

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Ontwerp een kinderdagverblijf:
vakoverstijging op het vmbo

Gepersonaliseerd leren

Optimaliseringsproblemen

Toen x nog onbekend was

Kijk op kans:
Teleac-serie uit de jaren '70

NR. 4



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JARGANG 92 - JANUARI 2017

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 92 NR 4

IN DIT NUMMER

BERICHTEN UIT HET VMBO

RUUD JONGELING

4

KLETTEREN MET ANALYTISCHE MEETKUNDE ...

FRED MUIJRS

7

GEPERSONALISEERD LEREN

SUZANNE VISSER

9



DIGITAAL TOETSEN

WIM GROSHEIDE
MARK DACKUS

12

ENKELE OPTIMALISERINGSPROBLEMEN NADER BEKEKEN

GERARD KOOLSTRA

14

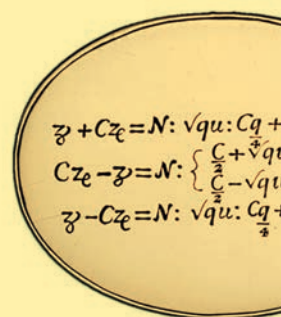
WIS EN WAARACHTIG

18

WORTELS VAN DE WISKUNDE

JEANINE DAEMS

21



GETUIGEN

DANNY BECKERS

23

VOORBEELDEN VAN WISKUNDIG MODELLEREN IN GETAL & RUIMTE EN MODERNE WISKUNDE

BERT ZWANEVELD
JACOB PERRENET

26

INTERNATIONAL MATHEMATICAL MODELING CHALLENGE (IM²C)

RUUD STOLWIJK
HENK VAN DER KOOIJ

31

UITDAGENDE PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

33

HET FIZIER GERICHT OP...

MICHIEL DOORMAN
HARRIE EIJKELHOF

37

foto: Groningen, 4 december 2016,
Liesbeth Coffeng

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

PUZZEL

41

WERELDWISKUNDE FONDS STEUNT
STICHTING MADAGASKAR

42

ROLA HULSBERGEN

KLEINTJE DIDACTIEK

43

LONNEKE BOELS

VERENIGINGSNIEUWS



JAARREDE 2016

SWIER GARST

44

SERVICEPAGINA

46

Kort vooraf

Een van de aardigste bijverschijnselen van het hoofdredacteurschap van de *Euclides* zijn de verrassende mailwisselingen die soms ontstaan. Bijvoorbeeld doordat je op zoek gaat naar het copyright van een afbeelding. Zo begon een aantal maanden geleden een correspondentie met Edward Frenkel over het gebruik van stills uit zijn film *Rites of Love and Math*. Die kwamen voor in het artikel dat Jacques Jansen schreef over het raakprobleem in Frenkels boek *Liefde & Wiskunde*. Edward stelde niet alleen alles wat we maar wilde hebben ter beschikking, maar was daarnaast ook gecharmeerd van het artikel en schreef ook bijzonder nieuwsgierig te zijn naar de recensie van het boek die binnenkort verschijnt. Voor deze editie ging ik op zoek naar het copyright van de foto van het *aide memoire* in het artikel van Jeanine Daems en kwam terecht bij Stephen Johnston, de curator van het Museum of Science in Oxford. Hij schreef: 'Your message reminds me that I should update my own page to reflect the fact that I was able to acquire this for the museum. In fact, by spooky coincidence, I handled it yesterday morning. It had been on display in a little exhibit of New Acquisitions until last week and just yesterday morning I put the aide memoire into a more permanent location amongst London instruments of the 17th century in the Museum's Top Gallery. It's a pleasure to see that the device has generated interest elsewhere – and something we might report to the funders who helped us buy it!'

En vervolgens kwam de vraag of het *Euclides*-artikel opgenomen mag worden in de online collectiedatabase van het museum. Daar hebben we uiteraard geen bezwaar tegen ...

Tom Goris

VAKOVERSTIJGING: ONTWERP EEN KINDERDAGVERBLIJF

Een van de doelen van het vak wiskunde is het toepassen van de geleerde vaardigheden. En dan niet in de volgende opgave maar in een vakoverstijgend project. Ruud Jongeling beschrijft zo'n project waarbij zorgvakken, de creatieve vakken én wiskunde samenkomen.

In 2009 was het Da Vinci College in Roosendaal een van de eerste vmbo-scholen met een vakcollege zorg en welzijn. Lesmateriaal voor dit type vakcollege bestond nog niet en werd daarom door de docenten zelf ontwikkeld. Nu, ongeveer zeven jaar later, wordt gebruikgemaakt van materiaal van uitgevers, maar het destijds ontworpen project 'Ontwerp een kinderdagverblijf' heeft de tand des tijds doorstaan. Het wordt ieder schooljaar ingezet in het tweede of derde leerjaar van de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg.

De noodzaak zelf lesmateriaal te ontwikkelen bood mij de gelegenheid vakoverstijgend bezig te zijn. Onderwerpen uit zorg en welzijn konden gecombineerd worden met wiskundige onderwerpen. Het zelf ontwerpen van een kinderdagverblijf is daar een voorbeeld van. In vier stappen werken de leerlingen toe naar een maquette van hun eigen ontwerp. Van de leerlingen wordt verwacht dat ze eerst stil staan bij de verschillende functies en eisen die aan een kinderdagverblijf worden gesteld. Ze vragen zich af welke ruimten er nodig zijn en hoe groot die moeten worden. Daarna leren de leerlingen met schaal te rekenen. Deze kennis wordt gebruikt bij het op schaal tekenen van de plattegrond van het kinderdagverblijf. In de laatste stap worden de muren met deuren en ramen op de plattegrond geplakt.

Programma van eisen

De opdracht voor de leerlingen is een kinderdagverblijf te ontwerpen voor een groep van tien kinderen in de leeftijd van nul tot vier jaar met twee leidsters. De kinderen moeten er kunnen slapen, spelen en natuurlijk verschoond worden. De leerlingen dienen bij het ontwerp ook rekening te houden met wettelijke eisen zoals een minimale omvang van 5 m² voor een slaapruijnte en dat in alle ruimten die bestemd zijn voor spelactiviteiten en slapen daglicht naar binnen moet vallen. Op basis van deze en andere eisen stellen de leerlingen een lijst op van ruimten met bijbehorende oppervlakte voor hun ontwerp. Vaak ontstaat hier al de eerste discussie. Hoeveel slaapruijnten heb je eigenlijk nodig, want heeft

ieder kind een eigen bedje? Is onze speelruimte wel groot genoeg voor tien spelende kinderen? De vierkante meter die op de grond van het wiskundelokaal geplakt is en een aantal meetlinten waarmee de werkelijke omvang van een ruimte kan worden uitgezet, helpen de leerlingen een realistisch beeld te krijgen van de omvang van de speel- en slaapruijnten.

Rekenen met schaal

In de tweede stap leren de leerlingen te rekenen op schaal. Bij ons op school hebben we afgesproken dat we alle schaalberekeningen via de verhoudingstabel met bijbehorende rekenpijlen laten plaatsvinden. De leerlingen oefenen dit aan de hand van modelautootjes die worden

omgerekend naar de werkelijke maten. Het omgekeerde vindt ook plaats. Aan de hand van de afmetingen van de auto van de docent

wordt uitgerekend hoe groot een model van zijn auto zou worden. De tweede stap eindigt met de opdracht uit te rekenen wat de lengte van een playmobil kind en ouder is voor een volwassen vrouw van 175 cm en een kind van 100 cm. De schaal die de leerlingen hierbij gebruiken is 1 : 25 en dit is ook de schaal die gebruikt wordt bij de maquette. Tijdens het ontwerpen en bouwen van de maquette kan dan met behulp van playmobil poppetjes de breedte van de gangen en andere ruimten gecontroleerd worden.

'IS ONZE SPEELRUIMTE WEL GROOT GENOEG
VOOR TIEN SPELENDE KINDEREN?'



figuur 1 Leerlingen berekenen hoe groot een schaalmodel van de auto van de docent zou worden

Plattegrond

In de derde stap gaan de leerlingen weer verder met het kinderdagverblijf. Ze hebben in de eerste stap bepaald welke ruimten er in het kinderdagverblijf moeten komen. In de derde stap gaan ze de oppervlakte van deze ruimten omzetten in bijbehorende lengten en breedten. Vaak een pittige klus voor de leerlingen.

De ruimten worden daarna op schaal getekend en uitgeknipt. Op een A2 karton, de basis voor ieder kinderdagverblijf ontwerp, worden de ruimten neergelegd en gerangschikt totdat er een logisch ontwerp is ontstaan. Uiteraard kan een ruimte worden aangepast wanneer dat beter uitkomt, maar aan de minimale eisen van het kinderdagverblijf moet worden voldaan. Het laatste onderdeel van de derde stap is met een dikke stift en liniaal de muren op de plattegrond tekenen.



figuur 2 Leerlingen maken een plattegrond voor het kinderdagverblijf

Maquette

In de vierde en laatste stap worden de muren met deuren en ramen op de plattegrond geplakt. De leerlingen moeten eerst de werkelijke afmetingen van de muren, deuren en ramen schatten of nameten in het schoolgebouw. Daarna worden ze in een verhoudingstabel omgerekend naar de afmetingen op schaal en dan kan het knippen en plakken beginnen. Er is ruimte voor versieringen en fantasie zoals het aanbrengen van ronde ramen, het gebruik van verschillende kleuren voor de muren of de aanleg van een buitenspeelplaats met speeltoestellen.

De leerlingen werken in groepjes van drie tot vier leerlingen waarbij basis- en kaderleerlingen door elkaar zitten. Iedere stap moet door de docent in het lesboekje van de leerlingen worden afgetekend voordat het groepje verder mag werken. Op deze wijze wordt voorkomen dat een groepje doorwerkt terwijl er nog fouten in een voorafgaande stap zitten. Voor de docent zijn dit drukke lessen: veel rondlopen, aanwijzingen geven, vragen beantwoorden en vooral leerlingen helpen om dóór te denken. Is de gang in het ontwerp wel breed genoeg voor een moeder met kind aan de hand? Laat dat eens zien met playmobil poppetjes op de plattegrond. De speelruimte voldoet wel aan de wettelijk voorgeschreven minimum oppervlakte van 10 m², maar kun je daar wel echt tien spelende kinderen

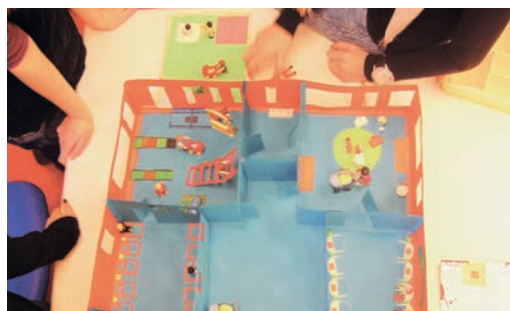


figuur 3 Maquette bouwen

kwijt? Meerdere keren heb ik leerlingen naar de vierkante meter in het lokaal verwezen om zelf te ervaren hoeveel ruimte een vierkante meter geeft. Dat eindigde bijna altijd in het vergroten van de speel- en slaapruidten. Wat je in de ontwerpen ook regelmatig tegenkomt zijn lange dunne gangen van minder dan één meter breed. Deze gangen ontstaan wanneer de leerlingen de uitgeknipte ruimten indelen op de plattegrond. Er blijft dan nog een smal stukje over en de leerlingen komen niet altijd op het idee deze gangen bij de speel- of slaapruidte te betrekken. De vraag hoe de leerlingen denken de gangen schoon te gaan houden, dwingt hen na te denken over het nut van deze smalle gangen.

Wiskunde integreren

De wiskunde in de opdracht komt geïntegreerd en in een concrete betekenis aan bod en beperkt zich niet tot het rekenen met schaal. Ook het omrekenen van eenheden binnen het metrieke stelsel, met name van meters naar centimeters en omgekeerd, komt aan bod. Daarnaast zijn de leerlingen bezig met oppervlakteberekeningen van rechthoekige en vierkante ruimten waarbij teruggerekend moet worden van een bekende oppervlakte naar mogelijke lengtes en breedtes. Met de berekeningen met schaal hoop ik te bereiken dat de leerlingen schaalberekeningen niet langer zien als een wiskundig trucje maar ervaren en begrijpen dat deze een voorwerp vergroten of verkleinen. De opdracht is inmiddels verdwenen uit het lesmateriaal van het vakcollege zorg en welzijn, maar wordt nog regelmatig gebruikt in de themaweken voor de tweede of



figuur 4 Maquette met playmobilpoppetjes als kinderen en leidsters

derde klas. De leerlingen vinden het over het algemeen een leuke opdracht en gaan gemotiveerd aan de slag. Het werken in groepjes is zelden een probleem, dat zijn de leerlingen gewend vanuit het vakcollege. Wanneer de motivatie wat minder is helpt het soms om aan het ontwerp een wedstrijd te verbinden. De score wordt dan gegeven door collega's van de afdeling zorg, de creatieve vakken en de wiskundesectie.

Een voorbeeld van het werkboekje in Word-format is te downloaden vanaf de site van de NVvW. Voelt u zich vrij om het aan uw eigen situatie en wensen aan te passen!



vakbladeuclides.nl/924jongeling

Over de auteur

Ruud Jongeling is wiskundeleraar op het Da Vinci College in Roosendaal, een school voor de beroepsgerichte leerwegen in het vmbo en het praktijkonderwijs. Sinds februari van vorig jaar is hij voorzitter van de werkgroep vmbo van de NVvW. E-mailadres: rj.jongeling@kpnmail.nl

MEDEDELING

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE



Op het moment van verschijnen van deze *Euclides* bijten in heel Nederland leerlingen zich vast in de opgaven van de Wiskunde Olympiade. Ruim 300 scholen laten hun leerlingen meedoen aan deze wedstrijd met verrassende en uitdagende wiskundeopgaven, waar nauwelijks voorkennis voor vereist is. De opgaven en uitwerkingen van de eerste ronde verschijnen begin februari op de website www.wiskundeolympiade.nl. Uiterlijk 13 februari wordt bekend welke 1000 leerlingen verder mogen naar de tweede ronde. Daarnaast maken we rond die tijd ook de vier winnende scholen bekend: de beste school *overall*, de school met de beste onderbouwleerlingen, de school met de beste vrouwelijke deelnemers en de beste nieuwe school (die sinds hooguit drie jaar meedoet). Wie weet valt uw school dit jaar in de prijzen?

VERSCHENEN



Titel: Sociale netwerken

Auteur: Bart Husslage

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam

Paperback

ISBN: 978-90-5041-159-2

Prijs: € 10,00

68 pagina's

Van de achterkant:

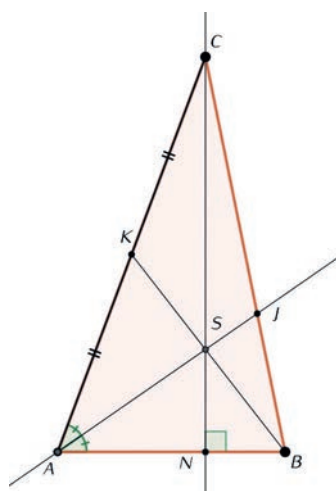
Wat hebben een klas leerlingen, webpagina's en een terroristische organisatie met elkaar te maken? Ze vormen allemaal een sociaal netwerk. In dit Zebra-boekje leer je hoe je wiskunde kunt gebruiken om te bepalen wie de populairste leerling in een klas is. Maar ook hoe Google wiskunde inzet om te bepalen welke webpagina bovenaan de zoekresultaten komt te staan. En zelfs hoe veiligheidsdiensten weten welke personen ze in de gaten moeten houden om aanslagen te voorkomen. In de tekst van dit boekje vind je veel opgaven waar je direct mee aan de slag kunt. In het laatste hoofdstuk vind je enkele grotere opdrachten die je kunt gebruiken voor een profielwerkstuk.

KLETTEREN MET ANALYTISCHE MEETKUNDE ...

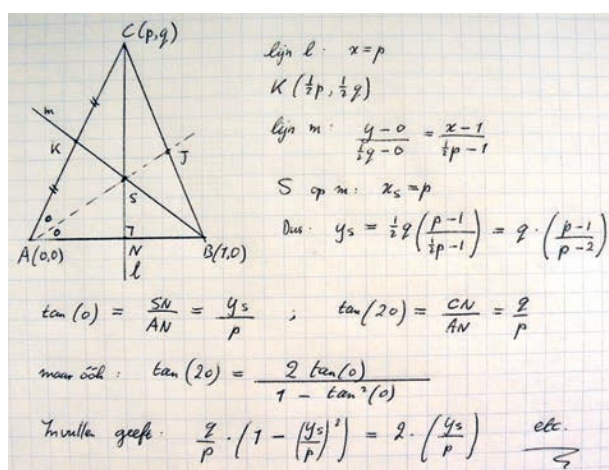
Fred Muijers

De stelling dat drie hoogtelijnen (of zwaartelijnen of bissectrices) door één punt gaan in een driehoek is bekend en zowel met een synthetische als een analytische aanpak te bewijzen. Zulke stellingen zijn bijzonder en in dit artikel gaat Fred Muijers op zoek naar driehoeken ABC waarbij de bissectrice (uit A), de zwaartelijn (uit B) en de hoogtelijn (uit C) door één punt gaan, zie figuur 1. Dat die bestaan is zeker: gelijkzijdige driehoeken zijn er voorbeelden van. Hoe vinden we meer van zulke driehoeken?

figuur 1



Met analytische meetkunde zou de aanpak kunnen zijn: Gebruik een assenstelsel met $A(0,0)$ en $B(1,0)$ en $C(p,q)$ en vind met behulp van vergelijkingen een relatie tussen p en q . Een interessant stukje rekenen zal volgen, zie figuur 2.



figuur 2

Tijdens het wintersymposium 2016 liet Jeroen Spandaw in zijn lezing 'Analytische meetkunde en andere soorten meetkunde' zien dat een bewijs binnen de ene meetkunde-aanpak soms goed samen kan gaan met een andere aanpak.^[1]

Verschillende aanpakken kunnen elkaar ondersteunen. In dit voorbeeld gaat het dan om stellingen uit de synthetische meetkunde die overigens ook binnen de analytische meetkunde te bewijzen zijn. Volgens de bissectricestelling ligt het punt J niet zomaar ergens op zijde BC maar er geldt: $|BJ| : |JC| = |AB| : |AC|$. Voor lijnen door één punt vanuit drie hoekpunten kennen we de stelling van Ceva (1647-1734).^[2] Deze twee stellingen kunnen ons goed helpen bij het rekenwerk.

Met Ceva krijgen we:

$$(|AN| : |NB|) \cdot (|BJ| : |JC|) \cdot (|CK| : |KA|) = 1$$

Er geldt: $|AN| = p$; $|NB| = 1 - p$; $|AB| = 1$; $|AC| = \sqrt{p^2 + q^2}$.

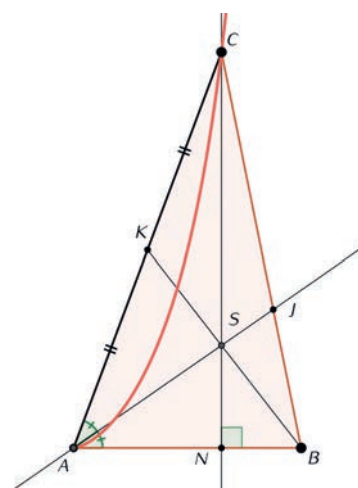
Invullen krijgen we:

$$(p : (1 - p)) \cdot (1 : \sqrt{p^2 + q^2}) \cdot (1 : 1) = 1 \quad [a]$$

Uitwerking hiervan geeft: $q^2 \cdot (1 - p)^2 = p^3 \cdot (2 - p)$ [b]

GeoGebra kan goed overweg met een impliciete vergelijking in p en q en dat is te zien in figuur 3.

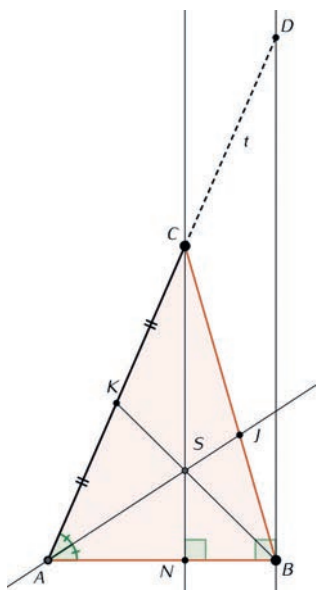
figuur 3



Bij elk punt C op de rode kromme krijgen we een driehoek ABC waarbij bissectrice, hoogtelijn en zwaartelijn door één punt gaan. Deze driehoeken heten 'Kletterdriehoeken' (Kletter, Th.J., 1957). In het *Nieuw Archief voor Wiskunde* stond daarover een boeiend artikel.^[3] Daarin werd getoond dat de kromme niet zomaar een kromme is, maar een oude bekende. Een korte analyse laat zien hoe we zo'n punt op de kromme kunnen construeren.

eren. Daarna is hopelijk te zien over welke kromme we het hebben. Teken in de figuur de lijn loodrecht op AB door punt B ($x = 1$) en trek zijde AC door. We krijgen snijpunt D . Noem $|CD| = t$, zie figuur 4.

figuur 4



De lijnen door NC en BD lopen evenwijdig, dus er geldt:

$$|AN| : |NB| = |AC| : |CD|$$

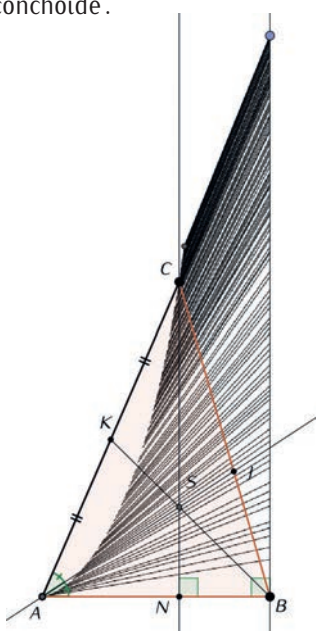
$$\text{ofwel } p : (1 - p) = \sqrt{p^2 + q^2} : t$$

$$\text{Uit [a] zou volgen } p : (1 - p) = \sqrt{p^2 + q^2} : 1.$$

Blijkbaar geldt: $t = 1$ ($= |AB|$).

Maar dan kunnen we inderdaad zo'n punt C construeren. Kies op de loodlijn door B een punt D . Trek AD en pas lengte 1 af vanuit D . We vinden een punt C . In feite slepen we een punt D over de lijn terwijl dan op het lijnstuk AD lengte $|AB|$ ($= 1$) wordt afgemeten, zie figuur 5.^[4] In A zit een keerpunt: gespiegeld in de x -as krijgen we precies dezelfde situatie. De kromme heeft de naam 'keerpuntsconchoïde'.

figuur 5



Er valt veel uit te zoeken. Zoals dit verhaal begon lijkt het alsof enkel scherphoekige driehoeken mogelijk zijn. Maar gebruiken we ook de buitenbissectrice van hoek A dan

blijken tevens stomphoekige driehoeken mogelijk. En de punten C liggen dan ook op de kromme mits... die in zijn 'geheel' getekend wordt: rechts van lijn $x = 1$ ligt nog een tak van de kromme!

Boeiend is ook om meer te variëren. Nu is BK een zwaartelijn en punt K ontstaat door punt C vanuit A te vermenigvuldigen met 0,5. Maar we kunnen C vanuit A ook met een andere factor vermenigvuldigen: dat geeft een punt K_1 . Op welke kromme ligt punt C opdat de hoogtelijn uit C , de bissectrice (binnen of buiten) van hoek BAC en lijn BK_1 door één punt gaan?

We stappen in de wereld van de *conchoïden* van Nicomedes (3^e eeuw v. Chr.).

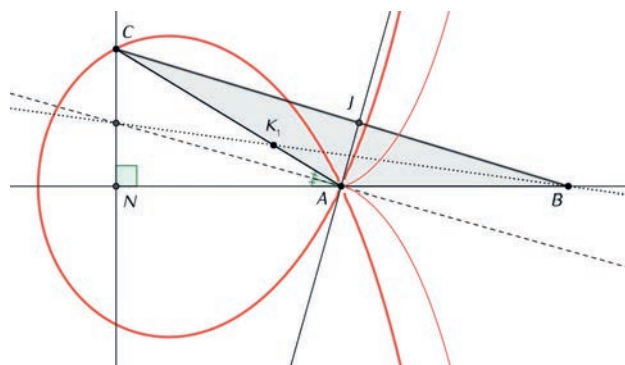
Overigens: de vergelijking [b] oogt een beetje moeilijk.

Door A als pool en de positieve x -as als pool-as te kiezen, krijgen we na herschrijving de poolvergelijking van de kromme (met $|AC| = r$ en hoek $BAC = \alpha$):

$$r = \frac{1}{\cos(\alpha)} - 1.$$

De conchoïden laten zich ook zo beschrijven.

Met factor 0,3 krijgen we het mooie plaatje van figuur 6. Ik word er stil van....



figuur 6

Noten

- [1] Zie <https://www.wiskgenoot.nl/congressen/wintersymposium>
- [2] O.a. in Bottema, O. (1997). *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- [3] Chahal, J., & Top, J. (2015). F. van der Blij en de Kletter-driehoeken. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/16(2).
- [4] Dit is een voorbeeld van een neusis-constructie. Meer daarover o.a. in Bos, H. (2001). *Redefining geometrical exactness*. New York: Springer-Verlag.

Over de auteur

Fred Muijers is docent aan de lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Tevens is hij coördinator van de eerstegraadsopleiding tot leraar wiskunde van de HAN masterprogramma's.
E-mailadres: fred.muijers@han.nl

GEPERSONALISEERD LEREN

Suzanne Visser

'DIT IS NIET VOOR MINDER ACTIEVE DOCENTEN'

Een wiskundeboek hebben de meeste onderbouwleerlingen van het Hermann Wesselink College in Amstelveen nog nooit in handen gehad. Dankzij een digitaal programma dat door hun docenten zelf is ontwikkeld, werken zij in eigen tempo door de stof en krijgen waar nodig ondersteuning of verdieping. De tijdwinst die dit oplevert, wordt besteed aan afwisselende opdrachten die de motivatie voor het vak versterken. Het resultaat: stevig verankerde vaardigheden, waar leerlingen in de bovenbouw profijt van hebben. Suzanne Visser ging er op bezoek en interviewde docenten en leerlingen.



figuur 1 Klas 1D aan het werk

In een groot lokaal op de derde verdieping van het Hermann Wesselink College in Amstelveen zitten Mischa, Dagmar en Lotte uit 1D achter hun laptops. Terwijl klasgenoten om hen heen bezig zijn met het maken van meetkundeposters, zijn zij ingelogd op de digitale wiskundeomgeving van het Freudenthalinstituut (DWO) waar de digitale opdrachten van hun wiskundemethode staan. De theorie en enkele kernopgaven hebben ze kunnen raadplegen op een speciale website. Een A4-tje met alle modules van dit jaar – de *routekaart* – ligt naast hen op tafel. Zo kunnen ze zelfstandig door de stof. 'Als je een snelle leerling bent, is het fijn dat je niet op anderen hoeft te wachten', vindt Lotte. 'En vind je een onderwerp juist moeilijk of maak je veel fouten, dan kan de docent voor jou extra opgaven of een persoonlijke module toevoegen', zeggen Mischa en Dagmar. Dat de computer bij elke som meteen feedback geeft, vinden ze prettig: 'Anders kom je er bijvoorbeeld pas bij het behandelen van huiswerk in de volgende les achter dat je iets bij alle sommen fout hebt gedaan.'

Activerend

Het verhaal van *Wiskunde zonder boek*, de methode die dit gepersonaliseerde leren mogelijk maakt, begon

bijna tien jaar geleden. Docent Wim Grosheide stond in een havo 4-klas wiskunde B en verbaasde zich over de gebrekkige wiskundige vaardigheden die hij bij leerlingen zag. 'De leerlingen waren van goede wil; hoe kon dit het rendement zijn van drie jaar lang hard werken in de onderbouw – zowel van de kant van de leerlingen als van de docenten?!'

Als leerlingen hun vaardigheden zo snel weer kwijt waren, zat er iets fundamenteel verkeerd, vond Grosheide, die besloot dat hij op deze voet niet nog eens tien jaar verder wilde. Het aanleren van vaardigheden in de onderbouw moest beter kunnen: activerender, motiverender, afwisselender. Als de ideale methode nergens te vinden bleek, zou hij hem zelf ontwerpen.

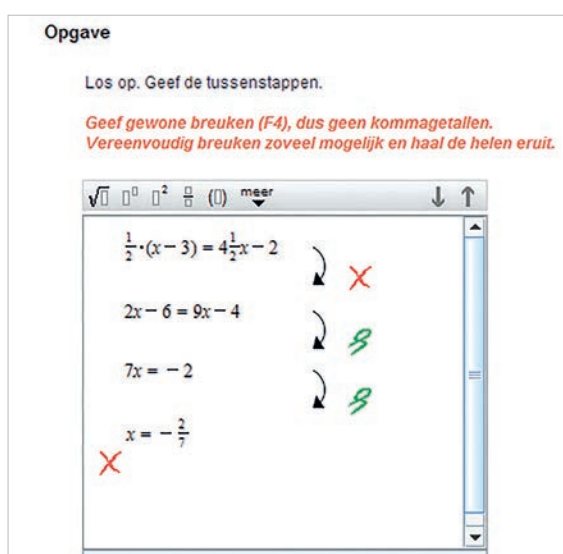
Veel hard werk en bijna tien jaar later is *Wiskunde zonder boek* op het Hermann Wesselink College niet meer weg te denken. Alle docenten die lesgeven in de eerste twee leerjaren havo en vwo gebruiken de digitale methode, die onder meer de Wiskundescholensprijs heeft gewonnen.

Eigen tempo

In grote lijnen werkt het als volgt. De stof van leerjaar 1 en 2 havo en vwo is opgedeeld in modules voor rekenen, meetkunde, formules & vergelijkingen en letterrekenen. Elke module bestaat uit theorie met schriftelijke kernopgaven en digitale opdrachten. Alle leerlingen gaan daar in hun eigen tempo doorheen, waarbij de docent het minimale tempo bewaakt dat nodig is om het programma aan het eind van het jaar af te hebben. Zowel tijdens als buiten de lessen houdt de docent via het leerlingvolgssysteem van de DWO een oog op de vorderingen en toetsresultaten van iedere individuele leerling. Leerlingen die achterblijven, krijgen extra aandacht, uitleg of opgaven. Leerlingen die voorlopen, kunnen vooruitwerken of anderzortige opgaven of projecten doen, wat soms bonuspunten kan opleveren.

Motivatie

Het grootste voordeel van gepersonaliseerd werken via de computer is dat leerlingen gemakkelijker aan het werk gaan en blijven, zeggen de docenten. Volgens Grosheide komt dat enerzijds door de voortdurende feedback: 'Na elke opgave krijg je een groen bolletje of een rood kruisje en een leerling wil toch al die bolletjes meteen groen hebben.' Soms voelen leerlingen het als een uitdaging om zo ver mogelijk te komen, zegt collegadocent Mark Dackus: 'Ik heb een havo-3-klas vorig jaar nog eens laten oefenen met kwadratische vergelijkingen uit *Wiskunde zonder boek*. Dat zijn tien levels van vijftien sommen – sommigen kwamen wel tot level 8! Probeer dat maar eens met een boek.' Leerlingen leren bovendien systematischer werken, omdat de computer onvolledige berekeningen fout rekent, ook al is het antwoord goed.



figuur 2 Feedback van de DWO

Een ander belangrijk voordeel is de tijdwinst. Niet alle leerlingen zijn even snel, maar toch komen ze verder dan ze in dezelfde tijd in klassikale lessen zouden zijn gekomen. De docenten gebruiken de tijd die over is voor afwisseling. Grosheide: 'Ieder van ons doet daar andere dingen mee. Ik geef soms een quizje, een proeftoets, wat *Geogebra*.'

Vaste prik zijn de projecten 'met potlood en papier' waarmee het computerwerk wordt doorbroken. Zo zijn veel leerlingen van klas 1D vanmiddag met de geodriehoek in de weer om vlakke figuren op de rand van een meetkundeposter te tekenen. In het midden moet een fantasiebeest komen dat eveneens uit zoveel mogelijk vlakke figuren bestaat. 'Zo'n creatieve verwerkingsopdracht is een leuke afwisseling op het werken achter de computer en biedt leerlingen met andersoortige

'WE HOREN TEGENWOORDIG DE COLLEGA'S
VAN DE VIERDE KLAS NIET MEER KLAGEN
OVER DE WISKUNDIGE VAARDIGHEDEN VAN
LEERLINGEN.'



figuur 3 Tess en Eva poseren met hun poster over vlakke meetkunde

talenten de mogelijkheid ook eens bij wiskunde uit te blinken. Dat motiveert', zegt Grosheide.

Passie

Het gepersonaliseerde werken vraagt wel veel van docenten. Sowieso moeten ze bereid zijn te werken met een digitale methode. Op het Hermann Wesselink College is dat geen probleem: sollicitanten komen juist af op het werken met *Wiskunde zonder boek*. Dat gold bijvoorbeeld voor Mark Dackus, die inmiddels alweer zeven jaar nauw met Grosheide samenwerkt en die het vwo-materiaal naar havo vertaalde. 'De principes zijn voor het havo net zo bruikbaar, alleen heb je iets meer gestructureerde opdrachten nodig en wat minder inzichtvragen'. Bereidheid alleen is echter niet genoeg, weet Grosheide: 'Je moet als docent een beetje passie hebben voor je vak. Voor minder actieve docenten is werken met een boek veel makkelijker. Hier moet je soms even door een module heen om wat aan te passen, je moet zelf een som bekijken om te zien waar een leerling vastloopt. En tijdens een les komt de een naar je toe met een vraag over de voorrangregels, de ander over letterrekenen, een derde met zijn projectboekje over formules. Al met al ben je in de les best hard aan het werk.'

Effectief

In de praktijk begint een les meestal met klassikale uitleg. Soms gaat die over de stof waar leerlingen gemiddeld

genomen mee bezig zijn, maar als een grote groep de betreffende module al heeft afgerond, kan het ook een stuk nieuwe stof zijn. De wat langzamere leerlingen krijgen die stof dan later een tweede keer uitgelegd. Leerlingen

mogen zelf bepalen of ze de uitleg volgen, tenzij de docent gezien hun resultaten zegt dat het moet.

Vervolgens gaan alle leerlingen verder op het punt waar zij gebleven waren en geeft de docent extra uitleg of begeleiding aan leerlingen of groepjes leerlingen die dat

op dat moment nodig hebben. Dat is heel effectief, zegt Dackus: 'Je kunt veel meer afzonderlijke leerlingen helpen dan tijdens een klassikale les. En omdat leerlingen je hulp op dat moment nodig hebben, zijn ze heel belangstellend. Wel moet je goed kunnen schakelen. Wat als de ict het even niet doet? Maar ook dat leer je door het werken met *Wiskunde zonder boek*. Zet ons zonder materiaal voor een klas en we houden de leerlingen zo een lesuur bezig.'

Opbrengsten

Leidt deze gepersonaliseerde manier van werken ook tot hogere leeropbrengsten? Onderzoek van Kennisnet heeft in elk geval positieve effecten op de motivatie en de vaardigheden van leerlingen aangetoond.^[1] Er zijn ook andere aanwijzingen. Eigen onderzoek van de school naar de motivatie van leerlingen laat zien dat leerlingen die *Wiskunde zonder boek* doen, het vak in de loop van het eerste leerjaar leuker gaan vinden, terwijl elders (waar met boeken wordt gewerkt) de motivatie daalt. Ook scoren leerlingen die in de onderbouw *Wiskunde zonder boek* hebben gedaan, in hogere leerjaren stukken beter op vaardigheden dan zij-instromers die van andere scholen komen. Grosheide: 'Het enige wat ik er verder nog over kan zeggen, is dat we tegenwoordig in de vierde klas niemand van de collega's meer horen klagen over de wiskundige vaardigheden van leerlingen.'

Meer weten over gepersonaliseerd leren met *Wiskunde zonder boek*? Neem contact op met Wim Grosheide: grosheide@gmail.com. De methode is voor geïnteresseerde scholen tegen betaling beschikbaar. Zie ook het artikel over digitaal toetsen op blz 12 in deze *Euclides*.

Leerling 2020

Wiskunde zonder boek is een succesvol voorbeeld van gepersonaliseerd leren. Met het project Leerling 2020, onderdeel van het doorbraakproject Onderwijs & ict, ondersteunt de VO-raad scholen bij de verdere ontwikkeling van gepersonaliseerd leren. In zogeheten *leerlabs* werken scholen samen aan thema's als digitale didactiek, de docent als didactische coach, inrichting van individuele leerroutes en het arrangeren van digitale content. Daarnaast organiseert Leerling 2020 kennisuitwisseling en ontmoeting om de beweging in de sector verder te brengen. Kijk voor meer praktijkvoorbeelden op www.leerling2020.nl/resultaten.

Over de auteur

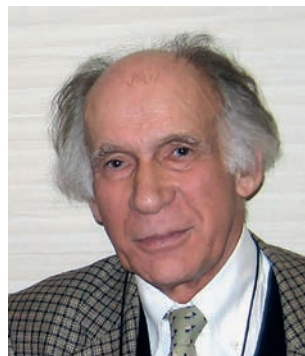
Suzanne Visser werkt als journalist en communicatieadviseur in het voortgezet onderwijs.
info@suzanne-visser.com

Noten

[1] Zie <https://www.kennisnet.nl/leren-ict/>

IN MEMORIAM:

ED DE MOOR



Op dinsdag 6 december is onze oud-collega dr Ed de Moor overleden. Ed was een eminent en zeer bevoegen reken-wiskundendidacticus. Hij studeerde wis-, natuur- en sterrenkunde aan de Gemeentelijke Universiteit van Amsterdam. Van 1956 tot 1971 werkte hij als leraar wiskunde en schoolleider op het Barlaeusgymnasium en het Vondelgymnasium te Amsterdam. Sinds 1990 was hij onderzoeker bij het Freudenthal Instituut waar hij in 1999 promoveerde op het proefschrift *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Ed was actief op vele terreinen. In 1995 richtte hij de Historische Kring voor het Reken en Wiskundeonderwijs (HKRWO) op en hij stond aan de basis van de Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van het Reken-wiskundeonderwijs (NVORWO). Behalve op academisch niveau bleef Ed ook zeer actief in het onderwijsveld. Hij publiceerde samen met Marjolein Kool de boeken *Rekenen is leuker dan/ als je denkt* (2009) en *Alledaags rekenen* (2016) en met Martin Kindt het boek *Wiskunde, dat kun je begrijpen!* (2012). Ed was een flamboyante persoonlijkheid en een vaste bezoeker van de studiedagen en jaarvergaderingen van onze vereniging. We zullen hem missen.

Michiel Doorman, namens het bestuur van de NVvW

Op het Hermann Wesselink College worden sinds vorig jaar de toetsen in de eerste klassen havo en vwo digitaal afgenomen. De leerlingen kunnen een toets vier keer doen op drie verschillende niveaus. Het blijkt dat digitaal toetsen veel voordelen heeft. Wim Grosheide en Mark Dackus zetten die voordelen op een rijtje.

Opzet

We nemen de toetsen af in de Digitale Wiskunde omgeving (DWO) van het Freudenthal instituut. Een toets bestaat uit tien opgaven, zie figuur 1, waarbij de getallen *random* worden gekozen. Bij inzichtsommen worden (vaak) *random* opgaven gekozen. Een toets wordt vier keer afgenomen. Er zijn drie niveaus: *simpel*, *medium* en *prof*. De leerlingen beginnen met het laagste niveau. Als een leerling een score haalt van minimaal 80% goed, dan mag hij door naar het volgende niveau. Een goede leerling die *simpel* en *medium* in één keer haalt krijgt dus twee kansen op niveau *prof*.

figuur 1 Voorbeeld van een toetsopgave

Op niveau *simpel* kan een leerling maximaal een 6 halen, op *medium* maximaal een 8 en op *prof* kan hij een 10 halen. Zie tabel 1.

Cijfers bij verschillende niveaus			
score	80%	90%	100%
simpel	4	5	6
medium	6	7	8
prof	8	9	10

tabel 1

Als je een toets wilt afnemen zet je de toets klaar voor de klas. Na afloop verzegel je de toets en laat je de leerlingen het nagekeken werk zien. De resultaten zijn eenvoudig te kopiëren naar Excel.

Toetsen nemen wij onverwachts af. Dat heeft als voordeel dat we niet vastzitten aan het toetsrooster of de regel 'geen twee toetsen op een dag'. Daarnaast krijgen overijverige ouders geen kans om de stof de avond voor de toets nog even in hun kind te 'stampen'.

Praktische voordelen

Het digitaal toetsen blijkt veel praktische voordelen te hebben.

- Als de toetsen eenmaal gemaakt zijn, is het daarna wel erg lekker nakijken.
- Met een druk op de knop exporteer je de resultaten naar een Excel-sheet, waar je de scores omzet naar een cijfer, zie figuur 2.
- Exporteren naar Magister kan niet, maar je hebt wel de cijfers kant-en-klaar in alfabetische volgorde van de leerlingen, dus invoeren gaat snel.
- Een toets duurt circa 35 minuten. Dat is een rustmoment voor de docent.
- Wij hebben twee lessen van 80 minuten per week. Daar past een toets prachtig in. Doorgaans beginnen we met een kwartier nieuwe stof, daarna de toets en dan het huiswerk. Dat is een mooi ritme in de les.
- Geen gerommel meer met papier.
- Toetsresultaten blijven tot het eind van het jaar beschikbaar.
- Het is heel handig voor rapportbesprekingen of ouderspreekavonden om alle informatie gedetailleerd bij de hand te hebben.

Klas 1k	simpel	medium	prof
Anna			80
Anton			30
Brenda		70	
Charaf			70
Dagmar			100
Dirk			100
Eva			80
Freek	70		
Hidde			70
Leah			43
Jacques			90
Misha			90
Nico			90
Tijm			100
Zara		40	

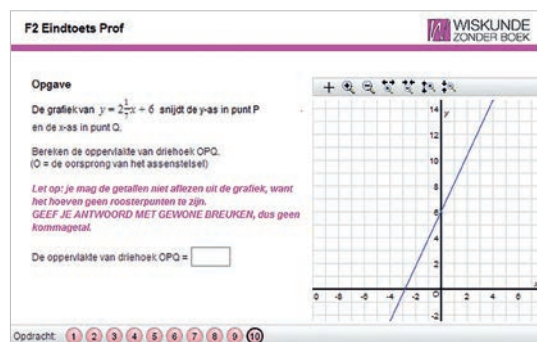
figuur 2 Overzicht van de resultaten van de leerlingen

Didactische voordelen

- Tijdens een toets zijn leerlingen geconcentreerd bezig met de stof. Vier keer toetsen betekent vier keer actieve leerlingen die zelfstandig hard bezig zijn.
- De leerlingen krijgen nog dezelfde les hun cijfer en hun fouten te zien.
- Leerlingen gaan samen bespreken wat ze fout doen.
- Het heeft zin om naar je fouten te kijken, want je gaat de toets nog een aantal keer doen.
- *Profs* gaan na een toets uitzoeken hoe de laatste inzichtsommen moeten. Wij leggen die opgaven niet uit.
- Nog tijdens de toets kan een leerling die al klaar is, langskomen om zijn cijfer te zien en kun je samen kijken wat er fout ging.
- Een leerling die snel klaar is, omdat hij de stof niet snapt kan door de docent nog tijdens de toets geholpen worden door samen even door de toets te lopen.
- Ook later kun je altijd nog een toets met een leerling bespreken, want het werk blijft bewaard in de DWO.
- We zijn soms drie weken bezig om een onderwerp te toetsen. Al die tijd blijft een leerling met het onderwerp aan de gang, ook al is er een nieuw onderwerp gestart.
- Door antwoorden goed of fout te rekenen worden leerlingen gedwongen om heel nauwkeurig te werken. Daar staat tegenover dat ze een toets vier keer mogen doen.
- Het is makkelijk om een groepje leerlingen te selecteren dat nog extra hulp nodig heeft. Leerlingen die drie maal een toets niet hebben gehaald, beheersen de stof duidelijk nog niet. Dus die kun je nog even extra helpen.

Nadelen

- Een toets maken vergt eenmalig een behoorlijke tijdsinvestering.
- Je bent afhankelijk van de techniek. Als je geen computers hebt of geen internetverbinding, dan kun je geen toets afnemen. Het voordeel van onverwacht toetsen is in dat geval, dat je de toets de volgende les kunt geven.
- Je kunt de tussenstappen niet beoordelen. Met vier toetsen per onderwerp moet je wel digitaal nakijken en moet je je beperken tot het goed of fout rekenen van een antwoord. Daar staat tegenover dat leerlingen wel heel nauwkeurig moeten werken, omdat een klein foutje al fataal is.
- Leerlingen zijn eerder geneigd om tussenstappen over te slaan. Door te zorgen dat antwoorden geen mooie getallen zijn voorkom je echter dat leerlingen makkelijk naar een antwoord toe kunnen werken. Dat blijkt het gebruik van kladpapier te bevorderen, zodat leerlingen toch gestimuleerd worden om tussenstappen te maken. Zie figuur 3.



figuur 3 Nog een voorbeeldopgave

Tot slot

Leerlingen vinden dit een prettig systeem. Het lijkt erop dat de goede leerlingen wat hoger scoren dan anders. Van de zwakkere leerlingen gaat een aantal aan de slag om een beter resultaat te halen, maar er zijn ook leerlingen die na vier keer toetsen het beginnersniveau nog niet hebben gehaald. Dat zijn leerlingen die echt aandacht nodig hebben. Ze weten blijkbaar niet wat ze moeten doen om beter te worden. Het probleem is dan vaak dat ze onvoldoende studievaardigheden hebben. Het feit dat je kunt zeggen dat ze vier keer een toets niet hebben gehaald, helpt om duidelijk te maken dat er echt een probleem is.

Voor ons was het meest verrassend dat je nu zeer gemakkelijk tijdens een les even een toets kunt nabespreken met een leerling.

Over de auteurs

Wim Grosheide en Mark Dackus zijn wiskundeleraar op het Hermann Wesselink College in Amstelveen. Zij geven in klas 1 en 2 van havo en vwo Wiskunde zonder boek. E-mailadres: grosheide@gmail.com

ENKELE OPTIMALISERINGSPROBLEMEN NADER BEKEKEN

Gerard Koolstra

Optimaliseringsproblemen worden vaak gebruikt als toepassing van differentiëren. Het is de moeite waard om op enkele veel gebruikte vraagstukken rond inhoud/oppeervlakte wat dieper in te gaan. Soms is een aanpak met een soort 'eerlijk' delen ook goed mogelijk. Gerard Koolstra zoekt dit uit.

Een bekend optimaliseringsprobleem dat bij wiskunde aan de orde komt is het bepalen van de afmetingen van een cilinder die bij gegeven inhoud een minimale oppervlakte heeft. Een veel gebruikte aanpak is de volgende:

Stap 1

met behulp van de formules $V = \pi r^2 h$ en $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ voor respectievelijk het volume en de oppervlakte van de cilinder, wordt A geschreven als functie van r door h te

isoleren en vervolgens te substitueren: $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$

Dit kan opgevat worden als een functie van $\mathbb{R}^+$ naar $\mathbb{R}^+$ waarbij r het maatgetal van de straal van de cilinder voorstelt (bijvoorbeeld het aantal cm), en A het maatgetal van de bijbehorende oppervlakte-eenheid (bijvoorbeeld cm^2).

Soms wordt deze stap overgeslagen en wordt het functievoorschrift kant-en-klaar aangeboden, met voor V een bepaalde ('ronde') waarde (bijvoorbeeld 1000).

Stap 2

De afgeleide van A naar r wordt bepaald:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Stap 3

Berekend wordt voor welke waarde van r geldt: $A'(r) = 0$.

Soms wordt dit vergezeld met een kort onderzoek of het hier echt om een minimum gaat. Daarbij kan de tweede afgeleide een rol spelen.

$$4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 2V \Leftrightarrow 2\pi r^3 = V \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Bij keuze van een 'realistische' waarde voor V , bijvoorbeeld 1000 krijgt r geen 'mooie' waarde. Mede daarom wordt hier vaak gestopt, en daarmee een mogelijkheid om interessante ontdekkingen te doen, gemist.

Stap 4

De hoogte van de cilinder wordt berekend. De exacte

berekening vraagt, als je het niet slim aanpakt, wel een paar stappen, en wellicht enige nadere toelichting:

$$h = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi} \cdot \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{V \cdot V^{-\frac{2}{3}}}{\pi \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot \pi^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2 \cdot V^{\frac{1}{3}}}{(2\pi)^{\frac{1}{3}}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$$

Conclusie is dat een cilinder met een vast volume een minimale oppervlakte heeft, wanneer de diameter gelijk is aan de hoogte. De cilinder moet precies passen in een kubus (en dus om een bol).

Zoals vaker opgemerkt zou het oplossen van een dergelijk vraagstuk niet alleen eindpunt, maar vooral startpunt van wiskundige activiteiten moeten zijn. Een paar vragen:

- Hoe is het resultaat als er sprake is van een open cilinder, denk aan een pan?
- Kan de berekening eenvoudiger?
- Is het resultaat te exporteren/veralgemeniseren? (bijvoorbeeld voor regelmatige prisma's)

Cilinder zonder bovenkant

Vrij eenvoudig is na te gaan dat weglaten van de boven-

kant leidt tot $2\pi r = \frac{2V}{r^2}$ en zo tot $r^3 = \frac{V}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Berekening van h laat zien dat

$$h = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi} \cdot \left(\frac{V}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{V \cdot V^{-\frac{2}{3}}}{\pi \cdot \pi^{-\frac{2}{3}}} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = r$$

In dit geval moet de hoogte gelijk zijn aan de straal, en past de cilinder twee keer in een kubus. Achteraf is het verband tussen beide uitkomsten goed te begrijpen. Met twee open cilinders is één dichte cilinder te maken. Als de oppervlakte van de open cilinder(s) minimaal is bij gegeven inhoud, geldt dat ook voor de dichte cilinder met gegeven (dubbele) inhoud.

Een vergelijkbaar verband bestaat er tussen een rechthoek met een open kant en een gewone rechthoek. Een vierkant heeft bij gegeven omtrek de maximale oppervlakte (en omgekeerd bij gegeven oppervlakte de minimale omtrek). Als het gaat om een rechthoek met een

ontbrekende zijde zal een rechthoek met zijden die zich verhouden als 1 : 2 (een 'half vierkant') optimaal zijn.

Kan de berekening eenvoudiger?

De berekening kan aanzienlijk vereenvoudigd worden door ervoor te zorgen dat V een geschikte waarde krijgt, bijvoorbeeld: 250π . We krijgen dan:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{250\pi}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{500\pi}{r^2} \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 500\pi \Leftrightarrow r^3 = 125 \Leftrightarrow r = 5$$

Dit geeft $h = \frac{250\pi}{\pi \cdot 5^2} = 10$. Zonder concessies te doen aan de

algemeenheid kunnen we schrijven: $V = 2C\pi$. Dit geeft:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{2C\pi}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{4C\pi}{r}$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{4C\pi}{r^2} \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 4C\pi \Leftrightarrow r^3 = C \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{C}$$

Stap 4 is nu aanzienlijk te vereenvoudigen, door $r^3 = C$ als uitgangspunt te nemen en niet de expliciete uitdrukking voor r . Als we dit combineren met $V = 2C\pi$ krijgen we $V = 2r^3\pi$. Het vergelijken met de algemene formule $V = \pi r^2 h$ geeft meteen $h = 2r$. Eigenlijk is het schrijven van $V = 2C\pi$ niet eens nodig. Halverwege de berekening van stap 3 staat namelijk al: $2\pi r^3 = V$.

Algemener

Dat een 'open' balk met vierkant grondvlak (denk aan een afgeknot melkpak) met een vast volume een minimale oppervlakte heeft wanneer de hoogte precies de helft is van de zijde van het grondvlak is eenvoudig analytisch

aan te tonen: $A = z^2 + 4zh$ gecombineerd met $h = \frac{V}{z^2}$

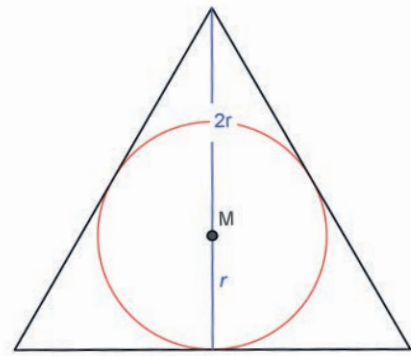
geeft $A(z) = z^2 + \frac{4V}{z}$. $A'(z) = 2z - \frac{4V}{z^2}$;

$$A'(z) = 0 \text{ geeft } z = \frac{2V}{z^2} \Leftrightarrow z^3 = 2V \Leftrightarrow V = \frac{1}{2}z^3$$

Gecombineerd met $h = \frac{V}{z^2}$ geeft dit $h = \frac{\frac{1}{2}z^3}{z^2} = \frac{1}{2}z$. Dit

lijkt in overeenstemming met de situatie bij de open cilinder. Ook daar is de optimale hoogte gelijk aan de helft van de diameter, en die diameter is niets anders dan de zijde van het omgeschreven vierkant van de grondcirkel. Kunnen we hier iets mee als het gaat om prisma's waarvan het grondvlak bestaat uit een regelmatig veelvlak? De eerdergenoemde balk is daar een eenvoudig voorbeeld van, en de cilinder is te zien als een soort limietvorm. Dat lijkt mogelijkheden te bieden.

Echter niet elke regelmatige veelhoek kan op een voor de hand liggende manier ingeklemd worden in een vierkant. Denk maar aan een gelijkzijdige driehoek. Meer perspectief biedt het wellicht om te kijken naar de *ingeschreven cirkel* van de regelmatige veelhoek, en de straal daarvan



figuur 1

als variabele te nemen. De overeenkomst met de aanpak bij de cilinder geeft wellicht aanknopingspunten voor een algemene aanpak.

We richten ons eerst op een driezijdig prisma, met als basis een gelijkzijdige driehoek met de ingeschreven cirkel met straal r , zie figuur 1. Omdat het middelpunt M van de ingeschreven cirkel tevens het zwaartepunt is, en zwaartelijnen en hoogtelijnen bij een gelijkzijdige driehoek samenvallen geldt dat de hoogte gelijk is

aan $3r$. De halve zijde van de driehoek is $\frac{3r}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot r$

en we krijgen dus voor de oppervlakte van het grondvlak

$G(r) = 3\sqrt{3} \cdot r^2$. Dit levert: $V = 3\sqrt{3} \cdot r^2 \cdot h$ en voor het

'dichte' prisma $A = 6\sqrt{3} \cdot r^2 + 6\sqrt{3} \cdot r \cdot h$. Combinatie geeft:

$$A(r) = 6\sqrt{3} \cdot r^2 + 6\sqrt{3} \cdot r \cdot \frac{V}{3\sqrt{3} \cdot r^2} = 6\sqrt{3} \cdot r^2 + \frac{2V}{r}$$

Het vergelijken van dat laatste resultaat met

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \text{ geeft in ieder geval een hoopvolle}$$

overeenkomst met de cilinder. Mogelijk geldt steeds:

$$A(r) = c \cdot r^2 + \frac{2V}{r}$$

De eerste term is eenvoudig te verklaren. De oppervlakte van een regelmatige veelhoek is evenredig met het kwadraat van de straal van de bijbehorende ingeschreven cirkel. De eerste term vertegenwoordigt één (bij een 'open prisma') of tweemaal (in het 'dichte' geval) de oppervlakte van het grondvlak.

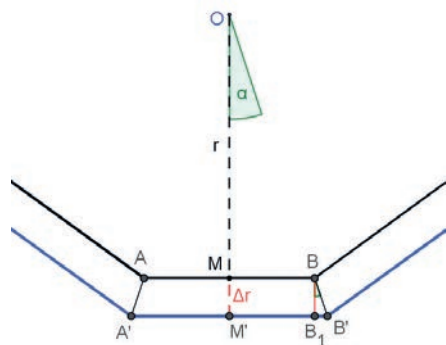
De tweede term is in feite $P(r) \times h$, waarbij P de omtrek is van de regelmatige veelhoek. Het gaat immers om de 'mantel' van het prisma.

Zoals wellicht bekend is de omtrek van een cirkel als functie van de straal r te zien als de afgeleide van de

oppervlakte als functie van de straal. Immers $\frac{d\pi r^2}{dr} = 2\pi r$

Voor een (regelmatige) veelhoek geldt iets dergelijks.

figuur 2



In figuur 2 is een deel te zien van een regelmatige n -hoek $ABC\dots$. Wanneer r toeneemt met Δr ontstaat veelhoek $A'B'C'\dots$. De extra oppervlakte bestaat uit n trapezia die congruent zijn aan $A'B_1BA$. We geven de lengte van AB aan met z en hoek B_1BB' met α . Nu geldt:

$$A'B' = AB + 2B_1B' = z + 2\Delta r \tan(\alpha).$$

Voor de oppervlakte van trapezium $A'B_1BA$ kunnen we dus schrijven:

$$(z + \Delta r \cdot \tan(\alpha))\Delta r.$$

We geven de oppervlakte van de regelmatige n -hoek (het grondvlak van het prisma) aan met G , en de omtrek met P . Nu geldt:

$$\Delta G(r) = (z + \Delta r \cdot \tan(\alpha))\Delta r. \text{ Hiermee is } G'(r) \text{ te bepalen:}$$

$$G'(r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{n(z + \Delta r \cdot \tan(\alpha)) \Delta r}{\Delta r} =$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} n(z + \Delta r \cdot \tan(\alpha)) = nz = P(r)$$

Wat slordig uitgedrukt: de afgeleide van de oppervlakte (van het grondvlak) is de omtrek. In het algemeen geldt voor een open prisma $A(r) = G(r) + P(r)h$. We kunnen nu dus schrijven: $A(r) = G(r) + G'(r)h$.

Gecombineerd met $V = Gh \Leftrightarrow h = \frac{V}{G}$ leidt dit tot

$$A(r) = G(r) + \frac{G'(r)}{G(r)}V$$

$$\text{Uit } G(r) = cr^2 \text{ volgt } G'(r) = 2cr$$

$$\text{En vervolgens } \frac{G'(r)}{G(r)} = \frac{2cr}{cr^2} = \frac{2}{r}$$

Invullen in de rechterkant van de vorige formule voor $A(r)$ geeft dan: $A(r) = c \cdot r^2 + \frac{2V}{r}$

$$\text{Differentiëren geeft } A'(r) = 2c \cdot r - \frac{2V}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \text{ leidt via } 2cr = \frac{2V}{r^2} \text{ tot } r^3 = \frac{V}{c}$$

Maar ook geldt $V = Gh = cr^2h$. Dit resultaat invullen in

$$r^3 = \frac{V}{c} \text{ geeft: } r^3 = \frac{cr^2h}{c} \Leftrightarrow r^3 = r^2h \Leftrightarrow r = h$$

Voor een dicht prisma geldt:

$$A(r) = 2G(r) + \frac{G'(r)}{G(r)}V \text{ en is het resultaat: } h = 2r$$

Een prisma waarvan het grondvlak een ingeschreven cirkel heeft krijgt dus bij gegeven volume een minimale oppervlakte wanneer de hoogte gelijk is aan de diameter van de ingeschreven cirkel. Wanneer het gaat om een 'open' prisma, dan moet de hoogte gelijk zijn aan de straal van de ingeschreven cirkel.

Zonder differentiëren

Er is een heel andere aanpak die gebruikmaakt van het feit (stelling) dat het product van een aantal positieve variabelen met constante som maximaal is als alle variabelen dezelfde waarde aannemen. Bij twee variabelen (zeg x en y) is dit evident: stel $x + y = 2m$. We kunnen dan schrijven $x = m - v$ en (dus) $y = m + v$. Nu geldt $xy = (m - v)(m + v) = m^2 - v^2$, en dit is duidelijk maximaal voor $x = y = m$.

Om te bewijzen dat xyz , gegeven dat $x + y + z = 3m$, maximaal is voor $x = y = z = m$ spreken we af dat $x \leq y \leq z$ en schrijven (alle variabelen zijn niet negatief): $x = m - a$ (De kleinste waarde is ten hoogste gelijk aan het gemiddelde)

$z = m + b$ (De grootste waarde is ten minste gelijk aan het gemiddelde)

$y = m + a - b$ (De middelste kan boven en onder het gemiddelde liggen)

Zoals eenvoudig valt na te gaan geldt:

$$(m - a)(m + b) \leq m(m + b - a).$$

Uitwerken geeft immers

$$m^2 + (b - a)m - ab \leq m^2 + (b - a)m \Leftrightarrow ab \geq 0,$$

en dit is altijd waar bij niet-negatieve variabelen. Ter toelichting een voorbeeld: het product van 7, 9 en 14 is 882 en de som is 30

Het drietal 10, 9, 11 heeft ook als som 30, maar een groter product: 990. Uiteraard is dit product te verhogen tot 1000 door drie keer 10 te kiezen. Dat eerlijk delen bij een drietal altijd het hoogste product oplevert is eenvoudig in te zien door in de vorige ongelijkheid beide kanten met $m + a - b$ te vermenigvuldigen:

$$(m - a)(m + b)(m + a - b) \leq m(m + b - a)(m + a - b)$$

Links staat xyz en de rechterkant is te schrijven als $m(m^2 - (b - a)^2)$ en uiteraard is dit hoogstens gelijk aan m^3 .

Omgekeerd geldt dat bij een constant product van positieve variabelen de som minimaal is wanneer alle variabelen gelijke waarden krijgen. Laten we eens kijken hoe deze eigenschappen te gebruiken zijn bij het bepalen van de optimale afmetingen van een open bakje met een gegeven inhoud V .

We hebben $V = lbh$ en $A = lb + 2lh + 2bh$.

Vermenigvuldigen van de drie termen in het rechterlid van A geeft: $4 \cdot l^2 \cdot b^2 \cdot h^2 = 4 \cdot V^2$. Omdat bij constante V ook $4V^2$ constant is wordt de oppervlakte minimaal wanneer de drie termen in het rechterlid A allemaal gelijk zijn, dus: $lb = 2lh = 2bh$. Hieruit volgt $l = b = 2h$. Het bakje moet dus een vierkante bodem krijgen, en een hoogte gelijk aan de helft van de zijde van de bodem. Zoals te

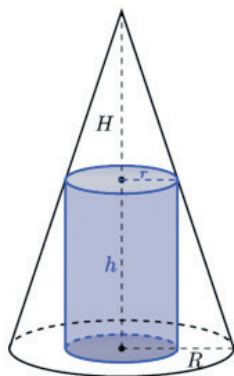
verwachten levert deze methode, toegepast op de dichte variant, op dat de doos kubusvormig moet zijn. Misschien aardig om ook het probleem aan het begin zo op te lossen: het bepalen van de afmetingen van een cilinder met gegeven inhoud en minimale oppervlakte. We starten weer met de formules $V = \pi r^2 h$ en $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Uit $V = \pi r^2 h$ volgt dat $r^2 h = C$ (een of andere constante) en uit de tweede formule dat we $r^2 + rh$ moeten minimaliseren. Vermenigvuldigen van r^2 en rh levert echter $r^3 h$ op en dat is *niet* constant. Nogmaals vermenigvuldigen met rh geeft $r^4 h^2 = (r^2 h)^2$ en dat is wel weer constant.

We hebben dus twee termen met rh nodig, bijvoorbeeld

$$r^2 + \frac{1}{2}rh + \frac{1}{2}rh$$

of desgewenst: $2r^2 + rh + rh$. Nu geeft vermenigvuldiging van de drie termen een constant product. De drieterm is minimaal wanneer geldt $2r^2 = rh$, waaruit direct volgt $h = 2r$. Maar dat wisten we al.

Misschien goed om deze alternatieve aanpak eens toe te passen op een ander klassiek probleem, de afmetingen van de maximale cilinder binnen een gegeven kegel. Zie figuur 3. H en R zijn de hoogte en straal van de kegel, h en r van de cilinder.



figuur 3

Het product $\pi r^2 h$ moet gemaximaliseerd worden. We zoeken naar een drieterm van de vorm $ar + ar + bh$ die constant is. Het quotiënt H/R noemen we c , dus $H = cR$. Omdat de kegel boven de cilinder gelijkvormig is met de gegeven kegel geldt ook: $H - h = cr$ zodat $cr + h = H$. De drieterm $cr + cr + 2h$ heeft dus een constante waarde $2H$. Het product van de drie termen is gelijk aan $2c^2 r^2 h$, en dat is op een constante factor na gelijk aan het product dat gemaximaliseerd moet worden. Het maximum treedt op als geldt $cr = 2h$. Combinatie met $H - h = cr$ geeft $2h = H - h \Leftrightarrow 3h = H \Leftrightarrow h = \frac{1}{3}H$. De hoogte van de cilinder moet dus exact een derde zijn van die van de kegel (en de straal twee derde van die van de kegel, zoals met behulp van gelijkvormigheid makkelijk te zien is). Een bekend optimaliseringsprobleem betreft een bakje dat gemaakt wordt door van een rechthoekig stuk karton bij de hoekpunten vier congruente vierkanten te verwijderen. De te maximaliseren inhoud kan geschreven worden als $x(a - 2x)(b - 2x)$ waarbij a en b de zijden van de recht-

hoek voorstellen en x de zijde van de vierkanten, tevens de hoogte van het bakje. Wanneer het gaat om een vierkant stuk karton is het probleem eenvoudig aan te pakken: De som $4x + (a - 2x) + (a - 2x)$ is constant en het product $4x(a - 2x)(a - 2x)$ moet maximaal worden. Dit is het geval als geldt $4x = a - 2x \Leftrightarrow 6x = a \Leftrightarrow 4x = a - 2x \Leftrightarrow 6x = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$. De hoogte van het bakje moet dus een zesde worden van de zijde van het vierkant. Wanneer het niet om een vierkant gaat, verliest deze aanpak veel van zijn charme, en leidt differentiëren sneller naar een resultaat.

Literatuur

- Kindt, M. (2015). *Wat te bewijzen was*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Kindt, M. (2015). *Een variabele constante*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Wells, D. (1995). *You are a mathematician*. Londen: Penguin Books.

Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich, na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: gerardk@xs4all.nl

WERELDWISKUNDEBOEKEN, NWD 2017



De boekenveilingen van het Wereldwiskunde Fonds trekken steeds meer bidders. In oktober 2016 boden 96 bidders samen 2167 keer op 660 boeken. Deze veiling leverde het recordbedrag van € 2641 op. Momenteel loopt de jaarlijkse winterverkoop op onze website. Boeken en tijdschriften zijn daar te koop voor een vaste, zeer lage prijs. Breng een bezoek aan de website en sla uw slag! We ontvangen alle boeken zonder kosten. Dus, als u een verzameling wiskundeboeken heeft en er vanaf wilt, dan horen we dat graag. Alle opbrengsten zijn bestemd voor wiskundeonderwijsprojecten in ontwikkelingslanden. Op de Nationale Wiskunde Dagen, 3 en 4 februari 2017, zijn we voor de eerste keer aanwezig met een boekenstand. Daar verkopen we oude schoolboekjes, gebruikte studieboeken uit binnen- en buitenland en wiskundetijdschriften (gebundelde *Euclides*, *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* en *Pythagoras*). We zien u daar graag!
Email: wereldwiskundeboeken@nvvw.nl
Website: www.nvvw.nl/1202/wereldwiskunde-boeken
Veilingssite: <https://www.wereldwiskundefonds.nl>

Ready for boarding



figuur 1 De vliegtuigromp arriveert. Foto: Sam Rentmeester

Het efficiënt opbergen van de handbagage is cruciaal bij het *boarden*. Als mensen niet snel een plekje in de bagagecompartimenten vinden, ontstaan er rijen in het gangpad en blijft het toestel te lang aan de grond. Prof. dr Peter Vink van de TU Delft

heeft een stuk vliegtuigromp gekregen om met studenten het instapproces te onderzoeken. Vink: 'Dat gehannes met handbagage in het vliegtuig moet maar eens afgelopen zijn. We hebben al ideeën voor het versnellen. Zo kunnen we het formaat en de geometrie van handbagage bepalen vóór het instappen en dan de passagiers instrueren waar ze hun spullen moeten plaatsen. Een ander idee is om passagiers met een plaats aan de raamkant als eerste te laten instappen. Dat is nog niet zo simpel, bijvoorbeeld omdat er groepen mensen zijn die voorrang moeten hebben, zoals *frequent flyers* of gehandicapten.' Een wiskundige heeft zich al een half jaar het hoofd gebroken over de optimale instapformule, maar er zijn nog geen concrete resultaten. Het onderzoek, dat onderdeel is van het door de TU Delft geleide EU-project Passme, waar ook KLM en Schiphol aan meedoen, loopt nog.

Bron: *Delft Integraal* oktober 2016

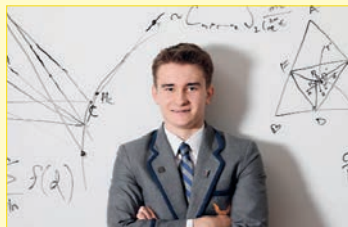
Wiskundeknobbel? Dan ook goed in bed!

Ben je goed in vermenigvuldigen? Dan lukt het vaak tussen de lakens ook prima, zo blijkt uit Brits onderzoek onder gepensioneerd. De ouderen met een beter wiskundig inzicht bleken vaker hun financiële zaken goed op orde te hebben. Bovendien bleken de pensionado's daarnaast ook vaker seksueel actief te zijn, zo vonden de onderzoekers.

'Er zijn twee mogelijkheden,' legde onderzoeker Urzi Brancati van het *UK National Retirement Income Summit* uit. 'De eerste is dat hogere cognitieve vaardigheden betekenen dat ze actiever zijn en beter van het leven kunnen genieten of misschien is het een soort aangeboren eigenschap. Het zou een karaktereigenschap kunnen zijn – nieuwsgierigheid, open staan voor ervaringen. Volgens mij is er meer onderzoek nodig om erachter te komen wat er hier precies aan de hand is.'

Bron: *MetroXL* juni 2016

17-jarige ontwikkelt baanbrekende wiskundetheorie



figuur 2 Ivan Zelich (17) bedacht met Xuming Liang (17) de Stelling van Liang Zelich

Met een IQ van 180 is Ivan Zelich geen doorsnee scholier. De Australiër was twee maanden oud toen hij zijn eerste woordjes zei. Nu is de jongen 17 en heeft hij een wiskundige stelling ontwikkeld die de wiskundewereld op zijn grondvesten doet schudden. Ivans ouders

merkten al snel dat hun zoon geen gewone jongen was. Hij begon te praten toen hij twee maanden oud was en op zijn derde leerde hij al over negatieve getallen. Toen hij 14 werd kreeg Ivan een aanbieding van de University of Queensland, maar op aanraden van zijn moeder ging hij daar niet op in. Hij ging naar school als een gewone jongen. 'Door op school te blijven, heb ik me kunnen ontwikkelen als een goed mens met empathie,' zegt Ivan tegen de *Daily Mail*.

De wiskundige 'Stelling van Liang Zelich' bedacht Ivan samen met een ander 17-jarig genie: Xuming Liang uit San Diego. Ivan en Xuming ontmoetten elkaar op internet en merkten snel dat ze op dezelfde wiskundige golflengte zaten.

'Hij is de enige persoon met wie het wiskundig klikt,' zegt Ivan. 'We waren allebei aan het hetzelfde wiskundige probleem aan het werken, maar hij focuste zich meer op geometrie en ik op de algebra en de snaartheorie. Het bundelen van onze krachten heeft tot fantastische successen geleid.' De stelling moet een bijdrage leveren aan de ontwikkeling van de ruimtevaart. Met het gebruik van de snaartheorie moet het mogelijk zijn het bestaan van wormgaten in de ruimte te voorspellen. Daarmee kan een wiskundige overeenkomst tussen bepaalde planeten gevonden worden. Ivans ultieme droom is om ooit de 'theorie van alles' te vinden, iets waar ook Stephen Hawking zijn leven aan heeft gewijd. Daarnaast zou hij ook het brein volledig willen doorgronden, zodat de mens in de toekomst alle vragen over het universum zal kunnen beantwoorden. Go Ivan!

Bron: *Metro* november 2015

Wiskunde straks voor iedereen een makkie



figuur 3 Wiskundedocent
Mary Johnson

Jong geleerd is oud gedaan, zegt men weleens. Daar is docent Mary Johnson het helemaal mee eens. De 81-jarige lerares zit inmiddels zo'n zestig jaar in het vak en heeft een methode ontwikkeld om kinderen wiskunde aan te leren. Ze doet

dat niet door kinderen de antwoorden voor te schotelen of de hele som uit te leggen. Ze gaat naar de kern van het probleem: Johnson legt de kinderen de basisprincipes van een wiskundig probleem uit. De lerares denkt dat het veel belangrijker is dat een kind weet waarom elke stap naar de oplossing van een wiskundesom gemaakt moet worden. Kinderen moeten, zo stelt ze tegenover de krant, 'de wetten van wiskunde' leren.

Logisch nadenken en leren dat je appels niet met peren kunt vergelijken, dat is wat Johnson de kinderen probeert te leren volgens *The Washington Post*. En het lukt haar. Inmiddels heeft ze de SILMA-methode ontwikkeld, Succes in Learning Math Approach. 'Ik geloof dat iedereen wiskunde kan leren.' Als een kind het concept niet begrijpt, zal het later namelijk nooit een gelijksoortig probleem met andere variabelen kunnen oplossen.

In januari 2016 heeft ze patent gekregen op de methode, die ze zo snel mogelijk beschikbaar wil maken voor alle kinderen. Het ontbreken van een wiskundeknobbel zou dus weleens verleden tijd kunnen worden.

Bron: *Metro* 2016

Wie heeft nog leerlingen met panty's?

Een onderzoeker aan de Nottingham Trent University heeft een formule ontwikkeld die je aan de hand van de temperatuur vertelt welke dikte panty je aan moet trekken. Daarbij heeft hij gekozen voor twee variabelen: de temperatuur t en de windsnelheid w . Als je die ingeeft in de formule, rolt daar het aantal denier D voor je panty uit:

$$D = 110 - \left(\frac{110}{1 + e^{\frac{\sqrt{w-t}}{2\pi}}} \right)$$

Het enige dat je die ochtend dus moet weten, is de temperatuur en de windsnelheid (te vinden op de site van het KNMI).

Bron: *Metro lifestyle*

Rutger Kuyper ontvangt Stieltjesprijs

De Stieltjesprijs 2015 voor het beste wiskundeboek in Nederland is toegekend aan Rutger Kuyper voor zijn boek *Computability, Probability and Logic*. Kuyper schreef zijn boek onder begeleiding van Sebastiaan Terwijn, met Mai Gehrke (Universiteit Paris Diderot) en Peter Stevenhagen (Universiteit Leiden) als promotores. Hij promoveerde *cum laude* op 10 juni 2015 aan de Radboud Universiteit Nijmegen.

Momenteel verblijft Kuyper voor een jaar in Wellington, Nieuw Zeeland, als intermezzo van een driejarige postdoc aan de universiteit van Wisconsin-Madison. De Stieltjesprijs bestaat uit een geldbedrag van € 2500, beschikbaar gesteld door de Stichting Compositio Mathematica. Voor 2015 kwamen 75 boeken in aanmerking. De prijs zal worden uitgereikt op het Nederlands Mathematisch Congres in Utrecht, te houden op 11-12 april 2017.

Bron: *Radboud Universiteit*

Wiskundige stamboom Brouwer

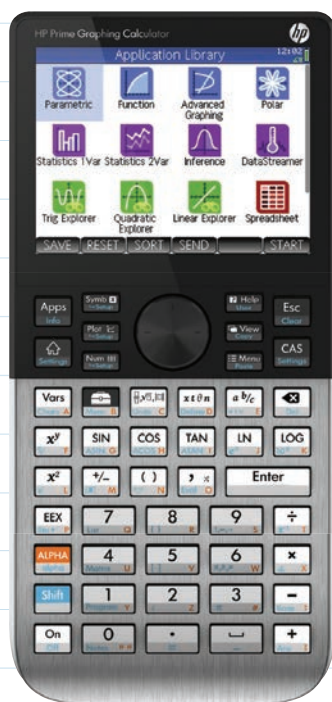
Altijd al nieuwsgierig geweest naar de academische 'voorouders' van een van de bekendste Nederlandse wiskundigen van de 20ste eeuw? Het Koninklijk Wiskundig Genootschap heeft in het kader van het Brouwerjaar 2016 de wiskundige stamboom van L.E.J. Brouwer op haar website geplaatst (<https://wiskgenoot.nl/congressen/brouwer50/BrouwerGenealogy>).

Bron: *wiskundepersdienst*

Banken omarmen blockchain-techniek

De *blockchain*-techniek werd bekend doordat hij een onderdeel is van *bitcoin*, de cybermunt waar veel ophef over was. Maar *blockchain* is veel breder toepasbaar. De ware *blockchainiacs* koesteren visioenen hoe deze techniek alle banken en centrale autoriteiten overbodig gaat maken. Onder meer ABN AMRO gaat er nu zelf mee aan de slag, samen met computerwetenschappers van het Blockchain Lab aan de TU Delft. Meer hierover is te vinden op <http://www.nemokennislink.nl/publicaties/de-keten-zonder-zwakste-schakel>

Bron: *wiskundepersdienst*



New Body & New Brain

HP Prime



Wilt u meer weten over de krachtigste rekenmachine voor uw leerlingen?

Online support voor Noordhoff en Malmberg beschikbaar!

En voor een vergelijkbare prijs!

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met meer rekenkracht en geheugen dan welke andere machine dan ook.
- Nieuwe consistente menustructuur met krachtige educatieve applicaties op een touchscreen: het is tenslotte 2016.
- Examenmode op de Prime betekent 1 knop indrukken. Binnen een paar tellen een examenlokaal in de juiste CvTE examenstand.
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief gratis emulator (dus ook voor uw leerlingen)!

Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop, demo-units of een school-offerte neemt u contact op met **info@hp-prime.nl**



WORTELS VAN DE WISKUNDE

Jeanine Daems

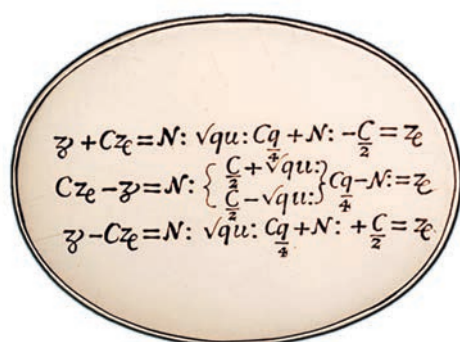
2: TOEN X NOG ONBEKEND WAS

In *Wortels van de Wiskunde* bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: notaties voor onbekenden.



In de herfstvakantie was ik in Oxford, en daar bracht ik uiteraard een bezoek aan het History of Science Museum. Het Ashmolean is overigens ook een aanrader: daar zijn enkele wiskundige Babylonische kleitabletten te zien, maar dat is een ander verhaal.

In het museum is veel moois te bekijken, maar een klein object trok met name mijn aandacht: in een vitrine lag een zilveren plaatje, ongeveer 5 bij 4 cm, met wiskunde erin gegraveerd, zie figuur 1. Ik herkende een deel van de notatie uit *Wortels van de wiskunde*, dus ik raakte meteen enthousiast: ik kon ontcijferen wat er stond!



figuur 1 Voorkant zilveren plaatje met wiskundige formules, Engeland 17^e eeuw

De formules die op het plaatje staan zien er zo uit:

$$\mathcal{Z} + C\mathcal{Z} = \mathcal{N} : \sqrt{qu} : \frac{Cq}{4} + \mathcal{N} : -\frac{C}{2} = \mathcal{Z}_e$$

$$C\mathcal{Z}_e - \mathcal{Z} = \mathcal{N} : \left\{ \frac{C}{2} + \sqrt{qu} : \frac{C}{2} - \sqrt{qu} : \right\} \frac{Cq}{4} - \mathcal{N} := \mathcal{Z}_e$$

$$\mathcal{Z} - C\mathcal{Z}_e = \mathcal{N} : \sqrt{qu} : \frac{Cq}{4} + \mathcal{N} : +\frac{C}{2} = \mathcal{Z}_e$$

Op het eerste gezicht kun je dat waarschijnlijk nog niet helemaal lezen, maar toch valt een aantal dingen al snel op:

- er staan allerlei herkenbare wiskundesymbolen op: plussen, minnen, breuken, wortels, getallen;
- een deel van de notatie herkennen we niet uit de wiskunde van nu;
- er komen naast cijfers, wiskundesymbolen en onbekende symbolen ook letters voor (de C en de N , en ook nog kleine q 's en u 's);
- elke regel begint met iets wat een vergelijking zou kunnen zijn. Er staat tenslotte een rijtje symbolen met een $=$ ertussen (maar dat kan ook een berekening zijn, misschien);
- de regel eindigt steeds met een $=$ en dan een van de twee onbekende symbolen van het begin;
- in de tweede regel lijkt een gevalsonderscheiding op te treden;
- er staan nogal veel dubbele punten in de formules. Zou dat een deling voorstellen? Waarschijnlijk niet, er staat tenslotte in regel 2 een dubbele punt vlak voor een '=', dus dat betekent waarschijnlijk iets anders. Misschien gewoon een leesteken?

Dit zijn voor een deel ook zaken die uw leerlingen zouden kunnen herkennen. Ik ben er altijd voorstander van om leerlingen of studenten eerst maar eens rustig zelf naar zo'n bron te laten kijken, zonder meteen uitleg of een interpretatie te geven. Om ze te motiveren goed te kijken en niet op te houden bij: 'het lijkt op wiskunde, maar ik snap er niets van' kunt u de opdracht geven dat ze minstens vijf dingen moeten opschrijven die hen opvallen. En geef dan vooral ook zelf een schot voor de boeg zodat ze weten dat de lat niet te hoog ligt: 'Mij valt bijvoorbeeld op dat er worteltekens voorkomen in deze formules.' Misschien vallen u naast mijn bovenstaande lijstje nog wel meer dingen op, maar dit zijn de eerste dingen waar ik aan dacht, naast: hé, die onbekende symbolen ken ik deels, wat leuk dat ik die nu een keer in levenden lijve in zo'n bijzondere bron tegenkom!

Notatie voor variabelen

De symbolen $\mathcal{Z}_e$ en $\mathcal{Z}$ zijn namelijk oude symbolen die vanaf de vroege zestiende eeuw in Duitsland gebruikt werden voor onbekenden. Elke macht van de onbekende had zijn eigen symbool. Het symbool voor de onbekende, dat wij als x zouden noteren, was $\mathcal{Z}_e$. Dit heette de wortel (*radix*), wat gek lijkt omdat het niet om de wortel van

de onbekende gaat maar om de onbekende zelf. Wortel verwijst hier echter naar de wortel van een vergelijking, oftewel: een oplossing. Het symbool $\sqrt{}$ is een ouderwetse kleine letter *z* (van *zensus*) en staat voor het kwadraat van de onbekende.

Laten we met deze extra kennis nog eens goed naar de beginstukken van deze formules kijken. De drie regels beginnen dus als volgt:

$$\begin{aligned}x^2 + Cx &= N, \\ Cx - x^2 &= N \text{ en} \\ x^2 - Cx &= N\end{aligned}$$

Nu ziet het er al een stuk behapbaarder uit: dit zilveren plaatje gaat blijkbaar over kwadratische vergelijkingen. En dan rijst meteen een vermoeden: wij lossen kwadratische vergelijkingen op met de *abc*-formule, zou dit ook zo iets zijn?

Voor de eerste vergelijking geeft de *abc*-formule:

$$x = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4N}}{2}$$

Dat is niet direct herkenbaar in het zilveren plaatje, maar we herkennen wel meteen de $-\frac{C}{2}$ aan het eind. Verder zien we in de *abc*-formule natuurlijk de gevalsonderscheiding die we op het zilveren plaatje niet zien. Als we de breuk splitsen en de 2 in de noemer ook onder de wortel

$$\text{brengen, zien we: } x = \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + N} - \frac{C}{2}$$

Nu herkennen we al een stuk meer van de formule op het plaatje. De *Cq* zal dan wel C^2 betekenen. Die wortel met *qu* erachter betekent blijkbaar gewoon de wortel. Waarom dan de *q* en de *u*? De *q* zou er kunnen staan omdat het om de kwadraatwortel gaat, want de *q* is tenslotte ook voor een kwadraat gebruikt. En de *u*? Dat is speculeren, daar kom ik zo op terug.

Hoe zit het dan met de dubbele punten? De eerste dubbele punt die we zien staat na de vergelijking en voor de oplossing. De tweede staat na het wortelteken, de derde staat waar in onze moderne notatie de wortel ophoudt. En dat is een verschil tussen onze en deze oude notatie: wij zetten de wortelstreep over een rijtje symbolen heen om aan te geven wat binnen de wortel hoort. In deze andere notatie zijn daar blijkbaar die dubbele punten voor gebruikt. Het blijkt dat dat aangegeven wordt door die *u* die voor *universale* staat: alles wat tussen de dubbele punten staat moet worden meegenomen binnen de wortel.

Gevalsonderscheidingen

Nu hebben we een groot deel van de bron al wel begrepen. Voor een bovenbouwklas is het misschien leuk om nog wat dieper op de gevalsonderscheidingen in te gaan.

Een voor de hand liggende vraag is namelijk: waarom staan hier eigenlijk drie vergelijkingen? Ze hebben in feite allemaal dezelfde vorm, wij behandelen alle kwadra-

tische vergelijkingen ook in één keer door ze algemeen te schrijven als $ax^2 + bx + c = 0$. En in dat plaatje worden tenslotte ook letters gebruikt om algemeenheid uit te drukken, waarom stoppen ze dan niet alle vergelijkingen in dezelfde vorm?

En waarom staat die $\pm$ er niet? Dat is interessant, want het tweede geval lijkt wél een gevalsonderscheiding te hebben.

Laten we daarom dezelfde exercitie uitvoeren voor het tweede en derde geval. In het tweede krijgen we:

$$x = \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - N}$$

En die opties zien we wél beide op het plaatje.

De derde vergelijking oplossen geeft $x = \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + N} + \frac{C}{2}$. Weer zien we dat de $\pm$ is weggelaten.

Voor beide vragen is het antwoord eigenlijk hetzelfde: zowel de coëfficiënten als de oplossingen zijn hier altijd positief. Wat betreft de coëfficiënten zien we dat aan het feit dat de eerste en de derde vergelijking als verschillende gevallen beschouwd worden, terwijl het enige verschil de min voor de *C* is.

De vergelijkingen die onderzocht worden zijn dus eigenlijk, in moderne notatie:

$$x^2 + Cx = N,$$

$$x^2 - Cx = -N \text{ en}$$

$$x^2 - Cx = N, \text{ waarbij } C \text{ en } N \text{ positief zijn.}$$

Het geval $x^2 + Cx = -N$ ontbreekt. Maar als we alleen positieve *x*'en meenemen, is $x^2 + Cx$ natuurlijk altijd positief.

Nog even terug naar de ontbrekende gevalsonderscheidingen bij de eerste en derde vergelijking. Kan het gebeuren dat de $-$ van de $\pm$ een positieve oplossing voor *x* geeft? Even nadenken leert dat dat niet kan.

Achtergronden

Wat is dit zilveren plaatje voor een object, wanneer en waarom is het gemaakt, en door en voor wie? Het plaatje dateert uit ongeveer 1665. Het plaatje heeft ook nog een achterkant, daar staat een tabelletje op dat

F: 6.												D: 6.											
0	1	6	4	3	8	4	1	9	9	5	0	2	4	9	1	9	9	5	0	2	4	9	
0	3	2	8	7	6	7	2	9	9	0	0	9	9	0	2	9	9	0	0	9	9	0	
0	4	9	5	1	5	1	3	9	8	5	2	2	1	7	3	9	8	5	2	2	1	7	
0	6	5	7	5	3	4	4	9	8	0	3	9	2	2	4	9	8	0	3	9	2	2	
0	8	2	1	9	1	8	5	9	7	5	6	0	9	8	5	9	7	5	6	0	9	8	
0	9	8	6	3	0	1	6	9	7	0	8	7	3	8	6	9	7	0	8	7	3	8	
1	1	5	0	6	8	5	7	9	6	6	1	8	3	6	1	5	0	6	8	5	7	9	
1	3	1	5	0	6	8	8	9	6	1	5	3	8	5	3	1	5	0	6	8	8	9	
1	4	7	9	4	5	2	9	9	5	6	9	3	7	8	4	7	9	4	5	2	9	9	
1	6	4	3	8	3	6	10	9	5	2	3	8	1	0	6	4	3	8	3	6	10	9	
1	8	0	8	2	1	9	11	9	4	7	8	6	7	3	8	0	8	2	1	9	11	9	
1	9	7	2	6	0	5	12	9	4	3	5	9	6	2	9	7	2	6	0	5	12	9	
Days												Months											

figuur 2 Achterkant zilveren plaatje met tabellen voor renteberekeningen

een hulpmiddel is bij renteberekeningen bij leningen en andere financiële transacties, zie figuur 2. Het lijkt

duś aan de ene kant een redelijk praktisch object te zijn, een soort geheugensteuntje. Maar het is ook een mooi gemaakt en prestigieus ding. Het is niet zeker wie het gemaakt heeft. Een vermoeden is dat de auteur de Engelse wiskundige en accountant John Collins was, die veel geschreven heeft over renteberekeningen. Het is waarschijnlijk gemaakt door Hilkuah Bedford uit Londen, een maker van wiskundige instrumenten, zoals zonnepijzers, die met Collins in contact stond. Maar voor wie is het gemaakt? Er blijken nog enkele andere dergelijke mooi gemaakte wiskundige geheugensteuntjes te bestaan uit deze periode. Misschien zijn ze door rijke wiskundige amateurs besteld om zelf te gebruiken, of misschien was het een cadeau voor een mogelijke klant?

Conclusie

Wat leert deze bron ons en onze leerlingen nu? Ten eerste dat notatie in de loop van de tijd is veranderd. Daar zijn nog veel meer voorbeelden van te vinden, in schetsen 2 en 8 van *Wortels van de wiskunde* vind je er nog een aantal. Maar het leert ons ook iets over de kracht van onze eigen notatie. Is het handig om een symbool te hebben voor een onbekende, een ander voor zijn kwadraat, nog een ander voor de derde macht? Dat is best handig, tot het moment dat je met twee onbekenden wilt rekenen, dan laat de notatie je in de steek. Ik denk dat het leuk is om dit plaatje in de derde klas te laten zien als een voorloper van de *abc*-formule. In de bovenbouw kan het omschrijven van de bekende naar de hier gegeven onbekende formule gebruikt worden om op een natuurlijke manier de algebraïsche vaardigheden te oefenen. En het is een heel mooi voorbeeld om het verschil tussen parameters en onbekenden uit te leggen. Een leuke laatste vraag aan de leerlingen is ook: als je zelf zo'n geheugensteuntje bij je volgende toets zou mogen houden, wat zou je daar dan het liefst opzetten?

Foto's in dit artikel zijn opgenomen met toestemming van het Museum of the History of Science, University of Oxford, MHS inv. 14977. Met dank aan Mr. Steven Johnston.

Bronnen

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016) *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Johnston, S. (2015-2016). An English mathematical aide-memoire of the 17th century. Te vinden op: <http://www.mhs.ox.ac.uk/staff/saj/aide-memoire/>

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding, aan de universiteit en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

GETUIGEN

KIJK OP KANS

Danny Beckers



Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee over het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie *Getuigen* behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

Televisie op school

Eind jaren zestig, begin jaren zeventig, leek voor velen de televisie hét kanaal waarlangs de zegeningen van de democratie verder zouden worden uitgedragen. Nederland liep voorop in de ontwikkelingen, waarbij het moderne medium ook werd ingezet op scholen. Omdat men zoveel mensen via de beeldbuis kon bereiken, was de televisie volgens progressieve politici en links georiënteerde onderwijskundigen bij uitstek geschikt om ook de grote groep van ongeschoolde arbeiders te bereiken. Langs die weg zouden zij kennis kunnen verwerven – los van een schoolsysteem waarin hun kinderen hopelijk meer kansen zouden gaan krijgen. Door hen via televisie met informatie in contact te brengen, hoopten deze politici en onderwijskundigen ook dat arbeiders hun kinderen beter zouden kunnen ondersteunen of motiveren om hun opleiding af te maken. Daarnaast verwachtte men televisie ook te kunnen gebruiken om bepaalde onderwerpen voor het voetlicht te brengen. De Nederlandse overheid financierde in 1970 de aanschaf van een televisietoestel voor alle Nederlandse scholen. De Stichting Nederlandse Onderwijs Televisie (NOT) en de Stichting Teleac werden samen verantwoordelijk voor het vormgeven van deze nieuwe ideeën over onderwijs.

figuur 1 Marcel Minnaert en Chriet Titulaer. Foto uit 1967, © Hans Nieuwenhuizen



figuur 2 Kijk op kans.
Edu Wijdeveld met
kinderen op het school-
plein. Foto uit 1973.



Wiskobas

Chriet Titulaer was de aanjager achter de cursussen techniek vanuit Teleac. Hij zou hoge ogen gooien met de televisiecursussen over sterrenkunde en computerkunde, die hij vanaf zijn aanstelling in 1970 (mede) begon samen te stellen. Alle beslissingen over opnamen en uitzendingen liepen via hem; hij werkte zichzelf op tot het boegbeeld van educatief Hilversum. In 1972 vond Teleac het ook tijd om rekenen en wiskunde als vak in het programma-aanbod op te nemen. Om de lessen verantwoord vorm te geven werd een vakdidacticus rekenen-wiskunde aangetrokken. Dat werd Piet Scholten. Scholten was een bevlogen onderwijzer, die zich via aktenstudie en praktijk had opgewerkt tot lerarenopleider. Hij was creatief in lesontwerp. Met de overstap naar televisie kon hij zijn ontwerpideeën binnen het nieuwe medium uitwerken. Als lerarenopleider stond hij al open voor de onderwijsvernieuwingsbeweging die in het project Wiskobas werd vormgegeven.

Wiskobas was een van de initiatieven voor inhoudelijke onderwijsvernieuwing die in de jaren zestig was ontstaan. Die vernieuwingen concentreerden zich vooral rond thema's als leren denken en zelfwerkzaamheid van leerlingen. Een aantal van de projectleden had zich binnen landelijke commissies handig geprofileerd en zodoende was het project binnen het in 1971 opgerichte Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs (IOWO) opgenomen. Binnen het prestigieuze IOWO, met hoogleraar-directeur Hans Freudenthal (1905-1990) aan het hoofd, was financiering van Wiskobas voor een fors aantal jaren veiliggesteld. Het waren onderwijs-ontwikkelaars binnen het IOWO als Fred Goffree en Edu Wijdeveld die vormgaven aan het project Kijk op Kans dat door de Wiskobas-groep en Piet Scholten werd gelanceerd.

Kijk op kans

Kijk op Kans was in meerdere opzichten een echt jaren-zeventigproject. Het is een van de vroegste pogingen om kansrekening en statistiek als onderwerp voor basisschoolleerlingen of brugklasleerlingen aan de orde te stellen. Dit nieuwe onderwerp vonden veel onderwijs-mensen indertijd belangrijk, omdat het leerlingen in staat stelde om informatie in kranten en op televisie op waarde te kunnen schatten. Lezen van statistische informatie, maar ook een realistisch kansbegrip achtte men basisvoorwaarden om in de moderne samenleving te kunnen

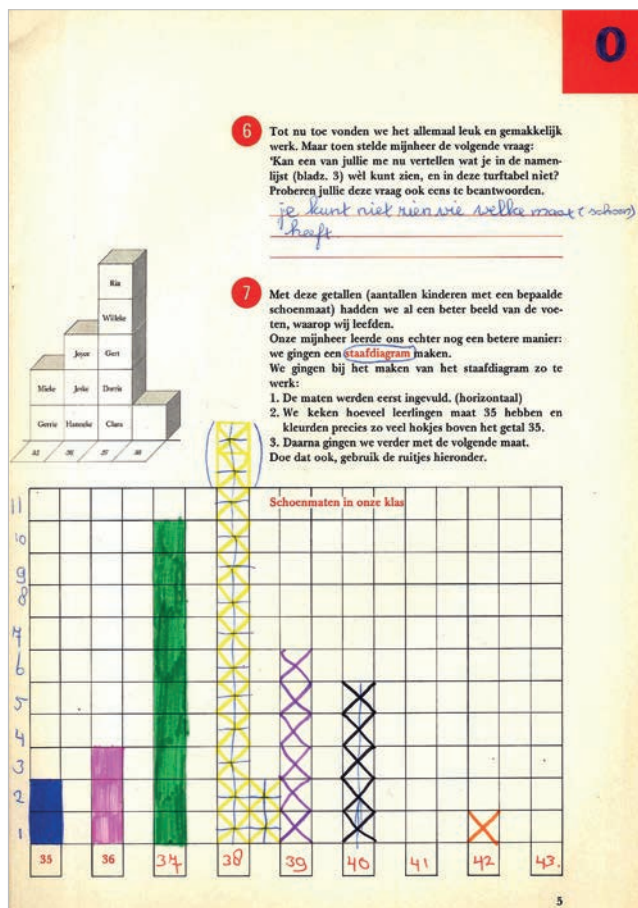
meedoen. Daarnaast was het project doordrenkt van het prettig naïeve uitgangspunt dat binnen de onderwijstelevisie heerste: men koesterde een rotsvast vertrouwen in de mogelijkheid om de sociale onderklasse intellectueel te verheffen. Dit was zichtbaar in de uitzendingen voor ouders (na het laatste journaal!), maar ook in de rol die ouders tijdens een paar uitzendingen speelden en in de bij de televisieserie uitgegeven ouderboekjes. Tot slot was de didactische uitwerking, met de nadruk op groepswork, (klassikale) discussies, en zelfwerkzaamheid, in alle opzichten 'bij de tijd'. In de uitzendingen werden interviews en gebeurtenissen gerelateerd aan het thema kans, afgewisseld met opnamen uit lessen waarin de werkboekjes ook daadwerkelijk gebruikt werden. Door fragmenten uit lessen op te nemen in een (zorgvuldig uitgezochte) realistische klassensituatie, werd met de schooltelevisie-uitzendingen direct een beeld geprojecteerd van de ideale lessen die de ontwikkelaars voor ogen stond.

figuur 3 Kijk op kans,
ouderboek, 1974



Televisielessen

De opnamen van de serie vonden plaats op de Kennedyschool in Utrecht. Op die school, in de nieuwe en kinderrijke wijk Overvecht, werkte een enigszins traditionele, maar wel in didactische experimenten geïnteresseerde docent Kuijpers. In de (hoogste) klas die voor de opnamen gebruikt werden, was de sfeer uitgelaten. Leerlingen herinneren zich na vele jaren nog steeds de televisieopnamen en de bijbehorende lessen. Bij een aantal is vandaag de dag de herinnering aan de cameraman met spijkerbroek levendiger dan de herinnering aan de kansrekening, maar dat ze er indertijd met plezier aan werkten is nog zichtbaar in de uitwerkingen die ze indertijd maakten. De opnamen zien er stijf uit, met dhr. Kuijpers strak in pak – iets dat hij zichtbaar niet gewoon was – en er werd veel uit de beelden geknipt, om er een levendige serie van te maken. Tussendoor werden fragmenten getoond van situaties op het schoolplein en bij leerlingen thuis, die met hun ouders de stof nog eens doornamen. Dit laatste was in scene gezet, en toonde meer wens dan werkelijkheid: er waren weinig ouders die de stof met hun kinderen bespraken. Ook het ouderboek was bij de meesten niet in gebruik. Wel herinnert een aantal ouders zich nog de ouderavond waarmee het project begon, en waarop Titulaer het project introduceerde.



figuur 4 *Kijk op kans, werkboek, 1974*

Acht lessen met bijbehorende televisie-uitzendingen waren er voor het lespakket gereserveerd. Daarin kwam een aantal voorbeelden van kansspelen (dobbelstenen, maar ook klaspelletjes) aan bod, naast, als contrast, spelsituaties waarin de uitkomst vastlag, zoals bij aftelrijmpjes. Ook werden in de serie realistische kanssituaties behandeld, onder andere in de kraamkamer van een ziekenhuis (hoeveel jongetjes en hoeveel meisjes liggen er in de acht bedjes?) en in de controlekamer van de politie (wat is de kans dat een serie verkeerslichten allemaal op groen staan?).

Nadruk op taal

Binnen het brede scala aan didactische vernieuwingen in de jaren zestig en zeventig was de grootste gemene deler de nadruk op de taalfinesses die met wiskundebeoefening gepaard gingen. Uit het taalgebruik van leerlingen trachtte men af te leiden of de leerling een bepaald begripsniveau bereikt had. In *Kijk op kans* was een van de belangrijkste taalfinesses die de leerlingen spelenderwijs bijgebracht kregen, het onderscheid tussen een berekenbare kans en een kans die door statistische gegevens werd bepaald: de 'weetkans' versus de 'zweetkans', werden die genoemd, met het flauwe soort woordgrappen dat karakteristiek was voor die periode. Zelf onderzoek

doen werd daar in de werkboeken nog eens aan toegevoegd. Zo genereerden de leerlingen lijsten *random* getallen met behulp van het telefoonboek, en knutselden ze een tolletje om daarmee simulaties uit te voeren. Ook namen ze bij elkaar de schoenmaat en verwerkten ze die gegevens in een histogram, en rekenden ze aan percentages en dobbelstenen.

Einde van de serie

Een serieuze verwerking van de *Kijk op Kans*-lessen vergde veel van onderwijzers. Voor de docent in Utrecht was dat geen probleem, maar voor veel anderen wel. Op sommige scholen werden wel de televisie-uitzendingen bekeken, maar werden niet de bijbehorende werkboeken doorgewerkt. Hoewel evaluaties van Teleac dus lieten zien dat de uitzendingen zeer gewaardeerd werden, bleef de verkoop van boekjes daarbij achter.

Freudenthal, aanvankelijk sceptisch tegenover de introductie van kansrekening en statistiek in het onderwijs, was enthousiast over dit project. In het algemeen was men binnen het IOWO erg tevreden met de serie televisielessen. Er was dan ook sprake van enige teleurstelling toen de serie na twee succesvolle seizoenen niet meer herhaald werd. De inmiddels tot directeur van TELEAC gepromoveerde Titulaer, gaf om financiële redenen prioriteit aan nieuwe lessenseries. De verkoop van de boekjes leverde onvoldoende op om uitzending voort te zetten. In dat opzicht waren televisielessen snel verouderd. Via het afgeleide *Zicht op Toeval-werkboek* van het IOWO team, dat binnen opleidingen voor leraren wiskunde werd gebruikt, hadden de ideeën die waren opgedaan in *Kijk op Kans* een langduriger invloed.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundeleraar, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

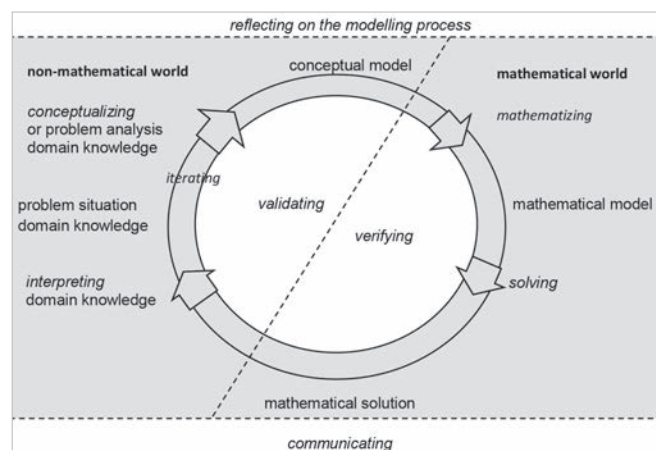
VOORBEELDEN VAN WISKUNDIG MODELLEREN IN GETAL & RUIMTE EN MODERNE WISKUNDE

Bert Zwaneveld
Jacob Perrenet

In *Euclides* 92-1 hebben Bert Zwaneveld en Jacob Perrenet onderzocht in welke mate er nu echt gemodelleerd wordt in de schoolboeken.^[1] In dit artikel wordt een aantal voorbeelden van modelleeropgaven geanalyseerd.

Inleiding

In het artikel 'De kwaliteit van het modelleeronderwijs in de Nederlandse schoolboeken' hebben we de invalshoek gebruikt van het modelleeronderwijs aan de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e). We denken dat die invalshoek ook voor de bovenbouw van havo en vwo bruikbaar is. Onze invalshoek bestaat uit twee onderdelen, namelijk elke wiskundige modelleeractiviteit (1) moet een doel hebben^[2] en (2) bevat elementen van de door ons eerder ontwikkelde modelleercyclus, zie figuur 1. In de oorspronkelijke lijst van doelen voor wiskundig modelleren zijn de volgende het meest relevant: *verklaren, analyseren, voorspellen, abstraheren, beslissen en optimaliseren*. De activiteiten uit de modelleercyclus zijn: *conceptualiseren, mathematiseren, oplossen en interpreteren, valideren, verifiëren, itereren, communiceren en reflecteren*. We merken, wellicht ten overvloede op, dat modelleren in alle vier examenprogramma's voor havo en vwo staat.



figuur 1 Modelleercyclus volgens Perrenet en Zwaneveld^[3]

De vraag in ons onderzoek naar modelleren in de schoolboeken was of er nu sprake was van 'echt' modelleren. We hebben dat als volgt gedefinieerd: het moet bij een opgave (al dan niet in onderdelen opgedeeld) gaan om een niet-wiskundige probleemsituatie waarbij er een of meer modelleerdoelen zijn en er moeten minstens vijf van de genoemde modelleeractiviteiten plaatsvinden. Onze conclusie was dat veruit de meeste opgaven niet aan deze criteria voldoen.

Vier voorbeelden

We presenteren vier voorbeelden van opgaven uit de laatste delen van beide methoden voorzien van onze analyse. Deze voorbeelden hebben we als volgt geselecteerd: twee opgaven die redelijk in de buurt komen van onze definitie van echt modelleren, één opgave die eigenlijk niet de kwalificatie modelleren of toepassen van wiskunde verdient, en één opgave met een interessante probleemsituatie, maar waarbij het modelleren erg voor-structureerd is. We geven steeds de opgave en vervolgens per introductie of per deelvraag onze analyse in cursief.

Voorbeeld 1 De afgeleide functie

Getal & Ruimte, vwo wiskunde A, deel 3 (10e editie, 2011), paragraaf 10-1.

A 19

Een mens niest om de luchtwegen schoon te houden. Bij het niezen trekt de luchtpijp samen, waardoor de snelheid van de luchtstroom in de luchtpijp toeneemt. De snelheid van de luchtstroom wordt gegeven door de formule $v = 20(2,1 - d)d^2$. Hierin is v in m/s en d de doorsnede van de luchtpijp in cm. Bij deze formule is uitgegaan van een persoon die onder normale omstandigheden een luchtpijp heeft met een gemiddelde doorsnede van 2,1 cm.

Het model is gegeven, er is geen modelleerdoel.

- a** Tijdens het niezen zorgt het lichaam ervoor dat de luchtpijp zo vernauwt, dat de snelheid van de luchtstroom maximaal is. Bereken met behulp van de afgeleide de maximale snelheid van de luchtstroom in gehele km/uur.

Nu is er wel een modelleerdoel, namelijk optimaliseren in de zin van: berekenen bij welke doorsnede van de luchtpijp de snelheid van de luchtstroom maximaal is. Doordat het model en de manier van oplossen gegeven zijn is de enige modelleeractiviteit: oplossen.

Voor een persoon is de snelheid van de luchtstroom te berekenen met de formule $v = k(D - d)d^2$. Hierin is k een constante en D de gemiddelde doorsnede van de luchtpijp in cm onder normale omstandigheden.

Een arts beweert dat de snelheid maximaal is voor $d = \frac{2}{3}D$.

- b** Toon de juistheid van deze bewering aan.

Als doel kan genoemd worden: het analyseren (in het algemeen) van het verband tussen de doorsnede van de luchtpijp bij maximale snelheid van de lucht en de doorsnede van de luchtpijp in normale toestand. Maar, zo is dat niet geformuleerd. Ook het verifiëren van de juistheid van een bewering is hier een doel. De modelleeractiviteiten zijn: het conceptualiseren van de rol van de parameter k – dat die er niet toe doet – en dat de afgeleide gebruikt kan worden die bij de waarde 0 tot een verband tussen d en D zal leiden, het mathematiseren hiervan, het oplossen van de resulterende vergelijking en het interpreteren van de oplossing van de vergelijking als het gevraagde verband.

c Druk $v_{\max}$ uit in k en D .

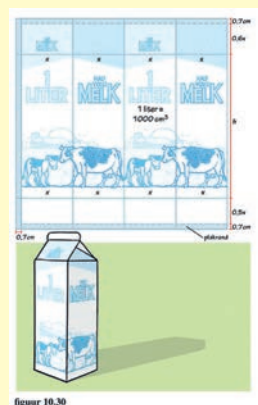
Hier is geen modelleerdoel, de vraag gaat slechts om het invullen van het resultaat van de vorige vraag in de gegeven formule, dus slechts oplossen.

d In een wetenschappelijk artikel is te lezen dat de snelheid van de lucht bij niezen wel 170 km/uur kan zijn. Onderzoek of deze bewering juist kan zijn voor een persoon met $k = 20$.

Het doel is het analyseren van wat er kan gebeuren bij de gegeven luchtsnelheid. De modelleeractiviteiten zijn conceptualiseren en mathematiseren van de bewering van de arts uit deelvraag b in termen van de in het model afgeleide uitdrukking voor $v_{\max}$ in deelvraag c.

Voorbeeld 2 Optimaliseren

Getal & Ruimte, vwo wiskunde A, deel 3 (10e editie, 2011), paragraaf 10-3.



A 53

In figuur 10.30 zie je een literpak melk en de bijbehorende uitslag. Het grondvlak is x bij x cm en de hoogte is h cm.

De plakranden zijn 0,7 cm breed.

In de uitslag herken je vier rechthoeken van x bij h cm, vier rechthoeken van x bij 0,5 cm en vier rechthoeken van x bij 0,6 cm.

a Licht toe dat de oppervlakte van het karton dat voor een literpak melk wordt gebruikt, gegeven is door

$$O(x) = (4x + 0,7) \left(1,4 + 1,1x + \frac{1000}{x^2} \right).$$

Ook hier is het model gegeven, namelijk een formule voor de gebruikte hoeveelheid karton. Waar dat model voor moet dienen is niet duidelijk. Gezien de opgaven hiervoor en hierna mag verwacht worden dat het (uiteindelijk) om een optimalisatie zal gaan: 'zo min mogelijk karton'. Het opstellen van zo'n model valt onder het modelleerdoel analyseren. Gezien de complexiteit kunnen de volgende modelleeractiviteiten onderscheiden worden: conceptualiseren en mathematiseren, maar de manier waarop dit kan verlopen is in de voorafgaande opgaven al tamelijk uitvoerig aan de orde geweest.

b Toon algebraïsch aan dat

$$O'(x) = 8,8x + 6,37 - \frac{4000}{x^2} - \frac{1400}{x^3}.$$

Hier is geen modelleerdoel. De activiteit is oplossen.

De fabrikant wil zo weinig mogelijk karton gebruiken voor de productie van de literpakken.

c Bereken in cm^2 nauwkeurig hoeveel karton gebruikt wordt voor een literpak melk door de vergelijking $O'(x) = 0$ grafisch-numeriek op te lossen.

Het doel is natuurlijk optimaliseren. De activiteit is beperkt tot oplossen volgens het gegeven voorschrift.

Voorbeeld 3 De kettingregel

Moderne Wiskunde, vwo wiskunde A, deel 6 (10e editie, 2013), paragraaf 1-5.

38 De waterhoogte in een waterton wordt beschreven door de formule $H = \sqrt{-2t^2 + 210t + 900}$ met H in cm en t in dagen.

a Na hoeveel dagen is de waterton leeg?

b Bereken $\frac{dH}{dt}$

c Hoe snel stijgt het water als de waterhoogte voor het eerst 60 cm hoog is?

Bij deze opgave is er geen modelleerdoel, er wordt niet vermeld voor welk proces in de tijd de gegeven formule staat. De deelvragen zijn alle drie met de activiteit oplossen te karakteriseren. Bij deelvraag c komt daar conceptualiseren en mathematiseren bij om tot een aanpak van de vraag te komen.

Deze opgave had net zo goed, misschien zelfs beter, 'kaal'

gekund. Gegeven $f(t) = \sqrt{-2t^2 + 210t + 900}$, met de vragen:

– Voor welke t is $f(t) = 0$?

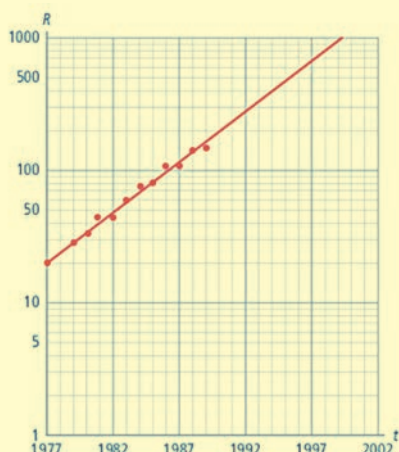
–

– Bereken $\frac{df(t)}{dt}$. NB: Deze vraag kan weggelaten worden, want de volgende vraag impliceert deze al.

– Hoe snel verandert $f(t)$ als $f(t) = 60$? Hierbij is er tenminste nog iets spannends: er zijn twee waarden van t waarvoor $f(t) = 60$.

Voorbeeld 4 Formules opstellen

Moderne Wiskunde, vwo wiskunde A, deel 6 (10e editie, 2103), paragraaf 5-4.



- 6** In 1977 troffen onderzoekers in een dorpje in Limburg een kleine groep ransuilen aan. Vanaf dat moment heeft men ze nauwgezet gevolgd. Daaruit bleek onder andere dat ransuilen vroeg in het voorjaar broeden en dat de jongen al half juni kunnen vliegen. Uit tellingen die steeds eind juni plaats vonden, bleek dat de populatie in omvang toenam. De onderzoekers zetten de aantallen uit in een enkellogaritmisch assenstelsel. Ze tekenden een zo passend mogelijke rechte lijn door de meetpunten. Hiernaast zie je het resultaat.

- a** De onderzoekers concludeerden dat het aantal ransuilen jaarlijks met een vast percentage toenam. Op grond waarvan konden ze deze conclusie trekken?

Het modelleerdoel is analyseren wat er aan de hand is en met het model de conclusie verklaren. Analyseren en verklaren liggen hier in elkaars verlengde. Met figuur 1 als model, weliswaar niet wiskundig maar wel grafisch geformuleerd, is de modelleeractiviteit het interpreteren van een aspect van de werkelijkheid met behulp van het model.

- b** Geef een formule waarmee het aantal ransuilen R kan worden berekend t jaar na 1977 en bereken het percentage waarmee het aantal ransuilen jaarlijks toenam.

Het modelleerdoel is hier de meetgegevens in een formule omzetten, dus analyseren. De modelleeractiviteiten zijn mathematiseren en oplossen door een berekening. Het conceptualiseren is, helaas, vrijwel geheel voorgedaan in de tekst, in deelvraag a.

- c** Eind juni 1991 telde men 205 ransuilen. Toon met een berekening aan dat dit minder is dan volgens bovenstaande groei mocht worden verwacht.

Het doel is een verdere analyse van het model, namelijk de beperkte bruikbaarheid ervan vaststellen door een nieuw gegeven met het model te confronteren. De activiteit is dan ook het interpreteren van een te berekenen modeluitkomst, dus oplossen is ook een activiteit.

Biologen gaven hiervoor de verklaring dat de door ransuilen gebruikte broedplaatsen altijd slechts in beperkte mate aanwezig zijn.

Een onderzoeker dacht het aantal ransuilen vanaf 1989 goed te kunnen voorspellen met de formule $R = a - b \cdot 0,6^t$.

Hierbij is R het aantal ransuilen en t het aantal jaren na eind juni 1989. Hij koos a en b zo dat de formule 178 ransuilen opleverde voor 1989 en 205 ransuilen voor 1991.

Het modelleerdoel is een nieuw model opstellen dat beter bij de nieuwe gegevens past dan het vorige model, dus valideren van het gegeven model en weer (nader) analyseren. Hier wordt de modelleercyclus opnieuw deels doorlopen, dus itereren is ook een modelleeractiviteit.

- d** Laat zien dat dit voor juni 1989 de vergelijking $a - b = 178$ geeft.

Er is geen doel, maar er moet één aspect van het verbeterde model geverifieerd worden.

- e** Welke vergelijking hoort er bij 1991?

Vergelijkbaar met deelvraag d.

- f** Bereken met de vergelijkingen van de opdrachten d en e de waarden van a en b afgerond op twee decimalen.

Hier hoeft slechts een wiskundige opgave opgelost te worden.

Terugblik

Het eerste voorbeeld over het niezen gaat wel over een realistische probleemsituatie, maar waarom je dat zou willen beschrijven met een wiskundig model blijft duister, of het zou de vraag van de laatste deelvraag moeten zijn: Is een lichtsnelheid van 170 km/u realistisch? Het iteratieve karakter van modelleren is heel impliciet aanwezig: eerst een bepaalde persoon, iemand met een luchtpijpdoorsnede van 2,1 cm en een schaalfactor van 20 (om het resultaat in meter per seconde te krijgen), daarna voor een populatie waarbij de getallen 2,1 en 20 door parameters vervangen zijn. Dit had ook best expliciet gekund. We vermoeden dat de leerlingen de formule niet zelf kunnen bedenken, dus zal die op enig moment gegeven moeten worden. De rol van de parameters k en D had daarbij explicieter aan de orde kunnen komen. Bijvoorbeeld door de leerlingen te laten nadenken over de vraag waarvan de lichtsnelheid in ieder geval zal afhangen: de doorsnede van de luchtpijp en dat je zoiets als een schaalfactor nodig zult hebben om alles in de goede eenheden te krijgen. De opgave voldoet niet helemaal aan de criteria voor echt modelleren.

Het tweede voorbeeld over het benodigde karton voor een literpak melk bevat een voorstelbare probleemsituatie om te modelleren. Het (eerste) doel is het opstellen van een formule voor het benodigde karton en daartoe

het kiezen van de onafhankelijke variabele x . De gegeven figuur is daarbij natuurlijk handig. Wij denken echter dat hier wel wat meer aan de leerlingen zelf overgelaten had kunnen worden. De voorafgaande opgaven bevatten voldoende aanwijzingen voor de aanpak. De afwerking, het berekenen van de minimale benodigde hoeveelheid karton had wat ons betreft zeker niet zo voorgedaan hoeven te worden. De opgave voldoet ook niet helemaal aan de criteria voor echt modelleren.

Het derde voorbeeld over de waterhoogte in de waterton heeft nauwelijks iets met wiskundig modelleren te maken. Het is vooral een oefenopgave in de techniek van het differentiëren. Dit moet natuurlijk ook in een leerboek wiskunde staan. De zwakke relatie met modelleren is dat de begrippen afgeleide uit de wiskunde en snelheid uit de natuurkunde of uit het dagelijks leven met elkaar verbonden moeten worden. Het vierde voorbeeld over de ransuilen in Limburg had aan kracht kunnen winnen als vanaf het begin duidelijk was geweest dat er behoefte was om een model te hebben waarmee de ontwikkeling van het aantal dieren voorspeld kon worden. Daarbij kan ook al gegeven worden dat metingen in de toekomst wellicht tot bijstelling van het model kunnen leiden. Door de grafiek te geven werd wel heel erg in de richting van een exponentieel model gestuurd. Hier had wel wat meer initiatief bij de leerlingen gelegd kunnen worden: presenteer de gegevens in een tabel en stel eerst de vraag of een lineair of een exponentieel model goed bij de gegevens past. Dan kan ook over een al bij voorbaat te voorziene beperking worden nagedacht: beide modellen leiden tot een onbeperkte groei, dat is niet realistisch. De eerste vraag is dan om het lineaire of exponentiële model op te stellen dat het best past. Daarna kan de vraag naar het verbeterde model in het licht van de meting van 1991 gesteld worden. Daarbij gaat het er natuurlijk om dat op den duur in ieder geval het aantal dieren niet over een zekere grens heen kan gaan. Wellicht zijn de leerlingen uit te dagen hiervoor de nu gegeven aanpassing van het oorspronkelijke exponentiële model te bedenken. Zo niet, dan zal het wel op de nu in het boek aangegeven manier moeten. Deze opgave voldoet goed aan de criteria voor echt modelleren, maar het had nog beter gekund, door veel minder voor te zeggen over de aanpak.

Conclusie

In de twee voorafgaande delen, voor vwo 4 en vwo 5, geeft *Moderne Wiskunde* aan hoe modelleren in zijn werk gaat, namelijk bij opgaven voor werkstukken: er is een probleem afkomstig van een opdrachtgever, er worden een of meer aanpakken voorgesteld, wat tot even zoveel keer doorlopen van de modelleercyclus leidt, en er moet een rapport met een advies aan de opdrachtgever gemaakt worden. Het is jammer dat dit in het laatste deel volledig afwezig is.

We herhalen de aanbeveling uit onze eerste bijdrage: richt het wiskundig modelleren meer op deze manier in.

Een gevolg is wel dat er minder opgaven gerelateerd aan een probleemsituatie zullen zijn, maar de opgaven die wel een probleemsituatie bevatten, gaan over echt modelleren. Daarnaast zullen er (dan dus) meer kale opgaven zijn om de puur wiskundige vaardigheden te oefenen. Een duidelijk onderscheid, enerzijds echt wiskundig modelleren en anderzijds wiskundige vaardigheden oefenen, komt ons niet slecht voor: het tweede kan het eerste tot voordeel zijn.

Noten

- [1] Zwaneveld, B en Perrenet, J. (2016). Kwaliteit van het modelleeronderwijs in Nederlandse schoolboeken. *Euclides*, 92(1), 40-42.
- [2] Van Overveld, K., & Borghuis, T. (2013). 'From Problems to Numbers and Back'. *Lecture Notes to 'A Discipline-neutral Introduction to Mathematical Modelling'*. Eindhoven: Eindhoven University of Technology.
- [3] Perrenet, J.C., & Zwaneveld, B. (2012). The Many Faces of the Modelling Cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.

Met dank aan Nathalie van der Weerd, Noordhoff Uitgevers voor het aanleveren van de originele opgaven uit *Moderne Wiskunde* en *Getal & Ruimte*.

Over de auteurs

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs van de Open Universiteit. E-mailadres: zwane013@planet.nl

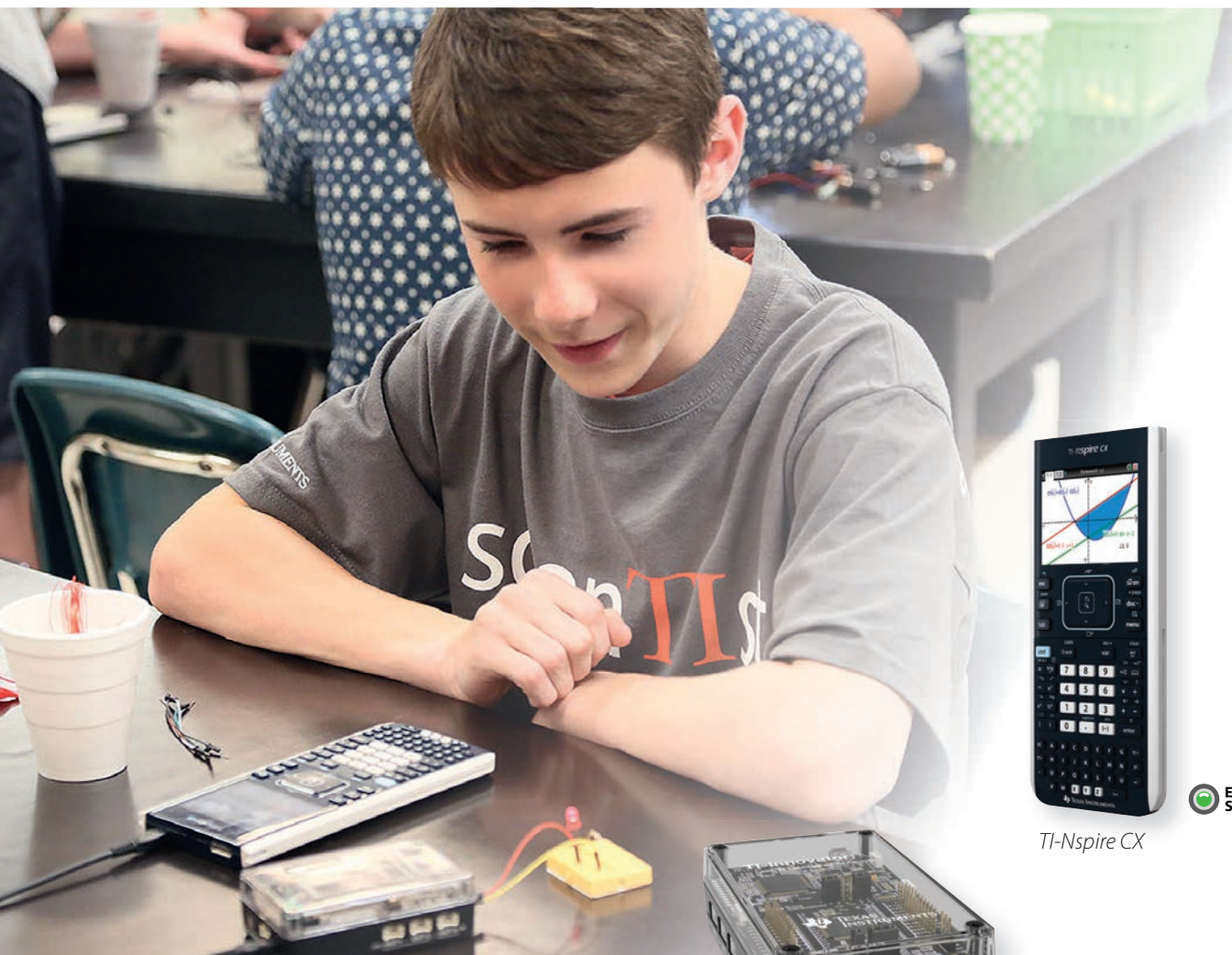
Jacob Perrenet is buitenlid van de examencommissie van de lerarenopleiding van de TU/e. Hij heeft gevarieerd didactisch en onderwijskundig onderzoek verricht bij exacte vakken. E-mailadres: j.c.perrenet@tue.nl

PROGRAMMEREN EN ONTWERPEN

DE NIEUWE DIMENSIE VAN

TI-TECHNOLOGIE

In combinatie met de nieuwe TI-Innovator™ Hub hét voorbeeld van integratie van wiskunde met natuurwetenschappen.



TI-84 Plus CE-T



TI-Nspire CX



TI-Innovator™ Hub met
TI-Launchpad™ Board



www.education.ti.com/nederland
www.education.ti.com/go/innovator

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

INTERNATIONAL MATHEMATICAL MODELING CHALLENGE (IM²C)

Ruud Stolwijk
Henk van der Kooij

Binnenkort vindt de derde editie van de International Mathematical Modeling Challenge plaats. Durft u het aan om het uw leerlingen te vragen om vijf dagen achter elkaar met wiskunde in de weer te zijn? Ruud Stolwijk en Henk van der Kooij verwachten van wel, nadat u dit verhaal hebt gelezen...



Inleiding

Zoals u weet wordt het programma van wiskunde B vwo in de syllabus van dit vak (versie 2, april 2016) nader ingevuld. De beschreven kennis over functies, grafieken, vergelijkingen, differentiaal- en integraalrekening, goniometrische functies en meetkunde met coördinaten valt in de meeste gebruikte methodes wel terug te vinden. Maar in diezelfde syllabus worden ook vaardigheden beschreven die in de lesmethodes vaak minder uitgebreid aan bod komen. En dat terwijl de syllabus toch meerdere alinea's aan vaardigheden wijdt. Subdomein A2 zegt er in het kort het volgende over:

Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden

De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model, binnen dat model wiskundige oplostekniken hanteren en de gevonden oplossingen betekenis geven in de context.

Dergelijke complexe vaardigheden zijn onmogelijk te toetsen in een 'normale' schriftelijke toets van gebruikelijke lengte. Het opstellen van een wiskundig model alleen al is immers een kwestie van een lange adem... het probleem begrijpen, wat proberen, testen, bijschaven, verbeteren; kortom: dat is al gauw een kwestie van dagen of zelfs weken! En het vergt zeker ook teamwork – en dat is een aspect dat in de gebruikelijke toetsen al helemaal niet aan de orde komt.

Internationaal initiatief

Internationaal wordt al heel wat jaren aandacht gevraagd voor 'modelleren' binnen het wiskundeonderwijs – niet alleen het hoger onderwijs, maar ook het basis- en voortgezet onderwijs. In 2014 is vanuit de Verenigde Staten een initiatief gestart om een internationaal modelleer-evenement te starten onder de naam IM²C: International Mathematical Modeling Challenge. Het doel van dit evenement is om aandacht te geven aan wiskundig modelleren. Dit gebeurt in de vorm van een wedstrijd, waarbij de Olympische gedachte vooropstaat: meedoen is belang-

rijker dan winnen! Daarom staat de 'C' niet voor 'Contest' of 'Competition', maar voor 'Challenge' (uitdaging). Het streven van IM²C is om wereldwijd onderwijs rond wiskundig modelleren en het toepassen van wiskunde onder zo veel mogelijk leerlingen van alle niveaus te stimuleren. Dit idee is gebaseerd op de overtuiging dat leerlingen en docenten de kracht van wiskunde binnen realistische contexten moeten ervaren om de problemen buiten de wiskunde beter te kunnen begrijpen – en wie weet ooit een bijdrage te kunnen leveren aan oplossingen daarvan. Natuurlijk is dit een hoog doel en misschien klinkt het wat abstract, maar in de praktijk biedt IM²C een prachtige uitdaging aan teams van leerlingen die bereid zijn om zich eens, wat langer dan in het onderwijs gebruikelijk is, in een echt probleem te verdiepen. 'Maar we hebben toch al de Wiskunde Olympiade en de Wiskunde B-dag?', zullen sommigen van u zich wellicht afvragen. Jazeker, deze twee evenementen bieden al tientallen jaren een uitdagende dag voor veel leerlingen, maar voor sommige leerlingen geldt 'het mag nog wel wat meer zijn'.

Wat betekent deelname aan de Challenge?

In elk deelnemend land kunnen zoveel scholen als gewenst meedoen met een eigen schoolteam, onder 'toezicht' van een docent (supervisor). Wij denken daarbij aan een team bestaande uit bovenbouwleerlingen met wiskunde B (en bij voorkeur ook leerlingen met wiskunde D – en wellicht ook een goede wiskunde A-leerling). Een team krijgt gelegenheid om vijf aaneengesloten dagen (bij voorkeur zit daar ook een weekend in om lesuitval te minimaliseren) te werken aan een bijzonder open realistische opdracht. Ze mogen alle informatie en bronnen die ze nodig denken te hebben raadplegen (uiteraard ook via internet), maar het is verboden om buiten het team experts of medeleerlingen te consulteren. Aan het eind van die vijf dagen leveren zij een werkstuk in bij de docent. Daarna wordt door een klein groepje experts (bestaande uit leden van Wiskunde Olympiade commissie, de Wiskunde B-dag commissie en een expert op het gebied van wiskundige modellen uit het bedrijfsleven) bepaald welke twee werkstukken vanuit Nederland worden ingezonden voor

de internationale wedstrijd. Per deelnemend land (in 2015 waren dat er elf, in 2016 23) mogen maximaal twee werkstukken worden opgestuurd ter beoordeling door een internationale jury. Deze jury beoordeelt de ingezonden werkstukken als 'Outstanding', 'Meritorious', 'Honorable Mention' of als 'Successful Participant'.

Hoe ziet zo'n opdracht eruit?

Tot nog toe zijn er twee Challenges geweest. In 2015 was de opdracht heel erg open: er moest door de teams een productieschema worden ontworpen voor het opnemen van een film, waarmee je bijvoorbeeld rekening houdt met de beschikbaarheid van opnamesites, acteurs en attributen en ruimte en tijd voor mislukte shots. De bijkomende opdracht was ervoor te zorgen dat het model te begrijpen was voor een regisseur, die het model moest kunnen toepassen bij het plannen van zijn filmopnamen. Het mag duidelijk zijn dat het idee voor deze opgave uit de Verenigde Staten kwam.

In 2016 was er wat de opdracht betreft duidelijk inbreng vanuit Nederland: Hoe kan een organisator van sport-evenementen zich indekken tegen het risico dat een van de deelnemers een wereldrecord loopt? Voor deze prestatie wordt immers een vette premie uitgekeerd aan de betreffende atleet. De opdracht was gebaseerd op gegevens van de Zevenheuvelenloop, een hardloopevenement in de omgeving van Nijmegen.

De volledige opgaven, met de prestaties van alle teams staan op de site van IM²C: www.immchallenge.org

Deelname vanuit Nederland in 2015 en 2016

In 2015 (de eerste pilot met elf landen) namen in Nederland vijf teams deel. De twee beste werkstukken werden ingestuurd en eindigden in de categorieën 'Meritorious' en 'Successful Participant'.

In 2016 (met deelname van 23 landen) deden er in Nederland vier teams mee, waarvan de twee ingestuurde werkstukken werden beoordeeld als 'Meritorious' en 'Honorable Mention': keurig in de subtop gezegd.

Docenten en teams van alle negen scholen waren erg enthousiast over de opgave en vooral over het feit dat ze in die vijf dagen hard werken zo veel wiskunde hadden geleerd en ook nog toegepast. Het was voor de jury in ieder geval indrukwekkend om te zien hoe leerlingen in staat zijn om binnen vijf dagen zich zelfstandig wiskundige concepten en technieken die niet op school worden behandeld eigen te maken – en ook nog toe te passen in een realistische situatie. Hierbij moet u denken aan technieken op het gebied van optimaliseren, en dan zijn zaken als lineair programmeren, grafentheorie en statistische technieken al snel nuttig.

Meedoen belangrijker dan winnen...

Het plezier dat teams en hun docenten beleven aan vijf dagen intensief werken aan een authentiek probleem staat voor ons voorop. Maar ja, als je meedoet, dan wil



figuur 1 Een van de 'Outstanding Teams' van 2016: Palo Alto High School, CA, Verenigde Staten

je toch ook wel weten hoe Nederland het doet in internationaal perspectief. In 2016 eindigde het beste team uit Nederland (na teams uit erkende grootmachten als Hong Kong, Singapore en de Verenigde Staten) keurig in de subtop, samen met teams uit onder andere Slowakije, Taiwan, Thailand en Macau.

IM²C 2017

De derde Challenge, in 2017, wordt gehouden van half maart tot en met de eerste week van mei. In deze periode moet een deelnemend team een aaneengesloten periode van vijf dagen kiezen om te werken aan de opgave. Als organisatoren in Nederland willen wij bij voorkeur dat alle deelnemende teams dezelfde periode kiezen – bijvoorbeeld starten op een donderdag en dan op maandagavond het werkstuk inleveren. Als alle teams inderdaad voor dezelfde periode kiezen bestaat de mogelijkheid om op vrijdagmiddag alle teams op het Freudenthal Instituut uit te nodigen om vanuit onze kant enige ondersteuning in de vorm van 'procehulp' te bieden.

Mocht u zich na lezing van dit alles aangesproken voelen om een team aan deze uitdaging te laten deelnemen, meldt u zich dan – vóór 15 februari – aan bij Henk van der Kooij.

Bronnen

- Syllabus wiskunde B vwo.
Te vinden op: www.examenblad.nl
- IM²C-website: <http://immchallenge.org>

Over de auteurs

Ruud Stolwijk is lid van de internationale jury,
E-mailadres: prstolwijk@gmail.com.

Henk van der Kooij is lid van het internationale organisatiecomité, E-mailadres: henkvanderkooij@gmail.com

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

DE ENE LEMNISCAAT IS DE ANDERE NIET

De lemniscaat ∞ is een van de weinige krommen die gewoon in de 'symbol set' van ieder lettertype zit. Want we kennen hem natuurlijk als het symbool voor oneindigheid. Die vorm móet je dus wel tegenkomen op 'Imaginary', hetgeen Jacques Jansen inspireerde om er uitdagende problemen mee te componeren.



figuur 1



figuur 2 Lemniscaat van Gerono

Als u dit leest is de wiskundetentoonstelling 'Imaginary' misschien wel bij u in de buurt. De tentoonstelling wordt aangekondigd met de ondertitel 'Wiskunde in sprankelende beelden'. En dat kan ik bevestigen. In de gratis te downloaden catalogus staan inspirerende afbeeldingen. Achter in het boekje, onder het kopje 'instructiemateriaal' staat een verwijzing naar vier documenten. Twee zijn van Nederlandse en twee van Belgische afkomst. De kern van de tentoonstelling is het programma *Surfer* en dat is gratis te downloaden.^[1] Op de *Surfer* interface kun je zelf formules intypen en genieten van de bijbehorende beelden. Werk je een paar documenten door, dan zul je tips en trucs tegenkomen die voor wat meer diepgang zorgen bij *Surfer*. In het instructiemateriaal komen we op verscheidene plaatsen de figuur van de lemniscaat tegen. De figuur doet denken aan een liggende acht en kan symbool staan voor oneindigheid maar ook voor begrippen als harmonie, totaliteit en volkomenheid. Er bestaat zelfs zoiets als lemniscatisch denken, en wie is niet opgegroeid met de prachtige prentenboeken van uitgeverij Lemniscaat? Ik zal me echter beperken tot het wiskundig denken...

Verschillende soorten lemniscaten

Pas op, er zijn verschillende soorten lemniscaten. Bijvoorbeeld die van het eindexamen vwo wiskunde B 2015, tweede tijdvak. Deze lemniscaat wordt aangeduid met de vergelijking $y^2 = x^2(1 - x^2)$ en behoort tot de verzameling $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$ die toegekend wordt aan de Franse wiskundige Camille-Cristophe Gerono (1799 - 1891). Deze lemniscaten zijn bijzondere Lissajousfiguren. Met uw examenkandidaten heeft u er vast flink op geoefend.

Omdat we over een formule beschikken kunnen de leerlingen met *Surfer* het plaatje maken zoals afgebeeld in figuur 2. Maar is dit de interessantste soort? We zullen er in een volgend artikel op terugkomen en een vergelijkend onderzoek doen met de lemniscaat van Jacob Bernoulli.

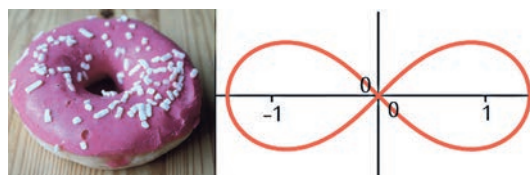
Lemniscaat van Jacob Bernoulli

Er is dus een hele andere soort lemniscaten en daar lusten we wel worst van. Je komt ze tegen bij de Hema. Al decennia lang staat dit bedrijf bekend om haar geweldige rookworsten.



figuur 3

Als we de worst op de juiste manier doorsnijden zal de doorsnede net niet uit twee stukken bestaan en krijgen we iets te zien dat lijkt op een lemniscaatachtig figuur. Maar het is echter nog niet de juiste figuur.



figuur 4

figuur 5 Jacob Bernoulli (1654 - 1705), Zwitserse wis- en natuurkundige

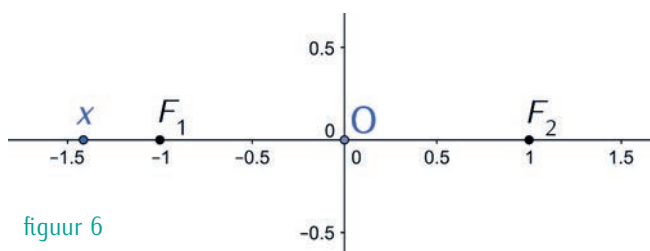


Martin Kindt, een van de schrijvers van het instructie-materiaal, legt uit dat we een torus – denk maar aan een donut of een zwemband – moeten hebben die we dan op de juiste plaats gaan doorsnijden, zie figuur 4.^[2] Deze soort lemniscaten wordt toegeschreven aan Jacob Bernoulli. Ze zijn weer bijzondere gevallen van de ovalen van Cassini. Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712) was een Italiaanse astronoom. Een ovaal van Cassini is een meetkundige figuur die bestaat uit de punten waarvan de afstanden tot twee vaste brandpunten F_1 en F_2 een constant product hebben. U herinnert zich wellicht het artikel 'Afstandsverhoudingen' uit *Euclides* 91-3 van 2016.^[3] Wat is de meetkundige plaats van alle punten P waarbij de som, verschil en quotiënt van de afstanden tot de vaste punten F_1 en F_2 constant is? Het leverde achtereenvolgens op de figuren ellips, hyperbool en de cirkel van Apollonius. Het artikel eindigde met de uitdaging: 'Wat is de meetkundige plaats van alle punten P waarbij het product van de afstanden tot de vaste punten F_1 en F_2 , dus $PF_1 \cdot PF_2$ constant is?' En dat gaan we nu nader onderzoeken.

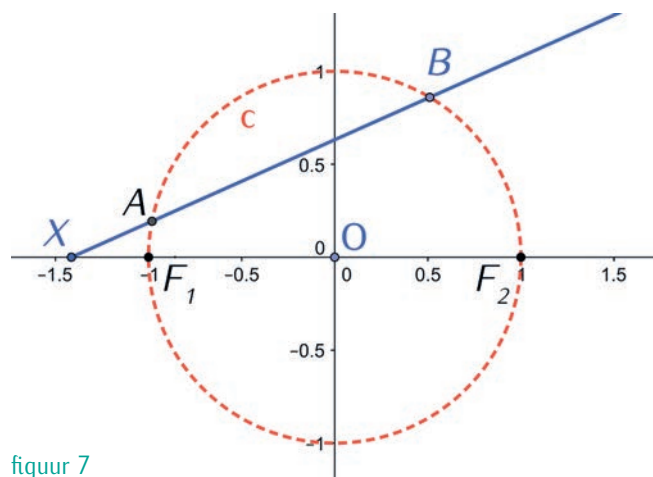
Constructie van lemniscaat van Bernoulli

Voor de lemniscaat van Bernoulli geldt dat dit constante product gelijk is aan het kwadraat van de halve afstand tussen de vaste punten F_1 en F_2 . We nemen een positief getal a en voeren drie punten in: $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$ en variabel punt $P(x, y)$. Er geldt: $F_1F_2 = 2a$.

We bekijken eerst het speciale geval $a = 1$. De brandpunten zijn nu $F_1(-1, 0)$ en $F_2(1, 0)$ en de lemniscaat-constante is gelijk aan 1. Buiten de oorsprong zijn er nog twee punten op de x-as die op de lemniscaat liggen. Ga maar na dat punt $X(-\sqrt{2}, 0)$ ook op die kromme ligt. We tekenen de punten in *GeoGebra*.

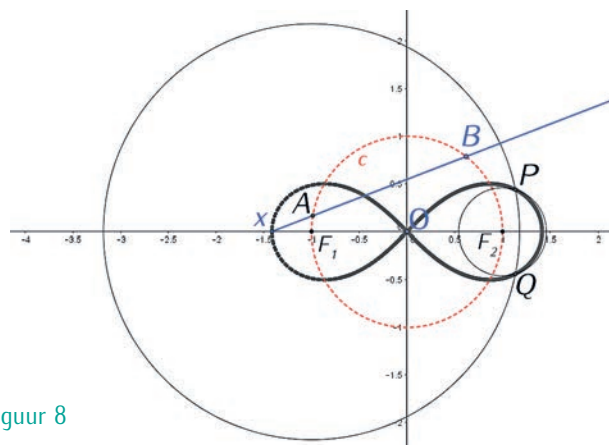


figuur 6



figuur 7

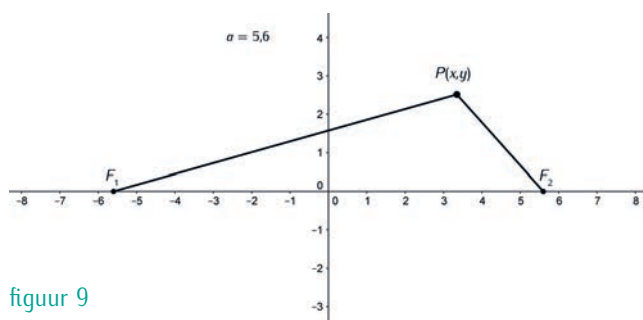
Het feit $XF_1 \cdot XF_2 = 1$, doet denken aan de macht van een punt ten opzichte van een cirkel met F_1F_2 als diameter. Nemen we op die cirkel een variabel punt B dan zal halflijn XB met de cirkel een tweede snijpunt A opleveren. En dan geldt voor die punten A en B : $XA \cdot XB = XF_1 \cdot XF_2 = 1$. We zijn nu op zoek naar een punt P waarvoor geldt: $PF_1 \cdot PF_2 = 1$. Zo'n punt P kan dan liggen op twee cirkels waarvan F_1 en F_2 middelpunten zijn. Voor de stralen kiezen we dan de afstand XB en XA . In *GeoGebra* tekenen we dus de cirkels (F_1, XB) en (F_2, XA) . Dat levert twee snijpunten op die we P en Q noemen. In beide punten zetten we het spoor aan. We roteren halflijn XB , punt B beweegt zich over de cirkel en de beide sporen vormen samen het lemniscaat. Zie figuur 8.



figuur 8

Formule opstellen van een lemniscaat

We keren terug naar het algemene geval waarbij $F_1F_2 = 2a$. We zetten *GeoGebra* weer in, dit keer met een schuifbalk. Bij Bernoulli moet nu gelden: $PF_1 \cdot PF_2 = a^2$. De afstanden kunnen we uitdrukken in a , x en y . Zie figuur 9 voor een speciaal geval.



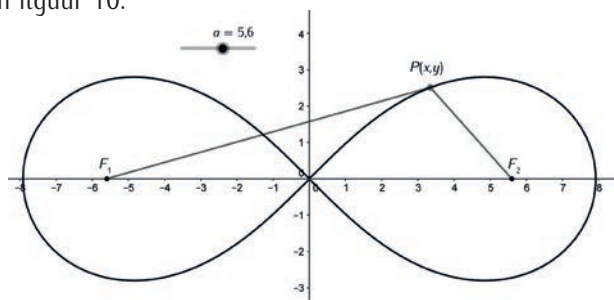
figuur 9

We berekenen de afstanden en substitueren in de vergelijking $PF_1 \cdot PF_2 = a^2$.

Dat geeft: $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$.

We kwadrateren en vinden de formule: $((x+a)^2 + y^2) \cdot ((x-a)^2 + y^2) = a^4$. In *GeoGebra* kun je met deze formule al aan de slag. Als je het er voor over hebt om de haakjes weg te werken, zul je zien dat veel termen tegen elkaar wegvallen. Je gaat krijgen (als het goed gaat): $x^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4 = 0$. En dit kun je vervangen door: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

Met de schuifbalk in *GeoGebra* krijgen we de grafiek van figuur 10.



figuur 10

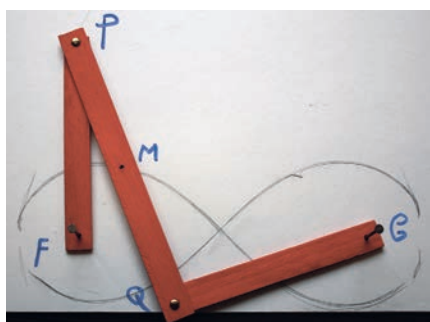
In *Surfer* moet je een formule invoeren en die hebben we afgeleid. In figuur 11 zien we het resultaat.



figuur 11

Zelf een lemniscaatapparaat maken

De schotse uitvinder van de stoommachine James Watt (1736 - 1819) bedacht een apparaatje: met behulp van drie verbindingen maakte hij een tekenapparaat voor een lemniscaat. Leerlingen kunnen met behulp van een plankje, twee spijkers, twee splitpennen en drie roerstokjes het apparaat zelf maken. Lengte van latje PQ (eigenlijk de afstand tussen de twee splitpennen) moet gelijk zijn aan de afstand tussen de twee spijkers. De twee andere latjes zijn even lang en een factor $\sqrt{2}$ kleiner dan het latje PQ , zie figuur 12. In het midden M van latje PQ plaatsen we een potlood. Door punt P in beweging te brengen ontstaat de kromme.



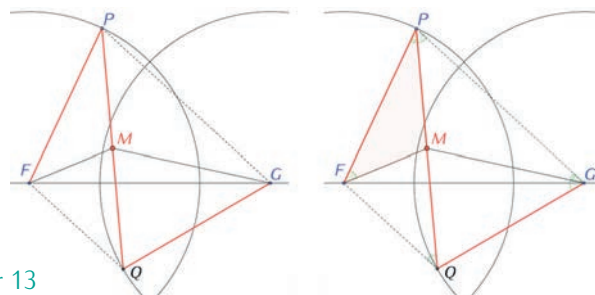
figuur 12

Brengen we het fysieke apparaatje over in een assenstelsel - latjes worden nu lijnstukken - dan doen we dat met de volgende gegevens:

$F(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$ en $G(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$.

$FP = GQ = 1$ en $PQ = FG = \sqrt{2}$.

Met het James Watt-mechaniekje krijgen we een Bernoulli-lemniscaat van breedte 2. Maar we moeten nog wel aantonen dat: $MF \times MG = (\frac{1}{2} \cdot FG)^2 = \frac{1}{2}$.



figuur 13

De afstanden MF , MG en $\frac{1}{2}FG (= PM)$ kunnen we terugvinden in de driehoeken $\triangle FPM$ en $\triangle PGM$ (zie figuur 13). Hopelijk kunnen we iets doen met gelijkvormige driehoeken.

Bewijs:

$\triangle PFM$ is gelijkvormig met $\triangle PQF$ (zhz)

Immers $\angle FPQ$ is gemeenschappelijk en

$$\frac{PF}{PM} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{en} \quad \frac{PQ}{PF} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

Hieruit volgt: $\angle PFM = \angle PQF$

Analoog geldt dat $\triangle QMG$ gelijkvormig is met $\triangle QGP$ (zhz).

Hieruit volgt: $\angle QGM = \angle QPG$. Er is weer hetzelfde verhoudingsgetal $\sqrt{2}$. Daardoor geldt zelfs:

$\angle PFM = \angle PQF = \angle QGM = \angle QPG$. Zie figuur 13, rechts.

Vierhoek $FQGP$ is een gelijkbenig trapezium, want $FP = GQ = 1$ en merk ook op dat FQ evenwijdig is met PG . (gebruik een F-figuur).

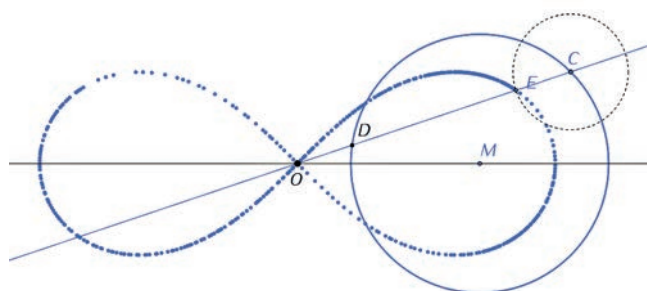
Er geldt ook: $\triangle FPM$ is gelijkvormig met $\triangle PGM$ (hh) want $\angle FPM = \angle MGP$ (van gelijke hoeken P en G trek je gelijke hoeken af) en $\angle PFM = \angle MPG$.

Hieruit volgt: $\frac{FM}{PM} = \frac{PM}{MG}$. Dus $MF \cdot MG =$

$$PM^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}.$$

Andere constructie

Een lemniscaat van Bernoulli kun je ook zien als een bijzondere cissoïde. Wilt u hier meer over weten? Kijk dan op de website van *Euclides*. Ik geef nu alleen de constructie. We construeren een lemniscaat van breedte 2. We hebben nodig een vast punt O en een cirkel c . We stellen eisen aan de grootte van de straal en aan de afstand van het middelpunt M tot het vaste punt O . Neem $OM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en voor de diameter van de cirkel 1. De straal



figuur 14

Meer tijd voor wiskunde

MathPlus zorgt voor een beter begrip van wiskunde



Ontdek de voordelen

- ✓ Differentiatie door een persoonlijke leerroute
- ✓ Door direct inzicht meer tijd voor gerichte ondersteuning
- ✓ Bevordert zelfstandig werken
- ✓ Stimuleert wiskundig denken
- ✓ Geeft wiskunde betekenis

ERVAAR MathPlus

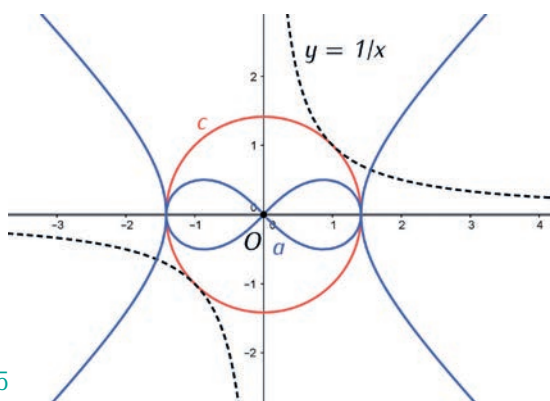
Beoordeel MathPlus eerst zelf of vraag een gratis proefperiode voor uw klas aan op www.mathplus.nl.



is dus $\frac{1}{2}$. De eis moet zijn dat $OM = \text{straal} \times \sqrt{2}$. We tekenen cirkel c in *GeoGebra*. We kiezen een willekeurig punt C op cirkel c . We tekenen een lijn door C en vast punt O die de cirkel snijdt in een ander punt dat we D noemen. We tekenen een tweede cirkel met C als middelpunt en een straal die gelijk is aan OD . Het snijpunt van deze cirkel met lijnstuk OC noemen we E . In punt E zetten we het spoor aan. We verplaatsen punt C over de cirkel en het spoor dat ontstaat, zie figuur 14, gaat lijken op een lemniscaat. Maar dat moet wel bewezen worden. Zie daarvoor de site van *Euclides*.

Tot slot: Constructie met inversie

We gaan een orthogonale hyperbool inverteren. Dat gaat als volgt. Teken in *GeoGebra* de hyperbool $y = \frac{1}{x}$. Om straks een mooier plaatje te krijgen roteren we de hyperbool in de oorsprong met de wijzers van de klok mee over een hoek van 45° . De toppen van de beeldhyperbool zijn $(-\sqrt{2}, 0)$ en $(\sqrt{2}, 0)$. Vervolgens tekenen we een cirkel c met de oorsprong als middelpunt, die door genoemde toppen gaat. De straal van deze cirkel is dus $\sqrt{2}$. Vervolgens spiegelen we de beeldhyperbool in cirkel c . Het inversiebeeld is een lemniscaat, zie figuur 15. De brandpuntsafstand is nu 2 en de breedte van de lemniscaat is $2\sqrt{2}$.



figuur 15

Voor u een uitdaging om na te gaan waarom dat zo is. De lemniscaat van Bernoulli wordt toegepast in de techniek van verschillende soorten hijskranen.



vakbladeuclides.nl/924jansen

Bronnen

- [1] <https://imaginary.org/program/surfer>.
- [2] Martin Kindt. *Figures door Formules*, 2016, NWD 22, FI, Universiteit Utrecht
- [3] Jansen, J. (2015). Uitdagende problemen. Afstandsverhoudingen. *Euclides*, 91(3), pp. 35–37.

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: jacques.jansen@wx.nl

HET FIZIER GERICHT OP...

GRAFIEKEN EN SAMENHANG TUSSEN DE BËTAVAKKEN



Michiel Doorman
Harrie Eijkelhof

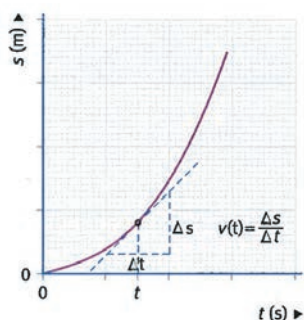
In *Fizier* belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering gaan Michiel Doorman en Harrie Eijkelhof in op de verschillende manieren waarmee er met grafieken wordt omgegaan bij wiskunde en natuurkunde.

Grafieken spelen een belangrijke rol bij het leren van en communiceren binnen de wiskunde en natuurwetenschappen. Bij de verschillende vakken heersen echter vaak verschillende conventies omtrent het maken en gebruiken van grafieken. Voor leerlingen kan dit verwarrend zijn en mogelijke samenhang tussen de bètavakken belemmeren. In deze *Fizier* bespreken we eerst een voorbeeld uit 1998 en daarna twee recente publicaties die proberen deze samenhang te verbeteren.

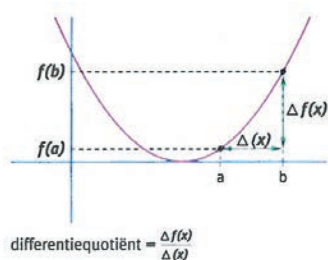
Voorbeeld uit 1998

Bij de invoering van de profielen aan het eind van de vorige eeuw was samenhang een belangrijk thema. Eindelijk kon er gewerkt worden aan een betere afstemming tussen de vakken. Al snel kwamen verschillende conventies naar boven. De helling van een raaklijn aan een grafiek wordt bij wiskunde benaderd met behulp van een differentiequotiënt van een koorde op die grafiek. Tijdens de natuurkundelessen wordt de raaklijn aan een s - t -grafiek gebruikt voor het benaderen van de snelheid op een bepaald tijdstip. Toevallig (?) werd het raaklijn-begrip in de nieuwe natuur- en wiskundemethoden van Thieme (editie 1998) op bijna dezelfde pagina behandeld in hun boeken voor de vierde klas (zie figuur 1 en 2 op de volgende pagina).

In beide boeken was sprake van een raaklijnmethode. Dit voorbeeld laat zien dat de auteurs – vermoedelijk – een poging deden om wiskundig en natuurkundig gebruik van grafieken af te stemmen. Maar de twee voorbeelden laten



figuur 1 In het (s,t) -diagram van een eenparig versnelde beweging is de grootte van de snelheid $v(t)$ op het tijdstip t gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme in dat punt. (Natuurkunde: Newton, vwo informatieboek 1a, p. 197)



figuur 2 Het differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de koorde die de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ verbindt. (Wiskunde: Pascal, vwo informatieboek, p. 189)

ook verschillen zien in notatie, taalgebruik en werkwijze, zie tabel 1.

	Newton	Pascal
notatie	$\Delta s/\Delta t$	$\Delta f(x)/\Delta(x)$
taal	eenparig, diagram	differentiequotiënt, koorde
werkwijze	raaklijn schetsen en op willekeurige plek Δs en Δt bepalen en quotiënt berekenen	a kiezen en vervolgens een b dichtbij kiezen, koorde visualiseren, functiewaarden bepalen en quotiënt berekenen

tabel 1 Verschillen tussen de methoden *Newton* en *Pascal*

Bovendien zou je bij wiskunde vermoedelijk spreken over een t - s -grafiek in plaats van een s - t -diagram, omdat het onderscheid tussen onafhankelijke en afhankelijke variabelen belangrijk is. Daarnaast zijn er vaak verschillen in het gebruik van eenheden bij de assen en het toestaan van negatieve waarden langs de assen (zie ook het onderzoek van Gerrit Roorda^[1]).

Twee recente initiatieven

Recent zijn er hernieuwde pogingen geweest om de samenhang tussen wiskunde en de overige bètavakken te verbeteren: het rapport *Afstemming wiskunde-natuurkunde tweede fase* van de SLO (2015) en *The Language of Mathematics in Science* van de Association for Science Education (2016).^[2] We bespreken kort beide projecten en eindigen met een aanbeveling voor het werken aan samenhang op het gebied van grafieken. In het rapport van de SLO staan suggesties en aanbevelingen voor afstemming tussen wiskunde en natuurkunde

gericht op docenten, auteurs van schoolboeken en examenconstructeurs. Binnen acht thema's wordt het belang van samenhang uitgewerkt. De thema's zijn: rekenkundige en wiskundige vaardigheden, examenwerkwoorden, manipuleren van expressies, nauwkeurigheid en afronden, notaties, evenredigheid en verhoudingen, vectoren en hulpmiddelen. Uit de keuze voor deze thema's spreekt geen specifieke aandacht voor grafieken. In een bijlage wordt echter vermeld dat onderstaande aanbeveling uit een soortgelijk rapport uit 2007 nog steeds van toepassing is:

'De werkgroep beveelt aan dat bij alle bètavakken in het algemeen en bij natuurkunde en wiskunde in het bijzonder op eenzelfde manier met grafieken wordt omgegaan.'

Daartoe is volgens de werkgroep in ieder geval nodig:

- het kennen van elkaars taalgebruik;
- nadrukkelijke aandacht bij wiskunde voor de verwerking van meetresultaten in grafieken. Daarbij dient rekening te worden gehouden met de afspraken die bij de natuurkunde gelden;
- nadrukkelijke en afgestemde aandacht in beide vakken voor het analyseren en interpreteren van grafieken;
- het leren van standaardverbanden.^[3]

Deze aanbeveling laat verschillende aspecten zien waarop samenhang kan worden verbeterd: taalgebruik, analyseren en interpreteren van grafieken, en werken met standaardverbanden (bijvoorbeeld lineair, omgekeerd, (omgekeerd) kwadratisch, exponentieel). Maar hij is ook tamelijk ambitieus geformuleerd. Is het wel nodig om op eenzelfde manier om te gaan met grafieken voor de verschillende vakken?

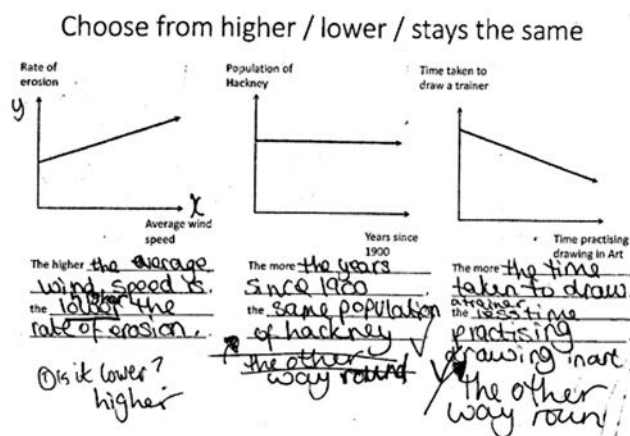


figuur 3 *The Language of Mathematics in Science*. Twee rapporten

In de nieuwe examenprogramma's biologie, scheikunde en natuurkunde in Engeland (voor zestienjarigen) wordt meer dan vroeger aandacht gegeven aan het gebruik van wiskunde. Mede naar aanleiding daarvan is een project uitgevoerd waarin de taal van de wiskunde in de bètavakken centraal staat. Dat heeft geresulteerd in twee rapporten, zie figuur 3. Het eerste rapport beoogt de

terminologie te verhelderen en problemen van leerlingen te signaleren. Het tweede beschrijft acht praktijkvoorbeelden van wiskundige onderwerpen in andere vakken. Centraal staan de vragen hoe leerlingen op de activiteiten reageren en hoe docenten wiskunde en natuurwetenschappen met elkaar op school kunnen samenwerken. Een van de hoofdstukken (hoofdstuk 7) in het eerste rapport is gewijd aan het interpreteren en met woorden beschrijven van uiteenlopende grafieken. Dit kan aan de hand van vragen zoals: waar gaat de grafiek over, welke variabelen spelen een rol, wat is het bereik, wat betekent het als x toeneemt of als de lijn niet door de oorsprong gaat?

In het tweede rapport doet een leraar verslag van de ervaringen met een les over de interpretatie van grafieken.^[4] In de les wordt leerlingen gevraagd grafieken te beschrijven aan de hand van zinnen als 'hoe hoger de ..., hoe hoger (of lager) de ...' en 'hoe meer ..., hoe meer (of minder) ...'. Figuur 4 illustreert hoe een leerling worstelt met het aanvullen van de zinnen. De docent schreef later



figuur 4 Grafieken interpreteren

als commentaar: 'It really struck me during the experience how little the two departments talk and so just a few links embedded in lessons and an awareness of subject overlap could be a really powerful tool.'^[5]

De activiteiten zijn vooral bedoeld om docenten te ondersteunen bij het gebruik van wiskunde in hun vak. Een terugkerend element is dat je bepaalde wiskundige begrippen en technieken moet kennen, maar dat de manier waarop wiskunde gebruikt wordt in bètavakken vooral weloverwogen moet gebeuren en niet een zaak is van het blindelings toepassen van snelle abstracte methoden. Het afstemmen van taalgebruik krijgt daarbij veel aandacht: 'In science, we are used to terms such as "power", "force", "pressure" and so on having different meanings in everyday language, compared with the precise definitions used in science. There are fewer words in the language than meanings in the world to be expressed. It is not that science is correct and everyday language is wrong, but that words are used in different ways in different contexts.'

It is important for pupils to be able to recognise these differences when they move between contexts. In a similar way, there are differences in the way that some terms are used in mathematics and science. One example is the term "line", which has a more precise meaning in mathematics than the way it is often used in science.'^[6]

In een bijlage worden 155 wiskundige termen besproken met, waar relevant, de afwijking van de interpretatie bij andere bètavakken.

Slot

Met deze publicaties zijn weer stappen gezet richting een afstemming tussen wiskunde en de andere bètavakken. Een afstemming die vanuit de leerlingen gezien zeker gewenst is. Een activiteit die u op school zou kunnen uitvoeren is om eens collega's van andere vakken te vragen om een grafiek mee te nemen voor een gezamenlijk overleg over taal, notaties en werkwijzen. Dat zal ongetwijfeld vakspecifieke, maar ook generieke aspecten aan het licht brengen waarmee u en uw collega's het onderwijs meer samenhang kunnen geven.

Noten

- [1] Roorda, G. (2012). *Ontwikkeling in verandering. Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.
- [2] Konijnenberg, J. van de, Paus, J. Pieters, M. Rijke, K. Sonneveld, W. (2015). *Afstemming wiskundenatuurkunde tweede fase*. Enschede: SLO. Te downloaden op: <http://www.slo.nl/organisatie/recentepublicaties/afstemmingwina/>
- [3] Needham, R. (2016). *The Language of Mathematics in Science. Teacher's approaches*. Hatfield: Association for Science Education. Te downloaden op: <http://www.ase.org.uk/resources/maths-in-science/>
- [4] Bohan, R. (2016). *The Language of Mathematics in Science. A Guide for Teachers of 11-16 science*. Hatfield: Association for Science Education. Te downloaden op: <http://www.ase.org.uk/resources/maths-in-science/>
- [5] Konijnenberg, J. van de, Paus, J. Pieters, M. Rijke, K. Sonneveld, W. (2015). *Afstemming wiskundenatuurkunde tweede fase*, p. 27.
- [6] Needham, R. (2016). *Teacher approaches*, p. 51.
- [7] Needham, R. (2016). *Teacher approaches*, p. 58.
- [8] Bohan, R. (2016). *A Guide for Teachers*, p. 2.

Over de auteurs

Michiel Doorman en Harrie Eijkelhof zijn werkzaam bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. E-mailadressen: M.Doorman@uu.nl en H.M.C.Eijkelhof@uu.nl



Maak interactief online lesmateriaal voor wiskunde en rekenen

De Digitale
Wiskunde
Omgeving

Hoge kwaliteit interactie en weergave
Op onderzoek gebaseerde didactische principes
Met veel lessenseries en oefenmateriaal
Aanvullend op uw bestaande methode
Lage kosten



Bezoek ons op de Nationale Wiskunde Dagen op 3 en 4 februari 2017!

Ervaar tijdens onze inspirerende presentatie op
vrijdag 3 februari om 17.15 uur zelf hoe ook u
wiskunde en rekenen leren leuker en makkelijker
kunt maken voor uw leerlingen.

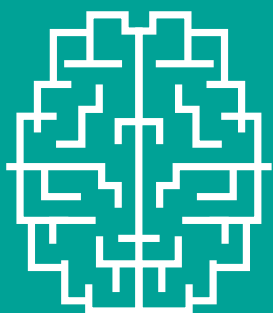
Lees meer op:
www.numworx.nl/nwd2017

Krijg nu 50% korting
op het abonnement
Lees meer op:
www.numworx.nl/kosten

Make, learn, grow

PUZZEL 92-4

WIE WINT?



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Een van de mooie vermoedens van Erdős is het *distinct distances problem*. Het werd in *Pythagoras* mooi uitgelegd en als volgt beschreven^[1]: Teken n punten in een plat vlak en verbind elk tweetal punten met een rechte lijn. Lijnen van verschillende lengte geef je verschillende kleuren, lijnen van gelijke lengte krijgen dezelfde kleur. De vraag die Erdős in 1946 stelde is: Wat is het kleinst mogelijke aantal kleuren voor n punten? Hij gaf een vermoeden dat die functie in de buurt ligt van $c \cdot n / \sqrt{\ln(n)}$ en bewees dat dit een bovengrens is.^[2] In 1910 werd een scherpe ondergrens bewezen $c \cdot n / \ln(n)$.^[3] Deze puzzel gaat niet over dat bewijs. Wel gaan we kijken hoe we die n punten zouden kunnen zetten. We gaan drie verschillende methoden bekijken en met elkaar vergelijken:

1. Zet alle punten op de hoekpunten van een regelmatige n -hoek. Het daarmee te realiseren kleinste aantal verschillende afstanden noemen we $R(n)$.
2. Zet alle punten op roosterpunten van orthogonaal roosterpapier (het bekende vierkante ruitjespapier). Het kleinste aantal benodigde kleuren noemen we $V(n)$.
3. Zet alle punten op roosterpunten van isometrisch roosterpapier (= rooster van gelijkzijdige driehoeken). Het kleinste aantal benodigde kleuren noemen we $D(n)$.

Methode 1 is niet moeilijk:

Opgave 1 - Bepaal hoe $R(n)$ afhangt van n .

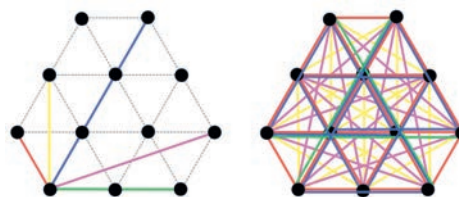
Opgave 2 - Bepaal $V(25)$ en vergelijk dat met $R(25)$.

Methode 2 lijkt niet erg efficiënt, maar naarmate n groter wordt, zijn er steeds meer puntenparen te vinden met onderling gelijke afstand. Dat geldt natuurlijk voor afstanden waarvan de gelijkheid volgt uit de symmetrieën in het puntenrooster. Als het goed is heeft u daar in opgave 2 al rekening mee gehouden. Maar daarnaast zijn alle afstanden schuine zijden van rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden langs de roosterlijnen en die kunnen, ook als die rechthoekige driehoeken niet congruent zijn, toch aan elkaar gelijk zijn. Zo geldt bijvoorbeeld dat afstand 5 behalve langs de roosterlijnen, ook op een schuine lijn gevonden kan worden (Pythagoras tripletten). En ook bijvoorbeeld $\sqrt{50}$ kan op twee manieren worden gevonden: met rechthoekszijden 1 en 7 of met twee rechthoekszijden van 5. En dan geldt dat natuurlijk ook voor alle veelvouden daarvan.

Opgave 3 - Bepaal voor methode 2 behalve lengte 5 en $\sqrt{50}$ nog minstens twee paren gelijke lengtes ≤ 11 die niet ontstaan door de symmetrieën van het rooster.

Opgave 4 - Bepaal voor welke n voor het eerst geldt dat methode 2 gunstiger is dan methode 1, dus $V(n) < R(n)$. Bepaal zelf hoe u de punten op het rooster plaatst.

Maar methode 3 zou nog gunstiger kunnen zijn. Zie bijvoorbeeld figuur 1, links (van elke kleur één voorbeeld) en rechts (alle afstanden in kleur afgebeeld), met vijf kleuren voor twaalf punten, terwijl methode 1 daar zes kleuren voor nodig heeft, dus $R(12) - D(12) = 1$.



figuur 1

Opgave 5 - Onderzoek voor welke n er voor het eerst geldt: $R(n) - D(n) \geq 2$. Daarbij moet u zelf bedenken hoe u de punten op het isometrisch roosterpapier neerzet.

Ook bij methode 3 kunnen er bij grotere waarden van n gelijke afstanden voorkomen anders dan wat direct uit de symmetrieën van het rooster volgt.

Opgave 6 - Bepaal de kleinste twee afstanden tussen roosterpunten op isometrisch roosterpapier die elk minstens twee keer voorkomen, afgezien van wat direct uit de symmetrieën van het rooster volgt.

Extra voor de liefhebbers: u kent waarschijnlijk een methode om Pythagoras tripletten te genereren. Kunt u zo'n recept ook opstellen voor viertallen als 1, 7, 5, 5 (met $1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2 = 50$)? En voor gelijke afstanden in het driehoekenrooster die niet volgen uit de symmetrieën daarin?

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvrager van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 5 februari 2017 binnen zijn. De uitwerking van puzzel 92-3 en de ladderstand zijn te vinden op de website.



vakbladeuclides.nl/924puzzel

Noten

- [1] Brandhof, A. van den, Pík, D. (2015). Een afstandsprobleem. *Pythagoras*, 54(3), pp. 18–21.
- [2] Erdős, P. (1946). On Sets of Distances of n Points. *The American Mathematical Monthly*, 53(5), pp. 248–250.
- [3] Guth, L., Katz, N.H. (2015). On the Erdős distinct distances problem in the plane. *Annals of Mathematics*, 181(1), pp 155–190.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 92-2 is:

H. Klein	194	G. Bouwhuis	114
L. Pos	184	J. Remijn	99
J. Guichelaar	136	H. Bakker	91
A. Grünefeld	132	K. van der Straaten	78
F. van Hoeve	122	F. Göbel	64

We feliciteren Hans Klein van harte met de ladderprijs.

WERELDWISKUNDE FONDS STEUNT STICHTING MADAGASKAR

Rola Hulsbergen



Geschiedenis

De stichting Madagaskar bestaat sinds 1992. Oprichter was pater Ed Mulderink, een jezuïet, die woonde en werkte in het district rond Talata Volonondry in Madagaskar. Hij kreeg op het (inmiddels opgeheven) Aloysius College in Den Haag steun in de vorm van vele acties door docenten en leerlingen. In het dorp Talata werd een borduuratelier opgericht waar de plaatselijke vrouwen een inkomen verdienden. Door het vrijwel volledig ontbreken van industrie, de primitieve landbouwmethodes en de vele monden die moeten worden gevoed is het district voorsnog gedeeltelijk afhankelijk van buitenlandse hulp. Stichting Madagaskar richt zich niet op voedselhulp maar op de instandhouding en verbetering van de onderwijsomstandigheden. Met het geld dat de stichting bij elkaar krijgt, worden schooltjes gebouwd en ondersteund. Ook worden de onderwijzers gesteund met een aanvulling op hun salaris. Jaarlijks worden de schooltjes bezocht door één of meerdere vertegenwoordigers van de stichting. Zij doen dit voor eigen rekening.

figuur 1 Leerlingen uit de examenklas hebben voor het eerst een rekenmachine, passer en wiskundeboek in handen.



Bezoek aan het Technisch Lyceum

31 oktober 2016 was voor ons, vertegenwoordigers van Stichting Madagaskar, maar vooral voor het Technisch Lyceum in Ampahidralambo, een gedenkwaardige dag. Voor het eerst kreeg de examenklas van het Technisch

Lyceum, jongens en meisjes die studeren voor het *baccalauréat*, zowel een wiskundeboek als een rekenmachine en een passer in handen. Ze zijn er ongelofelijk blij mee. Het is onvoorstelbaar dat ze al enkele jaren met wiskunde bezig zijn zonder dat ze ooit een boek in handen hebben gehad. De leraar legde tot nu toe uit met een krijtje op het bord, de leerlingen schreven alles op, luisterden en dachten mee met de leraar.

Er is bij deze jongelui veel discipline, ze werken doelgericht en ambitieus naar het diploma waarmee ze een goede kans maken op de krappe arbeidsmarkt. Binnenkort krijgen ook klas 1 en 2 de beschikking over leermateriaal, zodat ze met nog meer succes aan hun toekomst kunnen werken. De werkgroep Wereldwiskunde Fonds heeft met haar schenking van € 2507 aan het Technisch Lyceum een zeer goede daad verricht. Hartelijk bedankt hiervoor!

Meer informatie over de stichting Madagaskar is te vinden op: <http://www.stichtingmadagaskar.nl/>



Over de auteur

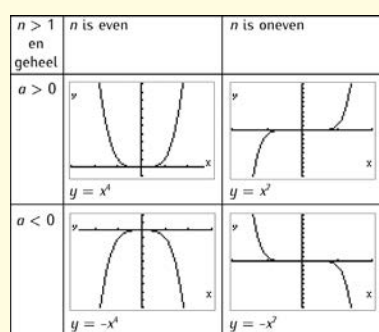
Rola Hulsbergen was tot 2011 rector van het Aloysius College in Den Haag. Ze is momenteel onder andere voorzitter van de stichting Digitaal Leren en secretaris van de stichting Madagaskar. Hiervoor reist ze elk jaar naar Madagaskar om met eigen ogen de voortgang van de projecten te monitoren.

KLEINTJE DIDACTIEK

MACHTSVARBANDEN

Lonneke Boels

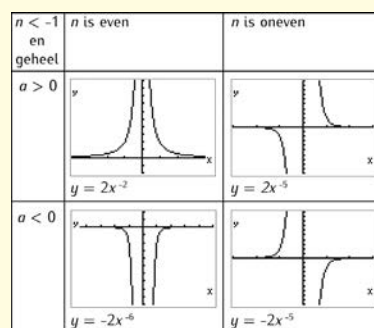
Afgelopen zomer was ik in Hamburg op het *International Congress on Mathematics Education* (ICME-13). Daar vertelde de Chinese Xuhua Sun over het wiskundecurriculum in China dat gebaseerd is op *spiral variation*. *Spiral variation* houdt in dat een begrip of concept niet los wordt geïntroduceerd maar dat eerst alle facetten van het concept in samenhang en in oplopende moeilijkheidsgraad worden aangeboden. Volgens Sun is dit een belangrijke verklarende factor voor het succes van het Chinese onderwijs. Aan deze lezing moest ik terugdenken bij het onderwerp machtsverbanden voor 4 vwo wiskunde B hoofdstuk 7 van *Mathplus* (hoofdstuk 5 in *Getal & Ruimte*, 11^e editie, hoofdstuk 3 in *Moderne Wiskunde*, 11^e editie, hoofdstuk 6 in *Math4all.nl* domein functies en grafieken, hoofdstuk 3 in de *Wageningse Methode*). Voorheen gaf ik het overzicht zoals in figuur 1 altijd als aantekening. De opzet van Mathplus, waarbij in een paragraaf specifiek op eigenschappen van machtsfuncties wordt ingegaan, lokt uit om te onderzoeken wat er gebeurt als je de eisen aan n verandert. Het ontbreken van de schetsen van de standaardgrafieken van alle soorten machtsverbanden zorgt ervoor dat er voor leerlingen daadwerkelijk iets te ontdekken en onderzoeken valt (in tegenstelling tot bijvoorbeeld *Moderne Wiskunde* en *Getal & Ruimte* waar deze grafieken al worden weggegeven) waardoor leerlingen aan het denken worden gezet.



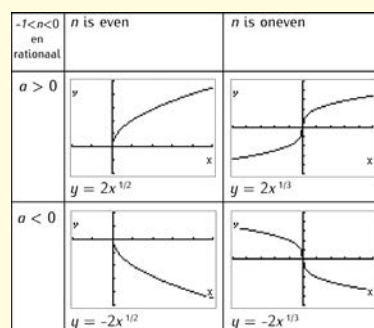
figuur 1
 $y = ax^n$ met $n > 1$
en geheel; vier
mogelijkheden

We onderzochten eerst de vraag wat er gebeurt als $n = 1$ of $n = 0$. Daarna werden dezelfde vier combinaties van mogelijkheden onderzocht als in figuur 1 (n is even of n is oneven met $a > 0$ of $a < 0$) in de volgende situaties:
 $n < -1$ en geheel
 $0 < n < 1$
 $-1 < n < 0$

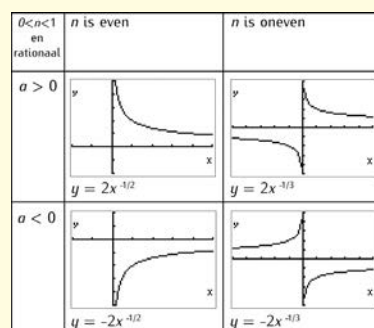
Dit leverde het overzicht van figuur 2, 3 en 4 op. Deze figuren gaven weer aanleiding tot allerlei discussies, bijvoorbeeld over de vraag of er nog andere speciale situaties zijn te bedenken. We hebben bijvoorbeeld bij de situatie van n tussen 0 en 1 alleen rationale getallen bekeken. Maakt het uit of n een wortel is? Hebben de machtsfuncties die we hebben gevonden een naam (wortelfunctie, gebroken functie)? Welke van deze machtsfuncties hebben asymptoten of bijzondere punten? Wat voor bijzondere punten zijn dat? Welk domein of welk bereik hebben ze? En als we wat verder in de stof zijn, kunnen we ons ook afvragen: geven al deze machtsfuncties een rechte lijn op dubbellogaritmisch papier? In mijn wiskunde D-klas kunnen we er nog een vraag aan toevoegen: wat gebeurt er als n een complex getal is? Genoeg stof nog tot verder nadenken.



figuur 2
 $y = ax^n$ met $n < -1$



figuur 3
 $y = ax^n$ met $0 < n < 1$



figuur 4
 $y = ax^n$ met $-1 < n < 0$

De figuren 1 t/m 4 staan als werkblad (dus zonder de tekeningen) op de website van de NVvW.



vakbladeuclides.nl/924boels

JAARREDE 2016

Swier Garst

Dames en heren,
Na drie schoolweken kreeg ik het volgende e-mailtje:

Beste meneer Garst,
Ik vind wiskunde heel leuk om te maken. Heeft u misschien nog extra opdrachten van wiskunde die ik kan maken? Of kan ik verder gaan in het boek? Groetjes, Nienke H1b

Wat maar weer eens laat zien dat we toch een heel mooi vak en een heel mooi beroep hebben. Een beroep waarvan de uitoefening voortdurend in beweging is. Laten we dan ook stil staan bij de verschillende bewegingen die we vanuit onze vereniging waarnemen en waar we als vereniging bij betrokken zijn.

Conferenties

Dit jaar hebben we drie nieuwe conferenties georganiseerd: 'Onderwijs meets onderzoek' waarbij onderzoekers en ontwikkelaars van didactiek van de wiskunde in gesprek gingen met docenten, zeg de afnemers van al die mooie ideeën. De tweede nieuwe conferentie is die over statistiek. Het programma wiskunde A is vernieuwd, we zijn ruim een schooljaar ermee aan het werk en het vernieuwde onderdeel statistiek vraagt veel aandacht. Zo proberen we als NVvW via de leden een enquête uit te zetten onder de leerlingen om op die manier een flinke database aan te leggen waarmee de nieuwe onderdelen van het statistiekprogramma geoefend kunnen worden. Als derde nieuwe bijeenkomst kunnen we de succesvolle vmbo/havo/vwo-onderbouwconferentie melden. Vanuit de werkgroep vmbo was er een mooi programma samengesteld dat ook veel deelnemers uit het vmbo wist aan te trekken. Deze conferentie heeft ook al een opvolger. In de loop van januari zal opnieuw een conferentie vooral gericht op het vmbo en havo/vwo-onderbouw plaatsvinden.

Scholing van docenten

Wat betreft het vmbo moeten we vaststellen dat daar het tekort aan bevoegde leraren al goed voelbaar begint te worden. Er liggen plannen, of misschien beter lapmiddelen, om docenten in het vmbo met vijf jaar leservaring en een pabo-opleiding na een beperkte aanvullende opleiding bevoegd te verklaren voor de eerste twee klassen van vmbo-basis en -kader. We volgen de ontwikkelingen op dit gebied nauwgezet. Daarmee komen we aan bij de scholing van docenten. Zoals de vlag er nu bijhangt zou het Register voor de Leraar in 2017 operationeel moeten worden. In overleg met de beheerders van het Register proberen we te komen tot een pilot, speciaal voor de wiskundeleraars. De voortgang op het hele onderwijsterrein tegelijk blijkt een nauwelijks haalbare kaart. Door de organisatie van een pilot voor wiskundeleraars willen we als NVvW bereiken dat er voor de wiskundeleraars een nuttig en werkbaar Register voor de wiskundeleraar ontstaat. Zo bevorderen we de ontwikkeling van permanente nascholing voor de wiskundeleraar. Wij zijn ons ervan bewust dat regelmatige scholing van de docent een flexibele schoolorganisatie vereist.

Nieuwe ontwikkelingen

Geen wiskundeonderwijs zonder verandering is een ervaringsfeit. Op het gebied van veranderingen vallen twee ontwikkelingen op. Allereerst de veranderingen op het gebied van het vmbo. Met de nieuwe profielen in het vmbo moeten we ons afvragen of het huidige wiskundeprogramma nog wel voldoet in het nieuwe vmbo. Verder laat een studie zien dat het programma wiskunde en het programma rekenen bijna geheel samenvallen. Het overleg op het ministerie is er bij het onderwerp vmbo dan ook op gericht een commissie in te stellen die de programma's wiskunde en rekenen tegen het licht van de nieuwe profielen houden. Gelukkig vinden we op het ministerie een steeds gewilliger oor voor een dergelijke commissie.

En ja we pleiten al twee jaar voor het instellen van deze commissie.

Een tweede plan dat de aandacht vraagt is het rapport Onderwijs 2032. Mooi is dat iedereen ervan overtuigd is dat wiskunde een kernvak is. Verder komt er steeds meer draagvlak voor wiskunde als rode draad door allerlei bètavakken. Immers de schoonheid van vakken als natuurkunde en NLT zit toch in het feit dat veel mooie resultaten in die vakken worden bereikt door het gebruik van wiskunde. De toekomst zal leren wat er overblijft van de ambities van het plan Onderwijs 2032. Wel is een kleine kanttekening hier op zijn plaats. We hebben ook gemerkt dat het plan nog maar weinig leeft onder de leraren. Een reactie op het plan Onderwijs 2032 staat op de website van de vereniging.

Digitale toetsen

Met nieuwe ontwikkelingen moeten we ook de digitale toetsen noemen. In het vmbo kunnen wiskunde-examens digitaal worden afgenomen. Ook bij de digitale tussentijdse toets, de rekentoets en de kennisba-

sistoets bij de lerarenopleidingen zien we digitale toetsen. Bij een toets wiskunde willen we zien hoe de leerling aan het antwoord is gekomen. Dat geeft de mogelijkheid om deels juiste oplossingen naar waarde te kunnen belonen. Verder geeft het de docent inzicht in het denkproces van de leerling. Helaas moeten we op dit moment vaststellen dat de digitale toetsen nog niet op het niveau zijn van de bekende schriftelijke toetsen. Wij hebben ons dan ook steeds kritisch uitgelaten over de huidige digitale toetsen. Dat betekent niet dat we blindelings tegen zijn, maar dat we op zowel de zwakke als de sterke punten van deze manier van toetsen wijzen. Behalve de digitale toetsen zijn er de gebruikelijke toetsen zoals die bij de centrale examens. De NVvW overlegt regelmatig met het CvTE over de verschillende examens. We stellen deze overleggen op hoge prijs en de gesprekken vinden dan ook in een goede sfeer plaats.

Eindexamens

Met de toetsen komen we bij de eindexamens en de correctie ervan. Waar in 2015 de VO-raad een onderzoek publiceerde dat eenvoudig in een kleine prullenbak paste was er dit jaar een onderzoek via het CITO. Doordat het aantal vakken dat in het onderzoek werd meegenomen nogal laag was, besloot de NVvW met een eigen onderzoek een volledig beeld te krijgen van de werkdruk tijdens de examenperiode. Als snel haakten de NVON en de Vereniging van Levende Talen aan bij ons onderzoek. Opmerkelijk resultaat is dat de docenten in overgrote meerderheid aangeven dat er serieus wordt omgegaan met zowel de eerste als de tweede correctie. Het was de VO-raad die de twijfel daaraan de wereld in geholpen had en dat was dan weer de oorzaak van deze nieuwe onderzoeken. Een ander opmerkelijk resultaat van het onderzoek is dat de scholen niet in staat waren de correctoren voldoende in tijd te faciliteren. Volgens mij ligt de bal nu weer bij de VO-raad. Maar goed, niet iedere club die aan de bal is weet te scoren.

NVvW, bestuur en leden

Tot zover hebben we steeds naar onderwerpen gekeken die een relatie met andere organisaties hebben. Laten we toch even naar de eigen vereniging kijken. Zo is er binnen het bestuur de vraag wat er onder de leden leeft. We kunnen dat natuurlijk op onze succesvolle facebookpagina lezen. Waar ik vorig jaar heel trots stond te kijken bij 500 leden zien we nu de teller op 1700 leden staan. Maar of we met facebook en het forum precies weten wat er onder de leden leeft willen we als bestuur ook graag weten. Daarom organiseert het bestuur in het voorjaar van 2017 regionale contactavonden om met de leden in gesprek te gaan. We hopen dan ook op inspirerende bijeenkomsten.

Met communicatie komen we bij ons blad *Euclides*. Het lijkt wel met het jaar nog mooier te worden. Ik kan dan ook niet anders dan Tom Goris met zijn team te complimenteren met het mooie blad. Intussen heeft de redactie afscheid genomen van Marjanne Klom en haar opvolgster Liesbeth Coffeng welkom geheten. Uiteraard wil het bestuur Marjanne hartelijk bedanken voor het werk dat zijn gedaan heeft voor *Euclides* en wensen we Liesbeth veel succes met haar werk.

Een ander medium van onze vereniging is de website. Heleen, officieel onze beleidsmedewerker, maar in werkelijkheid een begrip in wiskundig-bestuurlijk Nederland zal samen met haar Peter en onze webmaster Erik van den Hout de website herzien.

Nu we toch in de sfeer zijn van mensen die hun vrije tijd inzetten voor de vereniging deze dag. We kennen de markt op deze verenigingsdag waar we ook op de hoogte blijven van de nieuwste ontwikkelingen op het gebied van ons werk. Die markt wordt intussen al twintig jaar door dezelfde persoon georganiseerd. Ik vraag u dan ook een groot applaus voor Ruud Jongeling.

Zijn we er nu met de activiteiten van de NVvW? Nee nog lang niet. Overleg met OCW, met politieke partijen, het Platform Wiskunde Nederland, de vaksteunpunten, de Onderwijscoöperatie, de Federatie van Onderwijsvakorganisaties, het Platform Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs, de NVON, de vereniging van Informatica docenten, de Vlaamse vereniging van wiskundeleraars, SLO, de wiskunderaad, de VO raad, Wiskunde D-online om er maar enkele te noemen. Kortom te veel om uitgebreid in een jaarrede te bespreken.

Tot slot

We gaan nog even terug naar Nienke die meer wiskundesommen wilde maken. Ik heb haar natuurlijk een bundel opgaven gestuurd en we waren beiden tevreden. Zij kon het niet laten dit haar klasgenoten te melden. Die kwamen met de vraag: 'Meneer mag je ook een mailtje sturen met de vraag om minder sommen?' Ik stond weer met beide benen op de grond. Er is nog veel werk te doen in H1b. En zo is het ook voor onze vereniging. Kortom aan het werk en dat is niet meer en niet minder dan het verzorgen van goed wiskundeonderwijs.

Ik dank u wel voor de aandacht.



COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvbw.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvbw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvbw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvbw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruis 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2017

vr/za
3/2
4/2

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskunde Dagen

Organisatie: Freudenthal Instituut

6/2
t/m
24/2

UTRECHT

Tentoonstelling Imaginary

wo
8/2

LANDELIJK

OnderbouwWiskundeDag

Organisatie: Freudenthal Instituut

6/3
t/m
24/3

LEIDEN

Tentoonstelling Imaginary

do
16/3

LANDELIJK

Op de scholen: W4Kangoeroe, WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren

Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

vr
17/3

LANDELIJK

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Organisatie: NWO

22/5
t/m
9/6

GRONINGEN

Tentoonstelling Imaginary

2/7
t/m
7/7

GRONINGEN

International workshop on statistical modelling

Organisatie: Rijksuniversiteit Groningen

wo
17/5

TILBURG

Fontys Wiskunde Event

Organisatie: Fontys Lerarenopleiding Tilburg

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 92

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	21 maart 2017	9 januari 2017
6	9 mei 2017	6 maart 2017
7	27 juni 2017	1 mei 2017

Whiz-Kit voor Whizzkids!

U kent ze vast wel, leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo die de 'gewone' wiskundestof snel onder de knie hebben en het leuk vinden uitgedaagd te worden. Speciaal voor hen heeft Casio een boekje ontwikkeld met opgaven die net verder gaan dan de basisstof

Wilt u GRATIS één of meer van deze boekjes ontvangen? Stuur dan een e-mail naar educatie@casio.nl

**De ultieme
uitdaging voor
Whizzkids!**



GETAL & RUIMTE

Ontdek ons nieuwe
digitale lesmateriaal
tijdens de NWD op
3 & 4 februari 2017
getalenruimte.noordhoff.nl

Ervaar nu onze nieuwe 12e editie!

Beschikbaar voor schooljaar 2017/2018:

- de delen 1 en 2 voor leerjaar 1 havo/vwo en 1 vwo.
- de vmbo-delen en Numbers & Space voor leerjaar 1 zijn beschikbaar vanaf schooljaar 2018/2019.

Nieuw bij de 12e editie havo/vwo onderbouw:

- adaptief oefenmateriaal met gerichte feedback;
- differentiatie in niveau o.a. door leerroutes in het digitale lesmateriaal;
- Kangoeroe-opgaven als vorm van differentiatie in het boek;
- instructievideo's van de WiskundeAcademie;
- speciale rekenkaternen bij de werkboeken.



Meer weten over de proeflicentie of een
beoordelingsexemplaar aanvragen? Ga naar

www.getalenruimte.noordhoff.nl



[www.twitter.com/getal_en_ruimte](https://twitter.com/getal_en_ruimte)

www.facebook.com/GetalenRuimte