voor de vijfde klas van Noordhoff bleek dat *Getal & Ruimte* ook voor deze aanpak heeft gekozen.

Hoek tussen twee vectoren als uitgangspunt

Als introductie van het inproduct starten we met het formuleren van een probleemsituatie: het bepalen van de hoek tussen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. We beschrijven nu hoe dat er klassikaal, in samenspraak met de leerlingen, uit zou kunnen zien. We gaan er daarbij van uit dat de leerlingen de cosinusregel al beheersen – afhankelijk van de methode zou er daarvoor wellicht wat met hoofdstukken geschoven moeten worden.



figuur 1

In figuur 1 zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend in een assenstelsel (voor het gemak beide beginnend in de oorsprong), waarbij we de vectoren als zijden van een driehoek beschouwen en de letters a en b gebruiken voor de lengtes van deze zijden – dus, $a = |\vec{a}|$ en $b = |\vec{b}|$. De lengte van de derde zijde noemen we c .

Op basis van deze informatie gaan we de hoek ϕ bepalen. De cosinusregel vertelt ons dat

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\phi) = c^2,$$

$$\text{oftewel } \cos(\phi) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}.$$

Het vervelende van deze uitdrukking om de hoek te bepalen is, dat de teller de lengte c bevat, die niet direct gegeven is. We kunnen deze lengte echter wel eenvoudig bepalen via de afstandsformule, waarbij de kentallen van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ weer om de hoek komen kijken:

$$c = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Als we dit invullen in de teller van de eerdergenoemde breuk dan wordt het er niet eenvoudiger op, dus om verder te kunnen vereenvoudigen, bepalen we bovendien de lengtes a en b met behulp van de afstandsformule en de kentallen:

$$\cos(\phi) = \frac{\left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right) - \left((a_1)^2 + (a_2)^2\right) - \left((b_1)^2 + (b_2)^2\right)}{-2ab}$$

Voor het gemak hebben we hier de wortels en kwadraten alvast tegen elkaar weggestreept. Uitwerken van de haakjes en samennemen van overeenkomstige termen levert al snel:

$$\cos(\phi) = \frac{-2a_1b_1 - 2a_2b_2}{-2ab} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{ab}$$

Aangezien we a en b geïntroduceerd hadden als de lengtes van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, kunnen we deze weer substitueren zodat de hele vergelijking is uitgedrukt in de vectoren. Dat leidt tot de volgende stelling:

$$\cos(\phi) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wat hebben we nu bereikt?

Op basis van een probleem (het willen bepalen van de hoek tussen twee vectoren) hebben we nu een mooie stelling verkregen, waarmee dit probleem kan worden opgelost. Maar niet alleen dat: we kunnen nu ook naar het inproduct toe. Immers, nadat leerlingen even hebben geoefend met het bepalen van een aantal hoeken op basis van de zojuist bewezen stelling, kan de stap gemaakt worden naar loodrechtheid. Leerlingen weten dat twee lijnen (en dus ook twee vectoren) loodrecht zijn als ze een hoek van 90° maken, en dus dan en slechts dan als de cosinus van de hoek 0 is. Het is uiteraard zinvol om op dit moment in de les even stil te staan bij de vraag waarom dat het geval is – het komt doordat we geen hoeken groter dan 180° beschouwen in deze context. Wanneer zijn twee vectoren dus loodrecht? Als

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0, \text{ oftewel als } a_1b_1 + a_2b_2 = 0. \text{ Ook hier}$$

is het mooi om de leerlingen even na te laten denken over potentiële problemen met een noemer die 0 wordt. Uiteraard kan dit alleen voorkomen als minimaal één van de vectoren gelijk is aan de nulvector – dat geval kunnen we echter negeren, aangezien er dan geen sprake meer is van een hoek. Aangezien de uitdrukking $a_1b_1 + a_2b_2$ zo handig is (hij kan immers gebruikt worden om te bepalen

of twee vectoren loodrecht op elkaar staan), geven we hem een naam: *inproduct*. Dit is een goed moment om ook direct de notatie te introduceren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. En wat blijkt: we hebben nu direct de meetkundige definitie cadeau. Uit de eerder afgeleide stelling

$$\cos(\phi) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ volgt immers direct dat}$$

$a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi)$, en dat de rechterkant van de vergelijking dus net zo goed als inproduct beschouwd kan worden.

Relatie tot eerdere theorie

Het bepalen van de hoek tussen twee lijnen zou al eerder in het curriculum voorgekomen kunnen zijn – zowel bij *Getal & Ruimte* als bij *Moderne Wiskunde* is dat het geval. Als we de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in figuur 1 even beschouwen als onderdelen van twee lijnen, dan kan worden gesteld dat de hoek die zo'n lijn maakt met de positieve x -as gelijk is aan de inverse tangens van zijn richtingscoëfficiënt (waarbij negatieve hoeken gevonden worden voor dalende lijnen). Door deze hoeken van elkaar af te halen, en het resultaat indien nodig nog van 180° af te halen, vinden we de hoek tussen de twee lijnen. In het geval van vectoren kan deze aanpak in principe ook nog steeds worden gebruikt, hoewel we dan op moeten passen met vectoren die in de negatieve x -richting wijzen; in dat geval vinden we hoeken die zich eigenlijk 'aan de andere kant van de y -as bevinden'. Alsnog komen we er wel uit, maar je moet goed oppassen met minnetjes en hebt altijd nog te maken met de extra stap om te bepalen of het gevonden antwoord van 180° afgehaald moet worden of niet. Die bijkomstige moeilijkheid is niet aan de orde als we werken met de vergelijking van beide definities van het inproduct.

Ook hebben leerlingen waarschijnlijk al eerder kennisgemaakt met de stelling dat twee lijnen loodrecht op elkaar staan als het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1 . In het geval van vectoren zou je dat kunnen

$$\text{uitdrukken in } \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{b_2}{b_1} = -1, \text{ wat eenvoudig herleid kan}$$

worden tot $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Wat dat betreft beschikken leerlingen dus al over een techniek om te controleren of twee vectoren loodrecht op elkaar staan, voordat we het inproduct introduceerden. Dat maakt het nut van het inproduct in twee dimensies wellicht iets minder nadrukkelijk, maar neemt niet weg dat hoeken er soms wat eenvoudiger mee uitgerekend kunnen worden. Ook is het zeker niet verkeerd als leerlingen eens zien dat je binnen de wiskunde soms met een andere kijk tot dezelfde resultaten kunt komen; dat bevordert het begrip. Wanneer

bovendien de stap gemaakt wordt naar de derde dimensie, dan blijkt dat het bepalen van loodrechtetheid van vectoren nog steeds soepel gaat met het inproduct, terwijl de eerdere theorie niet meer van toepassing is.

Ervaringen in de klas

We hebben bovenstaande aanpak uitgetoetst in een klas vwo 4, terwijl collega's uit het Lesson Study Team de traditionele volgorde hebben geprobeerd waarbij het inproduct eerst geïntroduceerd werd (via een variatie op de eerdergenoemde bestaande aanpakken). Hoewel leerlingen bij hen de gang van zaken op zich prima konden volgen, deden zich wel vragen voor zoals 'wat betekent het nu eigenlijk als het inproduct bijvoorbeeld 3 is'? Bij onze les deed dat probleem zich niet voor – het was direct duidelijk wat het nut was van het inproduct; het is gewoon een waarde voor het kunnen bepalen van de hoek tussen twee vectoren. Het gevoel betekenis te willen geven aan de waarde van het inproduct deed zich niet voor vanwege de didactische opzet, net als dat leerlingen zich ook niet geneigd voelen zich wat voor te stellen bij de uitdrukking $a^2 + b^2$ als ze kennismaken met de stelling van Pythagoras – het is een hulpmiddel in een groter geheel.

Waar leerlingen wel wat moeite mee bleken te hebben was de overgang van vectoren naar lengtes, en het

gerelateerde onderscheid tussen $\vec{a}$, a en $|\vec{a}|$. Het is van

groot belang om heel duidelijk te maken dat we in eerste instantie te maken hebben met vectoren, maar vervolgens voor het gemak overgaan op zijden van een driehoek. Pas op het allerlaatst wordt dit weer terugvertaald naar

vectoren, door a en b weer te schrijven als $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$.

Het tweede punt van aandacht is de vraag waarom we slechts een gedeelte van de breuk gaan herschrijven als

we bij $\cos(\phi) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$ zijn aangekomen. Het

bleek nuttig en nodig om leerlingen expliciet te vertellen dat we met reden alleen de teller herschrijven, aangezien daar die lengte c staat waar we vanaf willen. Omdat we die uitdrukken in de kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en dat ook mogelijk is voor a en b , is het zinvol om alle drie de lengtes uit de teller te herschrijven om zo tot een kortere uitdrukking te komen (omdat veel tegen elkaar wegvalt). Voor de noemer is dat niet het geval: dat zou een veel lastiger leesbare uitdrukking worden met twee wortels erin.

Als laatste kwam een leerling nog met het punt dat de gevraagde hoek ook gewoon bepaald kan worden door de hoeken die beide vectoren maken met de x-as, gegeven

door $\tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ en $\tan^{-1}\left(\frac{b_2}{b_1}\right)$, van elkaar af te trekken.

Zoals hierboven al werd genoemd, is dat inderdaad ook een valide aanpak die best even op het bord mag verschijnen ter vergelijking.

Conclusie

We hebben geconcludeerd dat verschillende bestaande aanpakken voor het introduceren van het inproduct niet aan onze wensen voldoen. In plaats van het wat kunstmatig inzichtelijk proberen te definiëren van dit nieuwe concept, beginnen we liever met het oplossen van een voor de hand liggend probleem: het bepalen van de hoek tussen twee vectoren. We waren verheugd te zien dat *Getal & Ruimte* onze didactische visie deelt. Door het bepalen van de hoek tussen twee vectoren komen we tot een stelling, waarin beide gangbare definities van het inproduct voor het oprapen liggen. Door leerlingen ervan te overtuigen dat het vaak zinvol is om te weten wanneer twee vectoren loodrecht op elkaar staan, voelt het vervolgens heel natuurlijk om ook inderdaad dit inproduct te definiëren. De equivalentie van de meetkundige en algebraïsche definities zijn dan bovendien direct evident. Ervaringen in de klas wekten de indruk dat leerlingen van vwo 4 goed uit de voeten kunnen met de besproken aanpak.

Wellicht heeft u ook interessante ervaringen opgedaan bij het introduceren van het inproduct, al dan niet met een andere aanpak? We zijn benieuwd naar uw reactie!

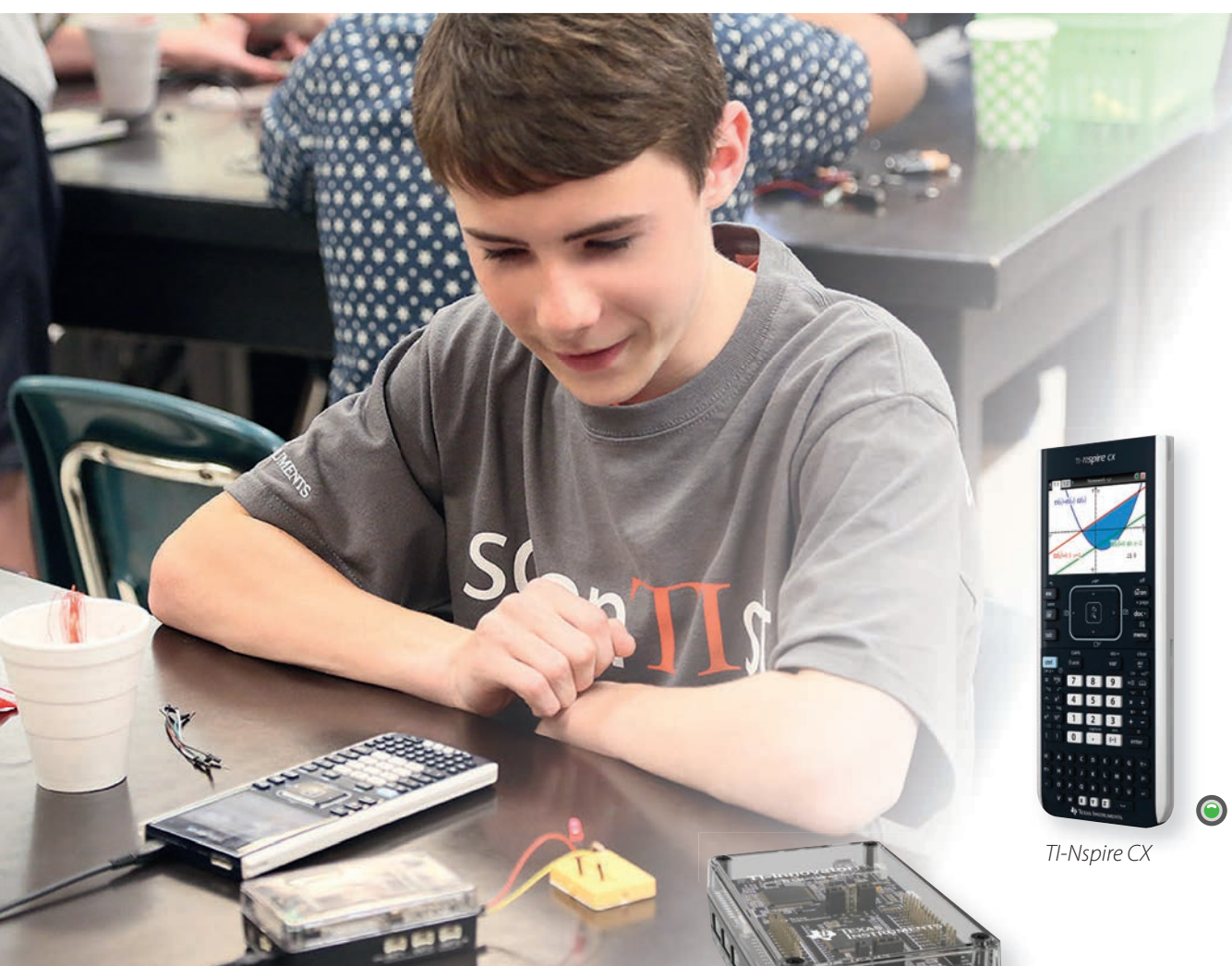
Over de auteurs

Mark Timmer is docent wiskunde aan het Carmel College Salland te Raalte. Tom Coenen is docent wiskunde aan CSG Reggesteyn te Nijverdal. Beiden werken zij bovendien als vakdidacticus aan de Universiteit Twente. E-mailadressen: m.timmer@utwente.nl en t.j.m.coenen@utwente.nl

TI-INNOVATOR™ HUB MET TI LAUNCHPAD™ BOARD

PROGRAMMEREN ONTWERPEN BESTUREN

TI technologie in combinatie met de nieuwe TI-Innovator™ Hub
hét voorbeeld van integratie van wiskunde met natuurwetenschappen.



TI-84 Plus CE-T



TI-Nspire CX



TI-Innovator™ Hub met
TI-Launchpad™ Board



www.education.ti.com/nederland
www.education.ti.com/go/innovator

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

BOEKBESPREKING

BASISKENNIS EN BASISVAARDIGHEDEN

Jaap Grasmeijer



Titel: Basiskennis en basisvaardigheden
Auteurs: Anne Kaldewaij en Arjen Valstar
Uitgever: Syntax Media, Utrecht
(2015) Reeks Wiskunde voor bachelor en master, deel 1
ISBN: 978 94 91764 09 7
Prijs: € 23,50
166 pagina's (paperback)

Aansluiting mbo-hbo

Dit boek is het eerste deel van een nieuwe serie voor het hoger onderwijs: Wiskunde voor bachelor en master. Op de achterzijde is onder meer te lezen: 'Dit boek lost de aansluitingsproblemen op in het hoger onderwijs op het gebied van wiskunde. Je leert er goed mee rekenen en met formules omgaan. Het biedt zonder poespas en in een toegankelijke schrijfstijl een gedegen basis voor een succesvolle studie in het hoger onderwijs.'

Goed niveau

Het is inderdaad een handzaam boek. De onderwerpen die aan de orde komen zijn globaal: vergelijkingen, goniometrie, exponentiële functies en logaritmen, differentiëren en vectoren. Alles in een prettige schrijfstijl zonder gebruik van moeilijke woorden. De antwoorden staan achterin, de uitwerkingen staan op de website van de uitgever. De uitwerkingen zijn volledig en in kleine stapjes. Het boek begint ook op een niveau dat behapbaar lijkt voor de gemiddelde mbo'er die naar het technisch hbo wil en zeker voor een havo'er.

Zelf vind ik sommige van de hbo-wiskundeboeken te moeilijk vooral wat betreft taalgebruik, maar in mindere mate ook qua wiskundeniveau. Dit boek heeft deze tekort-

komingen zeker niet. Wel vraag ik me af of het wiskundig eindniveau niet wat hoger moet zijn voor de hardere techniekopleidingen. Voor opleidingen als werktuigbouwkunde en elektrotechniek mag je wel verder gaan dan in dit boek gebeurt. Voor andere techniekopleidingen zal het waarschijnlijk prima kunnen voldoen. Als bijspijkerboek heeft het zeker ook zijn waarde, al had het aantal opgaven wel iets groter gemogen. Een aantal hoofdstukken kan ook bij opleidingen economie in een behoefte voorzien. Ik denk dat er wat betreft doelgroep beter een duidelijke keuze had kunnen worden gemaakt. De vervolgedelen lijken zich toch specifiek op techniek te richten. Dan zal ook blijken hoe het niveau zich ontwikkelt.

Conclusie: een prima bijspijkerboek en ook geschikt voor de propedeuse van de wat zachtere techniekopleidingen. Voor de hardere techniek wordt wel iets meer inhoud verwacht.

Inmiddels is ook deel 2 *Differentiaalrekening en Integraalrekening* en een uitwerkingenboek verschenen.

(2016) Reeks Wiskunde voor bachelor en master, deel 2
ISBN: 978 94 91764 12 7
Prijs € 29,50
286 pagina's (paperback)
(2016) Reeks Wiskunde voor bachelor en master, deel 2, Uitwerkingen
ISBN: 978 94 91764 15 8
Prijs: € 25,00
216 pagina's

Over de auteur

Jaap Grasmeijer is docent wiskunde bij de techniekopleidingen van Hogeschool Inholland te Alkmaar en verzorgt lessen wiskunde D voor het cluster Alkmaar. Hij is lid van de LWHW (landelijke werkgroep hbo-wiskunde) van de NVvW. Verder is hij medeauteur van het boek *Basisvaardigheden wiskunde voor het hto*.

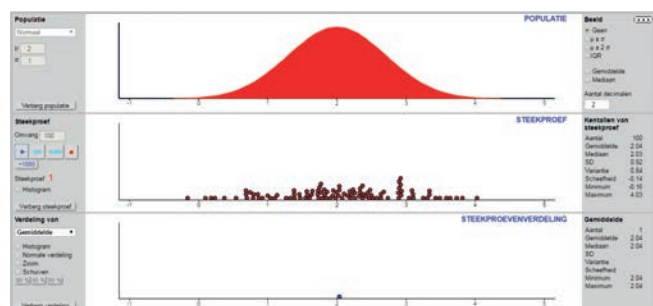
WISKUNDE DIGITAAL

STEEKPROEVENVERDELING

Lonneke Boels

In het nieuwe examenprogramma van zowel havo als vwo is meer nadruk komen te liggen op de steekproevenverdeling (Engels: *sampling distribution*). Voor haar promotie-onderzoek naar het ontwikkelen van statistische vaardigheden bij leerlingen sprak Lonneke Boels met Carel van de Giessen. Hij heeft samen met Piet van Blokland en Anders Sørensen een website gemaakt waarop niet alleen VUstat te vinden is, een gebruikersvriendelijk en gratis programma voor statistisch onderzoek, maar ook een aantal apps die online werken. In dit artikel bespreekt Lonneke Boels de app 'steekproevenverdeling'.

Op de website van vusoft (*visual understanding*) kun je apps kiezen. Eén van de apps is de 'steekproevenverdeling'. Als je deze kiest krijg je het scherm van figuur 1 waarin alleen de bovenste verdeling staat. Het middelste en onderste plaatje krijg je door een steekproef te trekken met een omvang van 100. Het gemiddelde van die steekproef (onderste plaatje) zal bij u waarschijnlijk op een andere plek liggen.



figuur 1 'Steekproevenverdeling' na het trekken van één steekproef met omvang 100

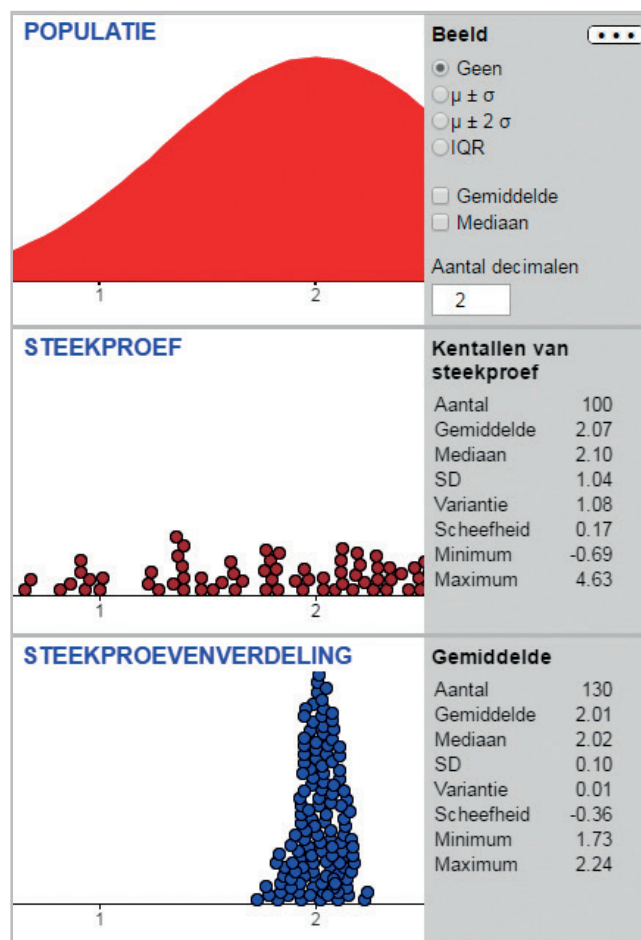
Om dit te krijgen, is bij 'Steekproef' (links halverwege de pagina) bij 'Omvang' voor 100 gekozen, zie figuur 2. Daarna is op het blauwe pijltje geklikt. Als je vervolgens



figuur 2 Instellingen bij Steekproef

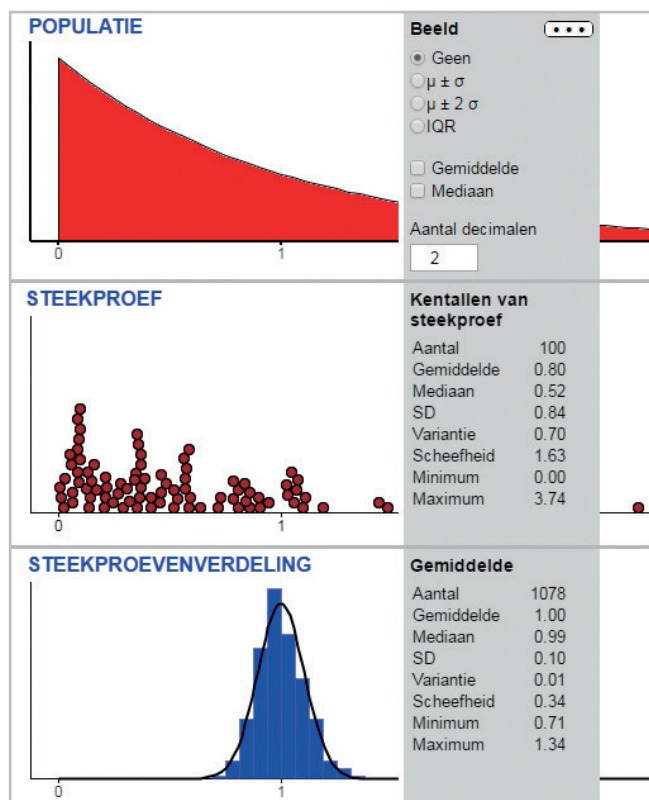
op de driedubbele lichtblauwe pijl klikt, gaat de app een flink aantal steekproeven trekken totdat je op de rode stopknop drukt.

De steekproevenverdeling van de gemiddelden van elke steekproef wordt veel smaller dan die van de populatie, zie figuur 3 (een voor de leesbaarheid bewerkte scherm-



figuur 3 Populatie, steekproef en steekproevengemiddelde van een normale verdeling

afdruk). In het overzicht rechtsonder is te zien dat deze steekproevenverdeling een gemiddelde heeft van 2,01 wat bijna gelijk is aan het gemiddelde van 2 van de verdeling waar ik mijn steekproef uit trok. De standaardafwijking is 0,09 wat bijna 0,1 is. Dit is de standaardafwijking van



figuur 4 Populatie, steekproef en steekproefgemiddelde van een exponentiële verdeling

mijn verdeling waar ik de steekproef uit trok gedeeld door $\sqrt{n}$. Zie daar de $\sqrt{n}$ -wet. Het leukste vind ik echter de optie om bij de rode verdeling een heel andere verdeling te kiezen, bijvoorbeeld een exponentiële verdeling. Ik heb in figuur 4 wat meer steekproeven getrokken waardoor het programma automatisch overgaat op een histogram. Dit maakt de centrale limietstelling zichtbaar. Het doet er meestal dus niet zoveel toe hoe de verdeling van je populatie er precies uitzag; de steekproevenverdeling is toch wel normaal verdeeld. Helaas betekent dit ook dat je uit een normale verdeling van je steekproefgemiddelden nog niet kunt concluderen dat je oorspronkelijke verdeling normaal verdeeld was.

Pluspunten

- De website is in dertien talen beschikbaar waaronder ook Nederlands
- De apps zijn te gebruiken zonder iets te hoeven downloaden.
- Daarmee ook geschikt voor scholen waar docenten niets zelf mogen installeren.
- De app is zeer gebruikersvriendelijk. Er is nauwelijks uitleg bij nodig.
- Er is ook een app met een dataset beschikbaar voor data-analyse.

Minpunten

- Wie de $\sqrt{n}$ -wet niet kent, zal deze niet snel herkennen.
- Het vereist een goede voorkennis van statistiek om hier zinvolle lesactiviteiten bij te bedenken.

Geschikt voor: middelbare school vanaf de vierde klas havo en vwo, hbo, wo.

Eindoordeel: 'aanschaffen'

Kosten: gratis

Getest op: laptop met Google Chrome 56.0.2924.87 (64-bit)

Makers: Piet van Blokland, Carel van de Giessen, Anders Sörensen

Te vinden via: <http://www.vusoft.eu/apps/> en <http://www.vusoft.eu/apps/sampling/index.html>

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.

E-mailadres: L.Boels@chrlyceumdelft.nl

Meer tijd voor wiskunde

Wil jij MathPlus gratis uitproberen in de klas?
Vraag dan nu een proefperiode aan!



- ✓ Ontdek de voordelen van digitaal werken, gepersonaliseerd leren en wiskundig denken.
- ✓ Je kan kiezen uit de werkvormen volledig online of online en boek.
- ✓ Wij geven je tijdens het gehele traject persoonlijke begeleiding & support.

ERVAAR MathPlus

Vraag nu gratis een proefperiode aan voor jouw klas!
Meld je nu aan via: www.mathplus.nl/ervaren



Levert het actief trainen van metacognitieve vaardigheden (oriënteren, plannen, monitoren en terugkijken) van leerlingen echt wat op? Praktijkonderzoek door Plonie Nijhof op het Hermann Wesselink College en door Rodica Ernst-Militaru op het Udens College leert van wel. In het onderzoek onder bijna 600 leerlingen werd bekeken of de ontwikkelde META-methode werkt.^[1] Docenten vertellen waarom het voordoen (modellen) van oplosmethoden moet worden ondersteund met expliciete activiteiten in de les.

Hardop stellen van vragen

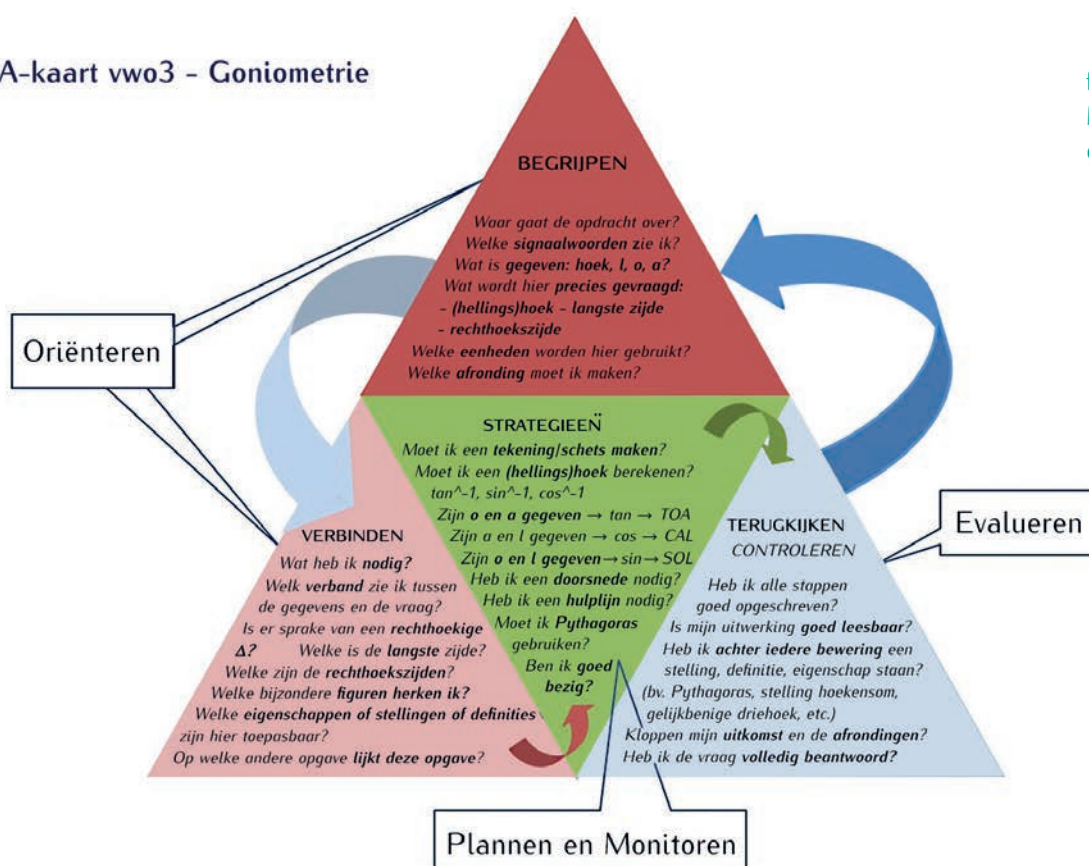
In vrijwel iedere wiskundeles lopen er wel leerlingen vast bij het maken van de opgaven. In het beste geval gaat de vinger omhoog en stellen ze een vraag aan de docent. Na 'ik snap het niet' volgen verkennende vragen aan de leerling. 'Heb je de tekst goed begrepen?', 'Wat heb je al geprobeerd?' of 'Heb je ergens rekenfouten gemaakt?' Alle vragen die de docent stelt zijn bedoeld om gericht hulp te kunnen bieden aan de leerling. Zodat deze op precies de juiste plek in het oplostraject een specifieke aanwijzing kan krijgen en weer verder kan. Het bijzondere is dat leerlingen deze vraagmethode van de docent meemaken, maar zelden beseffen dat zij hiermee een efficiënte methode aangeboden krijgen om wiskundige problemen aan te pakken. Zij horen de begeleidende vragen niet en zijn alleen gefocust op de antwoorden. Geoefende docenten weten namelijk dat het hardop stellen van

vragen effectief is en gebruiken deze om de oplosmethode van de leerling te monitoren. Met wellicht de verwachting dat de leerling dit de volgende keer zelf kan.

Monitoren

Monitoren is een metacognitieve vaardigheid die leerlingen, naarmate ze ouder worden en de complexiteit van de opgaven groter wordt, steeds vaker moeten inzetten om oplosprocessen bij te sturen of weer vlot te trekken. Succesvolle leerlingen doen dat vaak zonder zich daarvan bewust te zijn. De meeste docenten ook. Bij klassikale instructie begeleiden ze de uitleg wel met vragen als: 'Wat moeten we precies doen?', 'Welke vergelijking moeten we oplossen?' of 'Klopt het antwoord eigenlijk wel?' Maar daarna oefenen ze deze aanpak zelden *expliciet* met leerlingen. Hoe zou je dat als docent wel kunnen doen?

META-kaart vwo3 - Goniometrie



figuur 1
META-kaart
goniometrie

Met dat doel werd de META-kaart ontwikkeld. Het is een didactisch instrument om leerlingen te laten oefenen met het actief vragen stellen tijdens iedere fase van het oplossen van wiskundige problemen. Als het denkproces bij de leerling is stilgevallen kunnen zij aan de hand van de kaart zich oriënteren op 1) in welke fase van het oplossen zij zitten en 2) welke vragen zij zichzelf zouden kunnen stellen om verder te kunnen gaan. Het belangrijkste is dat zij in stapjes leren denken.

Hoe werkt de kaart?

De kaart visualiseert de vier fasen van probleem oplossen volgens Pólya;^[2] begrijpen van het probleem, plan maken, uitvoeren en controleren. In de driehoeken staan vragen die volgens de methode van Schoenfeld zinvol zijn als je die in deze fase stelt.^[3] De docent maakt zelf voor ieder wiskundig domein een nieuwe vragenkaart, zie figuur 1, en deelt deze aan de leerlingen uit. De kaart moet worden besproken en dient als leidraad in de volgende lessen.

Les 'exponentiële verbanden'

De docent heeft een opgave op het smartboard geprojecteerd en Dorien komt in de tekst de signaalwoorden onderstrepen.^[4] Dorien legt uit waarom ze deze woorden heeft gekozen. Het woord *groei* is onderstreept en *exponentieel*. Andere leerlingen wordt gevraagd hier nog meer signaalwoorden aan toe te voegen, maar ze moeten altijd toelichten waarom zij op dat idee zijn gekomen. Op deze wijze oefenen ze het onderdeel 'begrijpen' van de kaart. Eerder die week is het nieuwe hoofdstuk begonnen met het in groepjes maken van een *mindmap* over de oude wiskundige kennis over groei. In de *mindmap* hebben ze onderscheid gemaakt tussen de verschillende soorten groei (lineair, exponentieel) en zijn de formules, tabellen en grafieken op het A3-vel verschenen. Dorien heeft hierdoor de algemene formule voor exponentiële groei nog goed in het hoofd en schrijft deze op het smartboard erbij ('verbinden'). Daarna bespreekt ze welke gegevens ze nog nodig denkt te hebben ('verbinden'). Dan neemt de docent het over en vraagt de leerlingen aan de burens te benoemen op welke andere opgave deze lijkt (analogie is ook 'verbinden'). Ook moeten ze met elkaar bespreken welke strategie ('strategieën') zij inzetten om de gegevens te ordenen en het vraagstuk op te lossen. De klas gaat daarmee in tweetallen aan de slag. Als zij klaar zijn controleren zij bij elkaar of de uitwerkingen volledig zijn opgeschreven en of het gevonden antwoord goed is ('terugkijken'). Zij houden de META-kaart over het domein groei bij de hand en raadplegen de mogelijke strategieën die zij tot nu toe hebben geleerd.

Praten over strategieën

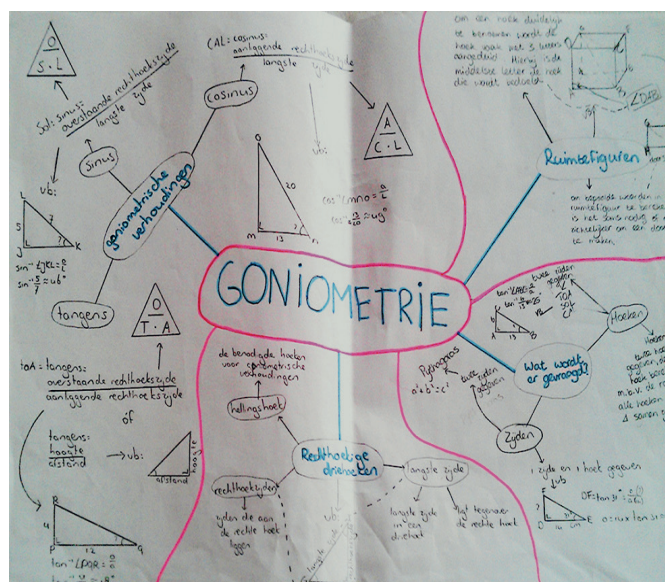
Het actief benoemen en inventariseren van oplosstrategieën moet de leerlingen laten inzien dat een bepaalde aanpak een keuze is. En dát ze een keuze moeten maken om verder te komen. Na enige tijd de META-kaarten

te hebben gebruikt blijken leerlingen veel beter aan te kunnen geven in welk deel van het oplostraject ze zijn vastgelopen. 'Ik snap het niet', maakt plaats voor 'Ik begrijp de vraag, maar weet nu niet welke strategie ik moet gebruiken.' Ook het praten over oplosstrategieën wordt met de methode expliciet geoefend.

We maken leerlingen hiervan bewust door bij een antwoord te vragen welke oplosstrategie ze hebben ingezet. Dan moeten zij die benoemen en ontwikkelen ze een taal om over het oplosproces te praten. Dat vinden ze best moeilijk, want het is noodzakelijk dat ze daarvoor actief hun gedachten structureren. Door hun gedachten te verwoorden en te herhalen wordt de kennis beter opgeslagen in het langetermijngeheugen.

Drieslag

Naast het gebruik van de kaarten maken de leerlingen regelmatig *mindmaps*, zie figuur 2. Vaak aan het einde van een domein (goniometrie, analyse, machten enzovoort) zodat leerlingen vlak voor de toets een goed overzicht krijgen over de theorie. Door zelf de kennisonderdelen te verbinden ontwikkelen ze daarvan een sterker mentaal beeld. Uit de onderzoeksresultaten blijkt ook echt dat alle leerlingen dit (elaboreren) beter deden dan bij de nulmeting. Niet alle leerlingen vinden het maken van *mindmaps* leuk of zinvol. Maar door het in de les en in groepjes te laten doen worden de bezwaren grotendeels ondervangen. Het derde element van de methode is het praten over leerovertuigingen (*mindset*). Aan de hand van stellingen



figuur 2 Voorbeeld van een *mindmap* in 3 vwo

waarop leerlingen (ook digitaal) konden reageren gingen ze praten over wat zij zelf een zinvolle aanpak vonden en hoe ze over leren dachten. Door beweringen als 'Ik kan geen wiskunde' of 'Ik ben klaar met leren als ik de opdrachten heb gemaakt' kwamen meestal levendige gesprekken op gang.



figuur 3 Leerlingen aan het werk met de META-kaart

Onderzoeksresultaten

Na driekwart jaar META-methode blijken leerlingen gemiddeld kritischer na te denken over hun leren, zetten ze meer metacognitie in en reguleren zij hun werkinzet meer dan de leerlingen in de controlegroepen (gemeten met MSLQ vragenlijst^[5]). Mooie resultaten, maar levert het voor alle leerlingen ook betere resultaten op? Niet voor alle leerlingen is dat het geval, wat ons ook niet echt verbaast. In het onderwijs bestaat er wellicht geen enkele didactische methode die op iedere leerling evenveel effect heeft. Uit onze resultaten blijkt dat alleen leerlingen in het tweede kwartiel (van de voormeting op wiskundevaardigheden) statistisch significant betere cijfers haalden (betrouwbaarheidsniveau >95%). In de praktijk zijn dat meestal de leerlingen die net onder het gemiddelde scoren. Dit resultaat veranderde overigens niet als er onderscheid gemaakt werd naar leeftijd, docent of school. Voor meer informatie zie het eindrapport.^[6]

Wat zeggen docenten?

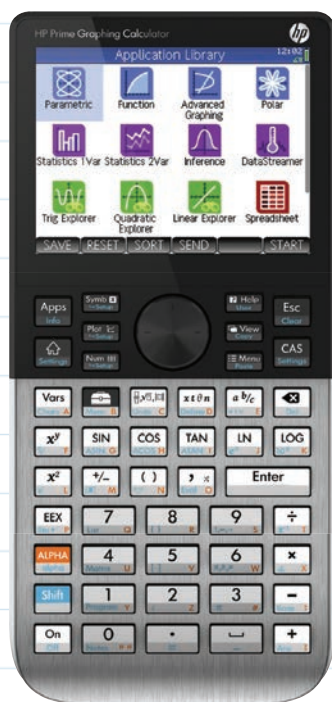
De interventiedocenten vonden het best lastig om in het begin de leerlingen (en zichzelf) te motiveren de opgaven anders aan te pakken dan voorheen. In feite zet je de leerlingen even stil om hen na te laten denken over het oplosproces. Dat ervaren ze als vertraging. Maar zodra er cijferverbeteringen waren werd het een stuk minder moeilijk. En je moet goed kunnen uitleggen waarom je dingen anders doet. Het zelf maken van de kaarten blijkt het belangrijkste leermoment. Omdat je je moet beperken tot een klein aantal vragen, wordt al snel de kern van het domein zichtbaar. 'Het hielp me echt met het structureren van mijn lessen.' Ook was het weleens lastig om de intensiteit van de werkwijze hoog te houden. Onder de druk van alle dag vergeet je dan de kaart te gebruiken. Wat jammer is, want uit de analyse van de cijfers blijkt dat het effect pas zichtbaar wordt na langere tijd. 'Nu het experiment is afgelopen besef ik pas hoe groot het effect soms is op sommige leerlingen. Omdat een aantal van hen geen les meer van mij heeft in het nieuwe schooljaar kwamen ze vragen of ik de nieuwe META-kaarten ook aan hen wilde mailen. Een mooiere beloning is er toch niet?'

Noten

- [1] META is een acroniem voor Metacognitieve Expliciete Training voor het Activeren van leerlingen. De methode is afgeleid van de uiterst succesvolle IMPROVE-methode van Mevarech & Kramarski (1997). Improve: A Multidimensional Method For Teaching Mathematics in Heterogeneous Classrooms. *American Educational Research* (34), 365-394.
- [2] Pólya, G. (1957). *How to solve it?* 2nd ed. NJ: Princeton University Press.
- [3] Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.
- [4] Lonneke Boels refereert aan een variant van deze methode in *Euclides* 91-2 en noemt het de 'schrappmethode'.
- [5] MSQL vragenlijst: *Motivation Strategies for Learning Questionnaire* van Pintrich, Smith, Garcia en McKeachie (1991)
- [6] Het eindverslag verscheen in februari 2017 op <https://www.nro.nl/kb/405-15-513-de-metadenkende-leerling-effecten-van-de-improve-methode/> Daar is ook een groot aantal voorbeelden van META kaarten te zien.

Over de auteurs

Plonie Nijhof is docent wiskunde en onderwijsonderzoeker op het Hermann Wesselink College. Rodica Ernst-Militaru is docent wiskunde aan het Udens College. Sinds 2013 hebben zij onderzoek gedaan naar het ontwikkelen van metacognitie in hun wiskundelessen in het kader van de Master Evidence Based Innovation in Teaching in Maastricht. Daarin zijn zij begeleid door Joris Ghysels hoofddocent MEBIT en senior researcher bij TIER-Maastricht University. Het huidige vervolgonderzoek is gefinancierd door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsresearch (NRO). Rodica en haar META-team ontvingen op 2 november hiervoor de NRO-onderwijsprijs 2016. In 2017 willen zij workshops geven aan geïnteresseerde docenten. Email: nyh@hermannwesselinkcollege.nl, R.Ernst@udenscollege.nl en joris.ghysels@maastrichtuniversity.nl



New Body & New Brain

HP Prime



Wilt u meer weten over de krachtigste rekenmachine voor uw leerlingen?

Online support voor Noordhoff en Malmberg beschikbaar!

En voor een vergelijkbare prijs!

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met meer rekenkracht en geheugen dan welke andere machine dan ook.
- Nieuwe consistente menustructuur met krachtige educatieve applicaties op een touchscreen: het is tenslotte 2016.
- Examenmode op de Prime betekent 1 knop indrukken. Binnen een paar tellen een examenlokaal in de juiste CvTE examenstand.
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief gratis emulator (dus ook voor uw leerlingen)!

Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop, demo-units of een school-offerte neemt u contact op met **info@hp-prime.nl**



Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee over het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



Didactische vernieuwingen na de oorlog

Wiskundefilms zijn er in soorten en maten. De meeste hebben met onderwijs niet zo heel veel te maken, maar leren ons wel welk beeld mensen hebben van het wiskundeonderwijs dat ze hebben genoten. Soms bieden films wel direct zicht op onderwijspraktijken. Zo neemt de huidige generatie leerlingen haar wiskundekennis gedeeltelijk via *YouTube*-filmpjes tot zich: wat we van de inhoud van die films ook mogen vinden, veel dichterbij een onderwijspraktijk kun je niet komen. In de jaren vijftig van de vorige eeuw was het fenomeen wiskundefilm typisch verbonden met pogingen om didactisch en organisatorisch vernieuwend onderwijs te maken. Didactische en organisatorische vernieuwingen waren in de jaren kort na de oorlog aan de orde van de dag. Althans, er waren veel pogingen daartoe. Dat had te maken met de grote toestroom van leerlingen in het voortgezet onderwijs – ook uit de lagere sociale klassen – maar ook met een algemene heroriëntatie op onderwijsdoelen.

Schoonheid van de zuivere wiskunde

In februari 1950 zocht het departement van Onderwijs – voorloper van het huidige ministerie – contact met Wimecos – een van de voorlopers van onze vereniging. Men wilde graag dat Wimecos in de zomervakantie een conferentie organiseerde over wiskundeonderwijs in andere Europese landen. Dit ten behoeve van een selecte groep wiskundedocenten, in het kader van reflectie op de doelen en de didactiek van het wiskundeonderwijs. Die conferentie werd georganiseerd, en één van de sprekers die was uitgenodigd, was de Fransman E. Jacquemard, docent wiskunde en ontwerper van een aantal wiskundefilms. Deze films hadden de aandacht getrokken van een van de bestuursleden, die ze tijdens zijn paasvakantie in Engeland had gezien. Zodoende zaten op 19 augustus 1950 een veertigtal Nederlandse wiskundedocenten en een aantal hoogwaardigheidsbekleders in Baarn te luisteren en te kijken naar de Fransman en zijn films. In het derde nummer van de jaargang 1950-1951 van *Euclides* werd er verslag gedaan van de conferentie. De

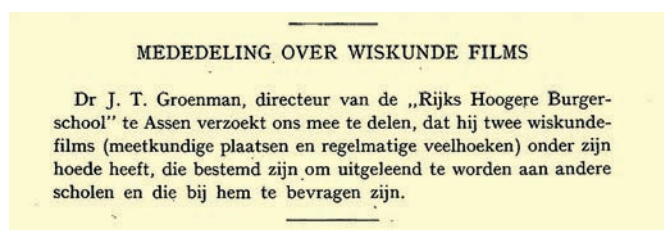
films en de voordracht van Jacquemard kregen daarbij bijzondere aandacht.

Tijdens zijn voordracht ging Jacquemard uitvoerig in op het productieproces en op de rol die zijn films konden spelen in het onderwijs. Hij beschouwde zichzelf als een pedagoog en scenarioschrijver, wanneer hij met films bezig was. In zijn film over parabolen en rechte lijnen, die een zilveren medaille had gewonnen tijdens de Biënnale van Venetië in 1948, had hij de mogelijkheden van het medium film gebruikt om het effect van de parameters in de functievoorstellingen van deze figuren te illustreren. Een effect dat op het bord niet zo fraai continu in beeld kon worden gebracht. Hij ging er wel van uit dat de docent ter inleiding de theorie had behandeld. De films waren bedoeld als recapitulatie en synthese van de theorie, en om de leerlingen te attenderen op de schoonheid van de zuivere wiskunde. Geluid bij de films ontbrak of was uiterst beperkt. Dat was de opzet: de docent werd geacht zelf eventueel de beelden te verhelderen. De films over meetkundige plaatsen (assenstelsels) en over regelmatige veelhoeken waren vergelijkbaar van opzet. Jacquemard vergeleek zijn films met een aantal wiskundefilms voor een groot publiek uit de jaren dertig en concludeerde dat zijn films veeleer een didactisch dan een enthousiasmerend doel dienden.

Dynamisch onderwijs

Wiskundefilms leken goed te passen in het naoorlogse wiskundeonderwijs in Nederland. Ze konden gelden als didactisch vernieuwend, zowel qua vorm als qua inhoud, maar bovenal bood het medium de mogelijkheid om grotere groepen leerlingen – ook uit de lagere sociale klassen – met een meer dynamisch onderwijs te bedienen. De docent kon desgewenst uitleg geven bij de film, of leerlingen extra onderwijzen terwijl een assistent met de rest naar de film keek. Dat waren aspecten die aanspraken in de jaren vijftig. Het hoeft ons dan ook niet te verbazen dat in de jaargang 1951-1952 van *Euclides*, de films van Jacquemard in een mededeling worden aangeboden: elke geïnteresseerde wiskundedocent mag ze

komen lenen, zie figuur 1. Meer films, ook opnamen van wiskundelessen ter inspiratie voor docenten, of als voer voor discussie, zouden in de jaren vijftig en vroege jaren zestig opduiken.



figuur 1 Mededeling. *Euclides*, jaargang 27 (1951-1952), 291

Dit type wiskundefilms was een typisch Europees verschijnsel. Uiteraard waren docenten in de Verenigde Staten ook bezig met films in de klas, maar die waren van een heel andere soort. Op grotere schaal, met meer kleuren, muziek en spektakel geproduceerd, waren de Amerikaanse films vooral bedoeld om interesse te wekken, niet met de intentie om didactische vernieuwing te bieden. Eigenlijk waren de Amerikaanse films veel meer een directe opvolger van de Franse films uit de jaren dertig. De didactische vernieuwingsbeweging in de Verenigde Staten was veel meer op de inhoud van het curriculum gericht, en op het bijscholen van docenten. Het probleem waar zij mee te maken hadden was veeleer dat veel leerlingen geen wiskunde kozen. Daarin poogde men met films verbetering te krijgen.

De grappige Disney-film van *Donald in mathmagic land* uit 1959 (zie figuur 2, de film is onder andere te vinden

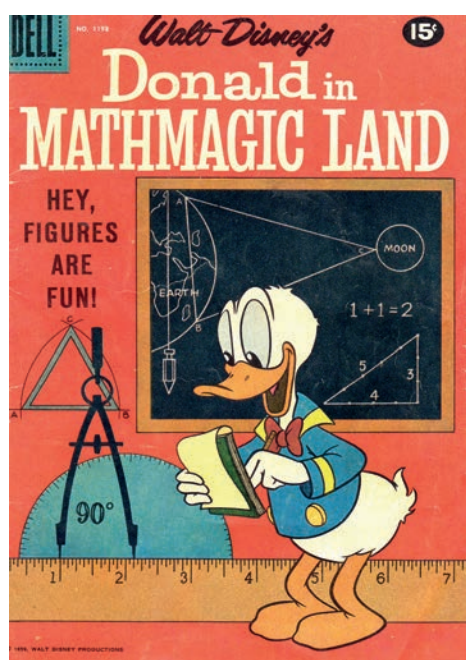
op *YouTube*) was een mooi voorbeeld in dat genre. Die film was in Europa onbekend. De Nederlands ondertitelde versie, *Donald Duck in rekenwonderland*, kwam pas eind jaren 1980 op de markt. Leerlingen kwamen in Europa automatisch met wiskunde in contact, of ze dat nu nuttig vonden of niet.

Betekenis

Of de wiskundefilms van Jacquemard daadwerkelijk veel hebben betekend voor het Nederlandse wiskunde-onderwijs durf ik niet te zeggen. Het bestaan ervan geeft vooral uitdrukking aan het didactische elan van een kleine groep enthousiastelingen. Of de films buiten die groep met hetzelfde enthousiasme werden ingehaald, waag ik te betwijfelen: projectoren en films waren een relatief dure aangelegenheid en de organisatie van een filmvertoning was geen kleinigheid. Eind jaren zestig en begin jaren zeventig werd de wiskundefilm al snel overvleugeld door educatieve televisieprogramma's. Zowel van de wiskunde-films als van de wiskundige televisieprogramma's is weinig bewaard gebleven. Maar er zijn voldoende geschreven bronnen waaruit we kunnen opmaken dat het in elk geval een aantal docenten didactisch inspireerde. Laten we maar eens afwachten hoeveel we over vijftig, zestig jaar nog terug kunnen zien van de huidige generatie *YouTube*-filmpjes.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundeleraar, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl



figuur 2 *Donald Duck in Mathmagic land* (1959)

MEDEDELING

CONFERENTIE ONDERWIJS MEETS ONDERZOEK

Over de relatie tussen de praktijk van het wiskunde-onderwijs en wiskundendidactisch onderzoek.

Opening door Paul Drijvers, plenaire lezing door Susanne Prediger (TU Dortmund) over de relatie tussen wiskundendidactisch onderzoek en de ontwikkeling van een lesmethode. Verder workshops en posterpresentaties van onderzoekers.

Datum: Maandag 12 juni 2017

Tijd: 15:00 – 19:00, inloop 14:30

Plaats: Vergadercentrum Domstad, Utrecht

Kosten: € 75

Organisatie: NVvW, Freudenthal Instituut, SLO

DROGBEELDEN MET EEN WISKUNDIG TINTJE

Als antwoord op de vraag 'Hoe was jouw workshop?' haalt de aangesprokene haar smartphone tevoorschijn en laat diverse afbeeldingen zien. Ze is duidelijk enthousiast en vertelt levendig hoe het in die workshop iedereen was gelukt een anamorfose te maken. 'Zo leuk!', roept ze met nadruk. De toehoorders werpen nieuwsgierige blikken op de getoonde afbeeldingen en knikken instemmend. Ja, dat is zeker leuk! Anamorfosen op het vmbo, kan dat echt? Tijd voor een afspraak met Jeen Lindeboom die een workshop over anamorfosen gaf op de onderbouwconferentie vmbo-havo-vwo op 26 januari.



Jeen Lindeboom

Bemoeien

Jeen is de klassieke vmbo-docent. Hij begon zijn loopbaan bij een autoschadebedrijf en haalde in zijn vrije tijd bevoegdheden voor een aantal technische vakken. Rond zijn dertigste stapte hij over naar het onderwijs en studeerde door voor zijn wiskundebevoegdheid. Alles bij elkaar achttien jaar tweedekansonderwijs in de avonden, zoals hij het zelf noemt. Inmiddels werkt hij al weer meer dan 25 jaar als docent wiskunde en leerjaarcoördinator aan de Burgemeester Harmsmaschool in Gorredijk, een voormalige middenschool. Dat hij actief is in de werkgroep vmbo van de NVvW vindt hij vanzelfsprekend. 'Het is ons eigen onderwijs en daar moeten we ons mee bemoeien. Wiskundeleraars uit het vmbo zijn vaak niet zo bezig met de leerstof, meer met de leerlingen. Toch is het goed betrokken te zijn bij de vereniging, bijvoorbeeld om invloed te hebben op een eventueel nieuw examenprogramma.' De werkgroep vmbo van de NVvW houdt zich naast de examenprogramma's bezig met het organiseren van conferenties, het houden van enquêtes en geeft het bestuur gevraagd en ongevraagd advies over zaken die het vmbo betreffen. Nieuwe leden zijn altijd welkom.

Anamorfosen

Jeen: 'In die technische opleidingen wordt veel aandacht besteed aan technisch tekenwerk, met alle regels die daarbij horen. Daar komt mijn belangstelling voor tekenen vandaan. Toen ik aanliep tegen anamorfosen, drogbeelden, ging ik me daarin verdiepen: hoe werkt het, welke regels zijn er? En ook, omdat ik voor de klas sta: wat kan ik daarmee met mijn leerlingen? Ik ben gaan zoeken en via internet filmpjes en het boekje *Kunst en Wiskunde* uit de Zebareeks kwam ik tot een uitwerking die op het vmbo te gebruiken was. Ik ga natuurlijk niet in op de berekeningen die erbij horen, dat is veel te moeilijk. Maar ook zonder rekenen kun je een eind komen met anamorfosen.' Is het niet moeilijk de leerlingen te motiveren zich in te

spannen voor een onderwerp dat helemaal niet tot het examenprogramma behoort? Jeen: 'Het gaat erom dat ze zich gaan verwonderen over een afbeelding die in het echt niet klopt, maar op een foto gemaakt vanuit een bepaald punt wél. Als je hun belangstelling hebt ga je vertellen over tekeningen zonder diepte en die met perspectief. Dat herkennen ze wel. Bij perspectief zijn er tekeningen met één, twee of drie verdwijnpunten. Dat laatste geeft heel veel diepte. Ze kennen het wel uit tekenfilms, waar om bijvoorbeeld de hoogte van een gebouw te laten zien flink wordt overdreven. Bij anamorfosen is het standpunt van de tekenaar het verdwijnpunt.

Een bekend voorbeeld is de fiets op het wegdek. De wielen zijn rond als je er schuin op kijkt, maar in werkelijkheid zijn ze ovaal. Uiteraard laat je bij alles voorbeelden zien.' Jeen schetst uit de losse hand het tekenfilmeffect en laat afbeeldingen zien die goed illustreren wat hij vertelt. De afbeeldingen van de anamorfosen zijn spannend, vooral als hij ook de straattekening laat zien gefotografeerd vanuit twee standpunten. Deze afbeeldingen gebruikt hij ook in zijn lessen.



figuur 1 Fiets anamorfose

Schaduw

De uitleg over hoe je een anamorfose kunt tekenen begint bij het oproepen van een winters tafereel: je loopt in het donker langs een lantaarnpaal. Je schaduw komt achter je aan. Die is telkens anders, hoe dicht je bij de lantaarnpaal komt hoe korter de schaduw is. Stel je bevriest op een bepaalde plek, niet te dicht bij de lantaarnpaal. Je schaduw wordt precies ingekleurd en daarna halen je vrienden je weg. Je voetafdruk is naast de schaduw de onderkant van je voeten, dus daar moeten je schoenen nog getekend worden. De tekening klopt niet, hij is veel langgerechter dan jijzelf, maar als je een trapje neemt en vanaf het lichtpunt van de lantaarnpaal kijkt, dan klopt de tekening wel. Die lijkt precies op jezelf. Dat is het beginsel van anamorfosen tekenen. Dit beeld is door leerlingen wel te begrijpen, ze kunnen zich de situatie voorstellen.

Na deze theorie gaan de leerlingen zelf aan de slag. Ze gaan een anamorfose maken van een doosje. Daar komt een denkbeeldige lantaarnpaal aan te pas, evenals een touwtje dat als lichtstraal dient. Door het touwtje vast te plakken aan een denkbeeldige lantaarnpaal op de muur en daarna de hoekpunten van het doosje met behulp van het touwtje op papier te projecteren, ontstaat de tekening. Daarna is het een kwestie van het papier omdraaien, hoekpunten verbinden en inkleuren.



figuur 2 Anamorfose van Julian Beever van twee kanten gezien

Een *anamorfose* is een vertekende afbeelding, die er slechts gezien vanuit een bepaalde hoek of onder bepaalde optische voorwaarden realistisch uitziet. De anamorfose ontstond in de tijd van de Renaissance. Kunstenaars wilden alles zo realistisch mogelijk weergeven, dus ging men het perspectief bestuderen. Meestal deed men dit omwille van een zo goed mogelijke natuurgetrouwheid, maar soms ook om te laten zien wat op dit gebied allemaal mogelijk was. Zo ontstond de anamorfose: een schilderij waarvan de afbeelding slechts op een bepaalde manier correct waar te nemen is.

Bron: Wikipedia

In de klas

Kost een anamorfose laten maken niet te veel lestijd? Jeen: 'Je hebt echt wel minstens twee lesuren nodig als je wilt dat elke leerling met een zelfgetekende anamorfose de deur uitgaat, maar iedereen heeft toch wel eens een blokkur, of een vrijdagmiddag vlak voor de vakantie? Aan het slot van de les laat ik ieder zijn tekening plus het originele doosje fotograferen, uiteraard vanuit het juiste standpunt. Trots dat ze zijn! Het leuke is dat er nu vaak andere leerlingen uitblinken dan bij de gewone wiskundestof. En iedereen vindt het leuk als afwisseling.' Jeen gaf zijn anamorfoseles het meest aan leerlingen van leerjaar 3, maar ook wel aan leerlingen van de topklas groep 8, bollebozen die wekelijks een dagdeel naar het voortgezet onderwijs komen. En dus nu aan de deelnemers van de vmbo-conferentie. Of er een verschil was tussen de deelnemers aan de workshop en de leerlingen? 'Eigenlijk niet. Misschien waren die nog iets meer geïnteresseerd, ze hadden er tenslotte zelf voor gekozen. Maar ze gingen na afloop even trots met hun tekening en foto naar buiten. En daar doe je het allemaal voor.'



figuur 3 Doosje met anamorfose

Over de auteur

Joke Verbeek is redactielid van *Euclides*, auteur van een schoolmethode wiskunde en voormalig docent wiskunde en schoolleider aan het Arentheem College Arnhem.

HOE EULER AAN ZIJN GAMMA-FUNCTIE KWAM

André van den Berg

In *Euclides* 91-6 (mei 2016) staat een artikel van Martin Kindt, 'Hoe Wallis aan zijn product kwam'. Het is het derde deel van zijn drieluik over het permanentieprincipe: het voortzetten van patronen met behoud van regelmaat en rekenwetten. Dat was voor André van den Berg de aanleiding en de inspiratie tot het schrijven van een vervolg!

Uit de hoge hoed

In vrijwel iedere eerste- of tweedejaarscursus analyse (wo/hbo) wordt de gamma-functie van Euler gepresenteerd:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \text{ voor } x > 0.$$

en mogen de studenten aantonen dat de integraal voor iedere $x > 0$ convergeert, dat $\Gamma(1) = 1$; dat $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ voor iedere $x > 0$ (dat gaat dan met behulp van partiële integratie) en dat de gamma-functie dus een generalisatie is van de faculteitsfunctie: voor ieder natuurlijk getal n geldt $\Gamma(n+1) = n!$. Voor de hand ligt dan de vraag die door sommige studenten wordt gesteld: hoe kwam Euler eigenlijk aan die gammafunctie? Ik moest op die vraag altijd het antwoord schuldig blijven en ook navraag bij diverse zeer- en hooggeleerde collega's leverde weinig op. Hoog tijd dus voor onderzoek! En wat blijkt? Het Wallis-product speelt een rol en het permanentieprincipe van Martin Kindt regeert weer.

Het eerste idee

Leonhard Euler (1707 – 1783) heeft voor het eerst de faculteitsfunctie aangepakt in 1729, naar aanleiding van een productvorm waar Daniel Bernoulli mee kwam en de interesse die Goldbach (ja, die van het vermoeden, 1742) had voor interpolatieproblemen. Euler schreef twee brieven aan Goldbach en een artikel hierover. Voor Euler en zijn tijdgenoten betekende het interpoleren van de faculteitsfunctie het vinden van een functie (een functie, dat was voor hen een 'formule') die op $\mathbb{N}$ de gewenste waarden aanneemt, maar ook voor niet-natuurlijke getallen gedefinieerd is. Wij zouden, met ons meer algemene functieconcept, kunnen aankomen met een functie f die buiten $\mathbb{N}$ de waarde 0 aanneemt (en zo zijn er nog oneindig veel varianten te bedenken), maar dat was voor Euler geen functie. In het nu volgende wordt Euler wel in de lijn van zijn redeneringen gevolgd, maar niet in zijn notaties, details en uitweidingen. Vrij naar Euler dus! Vermoedelijk dacht hij ongeveer als volgt (pas in 1776 lichtte hij een en ander nader toe). Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $(n+3)! = n!(n+1)(n+2)(n+3)$. Als je hierin $(n+1)(n+2)(n+3)$ vervangt door n^3 , dan is de gelijkheid natuurlijk niet meer correct. Maar naarmate n groter is, is de foutfactor $\frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

van minder belang, immers $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 1$

dus $(n+3)! \sim n!n^3$, $n \rightarrow \infty$. (men zegt dat de functies

f en g asymptotisch gelijk zijn als $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, notatie

$f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow \infty$). Evenzo, voor willekeurige

$k \in \mathbb{Z}^+$: $(n+k)! \sim n!n^k$, $n \rightarrow \infty$. Als we het permanentieprincipe volgen, moet zelfs voor iedere $x \in \mathbb{R}^+$ gelden $(n+x)! \sim n!n^x$, $n \rightarrow \infty$ en dus in het bijzonder: $(n+\frac{1}{2})! \sim n!\sqrt{n}$, $n \rightarrow \infty$.

Stel nu dat je $\frac{1}{2}!$ wilt definiëren. Als je vanuit de relatie

$x! = \frac{(x+1)!}{x+1}$ het permanentieprincipe trouw blijft, dan

kan het niet anders of $\frac{1}{2}! = \frac{\frac{3}{2}!}{\frac{3}{2}}$, maar dan ook $\frac{1}{2}! = \frac{\frac{5}{2}!}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}$

en natuurlijk $\frac{1}{2}! = \frac{\frac{7}{2}!}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}$. In het algemeen, voor $n \in \mathbb{Z}^+$:

$\frac{1}{2}! = \frac{(n+\frac{1}{2})!}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (n+\frac{1}{2})}$. We laten n steeds groter worden en

schuiven het probleem daarmee vooruit. In het dagelijks leven is dat lang niet altijd de oplossing, maar hier wel. Immers, naarmate n groter is kan $(n+\frac{1}{2})!$ beter benaderd worden door $n!\sqrt{n}$ en in de limiet kunnen we zelfs

$(n+\frac{1}{2})!$ door $n!\sqrt{n}$ vervangen: $\frac{1}{2}! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!\sqrt{n}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (n+\frac{1}{2})}$.

Nu verschijnt het product van Wallis op het toneel

Bovenstaande limiet kunnen we ook schrijven als

$\frac{1}{2}! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n\sqrt{n}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$. Deze limiet is nog niet

één-twee-drie gevonden, maar Euler herinnerde zich iets dergelijks gezien te hebben in de *opera Wallisii* (zie 'product van Wallis' op p. 23) en zag in dat

$$\left(\frac{1}{2}!\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{2n}{(2n-1)} \cdot \frac{2n}{(2n+1)}\right) \cdot \frac{n}{(2n+1)} =$$

$$2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ zodat } \frac{1}{2}! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Uiteraard kunnen we nu waarden toekennen aan de faculteiten van alle getallen $\frac{1}{2} + k$ (met k geheel): $\frac{3}{2}! = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, $\frac{5}{2}! = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$ etcetera, en ook (de andere kant op):

$(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$, $(-\frac{3}{2})! = -2\sqrt{\pi}$, $(-\frac{5}{2})! = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$, etcetera.
Merk op dat in dit laatste rijtje de uitkomsten afwisselend positief en negatief zijn.

Als we de procedure die we gevolgd hebben om een waarde voor $\frac{1}{2}!$ te vinden toepassen op een willekeurig reëel getal x dat niet negatief-geheel is, vinden we de gezochte interpolatiefunctie:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \quad (1)$$

Dit is Eulers zogenaamde productlimietformule voor $x!$ (voor x kan zelfs ieder complex getal genomen worden, zolang dat maar niet negatief-geheel is). In (1) heeft Euler als het ware ingebouwd dat $F(x+1) = (x+1)F(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

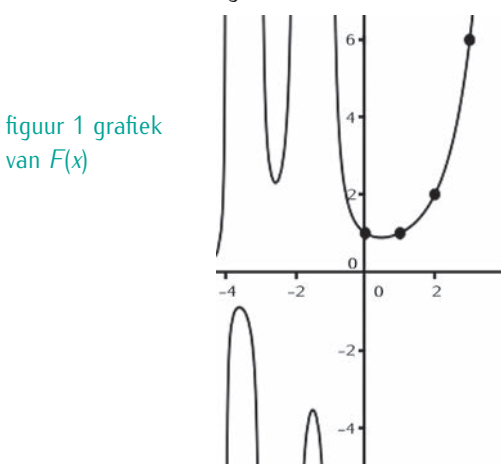
Nog even steekproefsgewijs controleren voor reeds bekende waarden van $x!$

$$F(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^0}{(0+1)(0+2) \cdots (0+n)} = 1 \text{ en } F(3) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^3}{(3+1)(3+2) \cdots (3+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 n^3}{(1+n)(2+n)(3+n)} = 6,$$

zoals het hoort.

Grafiek van F , zie figuur 1:



figuur 1 grafiek van $F(x)$

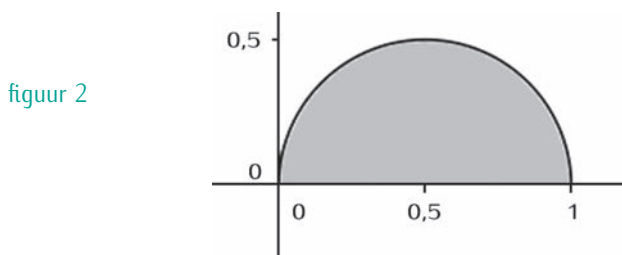
Met het vinden van de productlimietformule (1) had Euler zijn interpolatieprobleem opgelost. Maar hij ging verder...

Naar een integraal

In de gevonden uitdrukking voor $\frac{1}{2}!$ komt π voor. Dat doet denken aan cirkels, en oppervlaktes daarvan, dus aan

integralen. Zo hebben we bijvoorbeeld $\int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx = \frac{\pi}{8}$

met het bijbehorende plaatje van figuur 2.



figuur 2

Waarschijnlijk daarom (maar hij zegt het nergens) bekeek

Euler de integraal $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ voor reële, positieve waarden van p en q . De bèta-functie *avant la lettre*! Met elementaire integratietechnieken is hier voor willekeurige p en q niet zo veel te bereiken. Laten we daarom voor één van de twee parameters, bijvoorbeeld q een natuurlijk getal n nemen:

$$\int_0^1 x^p (1-x)^n dx \quad (2)$$

Even snuffelen:

$$n = 0: \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

$$n = 1: \int_0^1 x^p (1-x) dx = \int_0^1 x^p dx - \int_0^1 x^{p+1} dx = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

en ook zo:

$$n = 2: \int_0^1 x^p (1-x)^2 dx = \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$n = 3: \int_0^1 x^p (1-x)^3 dx = \frac{6}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$$

Vermoeden:

$$\int_0^1 x^p (1-x)^n dx = \frac{n!}{(p+1)(p+2) \cdots (p+n+1)} \quad (3)$$

Dit is eenvoudig te verifiëren met volledige inductie, maar Euler deed het anders. Hij ontwikkelde $(1-x)^n$ in een polynoom en combineerde slim de verkregen termen.

Nu de integraal $\int_0^1 x^p (1-x)^n dx$ op een andere manier

bestoken: we herschrijven haar tot $\frac{1}{p+1} \int_0^1 (1-x)^n dx^{p+1}$,

voeren de substitutie $x^{p+1} = y$ uit en (3) gaat over in:

$$n! = (p+2) \cdots (p+n+1) \int_0^1 (1 - y^{\frac{1}{p+1}})^n dy \quad (4)$$

De hier toegepaste substitutie wijkt behoorlijk af van Eulers nogal omslachtige werkwijze om (4) te verkrijgen. Maar hij beschikte nog niet over de geoliede machinerie waarmee wij integralen kunnen manipuleren.

Gelijkheid (3) geldt voor iedere reële, positieve p . Merk op dat de integraal daarin vrijwel dezelfde is als de hoofdrolspeler $O_{p,n}$ in het artikel van Martin Kindt. Wallis en Euler bestudeerden haar beiden, Wallis om een uitdrukking voor π te vinden, Euler op zoek naar een 'analytische' uitdrukking voor $n!$

We vervangen nu, om het rekenwerk wat overzichtelijker te maken, $\frac{1}{p+1}$ door h (met $0 < h < 1$), dus p door $\frac{1}{h} - 1$:

$$n! = (1+h)(1+2h) \cdots (1+nh) \int_0^1 \left(\frac{1-y^h}{h}\right)^n dy. \text{ Let wel, dit}$$

geldt voor iedere h tussen 0 en 1. We laten nu h naar 0 gaan (en dus p naar ∞) en bedenken daarbij dat

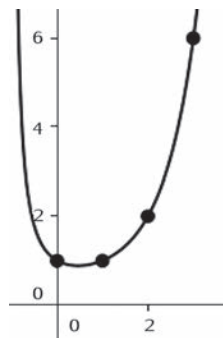
$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{y^h - 1}{h} = \ln y$ (de afgeleide naar x in 0 van y^x , dus van $e^{x \ln y}$), zodat we nu hebben: $n! = \int_0^1 (-\ln y)^n dy$ (5)

Euler had, evenals als zijn tijdgenoten, geen scrupules bij het verwisselen van limieten en integralen. Het rechterlid in (5) is ook betekenisvol als n een niet-natuurlijk reëel getal is groter dan -1 , want dan convergeert de integraal. Daarom hebben we nu een nieuwe functie die de faculteitsfunctie generaliseert:

$$G(x) = \int_0^1 (-\ln y)^x dy \quad (6)$$

Grafiek van G , zie figuur 3:

figuur 3



Terzijde: net als in $F(x)$ kan ook in $G(x)$ voor x een complex getal z genomen worden, mits $\operatorname{Re} z > -1$. We berekenen nu $G(-\frac{1}{2})$: door de substitutie $y = e^{-t^2}$

$$\text{gaat } \int_0^1 (-\ln y)^{-\frac{1}{2}} dy \text{ over in } 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

De laatste integraal is bekend uit de kansrekening en statistiek (normale verdeling) en is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. We vinden dus $G(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Vergelijk met $F(-\frac{1}{2})$, de eerder gevonden waarde voor $(-\frac{1}{2})!$

En wederom geldt dat het permanentieprincipe gerespecteerd wordt: $G(x+1) = (x+1)G(x)$ voor alle reële $x > -1$. Aan te tonen met behulp van partiële integratie. Door de substitutie $y = e^{-t}$ gaat (6) over in

$$G(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \quad (7)$$

Legendre introduceerde de term 'gamma'-functie (1811), $\Gamma(x) := G(x-1)$ maar de verschuiving van x naar $x-1$ had al eerder plaatsgevonden, door Euler, in 1768.

Hebben we nu twee oplossingen voor het interpolatieprobleem?

Er is nog iets wat niet onbesproken mag blijven. Euler heeft twee uitdrukkingen gevonden voor zijn interpolatieprobleem: de productlimietformule (1) en een integraal (6). Representeren die twee wel dezelfde functie? Voor zover bekend heeft hij zich daarover niet uitgelaten.

Het antwoord op bovenstaande vraag is: jazeker! Neem vergelijking (3), substitueer daarin $x = \frac{t}{n}$, laat n naar ∞ gaan en je ziet het. De stelling van Bohr-Møllerup (google maar) plaatste deze kwestie in 1922 in een breder perspectief.

Tot slot

Euler oppert ook een mogelijke toepassing van de faculteit van niet-natuurlijke getallen, de zogenaamde fractionele afgeleiden. Voor $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ is $\frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ de

k -de afgeleide van x^n . Maar je kunt voor k ook bijvoorbeeld -1 nemen: de (-1) -de afgeleide van x^2 is dan $\frac{1}{3}x^3$. Of, nog gewaagder, neem, nu we een waarde voor $\frac{3}{2}!$ hebben, $k = \frac{1}{2}$. Voor de 'halfde' afgeleide van x^2 vinden we $\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x \sqrt{x}$. Daarvan weer de halfde afgeleide is $2x$ zoals we zouden verwachten. Euler zegt zelf hiervan dat hij niet ziet waar dit nuttig voor is, maar dat hij het wel interessant vindt.

Literatuur

- Andrews, E.A., Askey, R., Roy (2000). *Special Functions*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Davis, P.J. (1959). Euler's Integral - A Historical Profile of the Gamma Function. *The American Mathematical Monthly*, december 1959.
- Euler, L. (1730). De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebrae dari nequeunt. Te vinden op: <http://eulerarchive.maa.org/>
- Euler, L. (1776). De termino generali serium hypergeometricarum. Te vinden op: <http://eulerarchive.maa.org/>
- Gronau, D. (2003). Why is the Gamma function so as it is? *Teaching Mathematics and Computer Science*, (1)1, 43-53.
- Kindt, M. (2016). Hoe Wallis aan zijn product kwam. *Euclides* (91)6, 7-11.
- Luschny, P. (2003). Interpolating the natural factorial. Te vinden op: www.luschny.de/math/
- Luschny, P. (2010). Is the Gamma function misdefined? Te vinden op: www.luschny.de/math/
- Why is the Gamma function shifted from the factorial by 1? (2010-2014) Te vinden op: www.mathoverflow/questions/20960/
- Sandifer, E. (2007). Gamma the function. *How Euler Did It*, (5)9. Te vinden op: <http://eulerarchive.maa.org/>
- Sandifer, E. (2007). *The Early Mathematics of Leonhard Euler*. Washington: Mathematical Association of America.

Product van Wallis

Voor wie het even niet paraat heeft:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Zie vooral het in de inleiding genoemde artikel van Martin Kindt.

Met dank aan: Ingeborg Goddijn, Leo Wiegerink en Agnes Verweij voor hun opmerkingen en adviezen.

Over de auteur

André van den Berg werkte tot aan zijn pensionering in 2012 als docent wiskunde aan de TU Delft. E-mailadres: a.j.t.vandenberg@skpnet.nl.

De nieuwe Einstein

Komt de nieuwe Einstein van uw school? Het is denkbaar. En zoals de meester zelf ooit eens zei: 'Imagination is more important than knowledge'.

Wilt u het wiskundig voorstellingsvermogen en creatief denken van uw leerlingen of studenten stimuleren? Dat kan met de geavanceerde online leeractiviteiten van Numworx. Het materiaal is veelal ontwikkeld in gerenommeerde onderzoeksprogramma's zoals www.mc2-project.eu en is direct inzetbaar, of aan te passen volgens uw wensen.

Maak wiskunde leren leuker en makkelijker voor uw leerlingen. Zodat een van hen misschien ooit de volgende Einstein wordt. Maar slagen voor de volgende wiskundetoets is natuurlijk ook mooi.

Lees meer over Numworx op www.numworx.nl, vraag de demo aan en stel u voor hoe u wiskunde-onderwijs nog rijker en creatiever kunt maken.

HET FIZIER GERICHT OP...

EU-PROJECT MC SQUARED

Peter Boon

In Fzizer belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering belicht Peter Boon het EU-project *MC Squared*. Dit Europese project gaat over creativiteit in het ontwerp van digitaal wiskundig lesmateriaal.



Creativiteit in een digitale omgeving

MC Squared werd uitgevoerd in de periode van oktober 2013 tot oktober 2016 door een consortium van universiteiten en bedrijven uit zeven Europese landen. De naam *MC Squared* staat voor 'Mathematical Creativity Squared'. Binnen het project speelde creativiteit op twee niveaus een rol. Ten eerste ging het om creativiteit bij het ontwerpen van digitaal lesmateriaal voor het vak wiskunde. Daarbij lag de nadruk op 'social creativity' binnen de ontwerpteams. Speciale software, COI-code genaamd, bood de mogelijkheid om initiële ideeën te delen en te documenteren, waarop andere leden van het team konden reageren. In een opeenvolging van versies werden deze ideeën geïmplementeerd en geoptimaliseerd in een auteursomgeving, *C-bookAuthor*, die hierna wordt beschreven. Ten tweede was de bedoeling dat het ontwikkelde lesmateriaal ook de leerling zou aanzetten tot creatief denken. Om die reden lag de nadruk op open opdrachten met veel constructieruimte voor de leerling.

C-books

In *MC Squared* werden zogenaamde *c-books* ontworpen (*c* staat voor creatief). De naam *c-book* verwijst naar producten als *e-books* en *iBooks*, maar om creativiteit te stimuleren hebben *c-books* veel uitgebreidere interactieve mogelijkheden in de vorm van *widgets*. *Widgets* zijn interactieve componenten binnen de pagina's van de *c-books*. Deze *widgets* geven de leerling bijvoorbeeld de mogelijkheid om een 3D-constructie te ontwerpen, statistische data te analyseren of zelfs een computerprogramma te maken en uit te voeren. Dat gaat veel verder dan de interactieve illustraties die we kennen van *e-books* en *iBooks*. *C-books* kunnen ook gekoppeld worden aan een *Learning Management System (LMS)* zodat de creaties van leerlingen worden opgeslagen en gedeeld met docenten.

Creatief ontwerpen met *C-bookAuthor*

In het project ontwierpen vier teams van docenten en ict-ontwerpers *c-books*. Deze teams werkten in Engeland, Griekenland, Spanje en Frankrijk. De creatieve ontwerpprocessen werden gemonitord en geanalyseerd door

onderzoeksteams van universiteiten in het consortium. Het Freudenthal Instituut was verantwoordelijk voor de ontwikkeling van *C-bookAuthor*, de auteursomgeving voor het maken van *c-books*. Als basis diende de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO). Het Freudenthal Instituut integreerde samen met de Universiteit van Potsdam, London Knowledge Lab en twee softwarebedrijven uit Frankrijk en Griekenland nieuwe software in de DWO. Met deze nieuwe software ontwierpen de vier ontwerpteams een indrukwekkende verzameling van meer dan zestig *c-books*. Deze *c-books* zijn vrij beschikbaar voor iedereen (<http://mc2-project.eu/index.php/c-book>) en kunnen worden gebruikt via een browser, een tablet en zelfs een smartphone. Een deel van deze verzameling is vertaald in meerdere talen, waaronder Nederlands.



figuur 1 Voorbeelden van *c-books* op de website

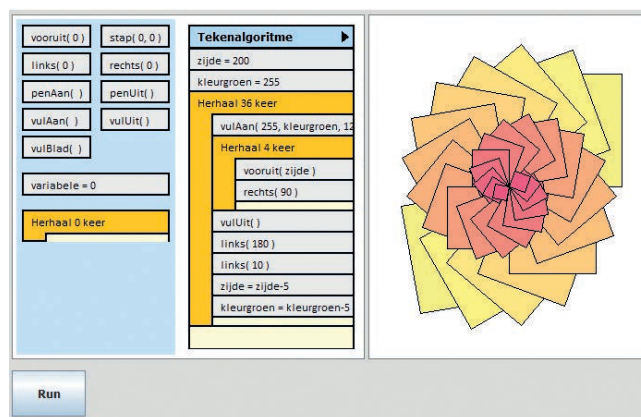
Nieuwe generatie digitaal lesmateriaal?

Er is al veel interessante software op de markt voor wiskunde, maar hoe breng je als docent deze veelheid aan mogelijkheden bijeen in een samenhangend lesprogramma? De *c-books* en onze ervaringen met het ontwikkelen van *C-bookAuthor* kunnen hierbij helpen. De software die we binnen *MC Squared* hebben ontwikkeld is grotendeels gebaseerd op bestaande software. Maar wat de *c-books* bijzonder maakt, is dat veel aspecten van ict-gebruik zijn geïntegreerd in één product. Leerlingen hebben binnen één omgeving, het *c-book*, toegang tot veel verschillende interactieve componenten. Voor auteurs is het mogelijk die componenten gebruiksklaar voor

leerlingen in te voegen, zodat leerlingen minder tijd nodig hebben voor het leren werken met verschillende programma's en dus meer tijd over hebben om bezig te zijn met wiskunde.

Ervaringen

Voor het DWO-team van het Freudenthal Instituut was *MC Squared* een mooie ervaring. De DWO-software zien gebruiken in vier landen met verschillende onderwijs-tradities bood nieuwe inzichten en ideeën, maar gaf soms ook kritische feedback op de mogelijkheden en gebruiksvriendelijkheid van onze software. De kennisuitwisseling met andere softwareontwikkelaars was inspirerend. We zijn vast van plan om de nieuw opgedane ervaring en ideeën te delen met de Nederlandse scholen die de DWO gebruiken. Een concreet voorbeeld daarvan zijn de nieuwe LOGO-programmeeractiviteiten die binnenkort beschikbaar komen binnen de DWO. Een impressie hiervan ziet u in figuur 2.



figuur 2 Binnen de DWO komen binnenkort nieuwe programmeeractiviteiten

Over de auteur

Peter Boon is werkzaam bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Emailadres: p.boon@uu.nl



Hogeschool van Amsterdam

Kennis in het kwadraat

Soms is het tijd voor iets nieuws. Een master aan de Hogeschool van Amsterdam biedt je de uitgelezen kans om meer uit jezelf en je carrière te halen. Je ontwikkelt je tot eerstegraadsleraar wiskunde. Het onderwijs wordt verzorgd door hooggekwadificeerde docenten die de praktijk kennen. Je vakkennis komt op academisch niveau en wordt breder, dieper en up-to-date. En wat je leert kun je direct in je werk toepassen. Lastig te combineren? We bieden een flexibel deeltijdprogramma. Zet de volgende stap en meld je aan voor een vrijblijvend intakegesprek: mastereducation@hva.nl.

CREATING TOMORROW

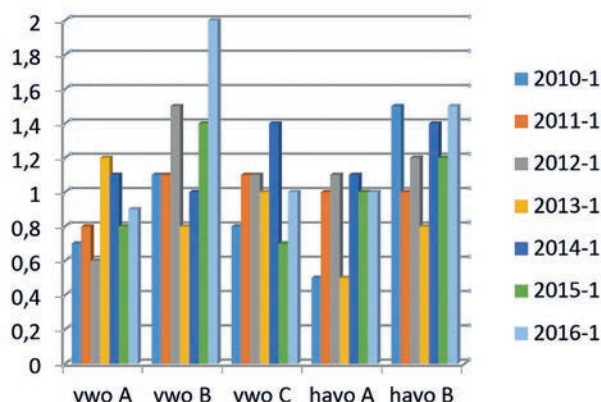
HVA.NL/MLRWK

Elk jaar wachten docenten en leerlingen met spanning af wat de uiteindelijke N-term zal zijn. Op fora en in blogs wordt daar vaak al een voorschot op genomen: 'het examen was moeilijk, dus het zal wel een hoge N-term worden', of 'mijn leerlingen hebben hoog gescoord, ik vrees voor een lage N-term.' Andere uitspraken zijn soms gebaseerd op het idee dat examens in moeilijkheid variëren en daarmee de door de kandidaten behaalde cijfers ook. Hier is sprake van een misvatting: uiteraard zijn niet alle examens precies even moeilijk, maar bij het bepalen van de cijfers wordt gecompenseerd voor de geconstateerde moeilijkheidsverschillen. Om dit te realiseren spelen statistische technieken en de N-term een belangrijke rol. Hoe dit werkt, wordt in dit artikel besproken. We besteden daarbij speciaal aandacht aan de totstandkoming van de N-termen bij vwo wiskunde B en vwo wiskunde C.

N-term

Een normeringsterm of N-term is een getal waarmee voor alle mogelijke scores voor een centraal examen bepaald wordt met welk cijfer die score gewaardeerd wordt.

De N-termen fluctueren van jaar tot jaar zoals in figuur 1 is te zien. Een hogere of lagere N-term betekent niet dat het examen slechter of beter is, alleen dat het relatief moeilijk of makkelijk is.



figuur 1 N-termen CE wiskunde 1e tijdvak

Van score naar cijfer

Bij het omzetten van een score S naar een cijfer C wordt vaak gebruik gemaakt van de formule

$C = 9 \cdot (S / L) + N$ (waarbij L de schaallengte is, S de behaalde score en N de normeringsterm). Voor $N = 1$ krijgt een kandidaat een 5,5 als hij 50% van de scorepunten behaalt: de cesuur is 50%. Door N *hoger* of *lager* te kiezen, wordt deze cesuur *lager* respectievelijk *hoger* dan 50%. Om te voorkomen dat de maximale score leidt

tot een cijfer boven de 10 (als $N > 1,0$) en een score van 0 tot een cijfer lager dan 1 (als $N < 1,0$), kun je de formule verfijnen.^[1]

Relatief normeren

Bij relatief normeren wordt de N-term zo bepaald dat het percentage voldoende (bijvoorbeeld 80%) of het gewenste gemiddelde cijfer (bijvoorbeeld 6,3) door de jaren heen steeds gelijk blijft. Als relatieve normering toegepast wordt bij eindexamens, heeft dit tot gevolg dat er geen rekening gehouden wordt met mogelijke verschillen tussen populaties eindexamenkandidaten over de jaren heen. Gezien de grootte van de populaties eindexamenkandidaten is het ook heel aannemelijk dat deze van jaar tot jaar even vaardig zijn.

Als echter de populatie van 2015 toch vaardiger is dan die van 2011, is het dus mogelijk dat kandidaten in 2015 geen diploma krijgen, terwijl ze dat in 2011 wel zouden hebben gekregen. Bij relatief normeren wordt de cesuur dus bepaald in samenhang met de vaardigheid van de populatie eindexamenkandidaten.

Absoluut normeren

Bij absoluut normeren worden elk jaar dezelfde eisen aan de kandidaten gesteld. Het toegekende cijfer is dan dus alleen afhankelijk van de door de kandidaat geleverde prestatie en onafhankelijk van eventuele verschillen in vaardigheid van de gehele populatie eindexamenkandidaten ten opzichte van voorgaande jaren. Omdat in Nederland is afgesproken een normeringssystematiek te hanteren, waarbij de gelijkwaardigheid van diploma's over de jaren heen uitgangspunt is, worden de examens zoveel mogelijk absoluut genormeerd. Het College voor Toetsen en Examens (CvTE) heeft de taak om per centraal

examen 'de lat' van jaar tot jaar even hoog te leggen, zodat de prestatie die een kandidaat moet leveren om een voldoende te halen steeds gelijk is. Absoluut normeren vereist dat de moeilijkheidsgraad van opeenvolgende examens moet kunnen worden vergeleken, zodat bij de normering voor verschillen in moeilijkheid kan worden gecorrigeerd. Men spreekt dan van equivalering. Bij vakken die met een nieuw programma starten (zoals in 2017 havo wiskunde A en B) of waarvan het aantal deelnemers erg laag is (zoals bij vwo wiskunde C) kan equivalering niet worden toegepast. In dergelijke gevallen wordt relatief genormeerd.

A Absoluut normeren bij examens met equivalering

Fase 1: equivalering

De eerste fase van het vaststellen van de N-term vindt bij deze examens al plaats tijdens het constructieproces. Voor wiskunde A en B worden combinaties van toekomstige opgaven en die van een referentie-examen^[2] ruim tevoren *gepretest* bij kandidaten uit (voor)examenklassen. Doel is de moeilijkheidsgraad van beide examens te vergelijken en vóór afname van het nieuwe examen een inschatting te maken van de te verwachten N-term. Stel dat met behulp van berekeningen na afloop van de *pretest* het nieuwe examen 0,3 cijferpunt moeilijker wordt geschat dan het referentie-examen en het referentie-examen een N-term van 1,5 heeft, dan is de eerste schatting van de N-term van het toekomstige examen: $1,5 + 0,3 = 1,8$. Als de eindexamenpopulatie van het toekomstige examen even vaardig is als die van het referentie-examen, zal de N-term van 1,8 bij het toekomstige examen tot een gelijk gemiddelde en een even hoog percentage voldoende leiden als de N-term 1,5 bij het referentie-examen: de lat bij deze twee examens ligt op gelijke hoogte. Mocht de populatie echter vaardiger zijn, dan zal de N-term van 1,8 tot een hoger percentage voldoende leiden.

Fase 2: bepaling N-tech

Na afname van elk nieuw examen maakt Cito een toets- en itemanalyse (TIA)^[3] op basis van de scores die de correctoren hebben toegekend (Wolf). Daaruit blijkt hoe de scorepunten gespreid zijn en hoe betrouwbaar het examen als meetinstrument was. Ook kan de TIA een indicatie geven of kandidaten in tijdnood zijn gekomen en welke vragen een goed onderscheidend vermogen hebben. Met behulp van de resultaten van de *pretest* en de ingezonden scores van de afname wordt een nieuwe schatting gemaakt van de N-term. Deze noemen we N_{pt} (pt staat voor *pretest*). Hierbij worden de afnamegegevens vooral gebruikt om de relatieve moeilijkheid van de vragen van het nieuwe examen ten opzichte van elkaar nauwkeuriger te kunnen schatten. Bij het schatten van de N-term, N_{pt} is uiteraard sprake van een zekere mate van onnauwkeurigheid. Het 90%-betrouwbaarheidsinterval voor de berekende N-term heeft, afhankelijk van onder andere de

omvang van de *pretest*, vaak een breedte van 0,3 tot 0,7. In ons voorbeeld zou bij een breedte van het betrouwbaarheidsinterval van 0,4 het 90%-betrouwbaarheidsinterval van N_{pt} dus zijn: $BI = [1,6 ; 2,0]$. Op basis van de TIA wordt, rekening houdend met onnauwkeurigheden, vervolgens statistisch getoetst of de aanname dat de populaties (van het referentie-examen en het huidige examen) even vaardig zijn, houdbaar blijft (met een hypothesetoets). Hiertoe wordt gezocht naar de N-term waarmee bij het nieuwe examen het percentage voldoende en het gemiddeld behaalde cijfer zoveel mogelijk overeenkomen met die van het referentie-examen (relatief normeren). Deze N-term wordt aangeduid met N_{gp} , waarbij gp staat voor gelijke populaties.

Als N_{gp} binnen het betrouwbaarheidsinterval BI van N_{pt} ligt, is het aannemelijk dat de nieuwe eindexamenpopulatie even vaardig is als de referentiepopulatie en is de meest waarschijnlijke N-term gelijk aan N_{gp} . Deze N-term wordt aangeduid als N-tech.

Mocht echter blijken dat je niet kunt uitgaan van even vaardige populaties (N_{gp} ligt dan buiten BI), dan is er een statistisch algoritme waarmee het meest waarschijnlijke vaardigheidsverschil tussen beide populaties wordt bepaald en daarmee ook de technische N-term (N-tech). Dat algoritme werkt als volgt:

- Als eerste wordt gekeken of het gemiddelde N_{mid} van N_{gp} en N_{pt} binnen het betrouwbaarheidsinterval ligt. Is dat het geval, dan is $N\text{-tech} = N_{mid}$.
- Als ook N_{mid} buiten BI ligt, dan is N-tech de N-waarde die net binnen het betrouwbaarheidsinterval BI ligt aan de kant van N_{gp} .
- Tot slot wordt getoetst of de gemiddelde cijfers van opeenvolgende populaties (onder gelijke condities) niet onwaarschijnlijk veel van elkaar verschillen. De aanname die hierbij gehanteerd wordt is dat het gemiddeld behaalde cijfer van de huidige populatie niet zomaar meer dan 0,3 cijferpunt mag verschillen van die van de populatie van het voorgaande jaar. Als dit wel het geval is, wordt het gemeten verschil gedempt, waarbij gebruik wordt gemaakt van een dempingsinterval. De volgende werkwijze wordt hierbij gehanteerd: als rand BI binnen het dempingsinterval ligt, dan is $N\text{-tech} = \text{rand BI}$. Zo niet, dan wordt de N-term 'gedempt'.

In kader 1 wordt deze procedure toegelicht voor het examen vwo wiskunde B 2016-I.

kader 1

Fase 1 en 2 vwo wiskunde B 2016-I

Bij het referentie-examen behaalde 70% van de kandidaten een voldoende. Bij de aanname dat de populaties eindexamenkandidaten van 2016 en die van het referentiejaar even vaardig zijn, zou dit voor het examen wiskunde B van 2016 een N-term 1,4 opleveren met een bijbehorend percentage voldoende van 70%:

$N_{gp} = 1,4$.

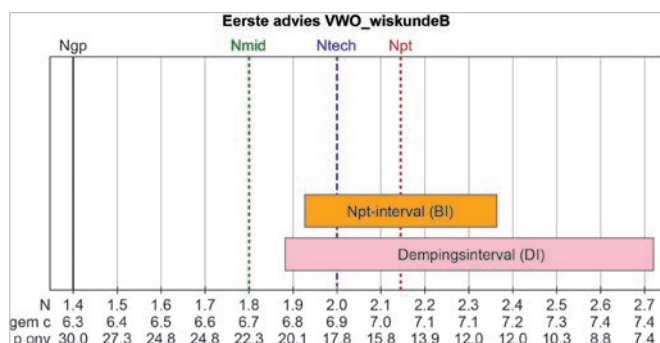
Op basis van de *pretest* is de volgende N-term vastgesteld: $N_{pt} = 2,145$ met een bijbehorend betrouwbaarheidsinterval $BI = [2,0 ; 2,3]$.

N_{gp} ligt buiten dit interval dus de aanname van gelijke populaties wordt verworpen. $N_{mid} = 1,8$ ligt niet in BI dus N-tech wordt de waarde die nét binnen BI ligt:

$N\text{-tech} = 2,0$.

Het gemiddelde cijfer bij $N = 2,0$ is 6,9 en wijkt niet meer dan 0,3 af van het examen van 2015 (7,1). Er is dus geen damping nodig.

Resultaat fase 1 en 2: $N\text{-tech} = 2,0$. Zie figuur 2.



figuur 2 Bepaling N-tech vwo wiskunde B 2016-I

Fase 3: vaststelling definitieve N-term

De dag vóór de N-termen bekend worden gemaakt, vindt de normeringsvergadering plaats, waar de definitieve N-termen worden vastgesteld. De vaststellingscommissie, die het examen heeft vastgesteld, formuleert een advies voor de definitieve N-term op basis van de TIA, daarbij meewegend de meldingen die via de examenlijn zijn binnengekomen, waaronder die van het LAKS, de door docenten ingevulde Quicksan, eventuele aanvullingen en de bevindingen uit de centrale examenbesprekingen. Op basis van dit advies stellen de directeur en sectormanagers van het CvTE, alle overwegingen gewogen hebbend, de definitieve N-term vast: N-def.

kader 2

Fase 3 vwo wiskunde B 2016

Er is geen reden gevonden om af te wijken van N-tech. De definitieve N-term wordt dus 2,0.

2,0 is hoog ...

Als er niet absoluut genormeerd was, maar uitgegaan zou zijn van even vaardige populaties, zou voor vwo wiskunde B een $N = 1,4$ zijn vastgesteld. Daarmee zou de vaardigheidstoename (zoals berekend op basis van de *pretest*) niet in de cijfers zichtbaar zijn en zouden de kandidaten tekort zijn gedaan. De N-term van 2,0 duidt dus op een moeilijk examen.

Daarbij speelt ook de lengte een rol: uit de TIA blijkt dat de beschikbare tijd krap was. Middels nadere analyse door Cito en CvTE probeert men duidelijkheid te krijgen over wat dit betekent voor de constructie van toekomstige examens. Ondanks het feit dat elk examen met de grootst mogelijke zorgvuldigheid wordt samengesteld, betekent dit dat de toekomstige examens nogmaals tegen het licht zijn en worden gehouden. Voor 2017 heeft dit voor vwo wiskunde B geleid tot een kortere versie van het examen dan gebruikelijk (zie ook de *Maartaanvulling* op examenblad.nl). Ook het pilotexamen vwo wiskunde B werd als lang ervaren. Pilotdocenten gaven aan dat het examen goed paste bij het onderwijs, maar dat het sterk denkcatieve karakter van dit examen eraan bijdroeg dat het een moeilijk examen was. Vanwege het experimentele karakter kon dit examen niet absoluut genormeerd worden. Ook voor dit soort situaties worden vaste procedures gehanteerd, waarbij analyses van de resultaten van de overlapvragen met het reguliere examen in ogenschouw worden genomen, evenals de resultaten van de pilotexamens van voorgaande jaren en het geringe aantal van slechts 107 kandidaten. De gehanteerde procedure wees uit dat met een N-term van 2,4 de kandidaten recht werd gedaan. Alhoewel het ongebruikelijk is om een N-term vast te stellen die boven de 2,0 ligt, is hier wel voor gekozen: kandidaten mogen niet de dupe worden van het star vasthouden aan een richtlijn. Een dergelijke situatie zal zich overigens eerder voordoen in pilotsituaties dan bij reguliere programma's, waarmee de examenmakers veel langer ervaring hebben.

B Examens zonder equivalering en nieuwe programma's

Nieuwe programma's en vwo wiskunde C

Absoluut normeren is voor de reguliere examens havo 2017 en vwo 2018 niet mogelijk: het nieuwe programma wordt voor het eerst geëxamineerd, zodat het niet mogelijk is geweest de eindexamenopgaven te *pretesten* bij eindexamenkandidaten in eerdere jaren en equivalering toe te passen. Door het geringe aantal wiskunde C-kandidaten, is bij vwo wiskunde C absoluut normeren ook niet mogelijk, omdat aan de *pretest*-resultaten geen echt betrouwbare statistische conclusies ontleend kunnen worden. Het *pretesten* van wiskunde C-opgaven geeft vooral ondersteuning aan het werk van de constructiegroep en de vaststellingscommissie. Bij deze examens gaat men er in eerste instantie van uit dat de huidige populatie en de referentiepopulatie even vaardig zijn. Door middel van relatief normeren wordt de N-term in de eerste fase bepaald.

Fase 1

Het percentage voldoende (bijvoorbeeld 80%) vormt het uitgangspunt.

Met behulp van een normeringstabel wordt nagegaan bij welke N-term voor het huidige examen het percentage

voldoendes zo dicht mogelijk bij dat van het referentie-examen ligt.

kader 3

Fase 1 vwo wiskunde C 2016

Bij het referentie-examen was het percentage voldoende 74.

Bij een N-term van 0,9 is voor het examen van 2016 het percentage voldoende 75. Deze waarde ligt het dichtst bij het percentage van het referentie-examen. $N_{gp} = 0,9$ met een gemiddeld cijfer van 6,2.

Fase 2

Jaarlijks wordt onderzocht of er sprake is van een vaardigheidsverschil tussen de populatie uit dat jaar en die van 2011, het laatste jaar voor de invoering van de nieuwe uitslagregels (5,5 gemiddeld op het CE in 2012 en kernvakkenregel in 2013). Als de populatie voor de vakken mét equivalering 'gemiddeld' vaardiger is geworden, ligt het voor de hand dat dit ook het geval is voor de vakken zonder equivalering. De methode die gebruikt wordt voor de bepaling van de vaardigheidsverandering heet de Fisher methode (Fisher's combined probability test). De generieke vaardigheidsverandering^[4] wordt verdisconteerd in de N-term.

kader 4

Fase 2 vwo wiskunde C 2016

Wiskunde C vormt een groep met twee kernvakken waar de vaardigheidsontwikkeling gelijk blijkt te zijn aan die van de groep niet-kernvakken.

Het vaardigheidsverschil voor de niet-kernvakken bij de populatie van 2016 t.o.v. 2011 is + 0,1
 $N\text{-tech} = N_{gp} + 0,1 = 0,9 + 0,1 = 1,0$.

Fase 3

Fase 3 is hetzelfde als die van de examens met equivalering.

kader 5

Fase 3 vwo wiskunde C 2016

Er is geen reden gevonden om af te wijken van N-tech. De definitieve N-term wordt dus 1,0. Dit levert een gemiddeld cijfer van 6,3 met 75% voldoende op.

De systematiek van het normeren is niet uitputtend behandeld. Hopelijk geeft dit artikel wel iets meer duidelijkheid over de normering van examens en de werkwijze die het mogelijk maakt te compenseren voor de onontkoombare variatie in moeilijkheid van de examens.

Noten

- [1] Zie www.toetswijzer.nl/html/normering/CvEmethode.pdf.
- [2] Een referentie-examen is een reeds afgenomen examen dat gezien wordt als goede operationalisatie van het examenprogramma en de syllabus. Dit is mede gebaseerd op de afnamegegevens en het oordeel van docenten.
- [3] De TIA van de examens 2016 zijn te vinden op www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/centrale_examens/schriftelijke_examens_havovwo/examens_havovwo_2016. Kies in het menu: havo of vwo en het tijdvak. Kies het document in de kolom TIA.
- [4] Er wordt onderscheid gemaakt tussen de vaardigheidsverandering bij verschillende groepen van vakken. Voor centrale examens zonder equivalering maakt men een schatting van het vaardigheidsverschil met 2011. Uitgangspunt hierbij is dat het aannemelijk is dat populaties die vaardiger zijn op de centrale examens met equivalering (voor havo: Engels, Duits, Frans, aardrijkskunde, management en organisatie, wiskunde A, wiskunde B, natuurkunde en scheikunde) dan de populatie van 2011, ook vaardiger zullen zijn op de centrale examens zonder equivalering. Via de Fishermethode kan berekend worden wat het meest waarschijnlijke vaardigheidsverschil is.

Webinar

In maart 2017 heeft het webinar 'Hoe komt de N-term tot stand' plaatsgevonden. Dit webinar is via examenblad.nl te volgen (zoek op 'webinar n-term').

Over de auteur

Jacqueline Wooning is clustermanager exacte vakken havo/vwo bij het College voor Toetsen en Examens. Dit artikel is tot stand gekomen in samenwerking met de voorzitters van de vaststellingscommissies wiskunde AC en wiskunde B.

E-mailadres: info@cvte.nl

Ambulances verplaatsen verbetert de dekking

Bij een ongeluk rukt de dichtstbijzijnde ambulance uit. Als vlak daarna weer een ongeluk gebeurt, kan het gebeuren dat er geen ambulance in de buurt beschikbaar is. Thijs van Barneveld heeft een oplossing. Hij onderzocht bij het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) en de Vrije Universiteit (VU) Amsterdam of dit voorkomen kan worden door de ambulances vaker te verplaatsen. Thijs: 'Ambulances zijn op een bepaalde manier verspreid over de regio en op het moment dat ergens een ongeluk gebeurt, wordt daar een ambulance aan toegewezen. Die is dan een tijd bezig. Ze moeten naar de patiënt toe rijden, voor hem of haar zorgen en eventueel naar een ziekenhuis brengen. Het kan zijn dat er gedurende die periode geen ambulance aanwezig is die binnen de gestelde vijftien minuten bij een ongeval kan zijn. De ambulance die voor dat gebied is ingedeeld, is namelijk al bezig. Ik heb gekeken naar de situatie in Flevoland en hoe daar het vaker verplaatsen van ambulances ervoor kan zorgen dat de hulpdienst in maximaal een kwartier ter plaatse kan zijn. Dit noemen we "dynamisch herpositioneren". In samenwerking met de GGD regio Flevoland, die daar de ambulanceprovider is, is de methode getest. Dat pakte goed uit. Er is zelfs een bedrijf opgericht dat de software waar het model mee werkt, verder gaat ontwikkelen. Zowel in Nederland als internationaal is er interesse in de ambulancesoftware.'

Bron: *NewScientist* 17 februari 2017

Reusachtig priemgetal lost aloud probleem deels op



figuur 1 Een Sierpińskipiramide op het Burning Man festival

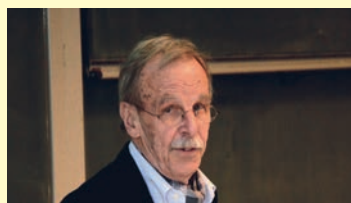
We hebben een nieuwkomer in de top tien van grootste bekende priemgetallen. Met een lengte van negen miljoen cijfers komt $10.223 \times 2^{31.172.165} + 1$ met stip de lijst binnen op plek zeven. Dit getal is bovendien bijzonder om

een andere reden: de ontdekking ervan brengt wiskundigen een stap dicht bij de oplossing van het vijftig jaar oude probleem van Sierpiński. Een Sierpińskigetel is een oneven getal – noem het k – waarvoor de uitdrukking $k \times 2^n + 1$ geen priemgetal is. Dit moet gelden voor elke positieve gehele waarde van n . De getallen waarvoor deze regel opgaat zijn spaarzaam en liggen ver uit elkaar, waardoor ze moeilijk te vinden zijn. Het probleem van Sierpiński betreft het vinden van het kleinste Sierpińskigetel. Tot nu toe gaat die eer naar

het getal 78.557. In 1962 bewees de Amerikaanse wiskundige John Selfridge dat $78.557 \times 2^n + 1$ nooit een priemgetal is, ongeacht de waarde van n . Er zouden echter nog kleinere Sierpińskigetallen kunnen zijn. Na vijftig jaar speuren waren er tot dusver zes mogelijke kandidaten om de troon op te eisen: 10.223, 21.181, 22.699, 24.737, 55.459 en 67.607. De nieuwe priemgetalontdekking bewijst dat 10.223 geen Sierpińskigetel is, omdat $10223 \times 2^n + 1$ een priemgetal is als n gelijk is aan 31.172.165. Er blijven dus vijf kandidaten over. Met een enkele computer zou het eeuwen duren om een priemgetal van deze omvang te vinden. De huidige ontdekking nam echter slechts acht dagen in beslag.

Bron: *nu.nl*

Martin Kindt koninklijk onderscheiden



figuur 2 Foto: Fridolin van der Lecq (FI)

Wiskundige, onderwijsontwikkelaar en docent Martin Kindt is vrijdag 27 januari 2017 onderscheiden als Officier in de Orde van Oranje Nassau. Dit gebeurde tijdens een feestelijk symposium aan de Universiteit Utrecht

ter ere van zijn 80e verjaardag en zijn inspanningen voor de vernieuwing van het wiskundeonderwijs gedurende ruim 45 jaar. De burgemeester van zijn woonplaats Wageningen, Geert van Rumond, speldde de versierselen bij Martin Kindt op.

Martin Kindt is erelid van de NVvW. Hij werd lid van de NVvW op 1 september 1967, en is dit jaar dus 50 jaar lid van de vereniging! Martin is lang secretaris in het bestuur geweest. Hij is nog altijd verbonden aan – en actief betrokken bij – het Freudenthal Instituut, onderdeel van de bètafaculteit van de Universiteit Utrecht. Gedurende zijn lange loopbaan publiceerde hij een groot aantal vak- én publiekspublicaties over wiskunde en wiskundeonderwijs. Ook had hij jarenlang een vaste rubriek in de voormalige *Nieuwe Wiskrant*, getiteld 'Wat te bewijzen is'. In 2015 zijn de eerste veertig artikelen in boekvorm gebundeld. Begonnen als docent wiskunde op het Wagenings Lyceum, werd Martin Kindt in de jaren '70 aangenomen door Hans Freudenthal bij het IOWO, het Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs. Later werd dit omgedoopt tot OC&OW en in 1991 tot het Freudenthal Instituut. Met het HEWET-, HAWEX- en het PROFI-project stond Kindt aan de basis van het huidige wiskunde A en B in de bovenbouw van havo en vwo. Wiskunde werd hiermee toegankelijker en toepasbaar

voor een grote groep leerlingen. Ook buiten Nederland betekende Kindt veel voor het wiskundeonderwijs. Hij was nauw betrokken bij de ontwikkeling van een nieuw curriculum in de Verenigde Staten en bij de herziening van het wiskundecurriculum in Bolivia. Hij verzorgde intensieve trainingen voor Spaanse en Argentijnse wiskundeleraars en voor studenten uit Indonesië. Nog steeds weet Martin Kindt op bevoegde wijze veel studenten en docenten te inspireren en hen te overtuigen van wiskunde als waardevolle en boeiende menselijke activiteit. Het bestuur van de NVvW feliciteert Martin van harte met deze onderscheiding.

Bron: <https://www.nvww.nl/25835>

Hans Rosling overleden

In februari jl. overleed op 68-jarige leeftijd Hans Rosling. De Zweed Rosling werd bekend met de online filmpjes waarin hij inventief en vol passie statistische feiten inzichtelijk maakte. Hij stelde dat niet de cijfers tellen, maar alle levens die achter de cijfers schuilgaan. Zijn filmpjes werden tientallen miljoenen keren bekeken. Anderhalf jaar geleden legde Rosling in het programma *Zondag met Lubach* de groei van de wereldbevolking uit aan de hand van wc-rollen. In zijn vrije tijd beoefende Rosling de kunst van het degenslikken, iets wat hij soms ook toonde na afloop van zijn lezingen.

Bron: <http://www.nu.nl/wetenschap/4452081/zweedse-statistiekoning-hans-rosling-68-overleden.html?redirect=1>

Brouwermedaille voor Ribet

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap heeft de Brouwermedaille 2017 toegekend aan de Amerikaanse wiskundige Kenneth A. Ribet. De professor aan de University of California en voorzitter van de American Mathematical Society krijgt de medaille voor zijn werk in de getaltheorie, in het bijzonder voor het toepassen van algebraïsch meetkundige methoden bij getaltheoretische problemen. Dit werk bleek van doorslaggevend belang voor het bewijs van de Laatste Stelling van Fermat. Ribet heeft op 11 april jl. de Brouwerlezing verzorgd tijdens het Mathematisch Congres, waarna hij de Brouwermedaille heeft ontvangen.

Bron: <https://wiskundepersdienst.nl/nieuwsberichten/1062>

Betere kans voor malariavaccins

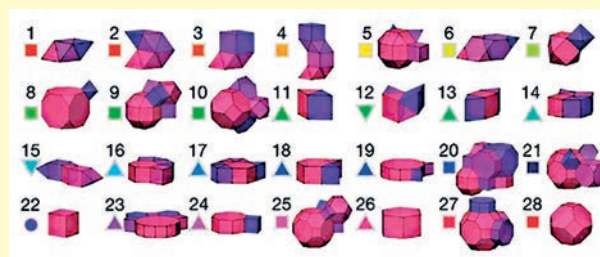
De zoektocht naar vaccins tegen malaria was tot nu toe weinig succesvol. Onderzoekers van het Erasmus MC en het Radboud UMC stellen nu dat er mogelijk kansrijke vaccins ten onrechte zijn gesneuveld, omdat er te weinig proefpersonen werden gebruikt. De onderzoekers baseren

zich op hun verbeterd wiskundig model om de gevoeligheid van een laboratoriumtest te berekenen.

Bron: <https://www.nemokennislink.nl/publicaties/een-betere-kans-voor-malariavaccins>

Meta-materialen maken met 3D-origami

Van meta-materialen kun je exotische lenzen maken, een onzichtbaarheidsmantel of nanomachientjes. Ze ontleen hun bijzondere eigenschappen niet alleen aan hun chemische samenstelling, maar vooral aan hun ruimtelijke structuur. Een systematische verkenning van ruimtegevullende structuren levert een wonderlijke collectie materialen op die van gedaante kunnen veranderen, aldus een onderzoek van AMOLF-onderzoeker Bas Overvelde en zijn collega's van Harvard. Geïnspireerd door origami en het werk van architect Chuck Hoberman was het doel om systematisch in kaart te brengen hoe je met simpele bouwstenen een driedimensionaal materiaal kunt maken dat moeiteloos van structuur verandert, dat wil zeggen zonder de bouwstenen te vervormen, al mogen ze wel scharnierende onderdelen hebben. Als uitgangspunt namen de onderzoekers de 28 veelhoeken waarmee je (binnen wat randvoorwaarden) naadloos de ruimte kunt volstapelen. Elk van de 28 bouwstenen breidden ze uit met extra zijvlakken om ruimte tussen de bouwstenen te scheppen.



figuur 3 Veelhoeken waarmee je naadloos de ruimte kunt volstapelen

Als je nu de ruimte volstapelt met deze uitgebreide bouwstenen, en toelaat dat de extra vlakken scharnieren om de verbindingslijnen, krijg je in sommige gevallen een in theorie onbegrensd materiaal waarvan de bouwstenen tegelijk in een of twee richtingen kunnen draaien.

Bron: <https://www.nemokennislink.nl/publicaties/meta-materialen-maken-met-3d-origami>

WORTELS VAN DE WISKUNDE

Jeanine Daems

4: WORTELS OPTELLEN MET STAMPIOEN

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: wortels optellen.



Gouden Eeuw

In de zeventiende eeuw gebeurde er op wiskundig gebied veel in Nederland. Die eeuw heet niet voor niets de Gouden Eeuw: het was een bloeiperiode in de handel, maar ook in de kunst en de wetenschap. Het is bijzonder dat er ook veel wiskundige literatuur in het Nederlands verscheen. In die tijd werd in de wetenschap vooral in het Latijn geschreven. Simon Stevin (1548 – 1620) vond echter het Nederlands de meest geschikte taal om wetenschap in te bedrijven en begon in het Nederlands te publiceren. Daardoor werd de wiskunde ook toegankelijk voor mensen die geen Latijn kenden. Stevin heeft een heleboel Nederlandse wiskundewoorden verzonnen, zoals het woord wiskunde zelf (*wisconst*), evenwijdig, kegelsnede, loodrecht en raaklijn, maar ook in onbruik geraakte woorden als stelkunst (algebra) en het bijzonder mooie *lanckrondt* voor ellips.

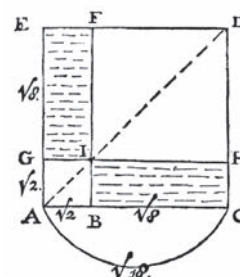
Het leuke aan Nederlandstalige bronnen is natuurlijk dat je ze kunt lezen, het zeventiende-eeuwse Nederlands blijkt na wat oefenen best begrijpelijk te zijn. Ook voor leerlingen! In dit artikel licht ik uit de grote hoeveelheid bronnen die tot onze beschikking staat (er wordt ook steeds meer online beschikbaar gesteld) een stuk dat over wortels gaat. De bron die we bekijken komt uit het boek *Algebra ofte nieuwe stel-regel* (1639) van Johan Stampioen d'Jonge (1610 – 1653). Dat boek gaat onder meer over het oplossen van derdegraads vergelijkingen, maar wij kijken hier naar een deel dat gaat over rekenen met worteluitdrukkingen. Stampioen was een leermeester van Christiaan Huygens en hij raakte verwickeld in een ruzie met Descartes omdat hij Descartes' oplossing van een door hem geponeerd probleem niet volledig vond. In het boek *Wortels van de wiskunde* komt Nederlandse wiskunde in de zeventiende eeuw nauwelijks voor, omdat het van oorsprong een Amerikaans boek is. Als aanvulling zullen wij daarom af en toe juist wel zo'n Nederlandstalige bron kiezen in deze rubriek.

Wortels optellen met Stampioen

Wat komt er uit $\sqrt{2} + \sqrt{8}$? De goed getrainde leerling zal snel zien dat $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, dus dat de som $3\sqrt{2}$ wordt. Stampioen schrijft de som echter als een enkele wortel, dus als $\sqrt{18}$, en zijn aanpak is ook anders. We kijken zo verder naar zijn uitleg, maar kijk eerst eens goed naar

het plaatje, misschien zie je zelf meteen al wel wat hier gebeurt. Ook in de klas kun je ervoor kiezen om eerst met het plaatje van figuur 1 te beginnen.

figuur 1 Uit: Johan Stampioen d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel*



Stampioen begint niet met het plaatje, want dat is eigenlijk vooral een illustratie bij zijn 'bewijs'. Hij geeft eerst zijn formulering van de algemene *Regel*, zie figuur 2:

Vergaderinghe in wortel-ghetallen.

R E G E L.

Vergadert hare viercanten, de somme onthoudt, dan soo menich-vuldicht hare viercanten, wyt het product ghetrocken den vier-cant-wortel, die gedubbelt, en ge-voecht tot de voorfz. somme der vier-canten, treckt daer wyt den vier-cant-wortel, comt de begheerde somme.

figuur 2 Uit: Johan Stampioen d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel*

Dat klinkt nog wel wat cryptisch, maar we herkennen vierkanten en de vierkantswortel, product en verdubbelen. *Vergadert* betekent waarschijnlijk iets als 'vergaren' dus dat zal optellen zijn. Direct daarna volgt het *Voor-Beeldt* en dat biedt helderheid, zie figuur 3 op de volgende pagina. Bij deze bron zijn al een heleboel mooie vragen te stellen op allerlei niveaus, bijvoorbeeld:

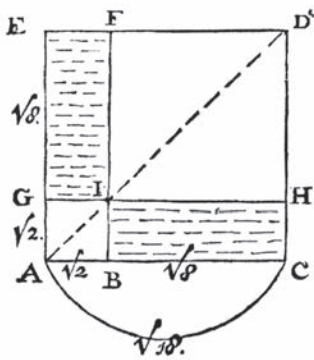
- Snap je aan de hand van het *Voor-Beeldt* van Stampioen hoe je de *Regel* moet toepassen? Kun je de *Regel* in je eigen woorden vertalen?
- Gebeurt er in 't werck inderdaad wat de *Regel* voorschrijft?
- Teken het plaatje dat hoort bij $\sqrt{12} + \sqrt{75}$. Bereken van alle vakjes de oppervlakte, bereken de oppervlakte van het grote vierkant en bereken de zijde. (Als het goed is, komt er $\sqrt{147}$ uit.)
- Teken het plaatje dat hoort bij $\sqrt{50} + \sqrt{32}$ en bereken met behulp daarvan deze som.

V O O R - B E E L D T.

'T ghegeven: Laet zijn $\sqrt{2}$ en $\sqrt{8}$. 'T begheerde: Wy moeten vinden haer somme.

'T W E R C K.

Haer vier-canten zijn 2 en 8. diens somme 10. den recht-hoeck



op 2 en 8 is 16. diens viercant wortel is 4, sijn dubbelt 8, ghedaen tot 10. de somme der vier-canten. comt 18, diens vier-canten wortel is $\sqrt{18}$. voor de somme der ghetallen die wy moeten vinden.

'T B E W I J S.

Laet daer toe de ghetallen met dese neffens gheselde Figure uyt-gebeelt worden aldus, dat AB sy $\sqrt{2}$ ende BC $\sqrt{8}$. beschrijft op AC het viercant ACDE. neemt dan AG, CH, ende EF, ghelijck AB.

Het viercant ABIG sal doen 2. ende het viercant IHDF 8. den recht-hoeck IBCF, ofte GIFE $\sqrt{16}$. ofte 4, sijn dubbelt is 8. voor beyde de recht-hoecken; daer by ghedaen de twee viercanten 2, en 8. comt 18. voor 't gantsche viercant ACDE. diens wortel is $\sqrt{18}$. voor de zijde AC. betoonende de somme vande voor-gheselde ghetallen.

figuur 3 Uit: Johan Stampioen d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel*

- Probeer met alleen de *Regel* (dus zonder plaatje) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ uit te rekenen.
- Leg in eigen woorden uit hoe en waarom het recept van Stampioen werkt. Gebruik daarbij het plaatje en eventueel het bewijs dat Stampioen zelf geeft.
- Wat heeft den recht-hoeck op 2 en 8 te maken met wat er in de *Regel* gebeurt? Die rechthoek staat niet in het plaatje, waarom is hij toch belangrijk?
- Wat betekenen beweringen als *Het viercant ABIG sal doen 2?* Wat zijn de voor-gheselde ghetallen in de laatste zin van de tekst?
- Werkt deze *Regel* voor alle getallen? Zo ja, kun je dat laten zien? Zo nee, waarom niet? En voor welke getallen dan wel?

Welke vragen je aan je leerlingen stelt hangt natuurlijk af van wat je leerdoel is en in welk leerjaar je deze bron wilt gebruiken.

'Regel, 't werck, en 't Bewijs'

Merk op dat Stampioen hier onderscheid maakt tussen de *Regel*, 't werck, en 't Bewijs. Kortom: de algemene regel, een voorbeelduitwerking en een bewijs waarom die regel klopt. Hij laat dat alleen zien voor dit specifieke geval, maar hij suggereert wel dat hieruit ook de algemene geldigheid volgt. Een interessante vraag voor leerlingen in de hogere klassen kan dan ook zijn: vind jij het bewijs van Stampioen echt een bewijs? Zo ja, waarom? Zo nee, kun je zijn argument zó aanpassen dat het in jouw ogen wel een echt bewijs wordt? Stampioen merkt zelf op dat zijn *Regel* niet werkt als het product van de twee kwadraten van de wortel-ghetallen geen mooi kwadraat is, zoals bij $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, zie figuur 4:

Merck:

Indien in 't mennichvuldighen ofte deelen der viercanten van twee wortel-ghetallen een ghetall voort comt, waer uyt den viercant-wortel niet kan ghetrocken worden. Soo en können oock de selfde wortel-ghetallen niet vergadert worden dan met het tecken +, als $\sqrt{2}$. tot $\sqrt{3}$. comt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

figuur 4 Uit: Johan Stampioen d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel*

Toch geeft Stampioens regel in die gevallen wel een resultaat. Maar dat is duidelijk niet Stampioens bedoeling: hij wil als uitkomst weer een echte wortel, van een geheel getal.

Mogelijke opdrachten hierbij zijn:

- Bedenk zelf twee wortels die je met de methode van Stampioen wel kunt optellen.
- Bedenk ook twee wortels waarbij je niet op een wortel uit een geheel getal uitkomt.
- Teken het plaatje dat bij het geval $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ hoort en leid met Stampioens methode af dat $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + \sqrt{24}}$.
- Kun je met een kortere berekening controleren dat inderdaad geldt dat $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + \sqrt{24}}$?
- Zie je nu ook wat die berekening met het plaatje te maken heeft?

Daarna gaat Stampioen verder met aftrekken, vermenigvuldigen en delen van 'wortelgetallen', en het wortel-trekken eruit (mits dat kan). Hij geeft soms meerdere methodes.

Rekenvraag als meetkundig probleem

De meerwaarde van deze bron is wat mij betreft dat het wat saaie onderwerp van exact rekenen met wortels nu toch een interessant denkprobleem kan worden. In *Getal & Ruimte* komt het onderwerp in 2 havo/vwo op de volgende manier aan de orde, nadat het vermenigvuldigen van wortels, het optellen van gelijksoortige wortels en een factor voor het wortelteken brengen besproken zijn, zie figuur 5:

V 35 Je kunt $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ herleiden. Dat gaat als volgt.

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

Herleid op dezelfde manier.

a $\sqrt{34} + \sqrt{24}$	c $\sqrt{8} + 3\sqrt{2}$	e $3\sqrt{20} - \sqrt{45}$
b $\sqrt{50} + \sqrt{32}$	d $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27}$	f $\sqrt{24} - 8\sqrt{6} + 2\sqrt{54}$

figuur 5 *Getal & Ruimte* 10e editie., 2 havo/vwo deel 2, blz. 21

Stampioens *Regel* op zich is eigenlijk minder verhelderend dan wat hier in de lesmethode gebeurt, maar zijn uitleg in 't *Bewijs* geeft wel meer inzicht. Zijn uitleg laat zien dat je zo'n rekenvraag ook kunt bekijken als een meetkundig vraagstuk, waarbij je echt een vierkant gaat tekenen waarvan de zijde de gevraagde wortel is, mits de oppervlakte van dat vierkant een geheel getal is. Deze bron biedt daarom de gelegenheid verschillende wiskundige concepten aan elkaar te koppelen. Zo ziet de leerling weer even dat bij het berekenen van $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$, bijvoorbeeld, de middelste term $2\sqrt{6}$ inderdaad een

logische meetkundige betekenis heeft. En dat wortels en vierkanten met elkaar te maken hebben. Het rekenen met wortels wordt op deze manier verbonden met meetkunde en met het uitwerken van haakjes, met het rechthoeks-model als denkmodel daarbij.

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Jan Stampioen, Wikipedia (https://nl.wikipedia.org/wiki/Jan_Stampioen, geraadpleegd op 21-01-2017)
- Johan Stampioen d’Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel (-) Waer door alles ghevonden wordt inde wis-konst, wat vindtbaer is. Noyt voor desen bekendt*. ‘s-Gravenhage, “Ghedrukt ten Huyse vanden Autheur”, p. 10-24 (online beschikbaar op Google Books of Utrecht University Library Special Collections)

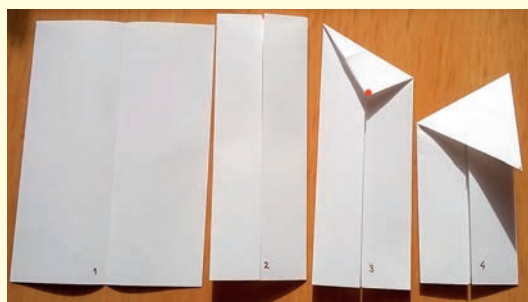
KLEINTJE DIDACTIEK

TETRAËDERS VOUWEN

Lonneke Boels

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen van 2017 gaf Albrecht Beutelspacher van het Mathematikum in Giessen een lezing waarbij de zaal een tetraëder mocht vouwen. De tetraëder hebben we vervolgens zowel bij wiskunde D als bij wiskunde C (vanwege het nieuwe examenprogramma vorm en ruimte) gevouwen. Voor wie niet bij de NWD was of het alweer vergeten is, volgt hieronder de uitleg. Aan het einde staan verwijzingen naar een paar websites met andere vouwpatronen voor tetraëders. Albrecht had nog veel meer leuke voorbeelden, onder andere een voor Valentijnsdag waar ik tegen die tijd nog op terug zal komen. Albrecht is initiator van het ‘wiskundemuseum’ *Mathematikum* in Giessen, Duitsland, een gaaf ‘doe’-museum dat heel veel publiek trekt. Een aanrader dus voor tijdens een vakantie of een schoolreis. Het rondreizende deel kan ook in Nederland worden uitgenodigd zoals op de NWD was gedaan.

figuur 1 De eerste vier stappen



De vouwinstructie is als volgt. Vouw een A4-tje in de breedte dubbel (1) en daarna nogmaals beide helften elk tot de helft (2). Vouw de punt rechtsboven naar beneden zodat linksboven een scherpe punt ontstaat én de punt

van rechtsboven op het midden van het gevouwen papier terechtkomt, zie de rode stip op het hoekpuntje (3). Vouw daarna de punt linksboven naar rechtsonder zodat de zijde die na het vouwen verticaal is, parallel is aan het onderliggende papier. De punt die van linksboven kwam, zit nu rechtsonder (4).

figuur 2 Stap 5, 6 en 7



Herhaal stap 4 voor de punt die rechtsboven zit en die dus naar linksonder gaat (5). Doe dit nogmaals (6). Het klopt dat de punt rechtsonder nu iets uitsteekt. Vouw tot slot het driehoekje linksonder, dat in stap 6 is overgebleven, om naar boven (7). Je hebt nu allemaal platte driehoeken op elkaar. Vouw deze uit tot stap 3.

figuur 3 Uitgevouwen (linksboven), enveloppe van driehoek (rechtsboven), driehoekje onder schuiven in driehoekje boven (linksonder), op de laatste foto zijn deze aan de buitenkant op elkaar gelegd (rechtsonder).



Nu moet het driehoekje linksonder in het driehoekje rechtsboven schuiven dat we in stap 3 hebben gevouwen. Let erop dat de driehoek ver genoeg in het enveloppe schuift, zodat de vouwlijnen echt in elkaar zitten (dus voorbij de vouw schuiven). Het resultaat is een tetraëder met twee naden die kieren.

figuur 4 Het eindresultaat



Meer informatie en een werkblad staan op de website.



vakbladeuclides.nl/926boels

Een krachtige leerling begint

bij een krachtige leraar



Bouw jij mee aan het lerarenregister?

Dat kan!



Doe mee

In meedenksessies
vanaf april 2017



Gebruik je zeggenschap

Laat je stem horen en
vertegenwoordig je beroepsgroep



Meer weten over de wet Beroep Leraar en Lerarenregister?
Kijk dan op: www.registerleraar.onderwijscooperatie.nl

KIEZEN VOOR DOCENT WISKUNDE

Hanke Korpershoek
Floor Middel

In Nederland kiezen te weinig leerlingen voor de voltijd tweedegraads opleiding docent wiskunde. De verwachting is dat hierdoor in de toekomst een tekort aan gekwalificeerde docenten ontstaat. Hanke Korpershoek en Floor Middel ondervroegen de studenten die wel voor de opleiding hebben gekozen. Is het beeld dat zij vooraf van de opleiding hadden veranderd sinds zij aan de opleiding zijn begonnen? Vinden zij dat je echt heel goed in wiskunde moet zijn om deze studie te volgen? Hoe zit het met hun zelfvertrouwen op wiskundig gebied? En: wat vonden anderen van hun keuze voor deze opleiding?

Onderzoeksgroep

Twintig studenten van de opleiding docent wiskunde hebben deelgenomen aan een pilotstudie aan het einde van het eerste jaar. Gedurende het eerste jaar waren al enkele medestudenten uitgevallen. In uitgebreide interviews met twee studenten en in het contact met docenten aan de hogeschool werd duidelijk dat het hoge niveau wiskunde dat door de opleiding gevraagd wordt, de belangrijkste reden voor uitval was. Studenten die geparticipeerd hebben in deze pilotstudie voldeden voorsnog aan het gevraagde wiskundeniveau. Beide geïnterviewde studenten beschrijven het belang van goede wiskundevaardigheden: 'Er is een flink aantal studenten, ongeveer zeven, die de toetsen niet gehaald hebben. Daardoor moesten ze met de opleiding stoppen, die personen zijn we dus kwijt. Kortom, de wiskunde moet er wel goed inzitten. En misschien moet je ook maar geen wiskundedocent willen worden als je zelf geen wiskunde kunt. Ik zou zelf ook geen leraar voor de klas willen die zijn eigen vak niet goed beheerst.'

Zelfvertrouwen

Door middel van vijftien items op een 5-punts Likertschaal (1 = klopt helemaal niet t/m 5 = klopt helemaal) is het wiskundig zelfvertrouwen van studenten bepaald met een vertaling van de *Attitudes Toward Mathematics Inventory*.^[1] Voorbeelditems zijn: 'Ik verwacht dat ik het redelijk goed doe, welke wiskundecolleges ik ook volg' en 'Ik kan zonder al te veel moeite wiskundige problemen oplossen'. In het huidige onderzoek vonden we een betrouwbaarheidscoëfficiënt van $\alpha = 0,87$. De gemiddelde score voor zelfvertrouwen in wiskunde van studenten was 4,32. Dit is een relatief hoge score, aangezien de hoogst mogelijke score 5 is. Mannen ($n = 9$) hadden een gemiddelde score van 4,19 en vrouwen ($n = 11$) behaalden een gemiddelde score van 4,43. Een non-parametrische Mann Whitney test kon niet aantonen dat de verschillen tussen mannen en vrouwen significant waren ($z = -0,50$, $p = 0,62$). Uit het volgende citaat blijkt dat beide geïnterviewde studenten zich

zelfverzekerd voelen met betrekking tot het vak wiskunde: 'Wiskunde vind ik hartstikke leuk, want ik vind het altijd leuk om dingen op te lossen en te puzzelen.'

Beeld van de opleiding

Daarnaast is studenten gevraagd naar hun beeld van de opleiding docent wiskunde. Er werd hun gevraagd hoe zij vooraf en nu over hun studie denken. De vragen over hoe zij *vooraf* over hun opleiding dachten, zijn gesteld aan het einde van hun eerste jaar (dus retrospectief). Voorbeelden van gestelde vragen zijn: 'Voordat ik de opleiding docent wiskunde startte, verwachtte ik dat docent wiskunde een

maatschappelijk relevant beroep is' en 'Nu ik ben begonnen aan de opleiding docent wiskunde, gaat de wiskunde binnen deze opleiding mij gemakkelijk

af'. De items konden beantwoord worden op een 5-punts Likertschaal (1 = helemaal niet mee eens t/m 5 = helemaal mee eens). Door middel van een non-parametrische test voor gerelateerde steekproeven (Wilcoxon Signed Ranks Test) is bepaald of attitudes van studenten voorafgaand aan de opleiding significant verschilden van attitudes in de laatste periode van hun eerste studiejaar. De studenten gaven aan dat ze nu (na één jaar) een significant hogere waarde van de opleiding voor de maatschappij zien en een verhoogde maatschappelijke relevantie van het beroep wiskundedocent (zie tabel 1). Ook uit de interviews kwam dit beeld naar voren.

- 'Als je aan de opleiding begint, dan denk je dat het alleen gaat om een beetje lesgeven, maar dat klopt toch niet helemaal. Je hebt ook mentorleerlingen en daar komt dan weer van alles bij kijken. Dan heb je gewoon persoonlijk contact met de leerlingen zelf.'
- 'Je bent deels opvoeder van de leerlingen, samen met de ouders.'
- 'Het docent zijn spreekt me aan, want ik vind het fijn om sociaal bezig te zijn. Manieren bedenken hoe je lessituaties kunt aanpakken, hoe je ermee om kunt gaan hoe verschillend leerlingen denken, leerlingen sturen en dergelijke. Het is als een psychologisch spelletje spelen. Ik vind het interessant hoe dat allemaal werkt.'



JOUW CARRIÈRE IN HET ONDERWIJS GAAT VERDER BIJ YER

Ben jij een docent wiskunde die net dat stapje extra zet voor zijn leerlingen? Dan komen wij graag met jou in contact! Voor diverse scholen in de Randstad zoeken wij 1^e en 2^e graads docenten wiskunde. Je komt in dienst van YER en gaat op detacheringsbasis aan de slag bij een van onze opdrachtgevers. Door ons ruime aanbod aan opdrachten bij scholen in de regio's Utrecht, Amsterdam, Den Haag en Rotterdam hebben we altijd een uitdaging die aansluit op jouw ambities.

Waarom kiezen voor YER?

- Aansprekend salaris en aantrekkelijke extra's
- Vastigheid en duidelijkheid, wij zorgen dat alles goed voor je is geregeld
- Ervaring opdoen bij diverse scholen, maar ook de mogelijkheid hebben op een vaste functie
- Aandacht voor een evenwichtige balans tussen werk en privé

Jouw profiel

- 1^e of 2^e graads docent wiskunde
- Goede contactuele, sociale en reflectieve vaardigheden
- Vakinhoudelijk, didactisch en pedagogisch sterk onderlegd
- (Stage)ervaring in het Nederlands voortgezet onderwijs

Ben jij de docent wiskunde die wij zoeken?

Zowel starters als ervaren wiskundedocenten zijn welkom om te reageren. Wij maken graag met je kennis om de mogelijkheden te bespreken. Neem voor meer informatie contact op met Hans Huisman via 06 21 13 46 88 of hanshuisman@yer.nl.

Opleiding	Vooraf	Nu	Vershil	Significantie
Waarde voor de maatschappij	4,20	4,60	0,40	0,01*
Goede kans op een baan	4,80	4,85	0,05	0,32
Dat je alleen docent kunt worden na afronding opleiding	3,35	2,80	-0,55	0,01*
Beroep				
Goede carrièremogelijkheden	3,80	4,15	0,35	0,05
Maatschappelijke relevantie beroep	4,20	4,60	0,40	0,01*
Docent wiskunde een moeilijk beroep	3,35	3,25	-0,10	0,66
Student				
Verwachtingen over succesvol afronden opleiding	4,10	3,95	-0,15	0,47
Interessante inhoud van de opleiding	4,10	4,45	0,35	0,12
De gemakkelijheid van de wiskunde binnen de opleiding	3,15	3,13	-0,03	0,94
Het gemak van lesgeven tijdens stages	3,20	3,65	0,45	0,01*
* $\alpha < 0,05$				

tabel 1 Attitudes tegenover de opleiding

Daarbij denken studenten in mindere mate dat zij na het afronden van hun opleiding alleen docent kunnen worden. Verder leek het lesgeven tijdens de stages deze studenten mee te vallen. Een geïnterviewde student beschrijft wel dat de stage in het eerste jaar klein van omvang is bij zijn hogeschool. 'Het eerste jaar ga je maar twee weken op stage. Die twee weken zijn om te kijken of je daadwerkelijk docent wil worden.'

Rol van de omgeving

Eén van de doelen van de interviews was om de rol van personen in de omgeving te bepalen bij het studiekeuze-proces van studenten op de opleiding docent wiskunde. Geïnterviewde studenten benoemden enkele reacties uit hun omgeving voor hun studiekeuze. Het volgende citaat geeft weer hoe een vriend van een participant aangaf vertrouwen te hebben in hoe hij wiskunde kon uitleggen: 'Een goede vriend op de middelbare school heb ik veel geholpen met het vak wiskunde. Met hem heb ik ook besproken dat ik docent wiskunde wilde worden. Hij zei dat ik dat vooral moest gaan doen als ik dat leuk vond, want hij vond mij daar echt geschikt voor. Dat gaf mij bevestiging.' Het volgende citaat illustreert hoe vriendinnen van een participant terughoudend reageerden op de keuze voor wiskunde: 'Vriendinnen zeiden "poeh, succes!", want veel vriendinnen vinden wiskunde een pokkenvak. Je kunt het of je kunt het niet. Dus je vindt het heel erg leuk of je hebt er een gruwelijke hekel aan. Dat kan ik me goed voorstellen, want als je de basis niet hebt, kun je daar niet op bouwen.' Ook kan een voormalig eigen wiskundedocent het enthousiasme voor wiskunde laten opbloeien: 'Ik denk altijd terug aan mijn docent die ik had in de eerste en tweede klas van de middelbare school. Deze docent heeft altijd alles helder uitgelegd. Daardoor vond ik wiskunde zo leuk en haalde ik hoge cijfers. Zo werd wiskunde mijn favoriete vak.'

Conclusie

Samenvattend kan uit dit pilotonderzoek worden geconcludeerd dat studenten aan de opleiding docent wiskunde beschikken over solide vertrouwen in hun wiskundevaardigheden; zowel voorafgaand, maar ook tijdens hun opleiding. Hierbij dient echter wel te worden benoemd dat studenten uit deze bescheiden steekproef de studie tot aan het einde van jaar 1 hadden doorstaan. Daarnaast bleek dat studenten voorafgaand en na één jaar studie verschillend denken over de maatschappelijke relevantie van de wiskundedocent: Na één jaar zien zij een vergroot maatschappelijk belang. Tot slot bleek uit kwalitatieve interviews dat studenten mogelijk beïnvloed worden door hun omgeving, zowel positief als negatief, om te kiezen voor de studie docent wiskunde. Wij bevelen aan dat er in toekomstige studies uitgebreider onderzoek wordt gedaan naar deze mechanismen.

Noten

[1] <http://www.pearweb.org/atis/tools/48>

Over de auteurs

Floor Middel is research master student bij de faculteit Gedrags- en Maatschappijwetenschappen aan de Rijksuniversiteit Groningen en heeft een brede interesse in studies op het gebied van kinderen, jongeren en jongvolwassenen. E-mailadres: f.middel@rug.nl
Hanke Korpershoek is universitair hoofddocent bij het GION Onderwijs/Onderzoek instituut van de Rijksuniversiteit Groningen en houdt zich onder meer bezig met het studiekeuzegedrag van adolescenten. E-mailadres: h.korpershoek@rug.nl

Afgelopen twee jaar was ik docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek hield ik u op de hoogte van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.



Voor de oplettende lezer: de introductie is in de verleden tijd geschreven. Op het moment dat u dit leest, ben ik namelijk terugverhuisd naar Nederland. Het leven en lesgeven in Nieuw-Zeeland beviel nog prima, maar het gemis van vrienden en familie begon een grotere rol te spelen. Bovendien vertrokken we met z'n tweeën, en keren we met z'n drietjes terug.

Aan het eind van het kalenderjaar (tevens schooljaar) is het tijd voor reflectie. Welke dingen uit Nieuw-Zeeland ga ik missen (gemarkeerd met een plusje)? Welke zaken wil ik graag daar laten of heb ik gemist (de minnetjes)? Merk op dat niet alles per se 'typisch Nieuw-Zeeland' is. Sommige dingen waren vast uniek voor onze school (circa 800 leerlingen) en sectie, of worden op sommige scholen in Nederland ook zo gedaan.



Organisatie

- + De hoeveelheid lessen. Maximaal vijf lessen op een dag, twintig lesuren per week, gemiddeld een klokuur per les. Met pauzes van een half uur en drie kwartier. En om drie uur zijn alle docenten en leerlingen klaar met lessen.
- + De eenvoudige lesroosters. Leerlingen hebben weinig vakken en (bijna) alle vakken vier lesuren in de week. In de bovenbouw bestaat het rooster uit diagonale lijnen: hetzelfde vak maandag het eerste uur, dinsdag het tweede, woensdag het derde, enzovoort...
- + De uitstekende communicatie. Elke ochtend is er een personeelsbijeenkomst van een kwartier, waarin bijzonderheden van de komende en afgelopen dag worden besproken. Soms worden na afloop in een kleine kring van docenten vertrouwelijke zaken rond specifieke studenten benoemd.
- + Het ontbreken van kluisjes. Het klimaat is meestal zo zacht dat leerlingen geen jas nodig hebben, of hooguit een dun jasje. Ze hebben maximaal vijf lessen op een dag, dus alle boeken passen in de tas. Nooit slappe excuses over kluisjes waar het druk was, sleutels die kwijt zijn en boeken die op school zijn blijven liggen.
- + De oudercontactavond. Korter dan in Nederland en (dus) kwalitatief beter. De gesprekjes duren vijf minuten: vrijwel altijd voldoende tijd om een compliment uit te delen, eventuele zorgen te bespreken en een aanbeveling te doen. En anders maak je een extra afspraak. Aan de ouderavond is al wel een rapport voorafgegaan, waarin je als docent voor elke leerling een paragraaf feedback schrijft.
- + Het werken op basis van data. Dat gebeurt bij het management, maar men stimuleert dat ook bij docenten. Welke leerlingen presteren onder hun kunnen? Welke groepen leerlingen hebben extra aandacht nodig? Lijken onze interventies te werken? Natuurlijk heeft dat cijfergericht denken ook nadelen; daarover later meer.
- + De focus op voortgang. Veel leerlingen komen in de brugklas binnen met een achterstand en hoewel we proberen die (deels) weg te werken, is dat niet altijd realistisch. Mede daarom is in de onderbouw de relatieve voortgang vrijwel net zo belangrijk als het absolute niveau.
- De bureaucratie. Nederlanders houden van formulieren en regels, Nieuw-Zeelanders zijn zo mogelijk nog erger. Voorbeeld: een papiertje moeten ondertekenen waarin je plechtig verklaart dat je de rapporten van je collega hebt gecontroleerd op stijlfouten. Een briefje dat vervolgens niemand in de organisatie wil zien of hebben.
- Het contact met ouders. Onze school kiest er bewust voor alle contact met het thuisfront te laten lopen via schoolleiding en 'deans' (zeg maar de afdelingsleiders). Als mentor of vakdocent bespaart je dat tijd

en moeite, maar ik heb het ook regelmatig als een beperking ervaren.

- De vrijblijvendheid in de onderbouw. Op onze school werden leerlingen in de onderbouw altijd bevorderd. Ik onderken de nadelen van doubleren en intrinsieke motivatie is het allermooist, maar ik heb voorbeelden gezien waarbij leerlingen een steeds diepere kuil voor zichzelf leken te graven of met een extra prikkel aan het eind van het jaar wat harder hadden gewerkt.

Hulpmiddelen en curriculum

- + Het onafhankelijk(er) van een methode werken. In Nederland deed ik dat (noodgedwongen) soms ook, maar hier werd het door mijn sectievoorzitter echt gestimuleerd. De leerlingen hadden wel een boek met oefenmateriaal en summiere uitleg, maar dat sloot niet altijd aan op hun niveau en hetgeen getoetst werd.
- + De grafische rekenmachine. Deze speelt in de wiskundeles geen centrale rol. Het is een nuttig hulpmiddel, dat echter niet verplicht is. Toegegeven: op sommige andere scholen heeft (bijna) iedereen er eentje en maken docenten er intensiever gebruik van.
- + Het programma iNZicht. Een nuttig hulpmiddel bij het behandelen van statistiek. Het biedt de mogelijkheid om boxplots, staaf- en spreidingsdiagrammen te tekenen, plus diverse analyses te doen. Het is gratis te downloaden bij de Universiteit van Auckland, die ook een online lite versie biedt. NZgrapher is een soortgelijk online pakket, ontwikkeld door een enthousiaste docent.
- + Het (online) lesmateriaal in het Engels. De hoeveelheid video's en oefenmateriaal is schier eindeloos. Natuurlijk kun je in Nederland dingen soms vertalen of (in de bovenbouw) leerlingen iets in het Engels laten doen, maar ideaal is dat niet.
- De geodriehoek. Ik kon maar niet wennen aan de gradenboog (zonder meetlat aan de onderkant). In mijn tweede jaar heb ik mijn sectievoorzitter enthousiast gemaakt en een hele doos geodriehoeken (plus bordexemplaren) uit Nederland over laten komen.

Toetsen

- + De manier van toetsen en beoordelen. Toetsen worden niet beoordeeld met een cijfer, maar krijgen het predicaat onvoldoende, voldoende, goed of zeer goed. In de bovenbouw bestaan de meeste toetsen uit één vraag in een plausibele context, waarbij leerlingen deels zelf met een aanpak (model) moeten komen. Uitzondering zijn de toetsen over algebra, calculus en kansrekening – die bestaan net als in Nederland uit meerdere sommen. In de onderbouw

bestaan de toetsen uit kleine sommetjes van verschillende moeilijkheidsgraad, zodat er – in theorie – voor elke leerling iets op zijn niveau is.

- + De interne en externe moderatie van toetsen in de bovenbouw. Dat betekent dat je altijd acht toetsen van een collega nakijkt en de beoordeling bediscussieert: dat leidt tot goede, inhoudelijke discussies over toetsen en lesgeven. Bovendien wordt van enkele toetsen een steekproef door een externe organisatie gekeurd.
- De nadruk op schrijfvaardigheid. Er is veel aandacht voor statistiek (bijvoorbeeld: analyse van boxplots) en daarbij moeten leerlingen verslagen schrijven. Taalzwakke leerlingen zijn duidelijk in het nadeel.
- De overdaad aan toetsen. Leerlingen doen in de onderbouw aan het begin én eind van de module een toets, plus eentje aan het eind van het jaar. Daarnaast zijn er enkele landelijke standaardtoetsen. Eerlijk is eerlijk, voor een deel heeft dit te maken door het werken op basis van data, waar ik eerder zo enthousiast over was.
- Dezelfde toetsen voor iedereen, in de onderbouw dan. Om aan het eind van het jaar de klassenindeling te kunnen maken, moeten de resultaten vergelijkbaar

zijn. Hoewel de toetsen sommen van verschillende moeilijkheidsgraad bevatten, zijn de moeilijke gedeeltes voor zwakkere leerlingen ontmoedigend.

In principe is het curriculum voor iedereen hetzelfde, maar als docent moet je soms lastige keuzes maken welke stukken je voor zwakkere klassen of leerlingen weglaat.

Wat ik mogelijk het meeste ga missen, is de ambitie en discipline van leerlingen. Scholen slagen er hier in een sfeer te creëren waarin het streven naar goede resultaten door leerlingen eerder regel dan uitzondering is. Leerlingen luisteren over het algemeen stil naar wat hun verteld wordt, doen rustig wat gevraagd wordt en stellen zich dankbaar op. Orde houden en huiswerk controleren is overigens nog steeds nodig.

Met veel plezier heb ik de afgelopen twee jaar lesgegeven in Nieuw-Zeeland en daarvan verslag gedaan. Het zal wennen worden in Nederland. Al is het alleen maar omdat ik weer in het Nederlands moet praten, decimale komma's moet gebruiken en krullen ga zetten bij goede antwoorden – in plaats van Engels, punten en vinkjes. Wilt u meer lezen over het leven in Nieuw-Zeeland? Ga naar www.tegenvoeters.nl of neem contact met mij op. Ze kunnen in Nieuw-Zeeland altijd goede wiskundeleraars gebruiken! Ten slotte: aan het begin van het schooljaar hoop ik weer aan de slag te gaan als leraar wis- en/of natuurkunde. Weet u of heeft u een interessante vacature in de regio Rotterdam? Stuur gerust een berichtje naar meijerinkmr@gmail.com.

Swier Garst

Van 10.00 uur tot 11.00 uur vindt de jaarvergadering plaats, met de vaste onderdelen zoals de jaarrede van de voorzitter, notulen, jaarverslagen, jaarrekening en bestuursverkiezing.

Het thema voor de studiedag van dit jaar is:

WISKUNDE uit de KUNST



Zowel wiskundigen als kunstenaars raken snel gefascineerd door structuren, patronen en wetmatigheden. De combinatie wiskunde en kunst ligt voor de hand, maar heeft binnen de schoolwiskunde nog niet echt een plek veroverd. Tijdens deze studiedag wordt gekeken naar de mogelijkheden om wiskunde en kunst in de klas te combineren. Denk bijvoorbeeld aan de rol van wiskunde in vlakvullingen, muziek en architectuur, maar ook aan wiskunde met rap, animaties en 3D-printen. Kunstige contexten kunnen aanleiding zijn voor leerlingen om zich op een creatieve manier in een wiskundig onderwerp te verdiepen. Tenslotte is goede wiskunde geen wetenschap maar kunst: Wisconst! De relatie tussen wiskunde en kunst is spannend en soms gespannen. Wat is de verhouding tussen vaardigheid en creativiteit? En hoe verhouden zich didactische ideeën uit beide disciplines? Oefening baart vanzelf kunst? Tijdens deze studiedag laten we ons vooral door kunst inspireren. Daarbij denken we ook aan onderwerpen als wiskunde met kunstjes, wisconst van vroeger (Stevin e.a.) en de kunst van het onderwijzen van wiskunde.

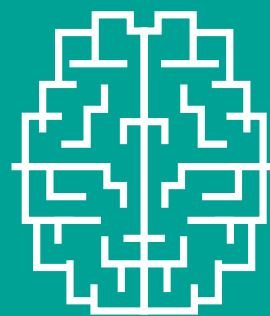
Wilt u zelf een workshop geven over dit thema of misschien wel over een heel ander onderwerp, mail dan naar Lidy Wesker-Elzinga (l.wesker@nvww.nl) of Michiel Doorman (m.doorman@nvww.nl) voor uw bijdrage aan de inhoud van dit programmaonderdeel van deze dag.

In Euclides nr 7, die in juni uitkomt, krijgt u nadere informatie over de inhoud en organisatie van deze jaarvergadering/studiedag. Voor praktische informatie over deze dag kunt u zich wenden tot Heleen van der Ree (hoofdbureau@nvww.nl).

Dus reserveer in uw agenda: **zaterdag 4 november NVvW-dag!**

MAGIDOKU'S EN VERBORGEN SYMMETRIEËN

Lieke de Rooij
Wobien Doyer



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Een Latijns vierkant van orde n , is een vierkante matrix, gevuld met n verschillende symbolen waarvan elk precies één keer per rij en één keer per kolom voorkomt. We kiezen hier voor de getallen 0 tot en met $n - 1$.

In een standaard magisch vierkant (M) van orde n staan precies alle getallen van 1 tot en met n^2 , zodanig dat de som van elke rij, elke kolom en ook elke diagonaal gelijk is. Wij kiezen hier voor de getallen 0 tot en met $n^2 - 1$, met $n \leq 10$.

Grieks-Latijnse vierkanten (GL) zijn vierkanten van twee gecombineerde Latijnse vierkanten G en L . G is gevuld met n Griekse symbolen en L met n Latijnse symbolen. In elk vakje van het GL staan dan naast elkaar een Grieks en een Latijns symbool, afkomstig uit de overeenkomstige vakjes van G en L , vandaar de naam Grieks-Latijns vierkant. Bovendien moeten alle zo verkregen combinaties van twee symbolen verschillend zijn.

Euler deed uitgebreid onderzoek naar GL 's en hij had het vermoeden dat er voor $n = 6$ en zelfs voor alle $n = 4k + 2$ geen GL 's bestaan. Dat bleek later niet juist,^[1] maar wel voor $n = 6$.

Als je de symbolen vervangt door n ($n \leq 10$) rode en blauwe cijfers (G rood en L blauw), met in het GL rood links en blauw rechts, dan kunnen we dat zien als tweecijferige getallen. In het n -tallig stelsel zijn dat precies alle n^2 opeenvolgende waarden vanaf 0. Bijvoorbeeld voor $n = 3$: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22.

En als we er bovendien voor zorgen dat in zowel G als L ook de diagonalen n verschillende cijfers bevatten, dan is GL een zuiver magisch vierkant in het n -tallig talstelsel. Merk op dat omgekeerd, ook als $n \neq 6$, niet elk magisch vierkant voldoet aan de eisen van een GL .

We geven een voorbeeld voor $n = 4$, zie figuur 1.

$G =$	<table><tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td></tr></table>	2	1	3	0	3	0	2	1	0	3	1	2	1	2	0	3	$L =$	<table><tr><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td></tr></table>	0	3	2	1	1	2	3	0	3	0	1	2	2	1	0	3	geeft $GL =$	<table><tr><td>20</td><td>13</td><td>32</td><td>01</td></tr><tr><td>31</td><td>02</td><td>23</td><td>10</td></tr><tr><td>03</td><td>30</td><td>11</td><td>22</td></tr><tr><td>12</td><td>21</td><td>00</td><td>33</td></tr></table>	20	13	32	01	31	02	23	10	03	30	11	22	12	21	00	33	Of 10-tallig:	<table><tr><td>8</td><td>7</td><td>14</td><td>1</td></tr><tr><td>13</td><td>2</td><td>11</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td><td>5</td><td>10</td></tr><tr><td>6</td><td>9</td><td>0</td><td>15</td></tr></table>	8	7	14	1	13	2	11	4	3	12	5	10	6	9	0	15
2	1	3	0																																																																				
3	0	2	1																																																																				
0	3	1	2																																																																				
1	2	0	3																																																																				
0	3	2	1																																																																				
1	2	3	0																																																																				
3	0	1	2																																																																				
2	1	0	3																																																																				
20	13	32	01																																																																				
31	02	23	10																																																																				
03	30	11	22																																																																				
12	21	00	33																																																																				
8	7	14	1																																																																				
13	2	11	4																																																																				
3	12	5	10																																																																				
6	9	0	15																																																																				

figuur 1

Zo'n GL is dus een matrix van $n \times n$, waar elke rij, elke kolom en ook de beide diagonalen n verschillende rode (links) en n verschillende blauwe (rechts) cijfers bevatten. Bovendien zijn alle tweecijferige getallen in de matrix verschillend. Het resultaat is een bijzonder magisch vierkant. We zullen na opgave 3 zien dat we met een GL makkelijk een heleboel andere verschillende GL 's kunnen maken en dus ook allerlei magische vierkanten.

Voor deze puzzel maken we er een soort sudoku van door slechts een beperkt aantal tweecijferige getallen in te vullen. De rest moet u zelf aanvullen. De linker cijfers (rood) en de rechter cijfers (blauw) vormen dus eigenlijk elk een sudoku (zonder blokken), waarin de rijen, de kolommen en ook de diagonalen precies alle cijfers 0 tot en met $n - 1$ bevatten. Bovendien moeten de rood-blauwe getallen elk precies één keer voor komen.

Opgave 1: Verwijder zoveel mogelijk rood-blauwe getallen uit de GL ($n = 4$) van figuur 1, zodanig dat er maar één manier is om hem weer aan te vullen tot een GL .

figuur 2

	24			12
	13			
	42	34		
	30			

Omdat het onderscheid al gemaakt wordt door de plaatsing links of rechts, laten we in het vervolg de kleuren rood en blauw weg.

Opgave 2a: Vul de GL ($n = 5$) van figuur 2 aan. U kunt de tweede kolom makkelijk invullen, maar daarna wordt het lastiger. Er is, zoals ook bij een goede sudoku, precies één oplossing.

figuur 3

		32				
	36	00				44
	04			41	12	
55	23					
	50					06

Opgave 2b: Maak ook de GL ($n = 7$) van figuur 3 af.

Omdat in een Grieks-Latijns vierkant de symbolen geen waarde hebben kunnen we zonder verlies van algemeenheid de getallen 00, 11, 22, ... , $(n-1)(n-1)$ op een rij, kolom of diagonaal plaatsen.

Opgave 3: Plaats de getallen 00, 11, 22, ... op de hoofddiagonaal en onderzoek hoeveel mogelijkheden er dan zijn voor een GL met $n = 4$ en ook met $n = 5$.

Van een gegeven GL kunnen we nog op meerdere manieren andere GL 's maken en dus ook meerdere magische vierkanten. De vraag is hoeveel. We kiezen voor een GL met de getallen 00, 11, 22, ... op de hoofddiagonaal. We geven als voorbeeld in figuur 4 drie GL 's met $n = 7$.

figuur 4

00	26	45	64	13	32	51
62	11	30	56	05	24	43
54	03	22	41	60	16	35
46	65	14	33	52	01	20
31	50	06	25	44	63	12
23	42	61	10	36	55	04
15	34	53	02	21	40	66

00	23	41	15	36	62	54
64	11	56	42	03	20	35
45	50	22	06	61	34	13
26	65	14	33	52	01	40
53	32	05	60	44	16	21
31	46	63	24	10	55	02
12	04	30	51	25	43	66

00	25	13	62	36	41	54
65	11	30	04	53	26	42
43	06	22	50	61	14	35
24	52	46	33	15	60	01
56	63	05	21	44	32	10
31	40	64	16	02	55	23
12	34	51	45	20	03	66

De afbeeldingen die een gegeven GL kunnen omzetten in een nieuwe GL zijn:

- Het hele vierkant roteren en/of spiegelen (een linker cijfer blijft daarbij een linker cijfer).
- De rode en blauwe cijfers in elk vakje van waarde verwisselen, dus bijvoorbeeld 35 verandert in 53.
- Een permutatie van de rode cijfers en/of van de blauwe cijfers.

Geen van deze afbeeldingen op zich beeldt de GL op zichzelf af, maar combinaties ervan soms wel. Om preciezer te zijn, het gaat altijd om een rotatie of spiegeling in combinatie met b en/of c.

Zie bijvoorbeeld het eerste voorbeeld in figuur 4. Een spiegeling in combinatie met afbeelding b geeft precies het eerste voorbeeld terug. We hebben dus een afbeelding die de GL afbeeldt op zichzelf. We kunnen dat zien als een vorm van symmetrie.

We geven daarom de volgende definitie van symmetrie bij GL 's:

Een GL is symmetrisch als er een niet-identieke afbeelding is die de GL op zichzelf afbeeldt. We kunnen de symmetrie nader specificeren door de rotatie of spiegeling te noemen die erbij betrokken is.

Zoals we hierboven al zagen wordt het eerste voorbeeld (in figuur 4) door afbeelding b in combinatie met spiegeling in de hoofddiagonaal op zichzelf afgebeeld. Deze GL is dus symmetrisch door spiegeling in de hoofddiagonaal.

We hebben nu gezien dat afbeelding *b* in combinatie met spiegeling of rotatie een *GL* op zichzelf kan afbeelden, maar afbeelding *c* kan dat ook. Dat is alleen lastiger te zien omdat afbeelding *c* in het algemeen ingewikkelder is dan afbeelding *b*. We noemen het hier daarom een *verborgen symmetrie*.

Bij kleinere *GL*'s blijkt er altijd een zekere (soms verborgen) symmetrie te zijn. Figuur 1, bijvoorbeeld, heeft een symmetrie die niet gemakkelijk te herkennen is.

Doordat in onze voorbeelden de cijfercombinaties 00, 11 enzovoort in volgorde op de hoofddiagonaal staan is symmetrie door rotatie over 180° zichtbaar te maken via een eenvoudige permutatie.

Opgave 4: Welke permutatie is dat en welke symmetrie(en) vindt u zo in de drie voorbeelden?

Met (combinaties van) rotatie over 180° , spiegeling in de hoofddiagonaal en spiegeling in de verticale as hebben we alle mogelijke spiegelingen en rotaties van het vierkant gehad. De spiegeling in de verticale as hebben we in opgave 4 nog niet gebruikt.

Opgave 5: Welke permutaties zijn nodig om te onderzoeken of er sprake is van (verborgen) symmetrie door spiegeling in de verticale as? In welke van onze drie voorbeelden is deze symmetrie aanwezig?

Tip: als die symmetrie er niet is hoeft u de permutatie natuurlijk niet helemaal uit te voeren, maar let wel op dat u behalve de spiegeling in de verticale as ook eerder bekeken afbeeldingen nodig kunt hebben om de *GL* op zichzelf af te beelden.

Voor de liefhebbers, maar buiten de puntentelling: Bereken bij elk van de voorbeelden hoeveel verschillende magische vierkanten je kunt maken door permutaties van de cijfers en/of verwisseling van de linker- en rechtercijfers. Daarbij tellen magische vierkanten die gelijk zijn op rotaties en/of spiegeling na niet als verschillend.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.

Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen!

Inzendingen moeten uiterlijk op 30 mei a.s. binnen zijn.

In nr. 5 van *Euclides* is de top 10 van de ladderstand door een fout niet gepubliceerd. Bovenaan stond toen Leo Pos

LADDERSSTAND

Top 10 van de ladderstand na puzzel 92-4 is:

Naam	Punten	Naam	Punten
Grünefeld	165	J. Remijn	126
F. van Hoeve	159	F. Göbel	79
J. Guichelaar	154	K. van der Straaten	78
G. Bouwhuis	151	K. Vugs	74
H. Bakker	129	M. Woldinga	69

We feliciteren Leo Pos en Anneke Grünefeld van harte met de ladderprijs.

NOOT

- [1] Bose, R.C, Shrikhande, S.S. & Parker, E.T. (1960). Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of a Euler's conjecture. *Canadian Journal of Mathematics* (12), pp. 189-203.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvw.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075

E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2017

wo
17/5

TILBURG

Fontys Wiskunde Event

Organisatie: Fontys lerarenopleiding Tilburg

22/5
t/m
9/6

GRONINGEN

Tentoonstelling Imaginary

do
8/6

AMSTERDAM (Centrum voor Wiskunde en Informatica)

Publieksdag van de internationale conferentie
over Complexe netwerken

Organisatie: Wiskunde Consortium Networks

ma
12/6

UTRECHT

Onderwijs *meets* Onderzoek

Organisatie: NVvW, Freudenthal Instituut en SLO

2/7
t/m
7/7

GRONINGEN

International workshop on statistical modelling

Organisatie: Rijksuniversiteit Groningen

vr
15/7

EINDHOVEN

Finale wiskunde olympiade 2017

vr/za
25/8
t/m
26/8

AMSTERDAM (aug) en EINDHOVEN (sep)

Vakantiecursus 'De computer in de wiskunde:
breekijzer of oud schroot?'

Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

19/9
t/m
22/9

UTRECHT

Fifth International Conference on the History of
Mathematics Education

Organisatie: NVvW, Freudenthal instituut,
Descartes Centr, Universiteit van Utrecht

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 92

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	27 juni 2017	1 mei 2017

CASIO®

Casio fx-82EX

Pretty in Pink... Met een goed introductieaanbod!

De Casio fx-82EX onderscheidt zich door zijn enorme rekenkracht, hoge resolutie display, vele handige functies...en binnenkort ook zijn kleur. Voor het nieuwe schooljaar is deze krachtige calculator ook verkrijgbaar in roze. Wilt u hem als eerste ontvangen? Bestel dan nu en profiteer van ons introductieaanbod.

Introductie-
aanbod

€ 6,95*

Bestel direct

Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer. Zodra de Casio fx-82EX in roze beschikbaar is (juni 2017) ontvangt u deze direct.



CLASSWIZ

*U betaalt slechts € 6,95 inclusief btw en verzending. Dit introductieaanbod is alleen geldig voor wiskundedocenten, 1 exemplaar per docent.

GETAL & RUIMTE

Ontdek Getal & Ruimte 12e editie vmbo!

Beschikbaar voor schooljaar 2018/2019:

- leerjaar 1 vmbo-bk, vmbo-kgt en vmbo-t/havo.

Vraag uw
proefkatern aan
op [getalenruimte.
noordhoff.nl](http://getalenruimte.noordhoff.nl)



Nieuw bij de 12e editie vmbo onderbouw:

- adaptief oefenmateriaal met gerichte feedback;
- differentiatie in niveau o.a. door leerroutes in het digitale lesmateriaal;
- meer aandacht voor wiskundige denkactiviteiten;
- instructievideo's;
- speciale rekenkaternen bij de werkboeken.

Vraag nu alvast een proefkatern aan voor een eerste indruk! Ga naar

www.getalenruimte.noordhoff.nl



[www.twitter.com/getal_en_ruimte](https://twitter.com/getal_en_ruimte)

www.facebook.com/GetalenRuimte