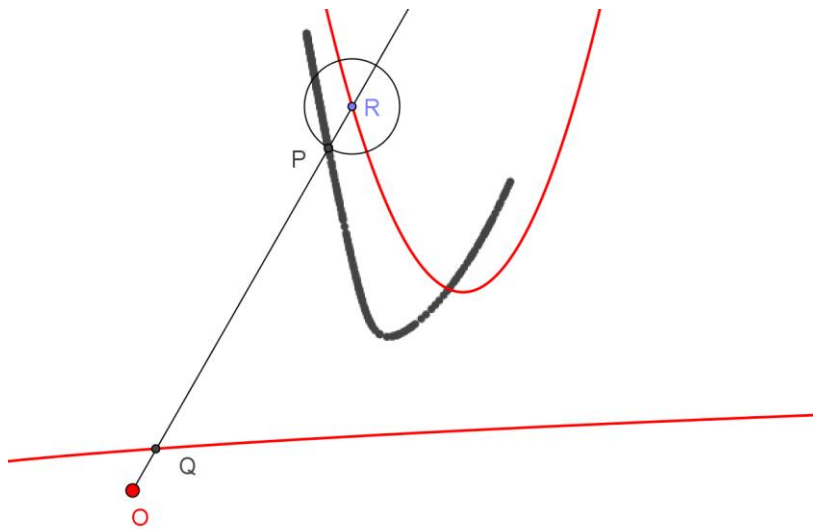


Cissoïde

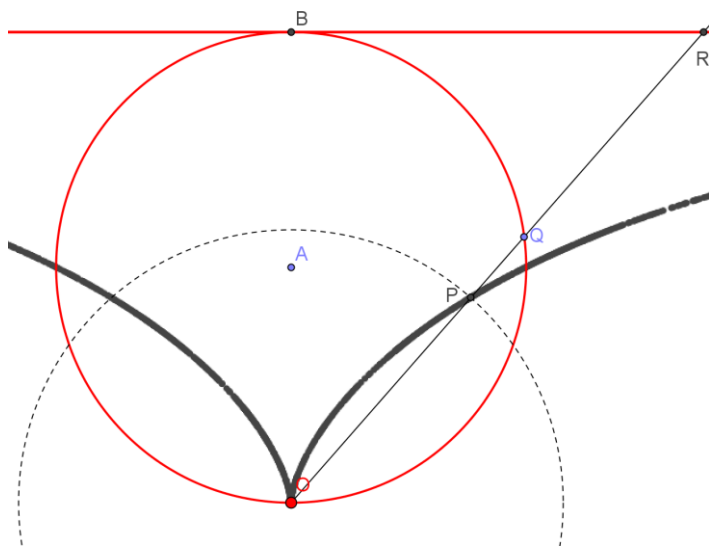
Om deze kromme te kunnen maken heb je een vast punt O nodig en twee andere krommen. Deze drie objecten worden steeds rood gekleurd. Vanuit vast punt O trek je een halflijn die de krommen achtereenvolgens snijdt in punt Q en punt P . Voor punt P van de cissoïde moet dan gelden: $OP=OR-OQ$. Zie figuur 1.



figuur 1

De cissoïde van Diocles

De cissoïde van Diocles is een bijzonder geval. De twee krommen zijn een cirkel en een raaklijn aan die cirkel. Het vaste punt O ligt op de gegeven cirkel. Hier geldt ook: $OP=OR-OQ$. Zie figuur 2.



figuur 2

Het is gemakkelijk na te gaan dat de getallenparen van de punten R en U achtereenvolgens zijn: $(\frac{2}{a}, 2)$ en $(\frac{1}{a}, 1)$.

De coördinaten van punt Q zijn te vinden door het stelsel $\begin{cases} y = ax \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$ op te lossen.

Dat geeft $Q(\frac{2a}{1+a^2}, \frac{2a^2}{1+a^2})$.

Gaat u maar dat geldt: $P(\frac{2}{a(1+a^2)}, \frac{2}{1+a^2})$.

Merk op dat punt L op lijn BP ligt. Vergelijking van deze lijn is van de vorm $y=mx+2$.

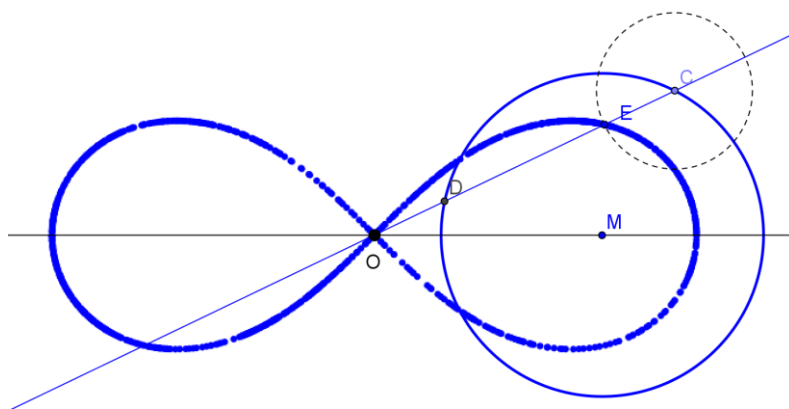
M kunnen we uitdrukken in a met behulp van het getallenpaar van punt P : $m = -a^3$.

Vergelijking van lijn BP is $y = -a^3 \cdot x + 2$. Hier uit volgt dat $x_L = \frac{1}{a^3}$. We hadden al: $x_U = \frac{1}{a}$.

Conclusie: $AU = \sqrt[3]{AL}$. We kunnen dus sowieso een lijnstuk construeren met lengte $\sqrt[3]{2}$.

Nu dan de andere constructie van de lemniscaat van Bernoulli. De lemniscaat als bijzondere cissoïde.

Andere constructie

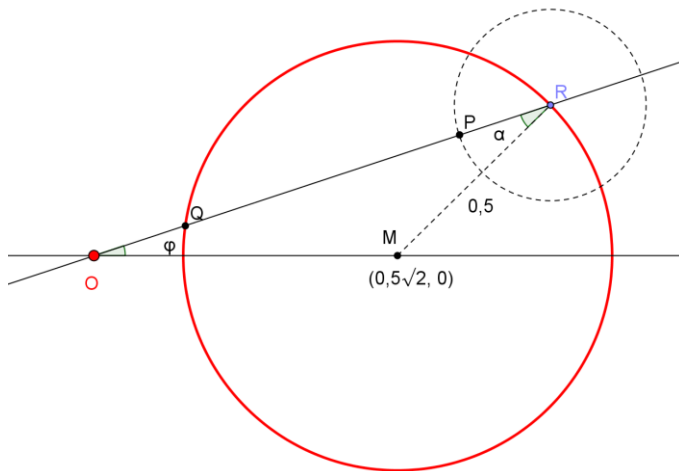


figuur 4 (dit is figuur 14 van het artikel in Euclides januari 2017)

We hebben dus nodig een vast punt O en twee krommen. De twee krommen zijn in dit geval twee samenvallende cirkels die voldoen aan de genoemde eisen in het artikel. Het spiegelbeeld van middelpunt M ten opzichte van O noemen we N . En voor u is de uitdaging

om aan te tonen dat $EM \times EN$ constant is. Die constante zal blijken te zijn: het kwadraat van MO . En dat is een $\frac{1}{2}$.

Bewijs:



figuur 5

Bekijk $\triangle OMR$. Zie figuur 5. Met behulp van de sinusregel zien we dat: $\frac{\sin(\alpha)}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sin(\varphi)}{\frac{1}{2}}$.

Hier uit volgt: $\sin(\alpha) = \sqrt{2} \cdot \sin(\varphi)$. We willen graag de coördinaten van P berekenen:

$P(OP \cdot \cos(\varphi), OP \cdot \sin(\varphi))$. Nu moeten we proberen OP uit te drukken in φ .

Merk op dat $OP=QR$. $\triangle QMR$ is gelijkbenig. Helft van QR is $\frac{1}{2}\cos(\alpha)$. Dus $QR = \cos(\alpha)$.

$$OP = QR = \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - 2 \cdot \sin^2(\varphi)} = \sqrt{\cos(2\varphi)}.$$

Tussentijdse oogst: $P(\sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \cos(\varphi), \sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \sin(\varphi))$.

We gaan nu aantonen dat: $PN \cdot PM = \frac{1}{2}$. Of dat $PN^2 \cdot PM^2 = \frac{1}{4}$

$$((\sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \sin(\varphi))^2) \cdot ((\sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot (\sin(\varphi)))^2) = \frac{1}{4}?$$

Gebruik de regel: $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$!!

$$(\cos(2\varphi) + \sqrt{2}\sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \cos(\varphi) + \frac{1}{2}) \cdot (\cos(2\varphi) - \sqrt{2}\sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \cos(\varphi) + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}?$$

$$\cos^2(2\varphi) - 2\cos^2(\varphi) \cdot (\cos(2\varphi) + \cos(2\varphi)) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}?$$

$$\cos(2\varphi)(\cos(2\varphi) - 2\cos^2(\varphi) + 1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}? \quad \cos(2\varphi)(\textcolor{red}{0}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}? \quad \text{En dat klopt dus.}$$