

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Onderzoek naar het begrip van leerlingen van de afgeleide

Haakjes wegwerken aan de hand van historische bronnen

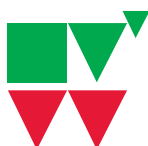
Krommen van Agnes

Online scholing statistiek

Puzzel: ontsnappen uit een driehoekige gevangenis

NR. 2

JARGANG 92 - NOVEMBER 2016



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 92 NR 2

IN DIT NUMMER

BENZINEVERBRUK OF EEN DIFFERENTIEQUOTIËNT

PAULINE VOS
GERRIT ROORDA

4

HAAKJES IN HISTORISCH PERSPECTIEF

HENK HIETBRINK

6

KLEINTJE DIDACTIEK

LONNEKE BOELS

8

WELRIEKENDE WISKUNDE TUSSEN DE WOLKENKRABBERS

REINIER SCHMIERMANN

9

GETUIGEN

DANNY BECKERS

13



VERHALEN UIT HET VMBO

EBRINA SMALLEGANGE

15

WIS EN WAARACHTIG

16

KROMMEN VAN AGNES EN DE NEDERLANDSE WISKUNDEDAGEN 2016

ROB VAN OORD

19

COÖRDINATEN VAN EEN ZWAARTEPUNT

JAN OTTO KRANENBORG

23

BOEKBESPREKING

DICK KLINGENS

27

WERELDWISKUNDE FONDS IN GAMBIA

MIRJAM ABBES

29



BOEKBESPREKING

ROLAND VAN DER VEEN

31

UITDAGENDE PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

33

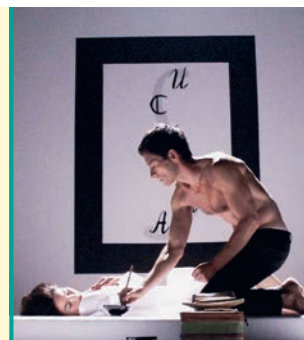


Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

HET FIZIER GERICHT OP...

PAUL DRIJVERS
SIETSKA TACOMA

37

VASTGEROEST

AB VAN DER ROEST

39

WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

40

PUZZEL

42

VERENIGINGSNIEUWS

NOTULEN VAN DE NVVW-VERGADERING



44

SERVICEPAGINA

46

Kort vooraf

Vrijdag 16 september jl is de rondreizende tentoonstelling 'Imaginary' in Eindhoven geopend met een aantal voordrachten en een écht doorgeknapt lint. Een van de sprekers was Tom Verhoeff met een mooi miniatuurtje over de wiskunstige objecten van zijn vader, Koos Verhoeff. De titel van de voordracht was 'Zichtbare en onzichtbare wiskunde'. Veel objecten van Koos hebben meerdere dieperliggende wiskundige dimensies (zie wiskunst.dse.nl), die alleen te doorgronden zijn door het stellen van de juiste vragen. Maar 'Imaginary' laat vooral zien dat er ook zonder die onzichtbare wiskunde te doorgronden, genoeg is te bewonderen. Dat maakt de tentoonstelling zo inspirerend, ook voor bezoekers die helemaal niets met wiskunde hebben. Waarschijnlijk verklaart dat ook het grote succes van 'Imaginary' in de landen waar die al is geweest. Een aanrader om er met leerlingen naartoe te gaan! Het tourschema van 'Imaginary' is meegestuurd en in de volgende *Euclides* komt een verslag van een excursie met leerlingen. Het zichtbaar maken van de onzichtbare wiskunde, is dat ook niet waar een groot aantal artikelen over gaat? Bijvoorbeeld het artikel van Rob van Oord (blz. 19), waarin hij de onzichtbare wiskunde van de patatzak ontrafelt. Of in de bijdrage van Jacques Jansen (blz. 33) waarin hij licht schijnt op een passage uit het boek *Liefde & Wiskunde* van Eduard Frenkel. Een mooi voorbeeld is ook het verhaal van Jan Otto Kranenburg (blz. 23) waarin verwondering over een patroon in zwaartepunten tot een mooi resultaat leidt. En er zullen ongetwijfeld heel veel leerlingen zijn, die het als onze belangrijkste taak zien: het licht laten schijnen op voor hen in eerste instantie onzichtbare wiskunde. Vraag dat maar aan Thom, leerling van Ebrina Smallegange (blz. 15). Of gewoon aan uw eigen leerlingen...

Tom Goris

BENZINEVERBRUIK OF EEN DIFFERENTIE-QUOTIËNT

Pauline Vos
Gerrit Roorda

WAT ZIEN LEERLINGEN?

Hoe lang duurt het voordat leerlingen een wiskundig begrip, bijvoorbeeld de *afgeleide*, flexibel kunnen gebruiken? Hoeveel tijd ligt er tussen de eerste kennismaking met de afgeleide en het moment dat leerlingen het *echt dóór hebben*? Een week? Een maand? Een jaar?

Pauline Vos en Gerrit Roorda hebben dit onderzocht en doen verslag in twee artikelen.

Inleiding

In het wiskundige begrip *afgeleide* komen diverse aspecten samen, zoals functiebegrip, grafische aspecten (raaklijn, richtingscoëfficiënt, hellinggrafiek), algebraïsche aspecten (differentiequotiënt, de afgeleide functie) en natuurkundige aspecten (snelheid, versnelling). De afgeleide is de uitkomst van een proces, waarbij je een limietberekening uitvoert op een quotiënt. Maar de afgeleide is ook een object, waarover je holistisch kunt redeneren en waarvan je eigenschappen kunt bewijzen (bijvoorbeeld de kettingregel).^[1] Kortom, de afgeleide is een veelzijdig wiskundig begrip, handig voor het wiskundig beschrijven van veranderingen, maar voor veel leerlingen moeilijk om te leren.

In deze twee artikelen beschrijven we hoe de kennis van leerlingen zich ontwikkelt, zoals we dit hebben waargenomen in onderzoek.^[2] In dit onderzoek volgden we twee jaar lang tien vwo-leerlingen wiskunde B; vanaf het einde van de vierde klas tot aan het begin van de zesde klas. In de vierde klas leerden de leerlingen bij natuurkunde snelheid op één moment (door aan een grafiek een raaklijn te tekenen). In de vijfde klas kregen de leerlingen voor het eerst de afgeleide f' , met raaklijnen aan de grafiek, differentiequotiënten en limieten. Het bleek dat de kennis van de leerlingen na dit eerste hoofdstuk gefragmentariseerd was. Ze hadden allemaal wel iets begrepen, maar het ontbrak aan overzicht en ze waren onhandig in hun taalgebruik. Pas na een half jaar konden de betere leerlingen verbanden leggen. Ze hadden inmiddels veel geoefend met het berekenen van extremen, met de kettingregel en de productregel, ze hadden de afgeleide toegepast op goniometrische en logaritmische functies en ook contextopgaven over de afgeleide gemaakt. Slechts één van de tien leerlingen in de onderzoeksgroep zag een verband tussen de afgeleide en de natuurkundeformules voor afgelegde afstand en snelheid ($s = \frac{1}{2}at^2$ en $v = at$). De betere leerlingen deden er ongeveer een half jaar over voordat ze zich de afgeleide *eigen gemaakt* hadden. De gemiddeld presterende leerlingen kwamen pas na een jaar tot dit niveau. En de zwakkere leerlingen kwamen zelfs

niet of nauwelijks tot een echt begrip. Die konden wel regeltjes toepassen, maar geen verbanden leggen. Later komt hier nog een voorbeeld van.

In het onderzoek zat een opgave over een differentiequotiënt binnen een context van benzineverbruik. We hebben recent de antwoorden van de tien leerlingen opnieuw geanalyseerd. In dit artikel bespreken we de opgave en het theoretisch kader, in het volgende artikel komen de leerlingen aan het woord.

Onderzoeksmethode

Aan het onderzoek namen tien vwo-leerlingen met een N-profiel (dus met wiskunde B) deel: Andy, Bob, Casper, Dorien, Elly, Karin, Maaïke, Nico, Otto en Piet (niet hun echte namen). Ze werden met intervallen van een half jaar geïnterviewd: in het voorjaar in klas 4 vwo (mei), in het najaar in klas 5 vwo (november), in het voorjaar in klas 5 (mei) en in het najaar in klas 6 vwo (november). Elk interview bestond eruit, dat de leerlingen hardop denkend een aantal contextopgaven moesten oplossen. De opgaven gingen (uiteraard) over de afgeleide en waren speciaal voor dit onderzoek ontwikkeld. Het onderliggende wiskundige begrip in de opgaven, de afgeleide, werd niet aan de leerlingen meegedeeld. De woorden 'afgeleide' of 'differentiëren' nam de interviewer niet in de mond, en de symbolen f' of dy/dx werden vermeden in de teksten. De leerlingen moesten dus zelf op het idee komen om de afgeleide te gebruiken. Toen aan het einde van het onderzoek, in de zesde klas, aan de leerlingen gevraagd werd of ze een rode lijn in het onderzoek hadden ontdekt, konden alleen de betere leerlingen benoemen dat het over de afgeleide ging. De zwakkere leerlingen hadden geen idee van een overkoepelend thema. De opgave waarover we hier rapporteren zat niet in alle interviews. In een langlopend onderzoek moet je namelijk de opgaven afwisselen, want als je telkens dezelfde opgaven herhaalt, kunnen de leerlingen zich erop gaan voorbereiden. De opgave waarover we hier rapporteren zat in de drie opeenvolgende interviews vanaf het najaar in vwo 5.

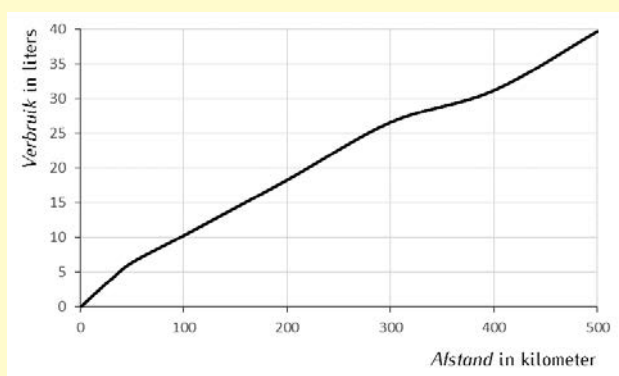
In een auto is een meetsysteem aangebracht, waarmee elke 10 kilometer gemeten wordt hoeveel benzine de auto heeft verbruikt. Tijdens een rit van 500 kilometer zijn de metingen genoteerd. In de tabel zie je enkele metingen die tijdens deze rit zijn gemaakt.

De gereden afstand is a (in km) en de hoeveelheid verbruikte benzine is V (in liter).

a (km)	10	20	30	50	100	200	300	400	500
V (liter)	1,3	2,7	4,0	6,4	10,3	18,3	26,6	31,2	39,7

$V(a)$ is het verbruik na a km.

Alle metingen zijn in een grafiek gezet en daarna is een vloeiende grafiek getrokken door de punten.



Wat betekent in deze situatie $\frac{V(a+h) - V(a)}{h}$?

(In deze formule is h een waarde die je zelf mag kiezen)

figuur 1 De benzineopgave

Benzineopgave

De benzineopgave, zie figuur 1, gaat over een auto en een systeem voor het meten van het benzineverbruik. Deze context is kunstmatig, maar wel voorstelbaar. Wiskundig gezien gaat de opgave over een functie $V(a)$, die het benzineverbruik V (in liters) weergeeft na een gereden afstand a (in kilometers). De opgave vraagt om een interpretatie van een differentiequotiënt, waarin behalve de V en de a , ook een h staat.

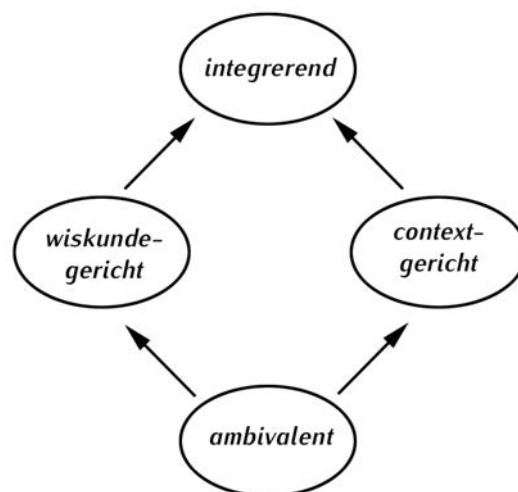
De opgave heeft een aantal bijzondere kenmerken. In de eerste plaats kan ook iemand zonder kennis van de afgeleide een interpretatie van het differentiequotiënt geven. Ten tweede is de vraag naar een interpretatie van een differentiequotiënt afwijkend van standaardopgaven in schoolboeken en eindexamens, want het antwoord is niet een getal maar een verbale omschrijving. Ten derde is de functie $V(a)$ niet gegeven door een functievoorschrift. De automatische stap van veel leerlingen om te gaan rekenen wordt daarmee geblokkeerd.^[3] In de opgave zijn ook een tabel en een grafiek van $V(a)$ toegevoegd. Daarmee wordt niet de context, maar wel de informatie rijker en kunnen we zien aan welke representatie de leerlingen de voorkeur

geven. Om de leerlingen te stimuleren bij hun redeneringen over de benzineopgave werden tijdens het interview aanvullende vragen gesteld. Een aanvullende vraag betrof de invloed van de grootte van h op de betekenis van het differentiequotiënt. Dit kon aanleiding geven tot een wiskundige redenering over het limietproces. Als een leerling geheel in termen van de benzinecontext bleef redeneren werd de vraag gesteld of hij/zij het differentiequotiënt eerder gezien had. Hiermee kon duidelijk worden of leerlingen het differentiequotiënt herkenden van de lessen of van het schoolboek.

Wiskunde- of contextgerichte aanpak

Waar we benieuwd naar waren: zouden de leerlingen meer wiskundig gaan redeneren, dus het differentiequotiënt relateren aan de richtingscoëfficiënt van een koorde, en aan het limietproces en de afgeleide? Of zouden de leerlingen eerder iets gaan zeggen over de context, dus over het gemiddelde verbruik over een traject van h kilometer? Om dit uit de interviews te halen hebben we gebruikgemaakt van het analysekader van Andreas Busse van de Universiteit van Hamburg.^[4] Busse ontdekte dat als leerlingen een wiskundige contextopgave maken, ze verschillende kanten uit kunnen gaan. Hij classificeerde de probleemaanpak in vier ideaaltypen, zie figuur 2: ambivalent (onduidelijke aanpak), wiskundege-richt, contextgericht en integrerend. Het laatste ideaal-type is van het hoogste niveau: op dit niveau kunnen de leerlingen goed verbanden leggen tussen wiskunde en context. Uit Busses onderzoek blijkt dat de ideaal-typen per leerling en per opgave kunnen verschillen: de probleemaanpak van een leerling kan dus bij de ene opgave meer contextgericht zijn en bij een andere opgave meer wiskundegericht, terwijl de probleemaanpak van zijn buurman precies andersom kan zijn.

We geven in deel 2 van dit artikel gedetailleerd de probleemaanpak van vier leerlingen, Elly, Bob, Nico en Dorien, als ze achtereenvolgens in het begin van vwo 5,



figuur 2 De vier ideaaltypen van Busse voor de aanpak van een wiskundige contextopgave

het einde van vwo 5 en het begin van vwo 6 zitten. Misschien wilt u in de tussentijd de opgave eens door uw eigen leerlingen laten maken... Op de website staat de opgave als werkblad.
Wordt vervolgd in *Euclides* 92(3)

Noten

- [1] In de afgeleide kun je ook drie proces-objectparen identificeren. Proces-objectparen zijn twee kanten van een wiskundig begrip. Bijvoorbeeld bij het wiskundige begrip 'cirkel' bestaat de proceskant uit het tekenen met een passer op papier. De objectkant van het begrip 'cirkel' is de verzameling punten die gelijke afstand hebben tot het middelpunt. Of denk aan een breuk, die je kunt zien als een deling, maar ook als getal. Voor het leren van een wiskundig begrip is het belangrijk om vat te krijgen op beide kanten. Bij de afgeleide zijn de proces-objectparen: er is een delingsproces en een quotiënt, er is een limietproces en een limiet, er is een lokaal-globaal proces (een afleiding in een willekeurig punt $x = a$ en een waarde $f'(a)$ die een functie $f'(x)$ wordt).
- [2] Roorda, G. (2012). Ontwikkeling in verandering; ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide. Proefschrift, Rijksuniversiteit Groningen. Digitaal beschikbaar: <http://www.rug.nl/lerarenopleiding/Nieuws/proefschriftGerritRoorda.pdf>
Roorda, G. (2012). Uit de ivoren toren: ontwikkeling in kennis van afgeleiden. *Nieuwe Wiskrant*, 32(2), 14-19.
- [3] In het onderzoek zat nog een andere redeneer-opgave, de Remwegopgave, met een functie $R(v)$ voor de remweg als functie van de snelheid. Er werd om de interpretatie van $R'(80) = 1,50$ gevraagd, zonder dat de functie R gegeven was. Zie: Roorda, G, Braber, N. den & Vos, P. (2008). De remweg als functie van de snelheid; en wat is dan de afgeleide? *Euclides*, 83(6), 314-317.
- [4] Busse, A. (2011). Upper secondary students' handling of real-world contexts. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G.A. Stillman (red.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (blz. 37-46). Berlijn: Springer.



vakbladeuclides.nl/922vos

Over de auteurs

Pauline Vos is hoogleraar Mathematics Education aan de Universiteit van Agder (Noorwegen).

Email: fpvos@hotmail.com

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde aan de Universitaire Lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen en aan de Masteropleiding Leraar Wiskunde van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden.

Email: g.roorda@rug.nl

HAAKJES IN HISTORISCH PERSPECTIEF

Henk Hietbrink

Haakjes wegwerken is typisch zo'n vaardigheid die na de zomervakantie wel enige opfrissing behoeft. Henk Hietbrink bedacht een werkwijze om dat aantrekkelijker te maken: het inzetten van historische bronnen.

Plato en Euclides

De eerste les van het schooljaar open ik in 4 vwo-wiskunde B met de vertrouwde stelling van Pythagoras: 'a-kwadraat plus b-kwadraat is c-kwadraat' roept iedereen dan meteen. Maar ook de betekenis van die mantra herinneren de leerlingen zich nog wel: als de driehoek rechthoekig is, met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c , dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$ en omgekeerd als $a^2 + b^2 = c^2$, dan is de driehoek rechthoekig. Vervolgens vraag ik de klas of het ze wel eens opgevallen is dat er dan meestal van die mooie kloppende getallen-voorbeelden gegeven worden. 'Drie vier vijf' klinkt het dan vaak. Hoe zou je die kunnen bedenken? Ik vertel de klas dat er recepten bestaan om mooie, lees: geheeltallige, rechthoekige driehoeken te maken. Te beginnen met het recept dat aan Plato toegeschreven wordt, zie figuur 1.

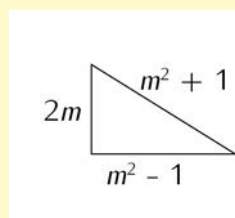
Recept van Plato

Neem een geheeltallige m

Bereken de rechthoekszijde $a = 2 \times m$

Bereken de rechthoekszijde $b = m^2 - 1$

Bereken de langste zijde $c = m^2 + 1$



figuur 1

Ik laat de leerlingen eerst een getallenvoorbeeld uitwerken. 'Neem bijvoorbeeld je huisnummer voor m .' Maar daarna gaat het algebraïsch! De klas werkt $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2$ uit en werkt $(m^2 + 1)^2$ uit door de haakjes weg te werken. De meeste leerlingen ontdekken een aanpak: het is veel handiger om eerst in beide uitdrukkingen de haakjes weg te werken en te concluderen dat rechts

hetzelfde staat als links. Dat is veel eenvoudiger dan te proberen om vanuit $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2$ uit te komen op $(m^2 + 1)^2$. Ook zien ze het verschil tussen een vergelijking oplossen (dat is hier niet aan de orde) en een uitdrukking herleiden.

Vervolgens gaan we verder met het recept van Euclides, figuur 2.

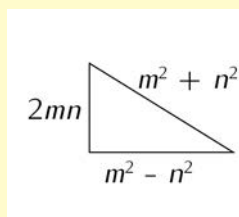
Recept van Euclides

Neem een geheeltallige m en n , met $m > n$

Bereken de rechthoekszijde $a = m^2 - n^2$

Bereken de rechthoekszijde $b = 2mn$

Bereken de langste zijde $c = m^2 + n^2$

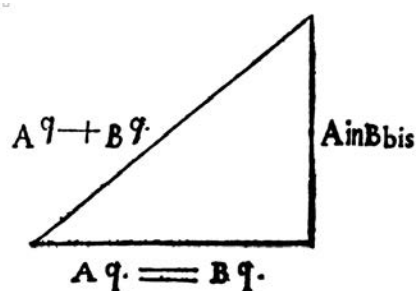


figuur 2

We beginnen weer met een eigen getallenvoorbeeld. 'Neem bijvoorbeeld twee cijfers uit je telefoonnummer'. Vervolgens tonen we met de variabelen m en n aan dat dit recept altijd een geheeltallige rechthoekige driehoek oplevert. Ook hier benadruk ik dat de opdracht is om de ene uitdrukking, links, te herleiden tot de andere uitdrukking, rechts. En dat je het bewijs uitwerkt door van twee kanten te beginnen: alle haakjes wegwerken, zowel bij $(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2$ als bij $(m^2 + n^2)^2$ en daarna beide uitdrukkingen met elkaar vergelijken.

'Slimmer dan zeventiende-eeuwers'

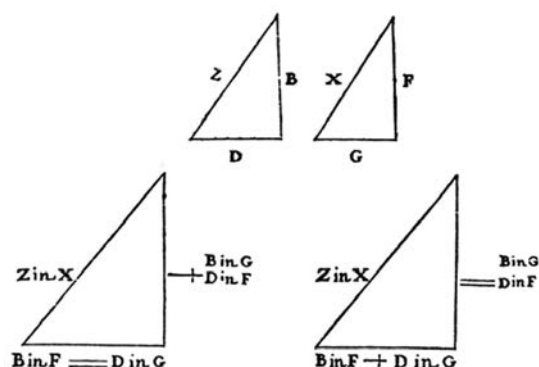
Derde deel van de les is een korte introductie van het werk van de Fransman Franciscus Viète, dat rond 1600 verscheen. De afbeelding in figuur 3 komt uit zijn boek. De notatie is nog wat onbeholpen. Zo betekent Aq het kwadraat van A , betekent $AinB$ het product van A met B , $AinBbis$ is dan tweemaal A keer B . Het '=' teken betekent minus. Deze tekening geeft dus het recept van Euclides, maar dan anders opgeschreven.



figuur 3

De boodschap is dat wiskunde een vak is dat al oud is en zich stapsgewijs verder ontwikkelt. Grappig is dat leerlingen zichzelf veel slimmer vinden dan die zeventiende-eeuwers. Als zij dat kunnen, dan kunnen wij dat ook. Deze jeugdige overmoed is in deze les een belangrijke motivator en een beetje doorzettingsvermogen kunnen ze wel gebruiken bij het vierde deel.

Klap op de vuurpijl is de volgende bewering bij de tekeningen van Viète in figuur 4. Boven staan twee rechthoekige driehoeken en volgens Viète zijn de twee driehoeken daaronder ook rechthoekig. De notatie is historisch authentiek en de leerlingen kennen hem uit de vorige opgave.



figuur 4

Ook hier mogen leerlingen eerst met getallenvoorbeelden aan de slag. Omdat een voorbeeld geen bewijs is, moet het daarna uiteraard algebraïsch. Er zijn maar liefst zes variabelen. In deze opdracht zit veel verstopt, bijvoorbeeld de substitutie $(ZX)^2 = Z^2X^2 = (B^2 + D^2)(F^2 + G^2)$. Bij het herleiden kan van alles fout gaan. Samenwerken is nu heel belangrijk: de leerlingen controleren elkaars werk continu, want een foutje met een minnetje is zo gemaakt. Leerlingen ontdekken dat deze uitwerking niet zonder tussenstappen kan. Aan het einde van de les is voor iedereen duidelijk hoe dat ook al weer zat met die haakjes. Bovendien weet ik als docent na de eerste les direct wie terugdeinzen voor een (beetje) algebra en wie zich stevig vastbijt in haakjes...

Meer informatie

Zie www.fransvanschooten.nl voor meer historische variaties op het thema driehoeken met geheeltallige zijden.

Over de auteur

Henk Hietbrink is docent wiskunde aan het St Gregorius College te Utrecht, is als gast verbonden aan de vakgroep Geschiedenis van de Wiskunde van de Universiteit Utrecht en heeft tijdens een *Leraar In Onderzoek* traject de website www.fransvanschooten.nl ontwikkeld. Emailadres: hietbrink.h@planet.nl

KLEINTJE DIDACTIEK

VOORTGEZETTE INTEGRAALREKENING

Vinden uw leerlingen voortgezette integraalrekening ook zo lastig? Voor wie dit onderwerp van wiskunde B niet doceert: dit is een mogelijk keuzeonderwerp bij wiskunde B en gaat bijvoorbeeld over partieel integreren, integreren via de substitutiemethode en integreren via breuksplitsen. Leerlingen vinden het vaak lastig om te weten welke methode moet worden toegepast als ze op de toets een opgave krijgen, omdat dit nu niet meer door de titel van de paragraaf duidelijk is...

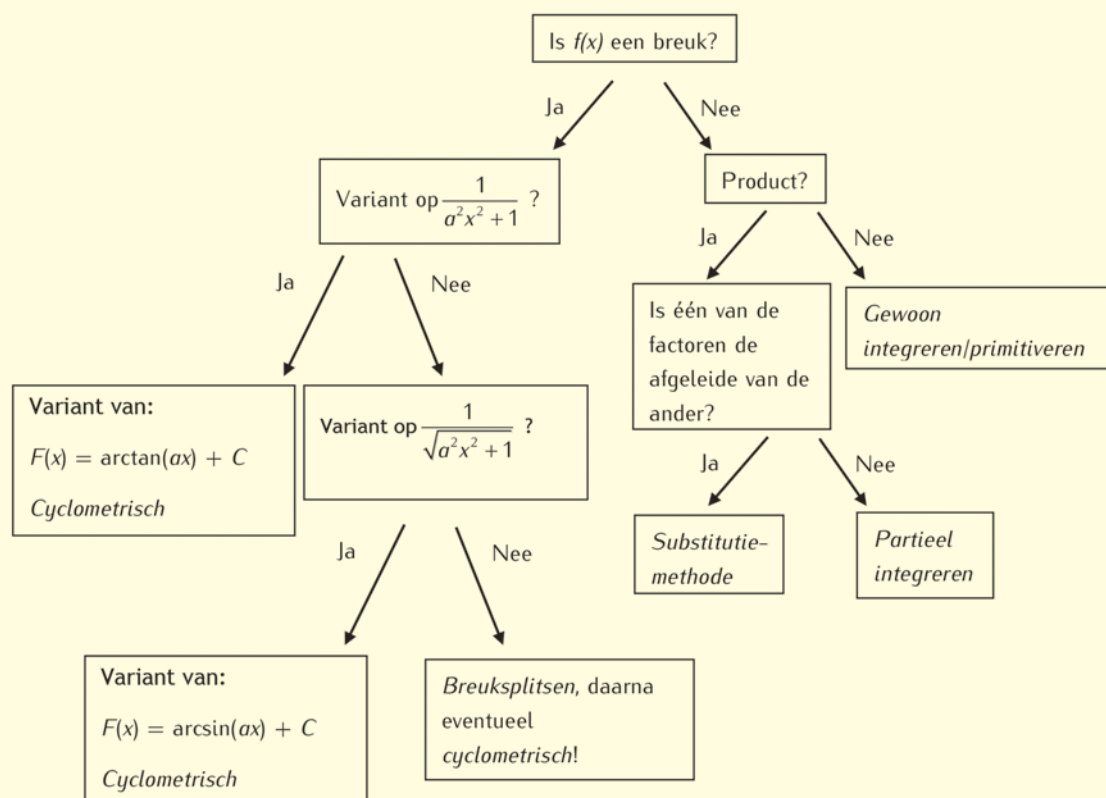
Voor deze leerlingen gebruik ik een stroomschema, zoals in figuur 1. In het ideale geval stel je dit stroomschema samen met de klas op. In het stroomschema begin ik met de vraag: is de gegeven functie een

breuk? Het is ook mogelijk om te starten met de vraag of de gegeven functie een product is maar dat is – vermoed ik – lastiger.

Graag hoor ik wat u van het stroomschema vindt. Aanvullingen of verbeteringen zijn altijd welkom. Het breuksplitsen als methode (via staartdelen of anders) is niet verder uitgewerkt. Dat zou een leuke wiskundige denkactiviteit met de klas zijn.

Tot slot: voor leerlingen met een stoornis in het autistisch spectrum geldt dat ze dit soort stroomschema's of verbanden veel lastiger zelf ontdekken. Voor hen is gezamenlijk zo'n schema opstellen daarom extra nuttig.

Lonneke Boels



figuur 1 Stroomschema voortgezette integraalrekening

WELRIEKENDE WISKUNDE TUSSEN DE WOLKENKRABBERS

Reinier Schmiermann

Van 9 tot 16 juli vond in Hongkong de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats. Het Nederlandse team behaalde hier drie bronzen medailles en drie eervolle vermeldingen. Deelnemer Reinier Schmiermann (15), die twee jaar aan de olympiadetraining heeft meegedaan en inmiddels Technische Wiskunde en Software Science studeert aan de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e), bespreekt in dit artikel opgave 4, de eerste opgave van wedstrijddag 2.

Onvergetelijke ervaring

Hongkong is een plaats waar verschillende culturen elkaar ontmoeten. Ook tijdens de laatste IMO gebeurde dit. Deelnemers van over de hele wereld kwamen samen om zich te buigen over zes pittige wiskundeopgaven, verdeeld over twee dagen. Ook Nederland had weer een team gezonden en ik mocht hier deel van uitmaken. Na een trainingsweek in een luxehotel in Hongkong vertrokken we naar de campus van de Hong Kong University of Science and Technology, waar de wedstrijd plaatsvond. Hier hebben we deelnemers van vele andere landen ontmoet en tijdens de excursies hebben we de Hongkongse cultuur leren kennen. Dit alles was een onvergetelijke ervaring.

Opgave

De wedstrijd was verdeeld over twee dagen. Op elke dag kregen we 4,5 uur voor drie opgaven. De eerste opgave van wedstrijddag 2 luidde als volgt:

Een verzameling positieve gehele getallen noemen we welriekend als die uit minstens twee elementen bestaat en elk van de elementen een priemdelers gemeen heeft met een van de andere elementen. Definieer $P(n) = n^2 + n + 1$. Wat is het kleinst mogelijke gehele getal $b \geq 1$ zodanig dat er een geheel getal $a \geq 0$ bestaat waarvoor de verzameling $\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$ welriekend is?

Wat is hier nu eigenlijk de bedoeling? We gaan opeenvolgende gehele waarden in de polynoom P stoppen en bekijken de uitkomsten hiervan. Zo'n verzameling uitkomsten is welriekend als elke uitkomst een priemfactor gemeen heeft met een andere uitkomst; dus als bijvoorbeeld 15 erbij zit, dan moet er nog een andere uitkomst bij zitten die deelbaar is door 3 of 5. We moeten uiteindelijk de kleinste welriekende verzameling vinden die op deze manier (met de polynoom) is te maken. De grootte van die verzameling is het getal b waar de opgave naar vraagt.

Verkenning

Laten we eerst een aantal kleine waarden van P uitrekenen. We vinden zo de volgende waarden:

n	$P(n)$
1	3
2	7
3	13
4	$21 = 3 \cdot 7$
5	31
6	43
7	$57 = 3 \cdot 19$
8	73
9	$91 = 7 \cdot 13$
10	$111 = 3 \cdot 37$
11	$133 = 7 \cdot 19$
12	157

Ten eerste zien we dat al deze getallen oneven zijn. Dit geldt in het algemeen, aangezien $P(n) = n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ en $n(n+1)$ altijd even is (omdat n of $n+1$ even moet zijn). Dus $P(n)$ is altijd oneven. Aan deze gevallen valt ook op dat $P(n)$ deelbaar lijkt te zijn door 3 als n congruent is aan 1 modulo 3. We kunnen dit vrij makkelijk controleren: als n congruent is aan 1 modulo 3, dan is $P(n) \equiv 1^2 + 1 + 1 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$, dus dit vermoeden klopt inderdaad. Er geldt verder dat als n congruent is aan 1 modulo 3, $n+3$ dit natuurlijk ook is. Hieruit volgt dat in dat geval $P(n)$ en $P(n+3)$ een gemeenschappelijke factor 3 hebben. Wat gebeurt er als n een andere waarde aanneemt modulo 3: kan $P(n)$ dan ook deelbaar zijn door 3? Als $n \equiv 2 \pmod{3}$, dan is $P(n) \equiv 2^2 + 2 + 1 = 7 \equiv 1 \pmod{3}$ en als $n \equiv 0 \pmod{3}$, dan

RECTIFICATIE NAMENS HET BESTUUR VAN DE NVVW

In het artikel 'Vastgeroest' in *Euclides* 92-1 pleit Ab van der Roest voor een exactere benadering van de wiskunde. Dit is echter niet in overeenstemming met de regels die gelden sinds het verschijnen van het artikel 'Gelijke monniken, gelijke kappen' in *Euclides* 90-3 (december 2014, zie <https://www.nvvw.nl/23152/vakinhoudelijk>). Daarin is duidelijk dat het CV alleen moet worden gebruikt als de vraag niet geheel goed is opgelost. De bolletjes geven aan tot waar de leerling is gekomen. Het CV geeft ook de 'geest' aan waarin moet worden nagekeken. In 'Vastgeroest' zijn twee voorbeelden gegeven die niet volgens deze regels worden beoordeeld.

Voorbeeld uit wiskunde B-examen (snijpunt van lijn en grafiek)

In de vraag staat 'bereken' en volgens het nomenclatuurrapport en de nieuwe syllabi betekent dat dat de GR volledig mag worden ingezet. Dat wordt nog duidelijker door naar een antwoord te vragen op twee decimalen nauwkeurig. Een leerling die de GR inzet en daarbij aangeeft hoe hij dat heeft gedaan, geeft daarmee impliciet aan dat hij de vergelijking oplost en verdient het eerste bolletje dus wel. Het CV is bij de beoordeling niet nodig, omdat de leerling de vraag correct oplost en dus alle punten verdient. De toevoeging van Ab dat zelfs 0 punten kan worden verdedigd is apart, omdat er niet expliciet naar algebra wordt gevraagd in deze opgave. Het eerste bolletje is bedoeld voor de leerlingen die niet verder komen dan het opschrijven van de vergelijking en daarmee niet tot een antwoord komen. Als een leerling vastloopt in het algebraïsch oplossen van deze vergelijking, krijgt deze leerling maar 1 punt.

Voorbeeld uit wiskunde A-examen (binomiale verdeling)

In deze vraag geldt ook dat alle punten moeten worden gegeven bij een correct eindantwoord. De leerling laat zien dat het een binomiale verdeling is (door binomcdf) en geeft daarbij ook de n en de p aan, bij de beschrijving van het gebruik van de GR. Het eerste bolletje is ook hier alleen bedoeld voor de leerling die niet verder komt dan dat eerste bolletje (en dus ook niet aangeeft dat het cumulatief moet) en zijn GR op dit punt niet weet te gebruiken om tot een antwoord te komen.

Nawoord van Ab van der Roest

De reactie van het bestuur lezend, wil ik graag toelichten dat ik in de geest van de nieuwe regels nakijk. Ik doe dat echter niet van harte, maar in het besef dat er keuzes gemaakt worden die niet mijn keuzes zijn. Het exacte van de wiskunde vind ik in strijd met de keuzes die de CvTE maakte. Dat is het punt dat ik met mijn 'Vastgeroest' wilde maken.

is $P(n) \equiv 0^2 + 0 + 1 = 1 \equiv 1 \pmod{3}$, dus $P(n)$ is alleen deelbaar door 3 als $n \equiv 1 \pmod{3}$. Misschien hebben we hier later nog wat aan.

Kleine waarden van b

We willen uiteindelijk de kleinste mogelijke waarde van b vinden die voldoet, dus laten we alvast van wat kleine waarden van b gaan vaststellen of deze kunnen voldoen. Als we van een b kunnen bewijzen dat hij niet voldoet, dan geeft dit misschien een idee hoe we van andere b kunnen bewijzen dat ze ook niet voldoen. Bovendien hebben we de opgave opgelost als we een b vinden die wel voldoet en van alle kleinere b hebben bewezen dat deze niet voldoen. In de opgave is gegeven dat een welriekende verzameling uit minstens twee elementen moet bestaan, hieruit volgt dat b minstens 2 moet zijn. Laten we dus eens kijken wat er gebeurt als $b = 2$. De vraag is nu of er een a bestaat zodat de verzameling $\{P(a+1), P(a+2)\}$ welriekend is. Deze verzameling is alleen welriekend als $P(a+1)$ en $P(a+2)$ een gemeenschappelijke priemdelers hebben. Nu kan $a+1$ elk positief geheel getal zijn, dus het is nu de vraag of er een positieve gehele n is zodat $P(n)$ en $P(n+1)$ een gemeenschappelijke priemfactor hebben. Twee getallen hebben een gemeenschappelijke priemdelers dan en slechts dan als hun *grootste gemene deler* (ggd) groter is dan 1. We gaan daarom de ggd van $P(n)$ en $P(n+1)$ berekenen. Er geldt dat $P(n) = n^2 + n + 1$ en $P(n+1) = (n+1)^2 + (n+1) + 1 = n^2 + 3n + 3$. Het gaat hier dus om $\text{ggd}(n^2 + n + 1, n^2 + 3n + 3)$. Nu is er een rekenregel die zegt dat je voor het berekenen van de ggd van twee getallen net zo goed bij een van die getallen een veelvoud van het andere getal kunt optellen. Hiermee vinden we dat de ggd van $P(n)$ en $P(n+1)$ gelijk is aan $\text{ggd}(n^2 + n + 1, n^2 + 3n + 3 - (n^2 + n + 1)) = \text{ggd}(n^2 + n + 1, 2n + 2)$. Omdat we weten dat $n^2 + n + 1$ oneven is, mogen we de tweede term door 2 delen, dus $\text{ggd}(n^2 + n + 1, 2n + 2) = \text{ggd}(n^2 + n + 1, n + 1)$. (Immers $n^2 + n + 1$ is niet deelbaar door 2, dus zijn beide ggd's dit ook niet, zodat de factor 2 in de andere term niets uitmaakt. Ook deze eigenschap zullen we nog een aantal keer tegenkomen. Door nogmaals de rekenregel toe te passen, vinden we dat deze laatste ggd weer gelijk is aan $\text{ggd}(n^2 + n + 1 - n(n+1), n+1) = \text{ggd}(1, n+1) = 1$. We vinden dus dat $\text{ggd}(P(n), P(n+1)) = 1$. Hieruit volgt dat $P(n)$ en $P(n+1)$ nooit een gemeenschappelijke priemfactor kunnen hebben. Er geldt dus dat $b = 2$ niet voldoet. Stel nu dat $b = 3$. We willen nu weten of de verzameling $\{P(a+1), P(a+2), P(a+3)\}$ welriekend kan zijn. Als dit het geval zou zijn, dan weten we dat $P(a+2)$ een priemfactor gemeenschappelijk heeft met $P(a+1)$ of $P(a+3)$. We hebben echter net al bewezen dat de P van twee opeenvolgende getallen nooit een gemeenschappelijke priemfactor kan hebben, dus dit kan niet. We zien nu dus ook dat $b = 3$ ook niet kan, er moet dus gelden dat $b \geq 4$.



figuur 1 Van links naar rechts: Gabriel Visser, Pim Spelier, Reinier Schmiermann, Levi van de Pol, Wietze Koops en Erik van Cappellen tijdens de openingsceremonie.

$b = 4$

Laten we dus verder gaan met het geval $b = 4$. Is er een a zodat de verzameling $\{P(a+1), P(a+2), P(a+3), P(a+4)\}$ welriekend is? Als dit het geval is, dan moet $P(a+2)$ een priemdelers gemeenschappelijk hebben met $P(a+4)$ (want met $P(a+1)$ of $P(a+3)$ is weer geen optie). Op een vergelijkbare manier volgt dat $P(a+3)$ een priemdelers gemeenschappelijk moet hebben met $P(a+1)$. Nu is het dus de vraag of dit kan. Daarvoor kijken we naar de ggd van $P(n)$ en $P(n+2)$.

Er geldt dat $P(n) = n^2 + n + 1$ en $P(n+2) = (n+2)^2 + (n+2) + 1 = n^2 + 5n + 7$, dus $\text{ggd}(P(n), P(n+2)) = \text{ggd}(n^2 + n + 1, n^2 + 5n + 7)$. Als we nu weer de rekenregel voor ggd's toepassen, dan vinden we dat deze ggd gelijk is aan $\text{ggd}(n^2 + n + 1, n^2 + 5n + 7 - (n^2 + n + 1)) = \text{ggd}(n^2 + n + 1, 4n + 6)$. Omdat $n^2 + n + 1$ oneven is, kunnen we de tweede term delen door 2 en dus is deze ggd gelijk aan $\text{ggd}(n^2 + n + 1, 2n + 3)$. Nu geldt dat $2n + 3$ oneven is, dus mogen we de eerste term wel met een factor 2 vermenigvuldigen. Dus $\text{ggd}(n^2 + n + 1, 2n + 3) = \text{ggd}(2n^2 + 2n + 2, 2n + 3)$. Dit is fijn, want deze rechter ggd kunnen we met de rekenregel weer herschrijven tot $\text{ggd}(2n^2 + 2n + 2 - n(2n + 3), 2n + 3) = \text{ggd}(-n + 2, 2n + 3)$. En als we nu nogmaals de rekenregel toepassen, dan vinden we dat deze ggd weer gelijk is aan $\text{ggd}(-n + 2, 2n + 3 + 2(-n + 2)) = \text{ggd}(-n + 2, 7)$.

Deze ggd is altijd 1 of 7, en hij is precies 7 als $-n + 2$ deelbaar is door 7, dus als $n \equiv 2 \pmod{7}$. Dit is dus het enige geval dat $P(n)$ en $P(n+2)$ een gemeenschappelijke priemfactor hebben. In het geval $b = 4$ moest er gelden dat $P(a+1)$ en $P(a+3)$ een gemeenschappelijke priemfactor hebben en dat $P(a+2)$ en $P(a+4)$ een gemeenschappelijke priemfactor hebben. Dit betekent dus dat zowel $a + 1 \equiv 2 \pmod{7}$ als $a + 2 \equiv 2 \pmod{7}$, maar dat kan nooit tegelijkertijd waar zijn. Ook het geval $b = 4$ voldoet dus niet.

$b = 5$

Omdat we nog steeds geen b hebben gevonden die voldoet, gaan we gewoon de volgende b proberen. Stel dus dat $b = 5$. We willen nu weten of de verzameling $\{P(a+1), P(a+2), P(a+3), P(a+4), P(a+5)\}$ welriekend kan zijn. Stel dat deze verzameling welriekend is, dan moet er dus ook gelden dat $P(a+3)$ een priemfactor gemeenschappelijk heeft met een van de andere getallen in deze verzameling, en dat moet dan om $P(a+1)$ of $P(a+5)$ gaan. Met wat we net hebben bewezen, geeft dit dat $a + 1 \equiv 2 \pmod{7}$ of $a + 3 \equiv 2 \pmod{7}$. Uit de welriekendheid van de verzameling volgt ook dat $P(a+2)$ een gemeenschappelijke priemfactor moet hebben met een ander element. Nu weten we weer dat $P(a+1)$ en $P(a+3)$ niet dit andere element kunnen zijn. Ook kan er niet gelden dat $a + 2 \equiv 2 \pmod{7}$, want $a + 1 \equiv 2 \pmod{7}$ of $a + 3 \equiv 2 \pmod{7}$, dus heeft $P(a+2)$ ook geen gemeenschappelijke priemfactor met $P(a+4)$. Er moet dus wel gelden dat $P(a+2)$ een gemeenschappelijke priemfactor heeft met $P(a+5)$. Er is zo ook te bewijzen dat $P(a+4)$ een gemeenschappelijke priemfactor heeft met $P(a+1)$. Om erachter te komen of dit mogelijk is, gaan we weer kijken wanneer $P(n)$ en $P(n+3)$ een gemeenschappelijke priemfactor hebben. Aan het begin hebben we al gezien dat als $n \equiv 1 \pmod{3}$ deze getallen een gemeenschappelijke factor 3 hebben (en anders niet). Is er misschien nog een andere situatie waarin $P(n)$ en $P(n+3)$ een gemeenschappelijke priemdelers hebben? Om hier achter te komen, kijken we nu



figuur 2

weer naar de ggd van $P(n)$ en $P(n+3)$. We kunnen op een vergelijkbare manier als bij de vorige ggd-berekeningen laten zien dat deze ggd gelijk is aan 1 als $P(n)$ niet deelbaar is door 3. De getallen $P(n)$ en $P(n+3)$ hebben in dit geval dus geen gemeenschappelijke priemfactor, zodat we zien dat $P(n)$ en $P(n+3)$ alleen een gemeenschappelijke priemfactor hebben als $n \equiv 1 \pmod{3}$. Het is dus onmogelijk dat $P(a+1)$ en $P(a+4)$ een gemeenschappelijke priemfactor hebben en dat $P(a+2)$ en $P(a+5)$ ook een gemeenschappelijke

priemfactor hebben, want dan zouden zowel $a + 1$ als $a + 2$ congruent moeten zijn aan 1 modulo 3. Ook $b = 5$ voldoet dus niet.

Oplossing

Laten we dus onderzoeken of $b = 6$ wel kan voldoen. We willen dat de verzameling $\{P(a + 1), P(a + 2), P(a + 3), P(a + 4), P(a + 5), P(a + 6)\}$ welriekend is. Met alles wat we al hebben bewezen, weten we dat bij de getallen $a + 1$ tot en met $a + 6$ er hoogstens één paar is met verschil 2 zodat de P 's van deze getallen een gemeenschappelijke priemfactor hebben en er is hoogstens één paar getallen met verschil 3 zodat de P 's van deze getallen een gemeenschappelijke priemfactor hebben. Ook zouden er twee getallen kunnen zijn met verschil 4 zodat de P daarvan een gemeenschappelijke priemfactor hebben. Bij de kleine waarden van P zien we dat $P(7)$ en $P(11)$ een gemeenschappelijke factor 19 hebben. Met modulorekenen volgt dan direct dat $P(n)$ en $P(n + 4)$ priemdelers 19 gemeen hebben als $n \equiv 7 \pmod{19}$. (Door naar de ggd van $P(n)$ en $P(n + 4)$ te kijken, kunnen we inzien dat dit ook echt de enige mogelijkheid is, maar dat blijken we niet nodig te hebben). Het is nu de vraag of we door deze paren slim te kiezen kunnen zorgen dat elk getal in de verzameling een gemeenschappelijke priemfactor heeft met een ander element. Na wat gepuzzel blijkt dat dit bijvoorbeeld het geval is als $P(a + 1)$ een gemeenschappelijke priemfactor heeft met $P(a + 5)$, $P(a + 2)$ een gemeenschappelijke priemfactor heeft met $P(a + 4)$ en $P(a + 3)$ een gemeenschappelijke priemfactor heeft met $P(a + 6)$. De vraag is nu of er een niet-negatief geheel getal a is zodat $a + 1 \equiv 7 \pmod{19}$, $a + 2 \equiv 2 \pmod{7}$ en $a + 3 \equiv 1 \pmod{3}$. Volgens de Chinese reststelling, een stelling die we bij de olympiade training hebben geleerd, heeft dit stelsel een oplossing, omdat 19, 7 en 3 verschillende priemgetallen zijn. Als we dit stelsel zouden oplossen (wat niet nodig is voor het bewijs), dan vinden we dat dit geldt als $a \equiv 196 \pmod{399}$. De verzameling $\{P(197), P(198), \dots, P(202)\}$ is dus welriekend. Er volgt dus dat $b = 6$ inderdaad voldoet. We hebben ook al laten zien dat alle b kleiner dan 6 niet voldoen, dus dit is de kleinste b die voldoet. Het antwoord op de vraag is dus 6.

Bij deze opgave brengt het controleren van kleine waarden van b ons tot een oplossing. Vaak is het een goed idee om bij dit soort opgaven kleine waarden in te vullen, maar dit maakt deze opgave nog niet makkelijk. Het is namelijk erg verleidelijk om iets in het algemeen te proberen, bijvoorbeeld om voor alle gehele m en n de ggd van $P(n)$ en $P(n + m)$ te berekenen, maar dit is niet makkelijk te doen. Ook is een rekenfout snel gemaakt. Desondanks wist ik deze opgave wel volledig op te lossen, wat me een eervolle vermelding heeft opgeleverd. Het belangrijkste van alles is echter dat ik erg van de IMO heb genoten en er met veel plezier op terug kan kijken.

MEDEDELING

MATHEKALENDER 2016: ONLINE WISKUNDEWEDSTRIJD



De Mathekalender is een digitale adventskalender die de adventsperiode van 1–24 december bestrijkt, maar die in plaats van allerlei zoete lekkernijen achter haar luikjes uitdagende wiskundepuzzels verbergt. Soms zijn de wiskundevraagstukken pittig, zeg van het niveau van de nationale wiskundeolympiade, maar altijd leuk ingekleed in de sprookjesachtige sfeer van de kerst met vaak de kerstman met zijn kerstabouters in de hoofdrol. De vraagstukken zijn meerkeuzevraagstukken; geen bewijzen, geen toelichtingen. Elke dag zijn er prijzen te winnen. De hoofdprijs voor de Nederlandse scholieren is een laptop die door de 4TU federatie: Delft, Eindhoven, Twente en vanaf dit jaar ook Wageningen beschikbaar wordt gesteld.

Opgeven, spelregels en archief van oude opgaven:

<https://www.4tu.nl/ami/en/mathekalender/>

Zie ook het artikel, vorig jaar, in *Euclides* 91–2.

Vragen? Mail naar 4tuami-ewi@tudelft.nl

Over de auteur

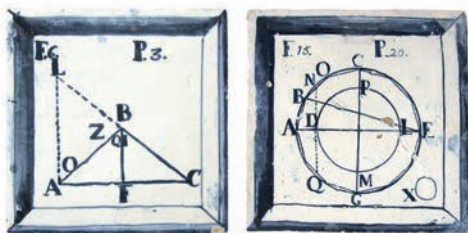
Reinier Schmiermann nam als vwo-scholier van het Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch twee jaar lang deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. In 2016 maakte hij deel uit van het Nederlandse team. Nu studeert hij Technische Wiskunde en Software Science aan de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e).

E-mailadres: rf.schmiermann@home.nl

TEGELTJESWIJSHEDEN

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee over het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippets, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

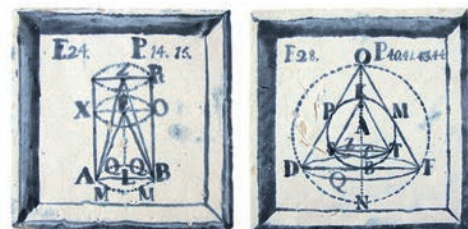
Wie door een willekeurige Portugese stad loopt kan het niet ontgaan: Portugese huizen en kerken zijn rijkelijk geornamenteerd met geglazuurde tegeltjes, zogenaamde *azulejos*. Dit gebruik stamt uit de vijftiende eeuw, toen Portugese vorsten de tegels uit de Arabische wereld lieten namaken om er hun paleizen mee te versieren. De *azulejos*-industrie piekte rond 1700, toen veel Portugese kerken en huizen van deze tegels werden voorzien. Vaak zijn de tegels in wit en blauw en werden er, naast de populaire ornamenten, ook tekeningen op de tegels gezet. De meest uiteenlopende motieven en afbeeldingen zijn op tegeltjes te vinden. Naast ornamenten, illustreerden de *azulejos* dagelijkse bezigheden en religieuze gebruiken. Afbeeldingen van beroepen of bijeltaferelen zijn bijvoorbeeld heel gangbaar. Wiskundige afbeeldingen liggen minder voor de hand, maar die bestaan ook.



Tegeltjes als didactisch hulpmiddel

De tegeltjes die hier zijn afgebeeld zijn afkomstig uit het Museu Nacional de Machado de Castro, onderdeel van de universiteit van Coimbra. Ze zijn gemaakt rond 1700. In die tijd was in Coimbra een beroemde jezuïetenschool gevestigd, en deze tegeltjes werden daar als didactisch hulpmiddel gebruikt. De afbeeldingen horen bij de Latijnse Euclidesvertaling van André Tacquet (1612-1660), een beroemde Antwerpse jezuïetengeleerde, die een aantal wiskundeboeken publiceerde waarmee vele generaties jezuïeten werden opgeleid. Het bestaan van de *azulejos* en de cursus van Tacquet spreken niet vanzelf. De jezuïetenorde had geen gemak-

kelijke relatie met wiskunde. Binnen de orde waren de meningen over de waarde van het vak verdeeld. Een aantal ordeleden zag in de wiskunde een ideale of bijzondere vorm van filosofie, zoals dat door verschillende middeleeuwse geleerden werd betoogd. Anderen, echter, vonden dat het vak zielloos en daarmee ook betekenisloos was. Het pragmatisme van de orde maakte dat begin zeventiende eeuw de wiskunde hoe dan ook een rol kreeg in de opleidingen van de orde, al was het maar omdat men erkende dat het vak in de wereld een grotere rol kreeg, en men daar dan ook kennis van moest hebben.



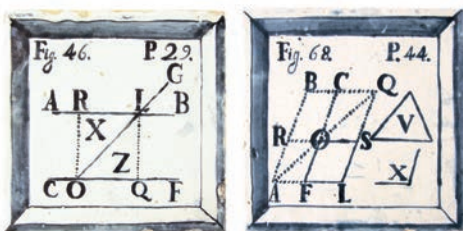
Vestingbouwkunde

Wiskunde werd gewaardeerd om veel verschillende redenen. Bankiers en handelaren bewonderden de precisie en snelheid van de abacus en de rekentechniek. Technici, daarentegen, hadden vooral oog voor de meetkunde, die een solide basis bood voor hun werk – en die hen een mooie positie bij de Europese machthebbers kon bezorgen. Edellieden waardeerden dan weer vooral de praktische voordelen die technici hen boden, zoals de oorlogsmachines en de nieuwe fortificatietechnieken. Die nieuwe technieken hadden het stadsgezicht in de zeventiende eeuw compleet veranderd: hoge middeleeuwse stadsmuren hadden plaatsgemaakt voor de lagere, met aarde gevulde bastions, die niet alleen beter beschermden tegen kanonvuur, maar tevens de mogelijkheid boden om van daaraf de vijand onder vuur te nemen. De aanleg en het ontwerp van die vestingwerken werd als een wiskundig beroep beschouwd.

De jezuïeten onderwezen de eigen ordeleden, maar tevens de kinderen van stadsnotabelen en de adel, dus het lag voor de hand dat de orde ook cursussen wiskunde in haar onderwijs ging opnemen. De cursus van André Tacquet circuleerde rond 1650 al in manuscriptvorm, en werd later als gedrukt boek een succes. De cursus bestond uit de introductie tot de meetkunde van Euclides, uitgebreid met een aantal stukken van Archimedes, gevolgd door een introductie goniometrie en landmeten en een



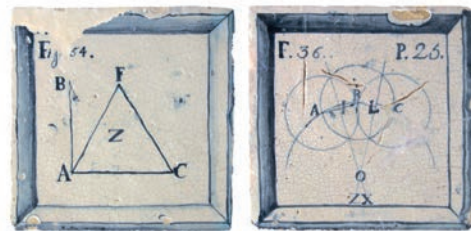
toepassing van de meetkunde op de bouw van vestingen. Met name de hoofdstukken waarin de vestingbouwkunde werd behandeld getuigen van de pragmatische redenen die de jezuïetenorde ertoe bewoog om ook wiskunde te onderwijzen. Tacquet doceerde overwegend de theorie van de vorm van de vestingwerken, dus niet hoe versterkingen in de praktijk gebouwd moesten worden. Maar het onderwerp was in die tijd (in de zeventiende en achttiende eeuw was er altijd wel ergens oorlog op het Europese continent) buitengewoon populair en garandeerde aandacht. De adel en de rijke stedelingen achtten deze theorie van levensbelang – al was het maar om enige controle te hebben over het werk van technici. Door de theorie te benadrukken, zelfs met Euclidische vlakke meetkunde te beginnen, onderscheidden de jezuïeten hun onderwijs van het praktische werk van de technici en maakten ze de wiskunde tot een vakgebied dat de aandacht van de orde en hoge heren waardig was.



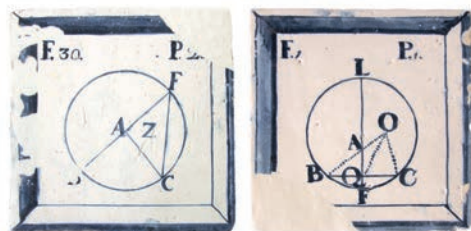
Geen scherp beeld

Gedurende de eerste helft van de achttiende eeuw werden de boeken van Tacquet in Coimbra aan het jezuïeten-college gebruikt. Op welke manier de tegeltjes werden ingezet, en of de hele cursus van Tacquet behandeld werd, weten we niet. Aan veel universiteiten – en de jezuïeten-colleges spiegelde zich daaraan – was het gebruikelijk om meerdere boeken te raadplegen bij een cursus. Voor de wiskundecursussen werd soms ook gebruikgemaakt van modellen en oefeningen met veldwerk. Het hing vooral af

van de vraag van de studenten wat er werd behandeld. De moderne oorlogsvoering stond in die tijd van oorlog ongetwijfeld op het programma, maar of dat uit het boek van Tacquet werd onderwezen is niet zeker. Het bestaan van de *azulejos*, of eigenlijk vooral het ontbreken van tegeltjes bij andere meetkundeboeken, suggereert dat het werk van Tacquet een centrale plaats innam in de cursus. Of de stellingen gedicteerd werden en de studenten de tegeltjes als visuele ondersteuning gebruikten, of dat er een meer gesofisticeerd didactisch doel mee werd nagestreefd is niet bekend.



Het bestaan van tegeltjes met daarop de afbeeldingen behorende bij een meetkundecursus, illustreert dat de sporen van wiskundeonderwijs echt overal te vinden zijn. Het laat ook zien dat wiskunde in die tijd in Coimbra een vak was dat er gewoon bij hoorde voor iedereen die zich hoger onderwijs kon veroorloven. Dat met de tegeltjes niet het meetkundeonderwijs vastligt en dat we eigenlijk niet zo'n scherp beeld hebben van het onderwijs aan het jezuïetencollege in Coimbra in het midden van de achttiende eeuw doet daar niets aan af. Wijsheden die op een tegeltje passen zijn altijd eenvoudig maar zelden eenduidig. Deze meetkundige *azulejos* tonen de uitzondering die de regel bevestigt.



Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundeleraar, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

VERHALEN UIT HET VMBO

Ebrina Smallegange

THOM

De werkgroep vmbo van de NVvW wil iedere *Euclides* een bijdrage leveren over het vmbo. Deze keer een pareltje van Ebrina Smallegange, zo'n mooi moment dat je doet beseffen waarom je ook al weer in het onderwijs was beland...

Dit stukje gaat over Thom. Thom heeft me vorig schooljaar in de week voor de meivakantie helemaal blij gemaakt en dat wil ik graag met u delen. Thom kwam in de tweede klas bij ons op school. Hij kwam van een andere school, waar hij in klas 1 mavo/havo had gezeten. Thom is een drukke jongen, die zich gemakkelijk laat uitdagen om ondeugende dingen te doen. Hij werd bij ons in klas 2 kader/mavo geplaatst en ging na een jaar net over naar klas 3 mavo. Hij is klas twee en drie doorgekomen met vallen en opstaan. Hij werd nogal eens uit de les gestuurd wegens wangedrag. In de pauzes moest hij vaak binnenblijven in een poging hem het roken af te leren. Hij heeft bovendien heel wat lessen op de gang gewerkt, niet voor straf, maar om te voorkomen dat hij straf zou krijgen. Het hele team was ervan overtuigd dat hij slim genoeg was, maar zijn gedrag...

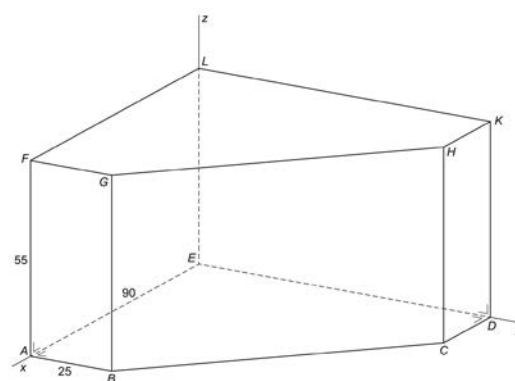
Thom ging over naar klas vier. Het examenjaar! In klas vier waren er twee dingen veranderd. Karel, die Thom nogal eens uitdaagde om ondeugende dingen te doen, was naar een andere school gegaan. En Thom had in de vakantie toekomstplannen gemaakt. Hij had een vakantiebaantje. Hij was verantwoordelijk voor het reilen en zeilen in het magazijn van een snelgroeiend bedrijf. Dit bedrijf had hem nu ook voor de weekenden aangenomen en hem zelfs een BBL-plaats beloofd. Thom weet nu waar hij het voor doet! Het ging stukken beter met Thom in klas vier.

Toch gaat het nog niet helemaal goed. Ik spreek hem op de woensdag voor de meivakantie. De overige vierdeklassers zijn thuis, officieel om zich voor de laatste herkansingen van het schooljaar voor te bereiden. Die herkansingen zijn op donderdag. Vrijdag, de dag na de herkansingen, is Thom geschorst wegens onoorbare zaken via de sociale media. Drie dagen geen lessen voor Thom!

Toch is hij nu op school. Thom heeft aan de conciërge gevraagd of hij in het kopieerhok mocht zitten om te leren: thuis wordt hij helemaal gestoord van 'schreeuwende buurmeisjes en al dat lawaai'. Hij zit nu bij het kopieerapparaat de examenopgave van 2015 te bekijken die we dinsdag besproken hebben. Een deel van de opgave ziet u in figuur 1. Thom vraagt of ik deze opgave nog eens wil uitleggen. Hier word ik al een beetje blij van! We nemen de opgave erbij. Thom wijst naar zijde ED : in de les zei u dat deze zijde 90 cm was en ik snap niet hoe u dat hebt berekend. In de les had ik het belang van een schets weer eens benadrukt en een leerling heeft een schets met de

Prisma

In het assenstelsel is een prisma getekend. De maten in cm staan erbij. Er geldt dat $AB = CD$ en $AE = DE$.



- 3p 9 De coördinaten van punt A zijn $(90, 0, 0)$.
→ Geef de coördinaten van punt H.
- 3p 10 Teken het bovenaanzicht van het prisma op schaal 1 : 10. Zet de juiste letters bij de hoekpunten.
- 5p 11 Bereken hoeveel liter de inhoud van het prisma is. Schrijf je berekening op.

figuur 1 Examenopgave 2015

juiste maten erbij op het bord gezet. Maar ze had er niet bij verteld hoe ze aan die maten kwam! En Thom had eroverheen gelezen dat $AC = CD$.

Hierdoor kon Thom opgave 9, 10 en 11 niet maken!

U weet de oplossing van een wiskundedocent voor een probleem zoals Thom hier heeft: 'Lees de opgave vanaf het begin nog eens door'. Thom las, zijn gezicht klaarde op, hij ging er eens goed voor zitten. 'Ha, nu kan ik vraag 11 wel!' En daar ging Thom. Een schets van het grondvlak. Maten erbij. Verdeeld in twee rechthoeken en een driehoek. Oppervlakte berekend. Vermenigvuldigd met de hoogte. Zelfs een eenheid (cm^3) erbij. En dan komt het: Thom kijkt mompelend terug in de opgave en ik hoor mezelf letterlijk terug: ... En werd dat ook gevraagd?... Hier word ik nog blijer van! Thom maakt van de kubieke centimeters nog even liters en heeft de opgave helemaal goed. Thom redt het wel!

Over de auteur

Ebrina Smallegange is docent wiskunde en rekenen op de locatie Kesteren van de Regionale Scholengemeenschap Pantarijn. Namens het bestuur van de NVvW is ze lid van de werkgroep vmbo. E-mail: esmallegange@gmail.com

Legendarisch abc-bewijs

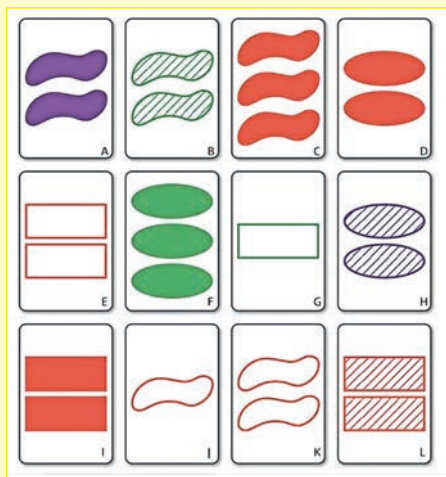
In 2012 werd door Shinichi Mochizuki van de universiteit van Kyoto in Japan online een vijfhonderd pagina's tellend bewijs gepubliceerd, dat een oplossing biedt voor een lang bestaand probleem dat bekendstaat als het *abc*-vermoeden. Dit vermoeden onderzoekt de fundamentele relatie tussen getallen, optellingen en vermenigvuldigingen die beginnen met de simpele vergelijking

$$a + b = c.$$

Wiskundigen waren enthousiast over het bewijs maar worstelden met het onder de knie krijgen van Mochizuki's Interuniversele Teichmüller Theorie (IUT), een volledig nieuw gebied van de wiskunde dat hij gedurende tientallen jaren heeft ontwikkeld om het probleem op te lossen. Er is nu een doorbraak doordat Mochizuki de theorie persoonlijk uitlegt via Skype. Minstens tien mensen begrijpen de theorie nu in detail, maar experts zijn nog steeds besluiteloos en hebben het bewijs nog niet geaccepteerd als waarheid. Het duurt waarschijnlijk nog vele decennia voordat de volledige impact van Mochizuki's werk op de getaltheorie wordt gevoeld. De wiskundige gemeenschap zal er nog jaren voor nodig hebben om de enorme hoeveelheid nieuwe structuren en ideeën in de IUT te verwerken.

Bron: [www: NewScientist](http://www.NewScientist) 15 aug 2016

Simpelweg 'ontzettend'



figuur 1 Twaalf Set-kaarten met maar liefst zes sets

dat er een trio bij zit dat volgens de regels van het spel een *set* vormt? Dit maximum blijkt veel lager te liggen dan men tot nu toe dacht. Wiskundigen staan vooral paf van hoe simpel het bewijs is.

Twee pagina's berekeningen. Meer had de Delftse wiskundige Dion Gijswijt niet nodig voor een doorbraak in een decennia oud probleem. Het laat zich illustreren door een vraag over het kaartspel Set: hoeveel van de 81 kaarten kun je maximaal trekken zonder

Het kaartspel Set heeft 81 unieke kaarten, waaruit je met bepaalde spelregels drietallen kunt halen die een geldige Set vormen. De *cap set* voor dit spel heeft twintig kaarten: je kunt hoogstens twintig kaarten uit het spel halen waarin géén set zit. Het bewijs hiervoor vergt flink wat lastige wiskunde. Gijswijt weet ook geen simpel voorbeeld om het uit te leggen: 'Het is een samenraapsel van allerlei technieken.' Heel algemeen gesteld pakken wiskundigen Set-achtige problemen aan door de n eigenschappen van een kaart voor te stellen als een punt in een n -dimensionale ruimte. Een compleet spel bestaat dan uit een puntenwolk van $3n$ punten in die ruimte, en als drie van die punten op een rechte lijn liggen vormt dit een set.

Het probleem is dan, te bepalen hoeveel punten je maximaal in die puntenwolk kunt aanwijzen, waar geen enkele rechte lijn doorheen gaat. De grote verrassing was dat polynomen (een heel algemeen type wiskundige structuur) in verband kunnen worden gebracht met zo'n puntenwolk, en dat de eigenschappen van deze polynomen nuttige dingen zeggen over de structuur van de puntenwolk.

Bron: *Kennislink juni 2016*

Nadeel van de binnenbocht bij sprinten

Op de 100 meter loop je alleen maar rechtuit en moet het niet uitmaken waar je loopt, al dacht Daphne Schippers daar in de finale van Rio anders over. Maar bij de 200 meter lopen atleten in het begin een bocht alvorens op het rechte stuk uit te komen. De baan is onderverdeeld in negen banen. De binnenste, baan 1, maakt een kortere bocht dan de buitenste baan. Daarom starten de atleten niet naast elkaar, maar mag de buitenste baan verder naar voren starten. Hoewel de gelopen afstand in alle banen precies gelijk is, kun je je toch afvragen of het verschil in vorm tussen de binnen- en de buitenbanen gunstig of ongunstig is. Het zou voordelig moeten zijn om een ruimere bocht te lopen, want de atleet hoeft dan minder kracht te leveren om niet uit de bocht te vliegen. In theorie is het dus nadelig om in baan 1 te starten. Anderzijds vinden veel atleten het niet prettig om in de buitenste banen te lopen, omdat ze dan niemand voor zich zien waar ze zich aan kunnen optrekken en ze weten niet hoe hard de atleten op de andere banen op ze inlopen. Jonas Mureika, hoogleraar natuurkunde in Los Angeles, heeft een model ontwikkeld waarmee hij het effect van luchtdruk, mee- of tegenwind en de startbaan heeft geschat. De kern van het model is een formule: $F = m \cdot a$. Kracht is massa maal versnelling, de beroemde tweede

wet van Newton. Het effect van de bocht is in een kracht te vatten. Als je de bocht ziet als een halve cirkel, dan moet de atleet een kracht uitoefenen richting het middelpunt van de cirkel om niet uit de bocht te vliegen, de middelpuntzoekende kracht. Hoe kleiner de straal van de cirkel, hoe groter deze kracht moet zijn, en daarom is het nadelig om de binnenbocht te lopen. Ook uit de statistiek blijkt dat het psychische voordeel van de binnenbanen, namelijk je kunnen optrekken aan de tegenstanders voor je, niet opweegt tegen het fysieke nadeel van een nauwere binnenbocht te moeten lopen.

Op de Olympische spelen in Rio liep Daphne Schippers haar finale op baan 4 en won daarmee een zilveren medaille. De winnares van de gouden medaille liep in baan 6.

Bron: Kennislink augustus 2016

Bètavakken steeds populairder bij meisjes

Uit een groot onderzoek naar de populariteit van schoolvakken onder 25.000 scholieren uit de derde klas havo/vwo blijkt dat de bètavakken natuurkunde, scheikunde, techniek, wiskunde en biologie steeds populairder worden bij meisjes op school, vooral bij meisjes op het vwo. Het onderzoek is gedaan door Qompas (zie ook www.qompas.nl), het grootste platform voor studie- en carrièrekeuze, loopbaanoriëntatie- en begeleiding (LOB).

Bron: <http://www.primaonderwijs.nl/vo/betavakken-steeds-populairder-bij-meisjes/>

Wiskundigen helpen de brandweer



figuur 2

Ongelukken, brand, beroerte en ander onheil. Zie als hulpdienst maar overal op tijd bij te zijn en dan met je ambulances ook nog eens patiënten van de ene zorg-

instelling naar de andere te vervoeren. Het is een logistieke nachtmerrie. Wiskundige dr. Pieter van de Berg ontwikkelde modellen voor het optimaliseren van het logistieke proces van hulpdiensten. Hij promoveerde op 6 juni bij de faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica. De ingenieur ontwikkelde voor de brandweer een model voor een optimale verspreiding van de wagens in een veiligheidsregio. In Noorwegen en Canada ontwikkelde hij modellen voor de luchtambulance.

Bron: Delft Integraal juli 2016

'Imaginary' geopend

Op de Technische Universiteit Eindhoven is de eerste editie van de rondreizende tentoonstelling 'Imaginary' geopend. Hieronder een foto-impressie. Zie ook het 'Kort vooraf' (blz 3), 'De krommen van Agnes' (blz 19) en de meegestuurde poster van 'Imaginary'.

Bron: van onze eigen correspondent

Foto's: TU/e, Bart van Overbeeke

figuur 3 Frits Beukers' voordracht 'Wiskunde op het oog'

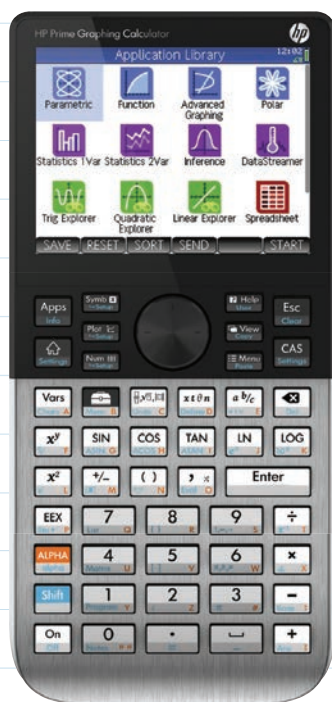


figuur 4 Gert-Martin Greuel, initiatiefnemer van 'Imaginary' opent de tentoonstelling



figuur 5 Interactie op 'Imaginary'





New Body & New Brain

HP Prime



Wilt u meer weten over de krachtigste rekenmachine voor uw leerlingen?

Online support voor Noordhoff en Malmberg beschikbaar!

En voor een vergelijkbare prijs!

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met meer rekenkracht en geheugen dan welke andere machine dan ook.
- Nieuwe consistente menustructuur met krachtige educatieve applicaties op een touchscreen: het is tenslotte 2016.
- Examenmode op de Prime betekent 1 knop indrukken. Binnen een paar tellen een examen-lokaal in de juiste CvTE examenstand.
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief gratis emulator (dus ook voor uw leerlingen)!

Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop, demo-units of een school-offerte neemt u contact op met **info@hp-prime.nl**



KROMMEN VAN AGNES EN DE NEDERLANDSE WISKUNDEDAGEN 2016

Rob van Oord

'Van vlak naar volume' was de titel van de workshop die Rob van Oord samen met Marjan Botke verzorgde op de 22^e editie van de Nationale Wiskunde Dagen. De workshop bevatte een brandende kwestie die leidde tot de ontdekking van de krommen van Agnes. Daarnaast geeft Rob in dit artikel een sfeerbeeld van de NWD.

Grappig, de laatste opgave van het wiskunde B-examen 2016 tijdvak 1 heette *De kromme van Agnesi*. Op internet wordt deze kromme ook wel de heks van Agnesi genoemd, o.a. beschreven op de website van Henk Hofstede.^[1] In dit artikel wil ik het vooral hebben over de nog vrijwel onbekende krommen van Agnes, voor het eerst getoond op de NWD 2016.

Opening NWD

Frits Beukers liet in zijn openingspeech zien hoe men vroeger uit gips ruimtevlakken bij formules maakte.

De bij figuur 1 behorende formule is: $3x^2y - y^3 + 27z/2 - 3x^2z - 3y^2z + 81z^2/2 + 31z^3 = 0$.



figuur 1

Voor waarden van z kun je op verschillende hoogtes de horizontale doorsnede van dit vlak tekenen waardoor je een idee krijgt hoe het vlak er in de ruimte uit moet zien. In de tijd voor de computer was dit een goede manier om tot een betrouwbaar gipsen voorstelling van een dergelijk vlak te komen.

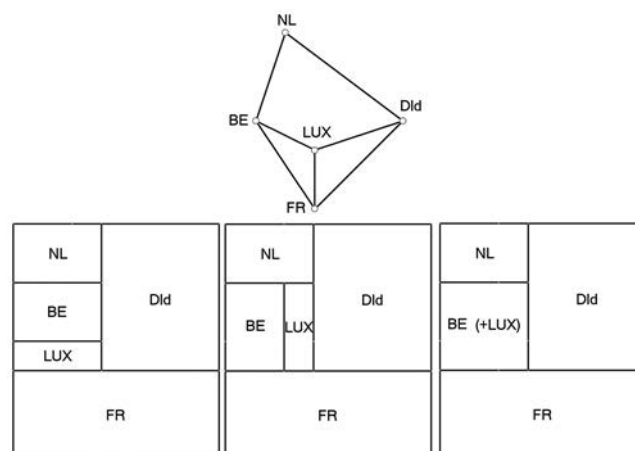
Met de huidige snelle computers kun je dezelfde vlakken in mooie kleuren op je scherm te zien krijgen. In een speciale ruimte stonden naast de gipsen voorwerpen van honderd jaar geleden, gevonden in een stoffige ruimte op het Mathematisch Instituut, grote schermen waarop je zelf formules kon invoeren om mooie krommen te zien. De citroen bijvoorbeeld, het beeldmerk van *imaginary*, zie figuur 2: $x^2 + z^2 = y^3(1 - y)$.^[2] Dit soort plaatjes spreekt tot de verbeelding!

In de openingslezing vertelde professor Bettina Speckmann over het verbeelden van kaarten van gebieden, zoals landen, provincies, staten, enzovoort. Elk gebied wordt een



figuur 2 Deze citroen is een kromme die hoort bij de formule $x^2 + z^2 = y^3(1 - y)$

rechthoek waarbij de oppervlakte zo dicht mogelijk moet zitten bij de *maat* die bij het gebied hoort. De maten zijn bijvoorbeeld de oppervlakte, het aantal inwoners, aantal boerderijen, aantal kilometers snelweg. Onderlinge ligging en enigszins de geografische ligging van de gebieden moeten zo veel mogelijk behouden blijven. Via kleuringen van grafen en met veel rekenwerk, kun je komen tot een optimale voorstelling. Wanneer een gebied aan drie verschillende gebieden grenst kan het moeilijk zijn om de voorwaarde van aangrenzing te waarborgen. Daarom wordt in kaarten van Europa Luxemburg vaak weggelaten, of bij België gevoegd. Zelf even getekend (figuur 3):



figuur 3 Kaart waarbij gebieden worden voorgesteld als rechthoek, waarvan de grootte wordt bepaald door een kenmerk van dat gebied. In dit geval de oppervlakte van het gebied.

Kloostergewelf en puntzak

Er kwamen ongeveer veertig collega's naar de workshop 'Van vlak naar volume' die ik samen met Marjan Botke gaf.^[3] We startten met de vraag wie door middel van vouwen van een blanco A4-tje een vorm kon maken met een zo groot mogelijke inhoud. In mijn vwo 6-klassen had ik dezelfde vraag gesteld. Ook toen kwam de vraag of de vorm (van boven) open mocht zijn. We besloten twee categorieën te maken, met elk een beloning voor de vorm met de grootste inhoud.

Er werd geanimeerd gevouwen, nagedacht en gerekend. Vormen als rechthoekige bakjes, viervlakken, kokers (waar bij het dichtvouwen vanzelf een zogenaamd kloostergewelf ontstaat), strenden om de grootste inhoud. Een van de deelnemers had als vorm een puntzak. Ze was ervan overtuigd dat die de grootste inhoud had, met ruim 1200 cm^3 . Maar welke formule moet je daarvoor gebruiken? Ze mailde me bij thuiskomst dat ze er niet van kon slapen totdat ze in Wikipedia een formule vond. Ook heeft ze met hulp van man, kind en meel de inhoud empirisch bepaald, ruim 1400 cm^3 . Zie figuur 4.

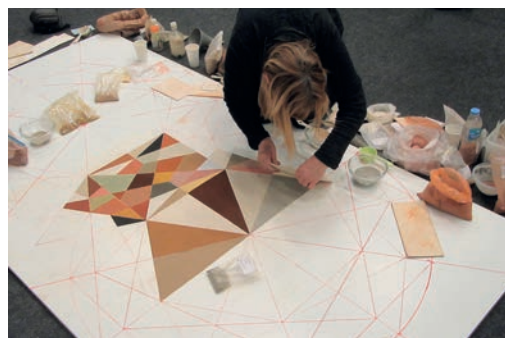


figuur 4 Empirisch bepalen van de inhoud van een puntzak

Impressie van de workshops

Na de introductie kon men kiezen uit een aantal verschillende activiteiten. Velen kozen voor het vouwen van een hexaflexagon.^[4] Een soort peper-en-zout-vouwwerk, zoals je vroeger had met kleuren en woorden. Maar nu zijn er drie verschillende standen! Verbazing alom dus. Er was ook een bouwplaat van het kruisgewelf, de vorm die je krijgt als je twee even grote buizen in een kruis met elkaar verbindt. Ooit was het een (veel te moeilijke) opgave op het PROF1-examen wiskunde B om de inhoud te berekenen van zo'n kruisgewelf. De bouwplaat van een deel van zo'n gewelf is een sinusoïde. Het moeilijkste onderdeel was het patatzakprobleem. De oplossingen van dit probleem zijn 'de krommen van Agnes', waar het tweede deel van dit artikel over gaat.

Als workshopleider krijg je altijd een verrassend cadeau. Dit jaar een prachtig fotoboek met de geometrische zandtekeningen van Elvira Wersche en het verhaal dat erbij hoort.^[5] In het Atrium kon je haar zo'n geometrische patroon, gevuld met zand dat ze van over de hele wereld verzameld heeft, zien strooien.



figuur 5 Elvira Wersche bezig met een geometrische zandtekening

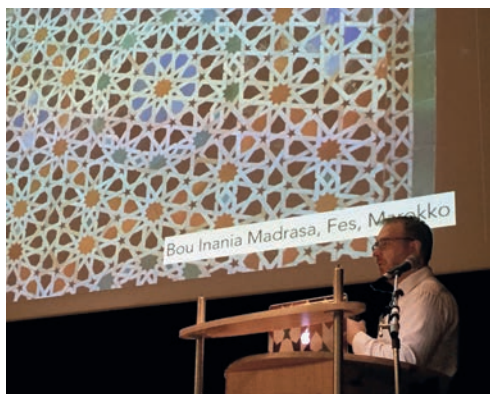
De vrijdagavondshow werd verzorgd door Mike Naylor. Een wervelend verhaal waar je vol verbazing zag hoe hij in Noorwegen wiskundeprojecten heeft opgezet waar iedereen wordt uitgedaagd creatief met wiskunde bezig te zijn. Als kunstenaar maakte hij wiskundige vormen met menselijk naakt. Op internet kun je van alles vinden over zijn werk. Kijken maar.



figuur 6 Kunstenaar Mike Naylor maakt wiskundige vormen met menselijk naakt

Zaterdagochtend volgde ik de workshop van Jan Aarts over de cycloïde in de slinger van de klok. Een mooi verhaal hoe Huygens de tautochronie (slingertijd onafhankelijk van uitwijking) van die slinger bewerkstelligt, maar vooral ook meetkundig bewijst, door de slinger in de juiste baan te dwingen tussen cycloïdevormige 'wangen'. Eeuwenlang waren deze Haagse klokken de nauwkeurigste die er bestonden, die vooral voor de scheepvaart onmisbaar waren. Jan Aarts heeft het boek van Huygens uit het Latijn in het Nederlands vertaald.^[6] In de tweede sessie zaterdag was ik bij Eric Broug. Een man die gegrepen is door de islamitische kunst. Hoe kun je die fraaie patronen zelf maken? Eric geeft workshops waarin hele klassen aan de slag gaan voor een prachtig resultaat.^[7] Verbazingwekkend!

De slotlezing op zaterdag was een inspirerend verhaal van Bennie Mols, over Alan Turing, zijn rol bij het ontcijferen van Enigma, het Duitse codesysteem in WOII, maar ook over het tragische einde van zijn leven. Deze wiskunde virtuoos had ook een theorie ontwikkeld over



figuur 7 Eric Broug gaf een lezing over patronen in islamitische kunst

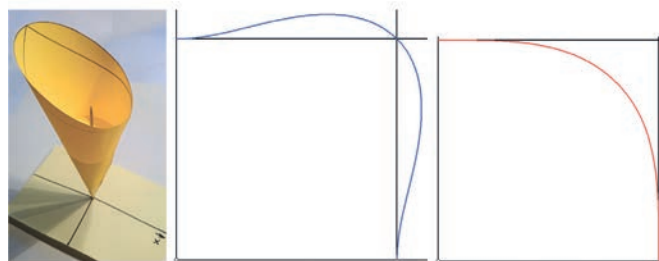
biologische patroonvorming. Op de vrijdagavond werd de film *The Imitation Game* over Alan Turing vertoond, prachtige film.

Hoe kom ik aan de krommen van Agnes?

Eerst maar eens een formule.^[8] In parametervorm wordt de

kromme gegeven door $x(t) = \frac{(4-2\sqrt{2})\cos t}{1+(3-2\sqrt{2})\cos(4t)}$ en $y(t) = \frac{(4-2\sqrt{2})\sin t}{1+(3-2\sqrt{2})\cos(4t)}$. Als je deze in je GR invoert

dan krijg je de kromme van figuur 8 (midden). Het is al vele jaren geleden dat ik mezelf de vraag stelde hoe je een patatzak een eerlijkere rand kan geven.



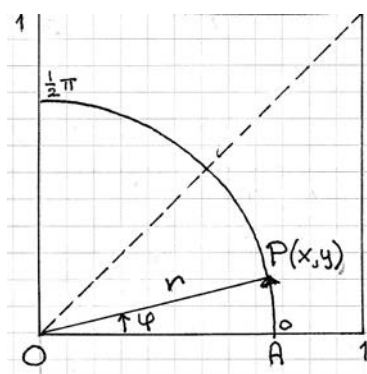
figuur 8 Hoe ontwerp je een patatzak die je omgekeerd op tafel kunt zetten?

Normaal liggen de patatzakken in de cafetaria's klaar als over een diagonaal dubbelgevouwen vierkanten. Maar als je de platte driehoek openmaakt tot een puntzak (een kegelvorm), dan ligt de bovenrand van de puntzak niet in een vlak. Ik zocht naar een formule van een stukje extra op het vierkant waardoor de patatzak een rand heeft waarop je hem omgekeerd wel op tafel kunt zetten, dus de vorm heeft van een schuin afgeknotte kegel. In de hand-out van de NWD kun je het bewijs zien. De formules heb ik te danken aan Agnes Verweij. Ze loste dit probleem al in de jaren '80 van de vorige eeuw op, toen ik met de hele vaksectie bij haar de HEWET-nascholing volgde. (Voor de jongere collega's onder ons: toen is

wiskunde A bedacht en ingevoerd, met contexten en formules die ergens over gingen). Er is nog een tweede oplossing van het probleem: je kunt ook een stukje van het vierkant afknippen waardoor na het openvouwen een afgeknotte kegel ontstaat, zie figuur 8 (rechts). Daar kan dan wel wat minder in natuurlijk... Onlangs heeft Agnes mij uitgelegd hoe ze tot de formules is gekomen. Ik wilde dit probleem namelijk als onderdeel van mijn NWD-workshop opnemen. Als dank wil ik de oplossing dan ook 'De krommen van Agnes' noemen.

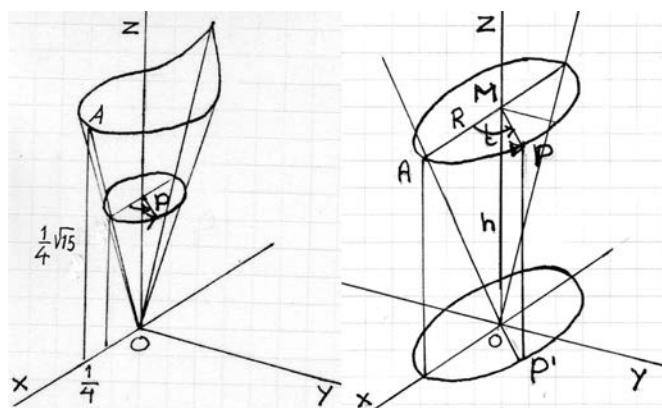
Afleiding Krommen van Agnes

- 1 Zet langs de randen van een vierkant blaadje het assenstelsel Oxy . Zet ergens op het blaadje een punt P , zie figuur 9. In poolcoördinaten ligt P op een cirkelboog met straal $r = OA$: $P(x, y) = P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. De cirkelboog is een kwartcirkel, met lengte $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r$. Deze kwartcirkel wordt bij het dichtvouwen een hele cirkel (met straal R). Stel de zijde van het blaadje 1, dan is $(0,1)$ het hoekpunt linksboven.



figuur 9

- 2 Vouw het blaadje dubbel (platte patatzak) en plak de verticale rand dicht. A ligt nu op de plakrand. P komt nu binnen in de puntzak. Teken de plaats van P nu op de buitenkant.
- 3 Duw de aan één kant dichtgeplakte driehoek open tot een deel van een kegel, zie figuur 10 (links). P ligt nu op een cirkel met straal R waarvoor geldt: $2\pi R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r$, ofwel $R = \frac{1}{4} r$.



figuur 10

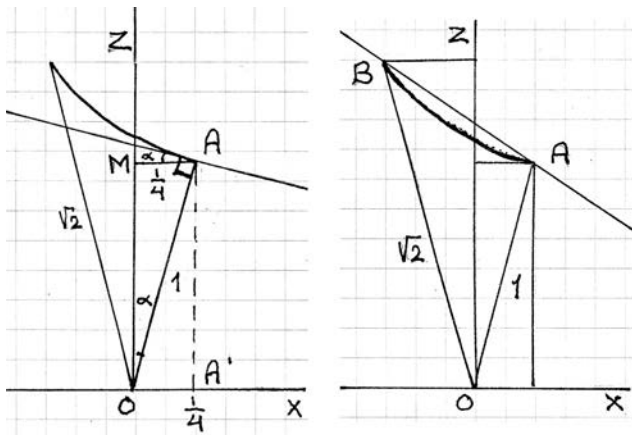
- 4 Zet de kegel in een ruimtelijk assenstelsel met de top in O , de kegelas langs de z -as en de plaknaad boven de x -as, zie figuur 10 (rechts). P komt nu op een cirkel met straal R op hoogte h terecht. Voor de halve tophoek α geldt: $\sin \alpha = R/r = \frac{1}{4}$, dus $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. Even toelichten:

$$h = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{4}r\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}r^2} = \frac{1}{4}r\sqrt{15},$$

$$\text{dus } \tan \alpha = \frac{AM}{h} = \frac{\frac{1}{4}r}{\frac{1}{4}r\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}. \text{ De ruimtecoördi-}$$

naten van P zijn: $P(R\cos(t), R\sin(t), h)$. Punt $(0,1)$ van het vierkante blaadje komt nu in $A(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15})$ terecht.

- 5 Voor de hoek t die P nu in de ruimte maakt ten opzichte van het Oxz -vlak geldt $t = 4\varphi$. Immers: φ gaat van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$, terwijl t van 0 tot 2π gaat. $P(R\cos(t), R\sin(t), h)$ geeft $P(\frac{1}{4}r\cos(4\varphi), \frac{1}{4}r\sin(4\varphi), \frac{1}{4}r\sqrt{15})$.
- 6 We gaan de kegel snijden met het vlak door $A(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15})$, loodrecht op OA , evenwijdig aan de y -as. Draai de tekening naar het vooraanzicht in het Oxz -vlak. De doorsnede is dan een (dalende) lijn, zie figuur 11 (links).



figuur 11

- 7 Vlak $z = ax + b$ heeft helling $a = -\tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}}$;

$$z = -\frac{1}{\sqrt{15}}x + b; \text{ door punt } A(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15}) \text{ geeft}$$

$$b = \frac{4}{\sqrt{15}}. \text{ Dus de vergelijking van het vlak wordt:}$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{4}{\sqrt{15}}.$$

- 8 Dit vlak snijden met de kegel waar $P(\frac{1}{4}r\cos(4\varphi), \frac{1}{4}r\sin(4\varphi), \frac{1}{4}r\sqrt{15})$ op ligt:

$$\frac{1}{4}r\sqrt{15} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{4}r\cos(4\varphi) + \frac{4}{\sqrt{15}}; \text{ dit geeft}$$

$$r = \frac{16}{15 + \cos(4\varphi)}.$$

- 9 Terug naar het vierkant:

$$x_P = r\cos\varphi = \frac{16}{15 + \cos(4\varphi)}\cos\varphi$$

$$\text{en } y_P = r\sin\varphi = \frac{16}{15 + \cos(4\varphi)}\sin\varphi. \text{ Met deze formules}$$

krijg je de kromme van figuur 8 (rechts). Voor het vinden van de kromme uit figuur 8 (midden) gebruik je dezelfde stappen.

Het vlak waarmee je de kegel snijdt gaat nu door $A(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15})$, het beeld van $(0,1)$ op de kegel, en $B(-\frac{1}{4}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{30})$, het beeld van $(1,1)$ op de kegel, waarbij $OB = \sqrt{2}$, de lengte van de diagonaal van het vierkante vouwblaadje. Zie figuur 11 (rechts).

Ik wil Agnes bedanken voor haar mooie krommen. Ik hoop dat u als lezer ook geïnspireerd bent door dit artikel en op zoek gaat naar nog meer mooie krommen. Wie weet tref ik u op de volgende NWD in februari 2017.

Noten

- [1] <http://www.hhofstede.nl/modules/parametersnelheid.htm> zie opgave 4
- [2] De citroen is het beeldmerk van de reizende wiskundetentoonstelling 'Imaginary'. Zie: <https://imaginary.org>
- [3] De presentatie en de werkbladen zijn te downloaden op <http://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskundedagen/slides-en-handouts-nwd2016>
- [4] <http://slimme-handen.nl/2013/02/hexaflexagons-wiskunde-origami-vouwen/>
- [5] Wersche, E. (2015). *Sammlung Weltensand. The Journey*. Haarlem: 99 Uitgevers.
- [6] Aarts, J. (2015). *Christiaan Huygens: Het Slingeruurwerk. Een studie*. Amsterdam: Epsilon uitgaven.
- [7] Eric Broug's website: <http://www.broug.com/education>
- [8] Zie ook Muijters, F. (2014). Kegelsneden op echte kegels, *Euclides* 90-2, pp 31-33.

Over de auteur

Rob van Oord is sinds 1974 werkzaam als eerste-graads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen en is sinds 2014 met pensioen. Vorig jaar heeft hij ingevallen op Lyceum Ypenburg. Dit jaar deed hij dat op Gymnasium Novum in Voorburg. E-mailadres: robvanoord@tiscali.nl

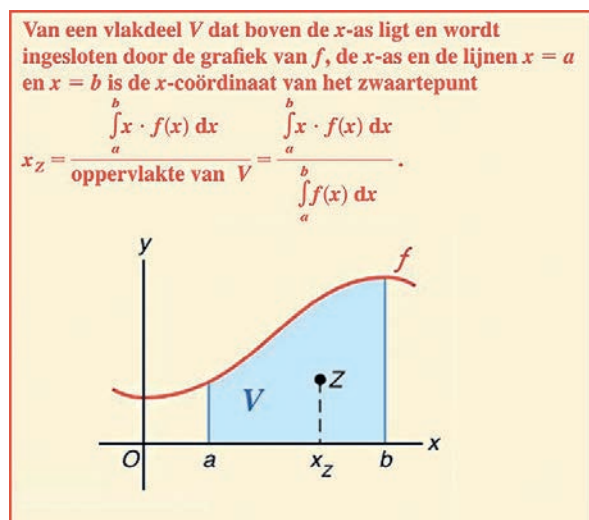
COÖRDINATEN VAN EEN ZWAARTEPUNT

Jan Otto Kranenburg

Een regelmaat zien en je verwonderd afvragen of dat toeval is. Om vervolgens te onderzoeken of dat inderdaad zo is en daarna op zoek te gaan naar een bewijs voor die regelmaat. Jan Otto Kranenburg doet dat met de coördinaten van zwaartepunten van vlakdelen onder machtsfuncties.

Een van de laatste onderwerpen die wij met wiskunde B op school bespreken, gaat over het berekenen van de coördinaten van een zwaartepunt. In de methode *Getal & Ruimte* wordt dat in vwo B deel 4 in paragraaf 14.5 behandeld. Zowel het zwaartepunt van een vlakdeel als ook het zwaartepunt van een omwentelingslichaam komt hier aan bod en vormt feitelijk het sluitstuk van het totale curriculum.

Het zwaartepunt van een vlakdeel wordt berekend door op twee manieren het (kracht)moment te bepalen. Ik citeer letterlijk van pagina 141, zie figuur 1.



figuur 1 Berekenen van x -coördinaat van het zwaartepunt.
Uit: *Getal & Ruimte*, 4 vwo

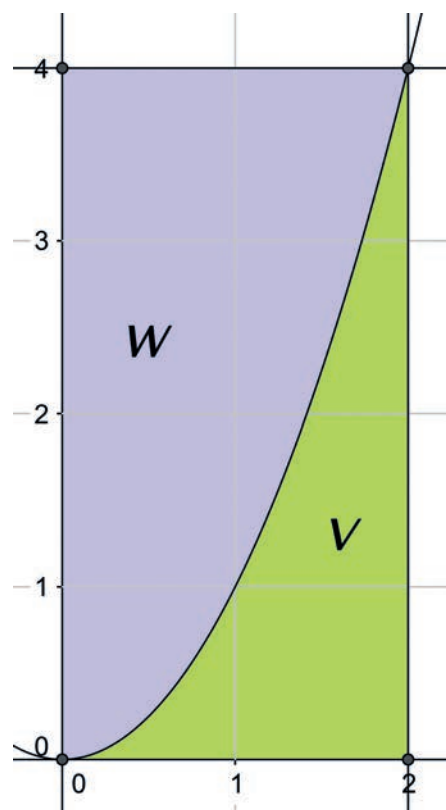
Zelf vind ik het aardig om in de klas met wat andere, niet eens zo revolutionaire voorbeelden te komen. Zo heb ik de leerlingen de volgende twee voorbeelden voorgelegd:

1. Gegeven de functie $f(x) = x^2$.

V is het vlakdeel, begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 2$. W is het vlakdeel, begrensd door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = f(2)$. Met name het uitrekenen van de coördinaten van het zwaartepunt Z in het vlakdeel dat niet aan de x -as of y -as grenst, geeft het nodige gedoe. Dat slaat dus bijvoorbeeld op y_z in V als ook op x_z in W . Uiteindelijk vinden we: de coördinaten van het zwaartepunt van V zijn

$Z_V\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{5}\right)$; de coördinaten van het

zwaartepunt van W zijn $Z_W\left(\frac{3}{4}, 2\frac{2}{5}\right)$, zie figuur 2.



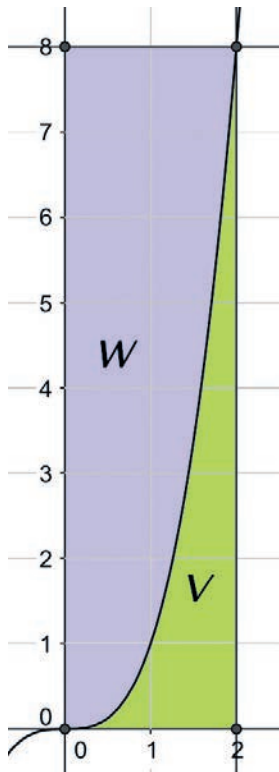
figuur 2 Voorbeeld 1: $f(x) = x^2$

2. Gegeven de functie $f(x) = x^3$.

V is het vlakdeel, begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 2$. W is het vlakdeel, begrensd door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = f(2)$. Na het nodige rekenwerk vinden we: de coördinaten van

het zwaartepunt van V zijn $Z_V\left(1\frac{3}{5}, 2\frac{2}{7}\right)$; de coördi-

naten van het zwaartepunt van W zijn $Z_W\left(\frac{4}{5}, 4\frac{4}{7}\right)$, zie figuur 3.



figuur 3 Voorbeeld 2: $f(x) = x^3$

Wat ons opviel, was het volgende: Vergelijk je van beide vlakdelen V en W de coördinaten, dan zie je dat

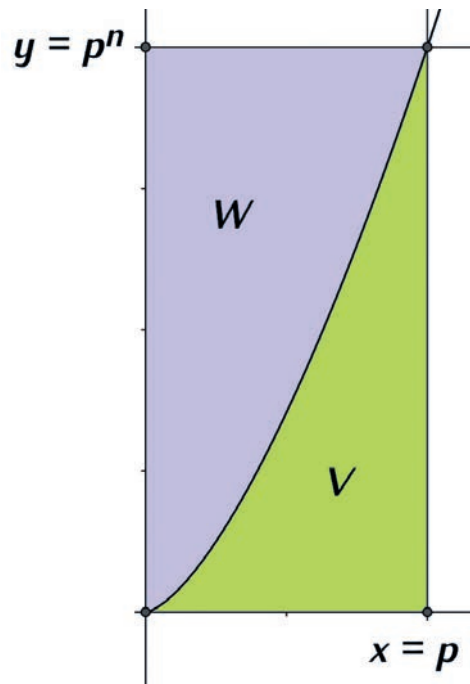
$x_V = 2x_W$ en $y_V = \frac{1}{2}y_W$. Hoe toevallig is dat? Of is er een

verband tussen de gekozen functies? Of hangt dit resultaat toevallig af van de keuze van de vlakdelen, bijvoorbeeld door de keuze van $x = 2$?

Ik ga op onderzoek uit door het volgende te bekijken:

Neem de functie $f(x) = x^n$, met $n > 0$.

V is het vlakdeel, begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = p$. W is het vlakdeel, begrensd door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = f(p)$. Feitelijk hangen V en W af van n en p , dus eigenlijk $V = V_{n,p}$ en $W = W_{n,p}$, zie figuur 4.



figuur 4 Algemene situatie: $f(x) = x^n$

Voor de oppervlakten van V en W geldt het volgende.

Oppervlakte van V is $\int_0^p x^n dx = \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_{x=0}^{x=p} = \frac{1}{n+1} p^{n+1}$.

De totale oppervlakte van $V + W$ is $p \cdot p^n = p^{n+1}$, zodat

de oppervlakte van W is $p^{n+1} - \frac{1}{n+1} p^{n+1} = \frac{n}{n+1} p^{n+1}$.

(Zo blijkt bijvoorbeeld dat de oppervlakten van V en W zich

verhouden als $\frac{1}{n+1} p^{n+1} : \frac{n}{n+1} p^{n+1} = 1:n$).

Voor de x -coördinaat van het zwaartepunt x_Z van V geldt:

$x_Z \cdot \frac{1}{n+1} p^{n+1} = \int_0^p x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} [x^{n+2}]_{x=0}^{x=p} = \frac{1}{n+2} p^{n+2}$. Dus

$x_Z = \frac{\frac{1}{n+2} p^{n+2}}{\frac{1}{n+1} p^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} p$. Om de y -coördinaat van het

zwaartepunt van V te vinden, merk ik op dat de opper-

vlakke van V ook geschreven kan worden als $\int_0^{p^n} (p - \sqrt[n]{y}) dy$.

Hier is gebruikt dat uit $y=x^n$ volgt $x=\sqrt[n]{y}$. Voor de

y -coördinaat van het zwaartepunt y_Z van V geldt dan:

$$y_Z \cdot \frac{1}{n+1} p^{n+1} = \int_0^{p^n} \left(py - y^{\frac{n+1}{n}} \right) dy =$$

$$\left[\frac{1}{2} py^2 - \frac{n}{2n+1} \cdot y^{\frac{2n+1}{n}} \right]_{y=0}^{y=p^n}$$

$$= \frac{1}{2} p^{2n+1} - \frac{n}{2n+1} \cdot p^{2n+1} = \frac{1}{2(2n+1)} \cdot p^{2n+1}.$$

Dus $y_Z = \frac{\frac{1}{2(2n+1)} p^{2n+1}}{\frac{1}{n+1} p^{n+1}} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot p^n$. Samenvattend:

$$Z_V \text{ heeft coördinaten } \left(\frac{n+1}{n+2} \cdot p, \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot p^n \right).$$

Nu ga ik de coördinaten van het zwaartepunt van W bepalen. Ik merk eerst op dat de oppervlakte van W op twee manieren bepaald kan worden: Oppervlakte van W is

$$\int_0^{p^n} x dy = \frac{n}{n+1} \cdot p^{n+1} = \int_0^p (p^n - x^n) dx.$$

Voor de x -coördinaat geldt dan

$$x_Z \cdot \frac{n}{n+1} \cdot p^{n+1} = \int_0^p x (p^n - x^n) dx = \int_0^p (xp^n - x^{n+1}) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2} x^2 p^n - \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_{x=0}^{x=p} = p^{n+2} \cdot \frac{n}{2(n+2)}$$

$$\text{zodat } x_Z = \frac{\frac{n}{2(n+2)} \cdot p^{n+2}}{\frac{n}{n+1} \cdot p^{n+1}} = \frac{n+1}{2(n+2)} \cdot p.$$

Voor de y -coördinaat geldt

$$y_Z \cdot \frac{n}{n+1} p^{n+1} = \int_0^{p^n} \left(y^{\frac{n+1}{n}} \right) dy = \left[\frac{n}{2n+1} \cdot y^{\frac{2n+1}{n}} \right]_{y=0}^{y=p^n} =$$

$$\frac{n}{2n+1} \cdot \left(p^n \right)^{\frac{2n+1}{n}} = \frac{n}{2n+1} \cdot p^{2n+1}$$

$$\text{En dus is } y_Z = \frac{\frac{n}{2n+1} \cdot p^{2n+1}}{\frac{n}{n+1} \cdot p^{n+1}} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot p^n.$$

Samenvattend: Z_W heeft coördinaten

$$\left(\frac{n+1}{2(n+2)} \cdot p, \frac{n+1}{2n+1} \cdot p^n \right).$$
 En dus is in dit 'algemene' geval

aangetoond dat $x_{Z_V} = 2x_{Z_W}$ en $y_{Z_V} = \frac{1}{2}y_{Z_W}$. Of, anders

$$\text{geschreven: } \frac{x_{Z_V}}{x_{Z_W}} \cdot \frac{y_{Z_V}}{y_{Z_W}} = 1.$$

Voor het zwaartepunt van een omwentelingslichaam geldt iets dergelijks.

Bij de functie uit het tweede voorbeeld, dus $f(x) = x^3$, bestaan er vier omwentelingslichamen.

1. Als V wordt gewenteld om de x -as, zijn de

$$\text{coördinaten van het zwaartepunt } Z_{V,x-as} \left(1\frac{3}{4}, 0 \right);$$

2. Als W wordt gewenteld om de x -as, zijn de

$$\text{coördinaten van het zwaartepunt } Z_{W,x-as} \left(\frac{7}{8}, 0 \right);$$

3. Als V wordt gewenteld om de y -as, zijn de

$$\text{coördinaten van het zwaartepunt } Z_{V,y-as} \left(0, 2\frac{1}{2} \right);$$

4. Als W wordt gewenteld om de y -as, zijn de

$$\text{coördinaten van het zwaartepunt } Z_{W,y-as} (0, 5).$$

Ook hier geldt dus $x_{Z_{V,x-as}} = 2x_{Z_{W,x-as}}$

en $y_{Z_{V,y-as}} = \frac{1}{2}y_{Z_{W,y-as}}$. Of anders genoteerd:

$$\frac{x_{Z_{V,x-as}}}{x_{Z_{W,x-as}}} \cdot \frac{y_{Z_{V,y-as}}}{y_{Z_{W,y-as}}} = 1.$$

Over de auteur

Jan Otto Kranenburg is docent wiskunde op het Carolus Clusius College te Zwolle.

E-mailadres: j.o.kranenburg@hetnet.nl

DE BESTE KEUZE VOOR HET NIEUWE SCHOOLJAAR

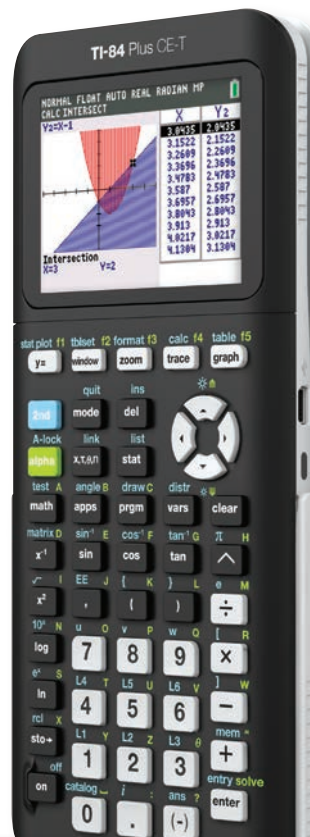
Met zichtbare en gemakkelijke examenstand.

Het knipperende LED-lampje aan de bovenzijde van deze drie TI-grafische machines maakt controle tijdens tentamen of examen eenvoudig.

NIEUW



TI-84 Plus T
= TI-84 Plus + LED



**EXAMEN-
STAND**

De populaire TI-84 Plus CE-T is nu ook in de kleuren rood en blauw beschikbaar (zolang de voorraad strekt).

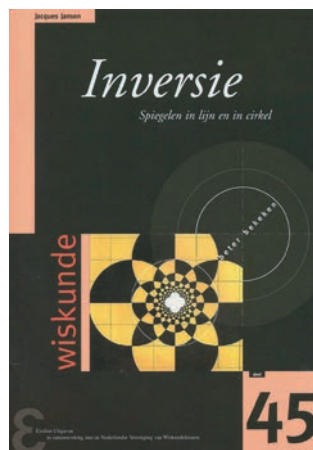


Info: ti-cares@ti.com

BOEKBESPREKING

INVERSIE

Dick Klingens



Ondertitel: Spiegelen in lijn en in cirkel (Zebra 45)
Auteur: Jacques Jansen
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht – 1e druk, 2015
ISBN: 978-90-5041-149-3
Prijs: € 10,00 (72 pag.)

Achterflap en inhoudsopgave

Op de achterflap lezen we: 'In dit Zebra-boekje leer je spiegelen, niet alleen in een lijn maar vooral in een cirkel. Je gaat na hoe je een schaakbord binnenstebuiten kunt keren. Je zult ontdekken dat oude meetkundige problemen van ver voor de geboorte van Christus met *inversie* fraai op te lossen zijn. Ook kom je het raakprobleem van de Griekse meetkundige en astronoom Apollonius van Perga (262-190 v.Chr.) tegen: "Hoe construeer je cirkels die drie gegeven cirkels raken?" Je leert hoe je een apparaat kunt ontwikkelen dat een cirkelbeweging kan omzetten in een rechte lijnige beweging. Door het maken van veel opgaven, vaak met het inzetten van het computerprogramma *GeoGebra*, maak je kennis met de eigenschappen van *inversie*.'

De titels van de hoofdstukken zijn:

1. Spiegelen in lijn en in cirkel – Eigenschappen
2. Nog meer eigenschappen van inversie
3. Toepassingen
4. Appendices

Elk hoofdstuk is onderverdeeld in enkele paragrafen.

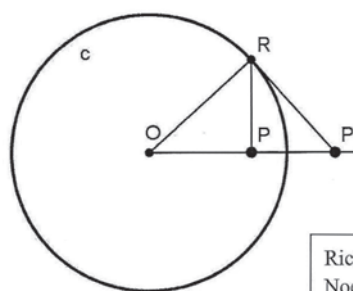
Over de inhoud

Mooi, vind ik, weer eens een boekje over de vlakke euclidische meetkunde, en dan nog wel over een onderwerp dat niet vaak ter sprake komt, zeker niet in het huidige wiskundecurriculum: inversie. Op de voorpagina, in de ondertitel, lijkt het erop dat inversie óók het spiegelen

in een lijn omvat; en op de achterflap lijkt het erop dat lijnspiegelen een onderdeel is van de te behandelen 'lesstof'. Maar het boekje gaat echt alleen over inversie. De lijnspiegeling komt alleen ter sprake in paragraaf 1.2 om een verband met inversie aannemelijk te maken. Zoals gebruikelijk wordt de inversie gedefinieerd als een afbeelding van de punten van het euclidische vlak op zichzelf, met een gegeven vaste cirkel (O, r) , de inversie-cirkel, als referentie.

Definitie. P is een willekeurig punt in het vlak dat niet met punt O samenvalt. Vanuit punt O is de halflijn OP getekend. P' ligt op de halflijn OP zodat geldt:
 $OP \cdot OP' = r^2$.

De punten P en P' noemen we elkaars inversiebeeld ten opzichte van de cirkel, zie figuur 1.



figuur 1

Richt in P een loodlijn op lijn OP .
Noem snijpunt met cirkel R .

Trek door R de loodlijn op OR en
snijd deze lijn met halflijn OP : P' .

Opvallend is dat de schrijver in de definitie de term *halflijn* gebruikt (vermoedelijk naar analogie van de term *halfvlak*, die wél voorkomt in het Nederlands wiskundejargon) waar gemeenlijk *halve lijn* (Nederland) of *halfrechte* (Vlaanderen) staat.

Ik heb er geen bezwaar tegen, maar een leerling zal die term mogelijk niet direct begrijpen. Een toelichting erop zou hier dan ook zeker op zijn plaats zijn geweest. Overigens, in de Nederlandse versie van het door de auteur geadviseerde computerprogramma *GeoGebra* wordt *halfrechte* gebruikt.

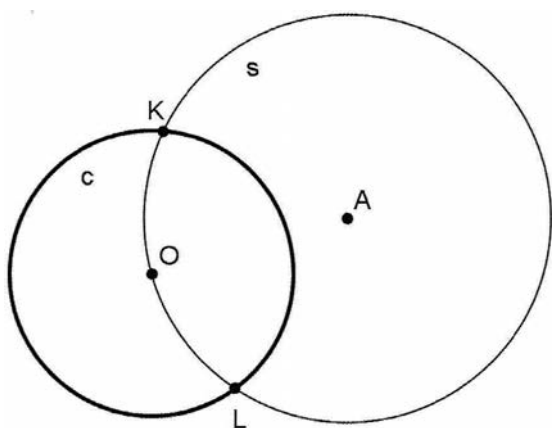
Dit woord is niet het enige dat mij bij het doornemen van het boekje opviel. In enkele opgaven komt de opdracht 'Laat zien dat ...' voor. Maar *hoe* de lezer/leerling dan iets kan (moet) laten zien, is niet vermeld. Beter lijkt mij dan ook om in plaats daarvan 'Bewijs dat ...' of 'Laat door berekening zien dat ...' te gebruiken.

De theorie van de inversie komt in het boekje voornamelijk aan de orde in de vraagstukken. Het zijn er zo'n 55.

Dat de theorie daardoor mogelijk wat op de achtergrond raakt, is misschien niet zo erg, maar mijns inziens stapt een leerling, zeker als het bewijs van een eigenschap niet erg wil vlotten, snel over naar een volgende opgave, ook al zijn de uitwerkingen van alle opgaven via de website van Epsilon Uitgaven beschikbaar. Met dit laatste wordt het de lezer nóg makkelijker gemaakt om de theorie over te slaan. Zoals gezegd wordt de theorie inzichtelijk gemaakt met behulp van het programma *GeoGebra*. Echter, de lezer die dit programma voor het eerst gebruikt moet wel even doorbijten. In appendix 1 wordt weliswaar een beknopt overzicht gegeven van *GeoGebra*, althans zo staat het in de tekst, maar de beide weergegeven scherm-afdrukken zijn onleesbaar en de tekst is wel erg beknopt (amper één pagina).

Inversiebeeld van rechte lijnen

In hoofdstuk 1 wordt gebruikgemaakt van een schaakbord ten einde het inversiebeeld van rechte lijnen te vinden. Een en ander is verdeeld over acht opgaven; zie de omslag (een plaatje dat op de voorkant van een van de eerste afleveringen van het tijdschrift *Pythagoras* stond). De kop van paragraaf 1.6 is wat verwarrend. Er staat 'Wat is het inversiebeeld van een cirkel? En hoe teken je dat?' In de eerste opgave wordt gevraagd het beeld te tekenen van een cirkel die door het inversiecentrum gaat, maar wél met passer en geodriehoek. Maar hoe gaat dat in de praktijk? Het staat er niet bij. De opdracht bij figuur 2 luidt (gedeeltelijk): 'Met het inversiebeeld van cirkel s bedoelen we de verzameling van alle inversiebeelden van de punten van cirkel s . Van twee punten weet je in ieder geval het inversiebeeld. Schrijf op om welke punten het gaat en leg uit waarom dit de juiste punten zijn. Neem figuur 2 over in je schrift en teken het inversiebeeld van de cirkel s .



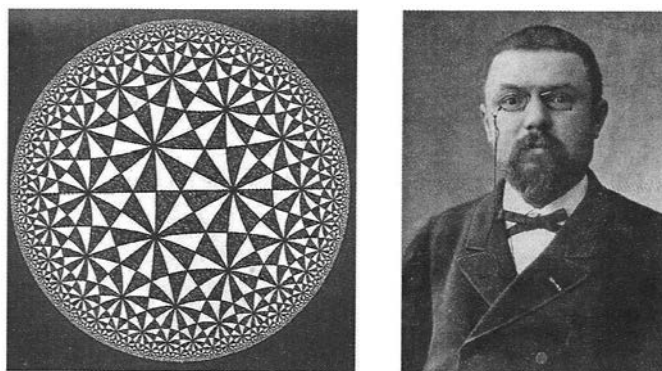
figuur 2

Er zou als hint een verwijzing bij moeten staan naar een voorgaande opgave, waarin het beeld van een rechte lijn die de inversiecirkel snijdt is gevonden, en misschien ook wel dat de begrippen beeld en origineel bij inversie

omkeerbaar zijn. In de tweede plaats is het jammer dat de auteur hier (en ook elders in het boekje) geen gebruikmaakt van de optie 'meetkundige plaats' van *GeoGebra*.

Invariante eigenschappen

In hoofdstuk 2 worden invariante eigenschappen behandeld. Daarbij komt, uiteraard, ook de 'orthogonale cirkel' aan de orde. Helaas wordt figuur 2.1.4, waarin een groot aantal orthogonale cirkels van de inversiecirkel getekend is, het 'cirkelmodel van Poincaré' genoemd, zie figuur 3. Nee, het cirkelmodel van Poincaré is de verzameling punten binnen een vaste cirkel, waarbij een 'rechte lijn' door elk tweetal van die punten het binnen die cirkel gelegen deel is van de orthogonale cirkel door die twee punten. Dat is wat anders dan een op zich fraaie illustratie in het cirkelmodel van Poincaré.



figuur 3 Henri Poincaré (1854-1912) was een belangrijke Franse wiskundige

Toepassingen van inversie

Hoofdstuk 3 gaat over enkele toepassingen van inversie: de arbelos, het raakprobleem van Apollonius, met als bijzonderheid het vinden van de Soddy-cirkels van drie cirkels, en de cel van Peaucellier (waarmee een cirkelbeweging kan worden omgezet in een rechte lijn, en omgekeerd). Aan het einde van dit hoofdstuk staat (wat onopvallend) een onderzoeksopdracht: Onderzoek de gevallen CPP, CLL, PLL en LLL van het raakprobleem van Apollonius (C = cirkel, L = lijn, P = punt). Een tweede onderzoeksopdracht staat aan het einde van het bestand met uitwerkingen: de 'keten van Pappos', een serie aan elkaar rakende cirkels. Deze opdracht is voorzien van een aanzet tot onderzoek. In de laatste paragraaf van dit hoofdstuk worden inversiebeelden behandeld van de parabool en de hyperbool. En dit levert, als het de lezer met *GeoGebra* lukt, fraaie plaatjes op. Appendix 2 bevat een overzicht (drie pagina's) van de definities en stellingen die de te leveren bewijzen kunnen ondersteunen. En je zult het altijd zien, in de laatste figuur zit een foutje: de loodlijn op AC uit het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC staat *niet* loodrecht op AC.

Complexe getallen

In een derde bijlage (te downloaden via de Epsilon-website) staat een behandeling van inversie die gebaseerd is op het gebruik van complexe getallen. Ik citeer de inleiding daarvan:

'In deze paragraaf gaan we op een andere manier kijken naar inversie. We doen dat met behulp van de complexe getallen. We veronderstellen dan wel dat je weet wat complexe getallen zijn en dat je ermee kunt rekenen. Dus bijvoorbeeld dat je weet hoe je complexe getallen bij elkaar moet optellen of hoe je ze met elkaar moet vermenigvuldigen. We gaan er ook vanuit dat je bekend bent met complexe functies en juist die functies die overeenkomen met een meetkundige afbeelding (transformatie) in het complexe vlak, zoals een spiegeling, rotatie, translatie of projectie. Tot slot gaan we na waarom het gebruik van complexe getallen bij inversie handig is.'

Er worden, zoals blijkt, nogal wat eisen gesteld aan de lezer. Het is daarom terecht dat deze paragraaf niet in het boekje zelf is opgenomen.

Conclusie

Het boekje past zeker in de Zebra-serie, bedoeld voor leerlingen uit de hoogste klassen van het vwo (en eenieder die belangstelling heeft voor wiskunde). Het is helder geschreven en het bevat de fundamenteën van de inversie. Maar de behandelde stof zal zeker ook nieuw zijn voor menig wiskundeleraar. Inversie behoorde, voor zover ik heb kunnen nagaan, alleen tot de examenstof van de l.o.-akte wiskunde, die toentertijd een derdegraads bevoegdheid gaf voor ulo, mulo en ambachtsschool. De behandelde materie is evenwel niet eenvoudig, en er moet, zoals bijna altijd bij vlakke meetkunde, veel geoefend worden om de oplossingsstrategieën voor het bewijzen van stellingen en constructies onder de knie te krijgen. En dat houdt méér in dan het doorwerken van dit boekje.

De lay-out is mijns inziens wat rommelig: hier en daar onnodige witregels, onbedrukte paginadelen en illustraties in wisselende grootte (soms te groot naar mijn smaak). En, ik benadruk het hier opnieuw, het gebruik van *GeoGebra* vraagt meer toelichting.

Over de auteur

Dick Klingens was tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroeps-onderwijs en schoolleider. Gedurende enkele jaren was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo. E-mailadres: dklingens@gmail.com

WERELDWISKUNDE FONDS IN GAMBIA

Mirjam Abbes

Een school in een dorp in Gambia voorzien van materialen voor de wiskundeles: een van de initiatieven waar het Wereldwiskunde Fonds vorig jaar een bijdrage aan leverde. Mirjam Abbes vertelt hoe het initiatief tot stand kwam en hoe het werd uitgevoerd.

Ontoereikend onderwijs

Het onderwijs in Gambia is niet toereikend. Het lesgeven gebeurt alleen maar klassikaal. De groepen zijn groot, soms wel zeventig leerlingen in een lokaal. Er is onvoldoende meubilair en materiaal. Leerlingen moeten voor hun eigen boeken, schriften en potlood zorgen. Door de grote armoede staat dit onderaan het lijstje van ouders. De leraar kan niet zien wie de stof niet beheerst en er is geen aandacht voor het individu.

Ik kom al sinds 2003 in Gambia en zie dat het onderwijs niet toereikend is en dat dat zijn weerslag heeft op de hele maatschappij. Leerlingen wordt niet aangeleerd hoe ze problemen zelf kunnen oplossen. Je functioneert in een groep en er is altijd wel iemand die het antwoord weet. En dat zie je bij de volwassen bevolking terug. Er is een afwachtende houding. Is er een probleem, dan komt er vast wel iemand langs die het probleem voor je oplost.

'DE LEERLINGEN HADDEN VOOR HET EERST VAN HUN LEVEN EEN PASSER IN HUN HAND.'

Materiaal voor 410 leerlingen

Bij mijn hulp aan het onderwijs in Gambia gaat het mij erom dat kinderen zelf aan de slag gaan. Dat ze grenzen verleggen en zich goed voelen als ze zelf iets hebben gedaan of opgelost. Via een collega in Lelystad hoorde ik van het wiskundefonds. Op de middelbare school in Jiboro, de Jiboroh Basic Cycle School, wordt wiskundeles gegeven, maar zonder materialen. Vandaar dat ik een aanvraag heb gedaan. Met de wiskundedocent in Gambia heb ik geïnventariseerd wat voor materialen ze konden gebruiken. Toen ik de lijst zag verbaasde het me

dat die zo basaal was: schriften gelinieerd, blanco en geruit, potloden, passers, linialen, gum en rekenmachines. Eigenlijk al het materiaal waar de leerlingen zelf voor moeten zorgen, maar wat ze niet hebben vanwege geldgebrek. In de aanvraag gingen we uit van materiaal voor 410 leerlingen.

Afgelopen december ben ik in Gambia geweest en samen met de wiskundedocent en een taxichauffeur zijn we op pad gegaan om het materiaal te kopen. De reis naar de hoofdstad was ruim anderhalf uur. De winkel waar we moesten zijn zag er niet uit als een winkel. Het was zo klein dat ik er amper naar binnen kon. Moet ik hier voor 410 leerlingen al het materiaal kopen? Maar alles kwam



figuur 2 Aan de slag met de nieuwe materialen.

'ELK KIND BESEFT DAT SCHOOL NODIG IS OM
IETS VAN JE LEVEN TE MAKEN.'

uit alle hoeken en gaten tevoorschijn. De eigenaar werkt samen met een Duitse organisatie voor scholen. Dus hij gaf me nog wat materiaal cadeau. Daarna moest alles verpakt worden en op het dak van de taxi worden vastgebonden. Twee uur later konden we weer vertrekken. De lading was zwaar en ik zag de taxichauffeur even bedenkelijk naar zijn taxi kijken. De wegen in Gambia zijn slecht en soms moet je over behoorlijke hobbels en diepe kuilen. Maar we zijn goed aangekomen. Met op de achterbank een uiterst tevreden en blijde wiskundedocent.



figuur 1 Met een zware lading anderhalf uur onderweg naar school.

De volgende dag ben ik terug naar school gegaan en heb ik een hele leuke wiskundeles bijgewoond. De leerlingen hadden voor het eerst van hun leven een passer in hun hand. Vijftig kinderen, die niet weten hoe zoiets werkt. Ik, talendocent en zeer slecht in wiskunde, heb in deze les moeten meehelpen. Maar ik heb genoten van de leerlingen die genoten. Daarna moesten er hoeken gemaakt worden en heb ik voor het eerst van mijn leven ook iets van een wiskundeles opgestoken. Toen de les was afgelopen, bedankten de leerlingen en de docent mij. Het



figuur 3 Over drie maanden is het examen.

bleek dat ze over drie maanden examen in deze onderdelen moeten doen!

Voor mij was dit een heel fijne ervaring. Soms sta je machteloos als je de onderwijssituatie in Gambia wilt verbeteren. Je bent erg afhankelijk van financiële hulp. En als je dan ziet hoeveel meer je kunt bereiken door een actie als deze, dan ben je dankbaar. En de leerlingen? Die gaan in Gambia zo graag naar school. Elk kind beseft dat school nodig is om iets van je leven te maken. En door deze hulp beseffen ze dat andere mensen op de wereld bereid zijn om hun daarbij te helpen. Dat is al zoveel waard voor ze.

Over de auteur

Mirjam Abbes is werkzaam als talendocent op de ISG Arcus in Lelystad. Een paar maanden per jaar werkt ze als vrijwilliger in Jiboro, een dorp in Gambia. Daar werkt ze samen met leraren in het kleuter-, basis- en middelbaar onderwijs op het gebied van lesgeven, organisatie, materiaal en hygiëne.

BOEKBESPREKING

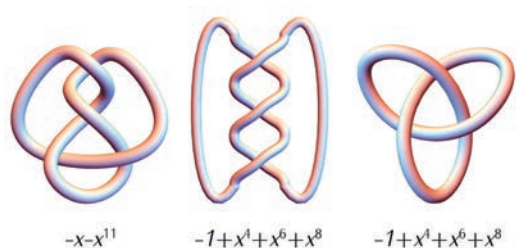
KNOPEN IN DE WISKUNDE

Roland van der Veen



Auteurs: Meike Akveld en Ab van der Roest
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015),
Zebra reeks, deel 46
ISBN: 978-90-5041-154-7
Prijs: € 10,00 (64 pagina's; paperback)

Knopen zijn overal om ons heen en de wiskunde erachter is opvallend diep en divers. Meetkunde, grafentheorie, polynomen en algebra zijn allemaal vertegenwoordigd. Zo bieden knopen een uitstekende ingang tot de wiskunde, juist ook op middelbareschool-niveau. Een zebraboekje over knopen is daarom een aanwinst. Akveld en van der Roest slagen erin om de lezer goed te betrekken bij de materie met een *hands-on* aanpak en maar liefst 62 opgaven in 60 pagina's.



figuur 1 Diagrammen van drie knopen. De laatste twee stellen dezelfde knoop voor. Onderaan staan hun Jones-polynomen.

Knoopdiagrammen

De succesformule van het zebraboekje is om knopen via knoopdiagrammen te beschrijven. Zo wordt het een soort grafentheorie met een extra 3D kick. Wat is een knoopdiagram? Dat is een graaf met punten en lijnen getekend in het vlak waarbij in elk punt vier lijnen samenkomen.

De lijnen raken elkaar verder niet en in ieder punt zijn de uiteinden van twee tegenoverliggende lijnen onderbroken, zie figuur 1. Door de onderbreking van de lijnen ontstaat een visuele suggestie van lijnen in 3D die onder elkaar doorgaan.

Natuurlijk zijn er veel verschillende knoopdiagrammen die intuïtief dezelfde knoop voorstellen. Bijvoorbeeld de laatste twee diagrammen in figuur 1. De eerste knoop is daadwerkelijk anders, al is dit niet zo gemakkelijk aan te tonen. Wat bedoelen we eigenlijk precies wanneer we zeggen dat twee knopen hetzelfde zijn? Op deze vragen wordt in het zebraboekje uitgebreid ingegaan. Hier volstaan we met een uitleg hoe je uit knopen polynomen tevoorschijn kunt toveren. En wel op zo'n manier dat je er eenvoudig knopen mee kunt onderscheiden. In figuur 1 staan de polynomen onder de knopen gegeven. Aan de polynomen kunnen we zien dat de eerste twee knopen inderdaad verschillend zijn. Dit vormt het hoogtepunt van het boekje en brengt ons direct tot de *cutting-edge* van het wiskundig onderzoek.

Polynomen

Onze beschrijving hieronder van hoe je zo'n polynoom kunt berekenen aan de hand van een knoopdiagram is iets eenvoudiger dan die in het zebraboekje, maar nog steeds niet makkelijk. Toch zou het voor geïnteresseerde leerlingen te volgen moeten zijn aan de hand van simpele voorbeelden. Interessante wiskunde is nooit makkelijk en hier gaat het om het beroemde Jones-polynoom waar Vaughan Jones in 1990 de Fields Medal voor won. Er wordt volop onderzoek gedaan naar deze polynomen (ook door de recensent zelf).



figuur 2 Een kruispunt (midden) en de twee mogelijke manieren van splitsen. Links de linkersplitsing, rechts de rechttersplitsing.

We beginnen ermee ons knoopdiagram te vereenvoudigen door de kruispunten te *splitsen*, zoals in figuur 2. Dat gaat als volgt: bij ieder kruispunt komen vier lijnen samen, twee gaan onderdoor en twee bovenlangs. Met het splitsen van een kruispunt bedoelen we dat we het punt

zelf weglaten en de uiteinden van de lijnen op een simpelere manier verbinden. Splitsen kan op twee manieren, de rechtersplitsing (figuur 2, rechts) en de linkersplitsing (figuur 2, links). Links en rechts kun je als volgt uit elkaar houden: als je op een van de lijnen die onderdoor gaan richting het kruispunt loopt, dan verbindt de rechtersplitsing je met de lijn direct rechts van je.

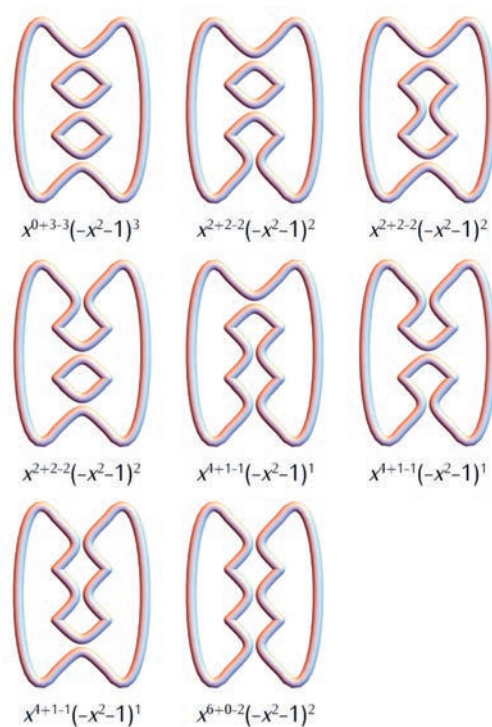
Het Jonespolynoom dat we willen maken verzamelt de informatie over alle mogelijke splitsingen. In figuur 3 zie je alle acht mogelijke splitsingen van het diagram in het midden van figuur 1. Steeds hebben we alle kruispunten gesplitst, en zo blijft er een aantal lussen over, afhankelijk van welke splitsingen we precies hebben gekozen. Het Jones-polynoom krijg je door alle mogelijkheden bij elkaar op te tellen, waarbij we iedere mogelijke splitsing meetellen als:

$$x^{2\text{Rechts} + \text{Links} - \text{Lussen}}(-x^2-1)^{\text{Lussen}}$$

Hierbij staat *Rechts* voor het aantal keer dat we rechts gesplitst hebben, *Links* voor het aantal linkersplitsingen en *Lussen* voor het aantal lussen dat je dan krijgt. In figuur 3 staat onder iedere splitsing de bijdrage aan het Jones-polynoom. Zo telt de middelste splitsing (2e rij, 2e kolom) in figuur 3 bijvoorbeeld mee als $x^{4+1-1}(-x^2-1)^1$, want we hebben een keer links gesplitst (de bovenste), twee keer rechts en er is precies één lus ontstaan. Tellen we alle bijdragen op dan krijgen we $-1+x^4+x^6+x^8$. Dat is het Jones-polynoom van onze knoop. De lezer kan nagaan dat we exact dezelfde uitkomst krijgen voor het knoopdiagram rechts in figuur 1. Voor de knoop links in figuur 1 vinden we juist een Jones-polynoom van $-x-x^{11}$ door op dezelfde manier de zestien mogelijke splitsingen van de vier kruisingen in het knoopdiagram op te tellen.

Je zult zien dat het Jones-polynoom *nauwelijks* afhangt van je gekozen diagram, maar alleen van de knoop zelf. Het enige wat kan veranderen als je een ander diagram van dezelfde knoop neemt is dat je polynoom met een macht van x of $-x$ vermenigvuldigd wordt. Onze conclusie is dus dat de eerste twee knopen in figuur 1 echt verschillend zijn, want hun Jones-polynomen schelen veel meer dan alleen een macht van x en een minteken. Het is leuk om te proberen dit zelf na te gaan. In het zebraboekje leer je hoe je dit in het algemeen aan kunt pakken met de stelling van Reidemeister.

Bijzonder is dat het Jones-polynoom vrij concreet is, en praktisch uitgerekend kan worden voor kleine voorbeelden, maar dat het ook veel mysterieuze eigenschappen heeft. Zo is het onbekend of er twee verschillende knopen zijn met een Jones-polynoom gelijk aan 1. Vind je zo'n paar knopen, dan ben je op slag beroemd in de wereld van de knopentheorie. Een prachtig onderwerp voor een zebraboekje dus.



figuur 3 Alle mogelijke splitsingen van de kruispunten van het middelste knoopdiagram uit figuur 1, met daaronder hun bijdrage aan het Jones-polynoom.

Conclusie

We hebben hier een indruk gegeven van hoe je via knoopdiagrammen al snel interessante wiskunde tegenkomt. In het zebraboekje wordt het allemaal rustiger uitgelegd met veel opgaven om mee te oefenen. Ook eenvoudigere constructies, zoals het driekleuringsgetal, komen aan bod, zodat het Jones-polynoom minder uit de lucht komt vallen. De kwaliteit van de illustraties en de lay-out is onder de maat en de uitleg is somsodeloos ingewikkeld. Toch is het door de vele opgaven een goede manier om met knopen aan de slag te gaan. Eventuele onduidelijkheden kunnen worden ondervangen door er *The knot book* van Colin Adams als naslagwerk bij te houden.

Over de auteur

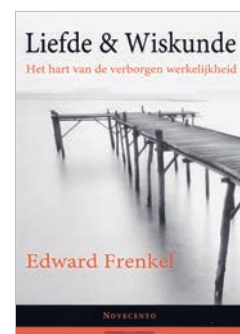
Roland van der Veen is universitair docent aan de universiteit Leiden, schreef met Jan van de Craats een boek over de Riemann-hypothese en doet onderzoek naar knopen, meetkunde en representatietheorie. E-mailadres: r.i.van.der.veen@math.leidenuniv.nl

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

EEN RAAKPROBLEEM UIT HET BOEK *LIEFDE & WISKUNDE* NADER BEKEKEN

Met behulp van dynamische meetkunde kunnen leerlingen het raakprobleem PPC, dat Edward Frenkel in 1984 voorgeschoteld kreeg op zijn toelatingsexamen voor Moskovskiy Gosudarstvenny Universitet, oplossen. U als docent, mag dat gaan oplossen met behulp van inversie (spiegelen in een cirkel). Jacques Jansen plaveit de weg naar die oplossing.



'Rockstar mathematician'

Edward Frenkel (1968) werd als begaafde jongeman niet tot de universiteit van Moskou, Moskovskiy Gosudarstvenny Universitet, toegelaten omdat hij Joods is. Als 21-jarige, nog voor hij gepromoveerd was, werd Frenkel uitgenodigd om als gasthoogleraar aan Harvard te doceren. Dit staat allemaal te lezen in het boek *Liefde & Wiskunde*.^[1] Het boek is voor een deel de autobiografie van Frenkel en daarnaast gaat het over de rol van symmetrie in de wiskunde én in de theorie van de elementaire deeltjes.



figuur 1 Edward Frenkel, Foto: © Edward Frenkel



figuur 2 *Rites of Math and Love*, regie: Reine Graves en Edward Frenkel. Foto: © Edward Frenkel

Een paar jaar geleden kwam hij in het nieuws als 'rockstar mathematician' met een film, zie figuur 2, waarin hij een poging deed om in beeld te brengen hoe het kan voelen om wiskunde te begrijpen. Een blote vrouw, zijn eigen naakte lijf, sensualiteit en lichaamskalligrafie kwamen daarin samen met wiskundige formules. Snel kijken dus.

Hieronder volgt een fragment – Frenkel doet op zestienjarige leeftijd een toelatingsexamen – uit het boek.

Raakprobleem (PPC)

Wat bedoelen we met een raakprobleem dat aangeduid wordt met PPC? Lees het onderstaande fragment.

'Nog niet klaar?', zei de examiner, 'probeer nu dit probleem.'

Als dit een bokswedstrijd was waarin een van de bokkers in de hoek was gedrongen, bebloed, wanhopig probeerend staande te blijven onder het spervuur van slagen die op hem neerdaalden (veel ervan onder de gordel, zou ik willen toevoegen), zou dat probleem het equivalent zijn van de laatste, dodelijke slag. Het zag er op het eerste gezicht onschuldig genoeg uit: *gegeven een cirkel en twee punten in het vlak buiten de cirkel, construeer dan een andere cirkel die door die twee punten gaat en die de eerste cirkel in één punt raakt.*

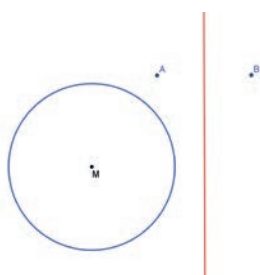
De oplossing is echter heel gecompliceerd. Zelfs een professioneel wiskundige zou het misschien niet meteen kunnen oplossen. Je moet of een truc gebruiken die *inversie* wordt genoemd, óf een ingewikkelde meetkundige constructie toepassen. Geen van beide methoden werd behandeld op de middelbare school en zo'n probleem zou dus niet toelaatbaar zijn voor dit examen.

Ik kende de methode van *inversie* en besepte dat ik die hier kon toepassen. Ik begon aan het probleem te werken, maar...^[2]

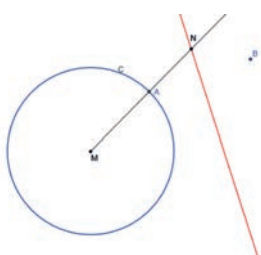
Frenkel beschikte tijdens het examen niet over software zoals wij dat wel hebben met GeoGebra. De hamvraag is: Hoe zouden onze leerlingen met inzet van GeoGebra dit raakprobleem kunnen verkennen en oplossen?

Verkenning

Als een leerling op een stuk papier of in het tekenvenster van GeoGebra een cirkel c met twee verschillende punten A en B heeft getekend, dan komt hij of zij vast op het idee om de middelloodlijn te tekenen van lijnstuk AB . Notatie: $mll(A, B)$ (zie figuur 5). Het middelpunt van de oplossingscirkel zal op die middelloodlijn moeten liggen. Waarschijnlijk loopt de leerling dan vast.



figuur 5



figuur 6

Laten we daarom beginnen met een bijzondere situatie. Eén van de punten, laten we zeggen punt A , kiezen we op de gegeven cirkel c (zie figuur 6).

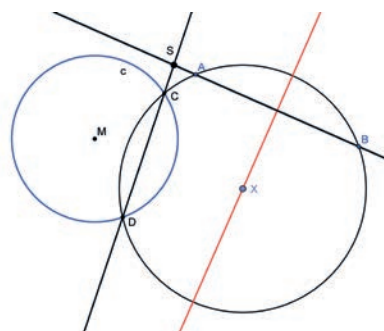
Het middelpunt van de gezochte cirkel moet liggen op halflijn MA en op de $mll(A, B)$. Er is één oplossingscirkel tenzij $mll(A, B)$ evenwijdig is met MA . Toch ook weer aardig om de leerlingen met dynamische meetkunde te laten ontdekken dat punt B – zorg dat het verplaatst kan worden – op de raaklijn moet liggen van punt A .

In plaats van óp de cirkel kunnen we punt A ook binnen de cirkel kiezen. Van een raakcirkel kan nu geen sprake meer zijn. Een cirkel door A en B zal cirkel c altijd snijden. Echt interessant wordt het dus als beide punten A en B binnen cirkel c liggen of juist buiten de cirkel. We beperken ons onderzoek tot de twee punten die in het buitengebied van cirkel c liggen zoals dat gebeurde bij het examen voor de jonge Frenkel.

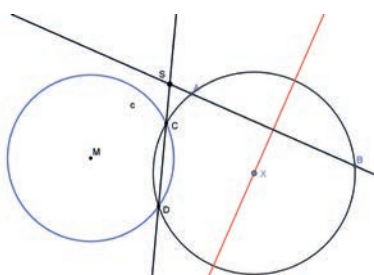
Paar momentopnamen

We nemen een willekeurig punt X op $mll(A, B)$ en tekenen een cirkel door A en B met X als middelpunt. We zorgen ervoor dat cirkel c gesneden wordt door deze cirkel. De snijpunten noemen we C en D . We kunnen middelpunt X zo verschuiven dat C en D steeds dichterbij elkaar komen

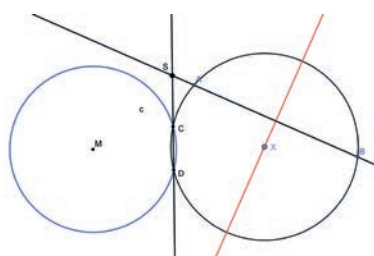
te liggen. Tot slot willen we dat ze samenvallen. De cirkels raken elkaar dan. Zie de figuren 7 tot en met 10. Interessant hierbij is om de positie van snijpunt S van de lijnen BA en DC te volgen.



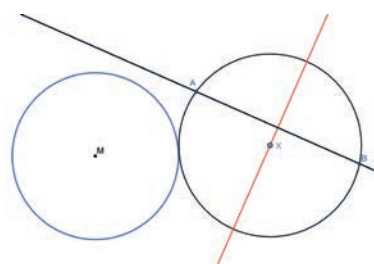
figuur 7



figuur 8



figuur 9

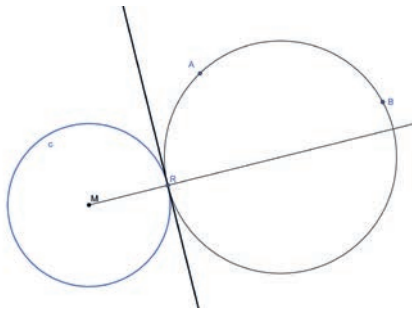


figuur 10
Eindsituatie

Als de leerlingen aan het schuiven gaan met punt X over $mll(A, B)$ zal het hun niet ontgaan, dat de positie van punt S vastligt. Met die vaststelling, eigenlijk vermoeden, kunnen ze aan de slag. Daar hebben ze u als docent wel bij nodig. Het ligt nu voor de hand om gebruik te gaan maken van de eindsituatie (zie figuur 10).

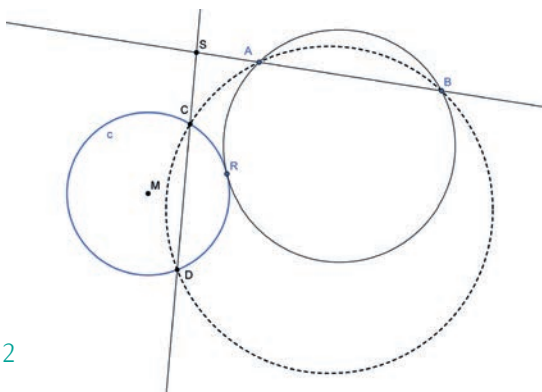
Oplossingsaanpak

We kunnen ook de eindsituatie tekenen. We tekenen twee rakende cirkels (hoe?). De stralen naar het raakpunt liggen dan in elkaars verlengde. Op één van die cirkels kiezen we twee verschillende punten A en B . Vervolgens proberen we terug te redeneren.



figuur 11

De vraag is: 'hoe komen we aan die raaklijn?' Als we één punt van de raaklijn hebben, zijn we er. Vanuit dat punt kunnen we dan een raaklijn trekken aan cirkel c en vinden we raakpunt R (er is natuurlijk nog een raakpunt). Lijn AB kunnen we snijden met de raaklijn die we nog niet hebben. Laten we dat punt nu S noemen. We hebben nog een lijn nodig die door S gaat en bepaald wordt door de gegeven punten A en B en gegeven cirkel c . We nemen dan een hulpcirkel die door de punten A en B gaat en cirkel c snijdt in de punten C en D (zie figuur 12).



figuur 12

Maar dan komt de vraag: 'Hoe kunnen we beredeneren dat het snijpunt van lijn DC en lijn BA op die raaklijn moet liggen?'

We merken op dat geldt – anders kijkt u even naar onderstaand intermezzo – dat $SA \cdot SB = SC \cdot SD = SR \cdot SR$. Dus lijn SR moet een raaklijn zijn aan cirkel c . Vanuit punt S kun je twee raaklijnen trekken aan cirkel c . Er zijn dus twee oplossingscirkels. Met of zonder GeoGebra kunnen we door drie verschillende punten een cirkel tekenen. Een van die oplossingscirkels gaat dus door de punten A , B en R . Het probleem PPC hebben we dus teruggebracht tot PPP.

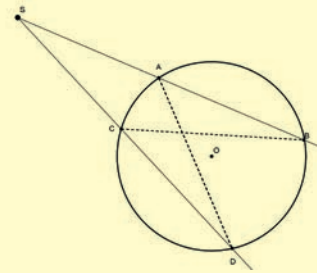
Intermezzo

Gegeven is een cirkel met middelpunt O en straal r en een willekeurig punt S buiten de cirkel.

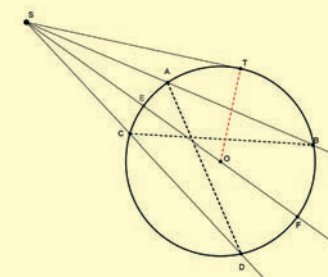
Verder zijn gegeven twee willekeurige lijnen door punt S die de cirkel snijden. Zie de lijnen AB en CD in figuur 13. De punten A , B , C en D liggen op die cirkel.

Er geldt nu: $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

(De producten zijn constant. Laten we die constante k noemen.)



figuur 13



figuur 14

Bewijs:

$\triangle SCB$ is gelijkvormig met $\triangle SAD$ (hh). Hieruit volgt de verhouding $SC:SB = SA:SD$. Dus $SA \cdot SB = SC \cdot SD$

Deze betrekking geldt ook voor de twee niet willekeurige lijnen SO en ST . ST is een raaklijn aan de gegeven cirkel (zie figuur 14).

Er geldt: .

$$SE \cdot SF = k = (SO - r)(SO + r) = SO^2 - r^2 = ST^2$$

Met inversie

En voor u is de uitdaging om dit probleem, aangeduid met PPC, met behulp van inversie (spiegelen in een cirkel) op te lossen. Frenkel noemt dat in zijn boek een trucje. Indien nodig, kunt u voor die truc *Zebraboekje* Nr 45 raadplegen.^[3]

De uitwerking is te vinden op de website van de *Euclides*.

Noten

- [1] Frenkel, E. (2015). *Liefde & Wiskunde. Het hart van de verborgen werkelijkheid*. Amsterdam: Novecento.
- [2] Idem, p. 55
- [3] Jansen, J. (2015). *Inversie. Spiegelen in lijn en in cirkel*. Zebra 45. Epsilon Uitgaven: Amsterdam.

Website van Frenkel: <http://edwardfrenkel.com>

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl



vakbladeuclides.nl/922jansen



Wiskunde, onderwijs en ICT

Effectief leren met ICT in de wiskundeles

Hoe kan je ICT inzetten als krachtig leergereedschap om leerlingen te ondersteunen bij het leren van wiskunde?

Lees het nu in onze whitepaper! In dit kennisdocument gaan we in op hoe en wanneer het gebruik van ICT van meerwaarde is tijdens de wiskundeles én wanneer ook niet.

Download nu GRATIS de whitepaper!

Laat je inspireren om hier direct mee aan de slag te gaan. Downloaden kan op:
www.mathplus.nl/effectieflerenmetict

Heb je na het lezen van deze whitepaper nog vragen of wil je graag meer weten over de wiskundemethode MathPlus?

Bezoek onze MathPlus stand tijdens de NVvW jaarvergadering.

HET FIZIER GERICHT OP...

ONDERWIJS MEETS ONDERZOEK

Paul Drijvers
Sietske Tacoma

In Fzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering gaan Paul Drijvers en Sietske Tacoma in op de vragen die centraal stonden op de in juni 2016 gehouden conferentie 'Onderwijs meets Onderzoek', georganiseerd door de NVvW, de SLO en het Freudenthal Instituut. Wat kan vakdidactisch onderzoek betekenen voor de praktijk van het wiskundeonderwijs en hoe kan deze praktijk richting geven aan het onderzoek?



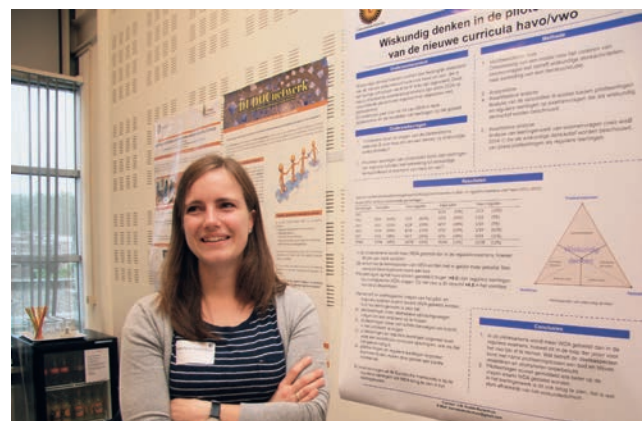
Vragen uit de klassenpraktijk

Aan Onderwijs meets Onderzoek namen tachtig docenten en onderzoekers deel. Het programma voorzag naast een plenaire lezing en parallele werkgroepen ook in een postersessie, waar twintig (docent-)onderzoekers hun werk of hun plannen met veel enthousiasme presenteerden. Het is goed te zien dat zich een nieuwe generatie wiskunde-didactische onderzoekers aandient die vanuit hun praktijkervaring dieper willen denken over wat wel en niet werkt in het wiskundeonderwijs en waarom! De conferentie kenmerkte zich door een levendige sfeer en interessante discussies, onder andere in de afsluitende rondetafelsessie. Vragen uit de klassenpraktijk stonden centraal in deze discussies.



figuur 1 De rondetafelsessie met (vlnr): Paul Drijvers, Birgit Pepin, Ebrina Smallegange, Swier Garst, Hester Vogels, Desiree van den Bogaart en Jos Tolboom

In je praktijk als wiskundedocent loop je tegen allerlei vragen aan. Van welke werkvormen leren leerlingen het meest? Welke hulpmiddelen zijn nuttig in welke situaties? Hoe worden wiskundige denkactiviteiten (WDA) getoetst in de centrale examens (zie kader 1 op de volgende pagina)? Om antwoorden te vinden op dergelijke vragen, kun je een tijdschrift als *Euclides* openslaan (de jaargangen staan online) om te zoeken naar ervaringen van andere docenten. Of je kunt online in tijdschriften zoals *Pedagogische Studiën* of *Educational Studies in Mathematics* nagaan wat er vanuit onderzoek al bekend is over deze kwestie. Daarnaast kun je, alleen of met



figuur 2 Hanneke Kodde-Buitenhuis

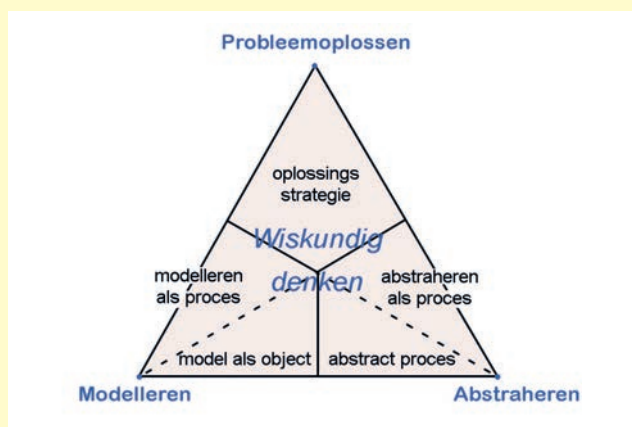
collega's, in je eigen klassen experimenteren met verschillende aanpakken, werkvormen en hulpmiddelen, om te ervaren wat voor jou en voor jouw leerlingen werkt. Alison Clark-Wilson en Paul Drijvers beschreven in hun plenaire lezing wat van belang is voor een dergelijke onderzoekende houding: in de eerste plaats een interesse in een fenomeen, de nieuwsgierigheid om daar meer van te weten, de bereidheid om een objectief standpunt in te nemen, de wens om feiten boven tafel te halen en het vermogen om daarop te reflecteren. Zo'n experiment in de klas kan zorgen voor verbetering



figuur 3 Marianne van Dijke

van je lessen en mogelijk kun je ook andere docenten enthousiast krijgen voor jouw aanpak. Zo onderzocht Marianne van Dijke bijvoorbeeld het effect van een gedifferentieerde aanpak in haar lessen over statistiek in vwo 2. Maar het risico bestaat dat je weinig verschil vindt, of dat je aanpak niet in elke klas werkt, of dat je collega's er niet mee uit de voeten kunnen. Kortom, je bevindingen zijn mogelijk weinig robuust. Voor degelijke antwoorden op vragen die in de klas spelen is systematischer wiskunde-didactisch onderzoek nodig.

Wiskundige denkactiviteiten in eindexamens



figuur 4 Kernaspekte van wiskundig denken

Resultaten

Overzicht van het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden in pilot- en reguliere examens voor havo (2011-2015) en vwo (2012-2015) en bijbehorende percentages

Afnamejaar	Vwo pilot	Vwo regulier	Havo pilot	Havo regulier
2011			8/19 (42%)	3/19 (16%)
2012	9/15 (60%)	7/17 (41%)	5/19 (26%)	1/19 (5%)
2013	9/17 (53%)	6/18 (33%)	4/17 (24%)	1/19 (5%)
2014	9/18 (50%)	4/18 (22%)	6/19 (32%)	2/19 (11%)
2015	6/16 (38%)	6/17 (35%)	6/16 (38%)	4/19 (21%)
Totaal	33/66 (50%)	23/70 (33%)	29/90 (32%)	11/95 (12%)

In de pilotexamens wordt meer WDA getoetst dan in de reguliere examens, hoewel dit per jaar sterk verschilt. De verschillende kernaspecten van WDA worden niet in gelijke mate getoetst. Met name *probleem oplossen* komt aan bod.

Pilotleerlingen op het havo scoren gemiddeld hoger (+6.0) dan reguliere leerlingen op *overlappende* WDA-vragen. Op het vwo is dit verschil +4.8 in het voordeel van de pilotleerlingen.

kader 1 Deel van de poster van Hanneke Kodde-Buitenhuis over WDA in eindexamens

Wiskunde-didactisch onderzoek

Wiskunde-didactisch onderzoek kan op verschillende manieren van pas komen. Ten eerste kan het de huidige situatie beschrijven en in kaart brengen. Kader 1 geeft hiervan een voorbeeld: hoe zit het met WDA in de examens van de afgelopen jaren? Ten tweede kan het onderzoek uitwijzen wat er gebeurt als we het anders aanpakken. Daarbij wil je niet alleen weten of de interventie werkt ('aanpak A werkt beter dan aanpak B'), maar zoek je ook naar verklaringen daarvoor ('door aanpak A ontstaat ...'). Dergelijke verklaringen helpen om de uitkomsten van onderzoek algemener toepasbaar te maken: we weten nu niet alleen iets over aanpak A en aanpak B, maar kunnen met behulp van deze verklaring ook voorspellingen doen over aanpak C en aanpak D. Door dergelijke verklaringen overstijgt de uitkomst van een wiskunde-didactisch onderzoek dus de specifieke onderzoekssituatie.

Daarnaast kan kennis over onderzoeksmethoden van pas komen bij het opzetten en uitvoeren van een onderzoek. Een wiskunde-didactisch onderzoeker zal in de al bestaande literatuur over eerder onderzoek op zoek gaan naar mogelijk geschikte aanpakken en een theoretische onderbouwing daarvan. Het resultaat van dat onderzoek is een antwoord op de oorspronkelijke vraag uit de klassenpraktijk. Maar misschien nog belangrijker is de onderbouwing van het antwoord, door de bevindingen te verbinden met andere resultaten of met een verklarend theoretisch kader. En in veel gevallen roepen de resultaten ook weer nieuwe vragen op...

Onderzoekersbril

Graag willen we wiskundedocenten aanmoedigen om op een of andere manier ook af en toe een onderzoekersbril op te zetten. Zoals Jelle Kaldewaij, directeur van het Nationaal Regieorgaan Onderwijsresearch, in de opening van de conferentie aangaf, bestaan hiervoor verschillende mogelijkheden:

- Je kunt als docent deelnemen aan onderwijsexperimenten, bijvoorbeeld in samenwerking met onderzoekers van universiteiten.
- Je kunt samen met collega's lesmateriaal ontwerpen en beproeven, bijvoorbeeld in een *Docent Ontwikkel Team* of een professionele leergemeenschap. In veel gevallen wordt hierbij de methode van *Lesson Study* gebruikt.
- Je kunt deelnemen aan cursussen uit het nascholingsaanbod of uit de reguliere programma's van hogescholen en universiteiten.
- Je kunt een kortlopend onderzoek aanvragen bij NWO, bijvoorbeeld in het kader van het programma *Wiskundeleraar in onderzoek* of het NRO-programma *Praktijkgericht onderzoek*.
- Voor uitgebreidere promotieonderzoeken zijn er mogelijkheden via de programma's Dudoc, NWO lerarenpromotiebeurs, en Promodocs.

- Docenten die zijn gepromoveerd kunnen een Postdoc-VO beurs aanvragen.

Deelnemen aan onderzoek is niet alleen nuttig vanwege de opbrengsten ervan. Vaak horen we van docenten terug dat de betrokkenheid bij wiskunde-didactisch onderzoek hen inspireert, hun kennis verdiept, en hen vooral helpt om hun eigen praktijk te ontwikkelen en te verbeteren.



figuur 5 Deelnemers aan de conferentie 'Onderwijs meets Onderzoek'

Over de auteurs

Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut en is tevens wetenschappelijk onderzoeker bij Cito.

E-mailadres: P.Drijvers@uu.nl

Sietske Tacoma doet bij het Freudenthal Instituut promotieonderzoek naar het gebruik van automatische feedback in universitair statistiekonderwijs. Daarnaast werkt zij aan de ontwikkeling van de Digitale Wiskunde Omgeving en zit ze in de redactie van *Euclides*.

E-mailadres: S.G.Tacoma@uu.nl

VASTGEROEST

Ab van der Roest

'DE SCHULDIGE BLIK'

Wie leert er het meest van een collegiaal lesbezoek?

Ab van der Roest heeft in ieder geval veel geleerd van het observeren van zijn collega.

Op mijn school wordt door de afdelingsleiding collegiaal lesbezoek gestimuleerd. Met mijn collega Theo-Jan sprak ik af dat we elkaars les zouden bezoeken. We kozen ervoor om in deze les een denkactiviteit centraal te stellen. Theo-Jan koos voor het bewijs van de *abc*-formule in vwo 3. In een eerdere les had hij het kwadraat afsplitsen behandeld. Dit werd in de geobserveerde les kort herhaald en vervolgens moesten de leerlingen werken aan het bewijs. In de rol van waarnemer zie je opeens dingen waar je in de rol van docent overheen kijkt. De worsteling van leerlingen met de algebra is in deze les veel groter dan ik verwachtte. Je realiseert je op dat moment dat je daar in je eigen les gewoon overheen kijkt en dat voorbeelden veel belangrijker zijn dan je zou willen. Daarnaast luistert het nauw hoe je iets verwoordt. Ik zal dit proberen te illustreren met een voorbeeld.

Kwadraat afsplitsen

De opdracht is de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ op te lossen met kwadraat afsplitsen. De vergelijking wordt herleid tot $(x - 3)^2 - 1 = 0$ en krijgt als motivatie: de -3 is de helft van -6 en de -1 wordt duidelijk uitgelegd met $(-3)^2 = 9$ en omdat je maar 8 hebt moet je er 1 van aftrekken. Volledig duidelijk, maar in het vervolg van de les blijkt deze uitleg niet helemaal toereikend.

Wanneer het algemene geval $ax^2 + bx + c = 0$ aan de orde komt wordt dit vrij snel herleid tot $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Maar dan volgt het kwadraat afsplitsen.

Het moet worden: $(x + \frac{1}{2}\frac{b}{a})^2 - \dots$ want je moet de helft van $\frac{b}{a}$ nemen, maar wat is de helft van een onbekend getal? Theo-Jan zei toen dat je voor $\frac{b}{a}$ gewoon $\frac{1}{2}$ zet, want je vermenigvuldigt met $\frac{1}{2}$, en daar keek hij even met een schuldige blik naar mij.

Om het einde van het bewijs te halen, werd er hier over een groot probleem voor sommige leerlingen heen gewalst. De leerling accepteert dat de helft nemen hetzelfde is als vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$, maar als waarnemer had ik het vermoeden dat hij dit niet echt begreep.

In het nagesprek was Theo-Jan het met mijn observatie eens. Ik kan hem niets verwijten, want, bedacht ik mezelf, dat doe ik ook regelmatig. Om iets te bereiken, moet je soms bepaalde probleempjes even negeren, omdat anders de voortgang in gevaar komt. Later repareer je het wel weer.

Aanvullen van de vergelijking

Een volgend probleem werd het aanvullen van de vergelijking. De eerdere opgave $x^2 - 6x + 8 = 0$ werd uitgewerkt als $(x - 3)^2 - 1 = 0$ maar didactisch was de uitwerking $(x - 3)^2 - 9 + 8 = 0$ beter geweest. Iets meer schrijfwerk, maar de -1 wordt duidelijker gemotiveerd. Je kunt ook kiezen voor de aanpak $x^2 - 6x = -8$ en dan van het lid voor het $=$ - teken het kwadraat af te splitsen. Dat is voor menig leerling misschien een makkelijkere methode. Je hoeft je niet druk te maken wat erbij of af moet, want je trekt het kwadraat er altijd vanaf. In je rol als docent moet je snel reageren als er iets niet helemaal duidelijk is. De leerling geeft aan dat het niet duidelijk is en je moet ook met die leerling verder naar een beoogd resultaat. In de rol van observant heb je veel tijd om over varianten na te denken. Een voorbeeld van zo'n variant is:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

Neem nu $2p = \frac{b}{a}$ en $q = \frac{-c}{a}$; de vergelijking wordt dan

$$x^2 + 2px = q.$$

$$(x + p)^2 - p^2 = q$$

$$(x + p)^2 = p^2 + q$$

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$$

Substitutie geeft:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} =$$

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ Het kwadraat}$$

afsplitsen wordt meer herkenbaar. Het substitueren geeft misschien andere moeilijkheden en dat de helft van $\frac{b}{a}$ gelijk is aan $\frac{b}{2a}$ blijft hier natuurlijk ook een mogelijk struikelblok.

Helft van $b : a$

Ik kom nog even terug op de helft van $\frac{b}{a}$. De helft nemen van $\frac{b}{a}$ betekent een $\frac{1}{2}$ ervoor zetten omdat je met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt, zei de docent. Door deze opmerking dacht ik aan een bepaalde vorm van inconsequent handelen van mezelf. Een vergelijking als $3x = 12$ herleiden tot $x = 4$ motiveer ik met *beide kanten delen door 3*. De vergelijking $\frac{1}{3}x = 4$ herleid ik tot $x = 12$ met de motivatie *beide kanten vermenigvuldigen met 3*. Als ik nu eens bij de eerste vergelijking *delen door 3*, of *vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$* zou gebruiken en bij de tweede consequent zou zeggen dat je *vermenigvuldigt met 3 of deelt door $\frac{1}{3}$* , dan bereik ik misschien wel dat voor de leerlingen delen en vermenigvuldigen echt gelijkwaardig worden. Als je dus moet delen door 2 kun je ook vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$. Dit kan voorkomen dat ik een schuldige blik naar mijn collega werp, als hij bij mij observeert.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. Dit schooljaar verblijft hij in China en zal hij ons van daaruit gaan berichten.
E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

WISKUNDE DIGITAAL

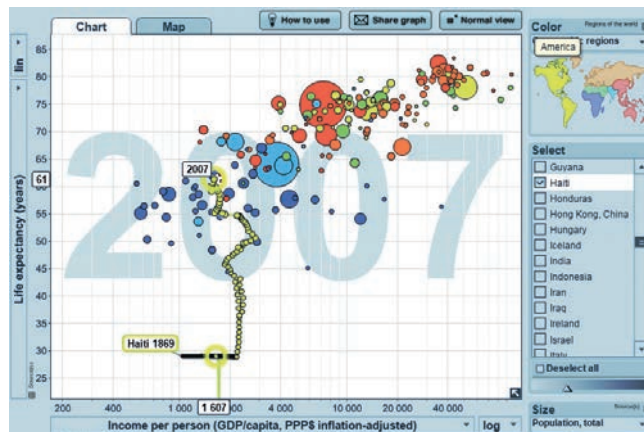
ONLINE SCHOLING STATISTIEK

Lonneke Boels

Deze keer een online toepassing die voor docenten zelf is bedoeld en heel veel toepassingen voor leerlingen oplevert: *Teaching Statistics through Data Investigations* van het Friday Institute (FI). Eind september is opnieuw deze gratis massive open online course (MOOC) van start gegaan die heel goed aansluit bij het nieuwe examenprogramma statistiek voor havo en vwo. Ook in het voorjaar van 2017 start er een. Lonneke Boels heeft de scholing deze zomer gevolgd en vond het zeer leerzaam.

Leren data te onderzoeken

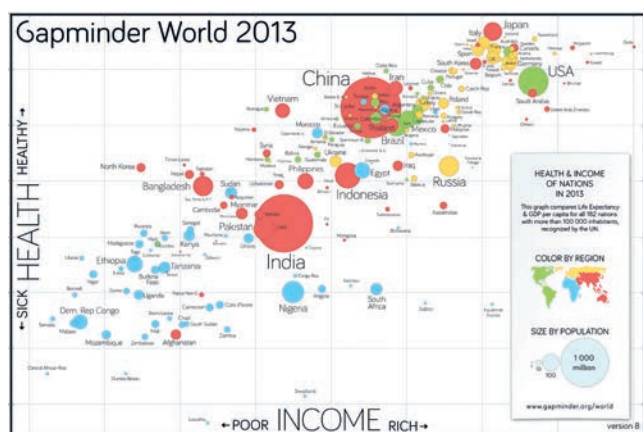
Deze Engelstalige MOOC gaat over hoe je statistiek-onderwijs kunt vormgeven door leerlingen data te laten onderzoeken. In korte tijd krijg je inzicht in hoe je dit door leerlingen kunt laten doen en welke hulpmiddelen hiervoor beschikbaar zijn zoals: *Tinkerplots*, *Fathom* maar ook *Geogebra* en *StatCrunch*. Er zijn verschillende filmpjes waarin je leerlingen aan het werk ziet met data en de vragen hoort die ze daarover stellen.



figuur 1 Leerling bestudeert de ontwikkeling van het gemiddeld inkomen in Haïti^[1]

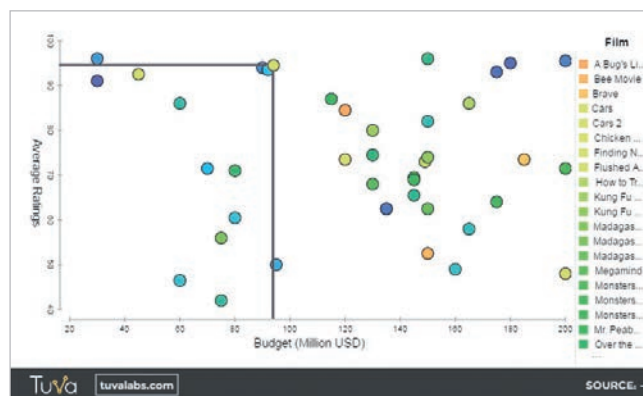
In totaal zijn er na de oriëntatie vijf *units*, onderwerpen, in de scholing. Elke unit start met een uitleg van de cursusleider waarna een discussie met een expertpanel volgt. Daarin zien we bijvoorbeeld Susan Friel – een bekende docent en onderzoekster binnen het statistiekonderwijs. Per unit krijg je een overzicht van de essentiële zaken, zoals de vier fasen van de onderzoekscyclus: vragen stellen, data verzamelen, data analyseren en data interpreteren. In een volgende unit ontdek je hoe je dit op drie niveaus kunt aanbieden aan leerlingen. Vervolgens krijg je voorbeelden hoe je dit kunt toepassen in lessen. Er is ook lesmateriaal beschikbaar. Je analyseert dit materiaal en discussieert met collega's over de hele wereld over de kwaliteit van het materiaal en mogelijke verbeteringen of aanpassingen voor je eigen situatie.

Hoewel de MOOC gebaseerd is op het onderwijs in de Verenigde Staten, komen de deelnemers aan de MOOC van over de hele wereld. Af en toe is een vertaalslag nodig naar de Nederlandse situatie maar ik vond dat verrassend veel bruikbaar is in de Nederlandse klas. Leuke datasets voor leerlingen zijn bijvoorbeeld die van *Gapminder* (zie figuur 2).^[2]



figuur 2 Een van de interactieve datasets van *Gapminder*

Op *Tuvalabs* staan datasets die betrekking hebben op bekende tekenfilms.^[3] Je kunt vrij gemakkelijk een spreidingsplot maken van bijvoorbeeld het bestede budget versus de gemiddelde beoordeling van de film, zie figuur 3. Zo heeft *Finding Nemo* een budget van 94 miljoen dollar en een gemiddelde waardering van 94,5. De achterliggende tabel is beschikbaar als je op *table view* klikt. Grafieken en diagrammen zijn eenvoudig te maken. Dat kan een mooie aanleiding zijn om te bespreken welke grafische weergaven zinvol zijn en welke niet.



figuur 3 Tuvalabs bevat datasets over tekenfilms

Pluspunten

- De scholing is gratis en online te volgen.
- Je kunt op elk moment van de dag de lessen volgen.
- De scholing geeft toegang tot een schat aan lesmaterialen, lesvoorbeelden, databases en software, veelal gratis toegankelijk, ook nadat de cursus voorbij is.
- De tijdsinvestering is beperkt. Het minimumaantal uren is ongeveer 10 uur; voor een certificaat is 20 uur nodig. Een pluscertificaat kost 25–30 uur. Je hebt dan de keuze uit drie projecten, waaronder het laten uitvoeren van een statistisch onderzoek door jouw leerlingen.
- Het sluit goed aan bij het achterliggende doel van het nieuwe examenprogramma voor wiskunde A, C en D: leren werken met grote datasets.
- De statistiekennis wordt opgefrist, bijvoorbeeld: wat is variabiliteit?
- Er worden voorbeelden gegeven van geschikte toetsvragen, sommige in de vorm van meerkeuzeopgaven.
- Een aantal voorbeelden is gemakkelijk om te bouwen naar een onderzoekopdracht of praktische opdracht.
- Je krijgt veel tips van docenten over de hele wereld met extra lesmaterialen, leuke sites en filmpjes, databases, lestitips, do's en dont's, enzovoort.
- Je kunt op elk moment tijdens de cursus inschrijven, dus ook na de startdatum.

'DE SCHOLING GEEFT TOEGANG TOT EEN
SCHAT AAN LESMATERIALEN, VEELAL GRATIS
TOEGANKELIJK.'

- Je wordt geconfronteerd met wat je zelf wel of nog niet weet over statistiek, door bijvoorbeeld de vragen die je aan leerlingen kunt stellen eerst zelf te beantwoorden.
- Het niveau is voor een havo/vwo-docent goed te doen.
- Veel software waarnaar wordt verwezen is intuïtief, waardoor het Engels voor leerlingen vaak geen probleem zal zijn.

Minpunten

- De scholing is in het Engels. Het is nuttig als je enkele vaktermen kent.
- Doordat iedereen op andere momenten werkt, kan het even duren voordat je reactie krijgt op jouw ingebrachte discussiepunt. Als je erg lang na het starten van de cursus instapt, komt er soms geen reactie meer.
- Voor het behalen van een certificaat moet je een discussie posten of een reactie op een discussie geven. Dit leidt soms tot wat nietszeggende reacties.
- Enige voorkennis van de 'big ideas' van statistiek- onderwijs is wel handig.
- De lesmaterialen zijn in het Engels en moeten dus nog wel worden vertaald.

Eindoordeel: 'aanschaffen'

Geschikt voor: docenten havo/vwo en eventueel mavo.

Kosten: gratis

Getest op: laptop met Internet Explorer 11.0.34

Makers: Friday Institute

Te vinden via: <https://place.fi.ncsu.edu/>

Links

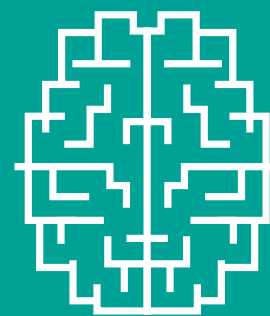
- [1] <https://www.gapminder.org/for-teachers/>
- [2] <http://www.gapminder.org>
- [3] https://tuvalabs.com/datasets/pixar_vs_dreamworks/activities.

Bent u van plan naar aanleiding van dit artikel mee te gaan doen met de MOOC *Teaching Statistics through Data Investigations*? De redactie van *Euclides* is benieuwd naar uw ervaringen!

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.

E-mailadres: L.Boels@chrlyceumdelft.nl



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

PUZZEL 92-2

GEVANGEN IN ORANJE

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

We kwamen op het idee voor deze puzzel tijdens een altijd inspirerende masterclass van Hans Finkelberg in Leiden, waar hij een bewijs liet zien dat een route door een getrianguleerde driehoek onder de gegeven voorwaarden altijd doodloopt. Het was slechts een lemma voor nog mooiere stellingen.

Voorwaarden voor alle opgaven

Gegeven een driehoek D met tegen de klok in hoekpunten R , W en B . We kleuren elk met een andere kleur: R wordt rood, W wit en B blauw. Vervolgens zetten we een aantal punten op de zijden en/of in het binnengebied van D . Deze punten kleuren we naar keuze elk met een van die kleuren waarbij op elke zijde van D hoogstens twee verschillende kleuren komen, dus inclusief de hoekpunten van de betreffende zijde.

Ten slotte gaan we D trianguleren door elkaar niet snijdende lijnstukjes tussen de punten te tekenen tot het geheel is verdeeld in kleine driehoekjes. Er mogen geen punten meer in het inwendige van de driehoekjes of op de zijden ervan overblijven. Het binnengebied van driehoekjes met drie verschillend gekleurde hoekpunten kleuren we oranje.

We kunnen ons het resultaat voorstellen als de plattegrond van een driehoekige gevangenis met driehoekige cellen. De lijnstukjes tussen punten met gelijke kleur zijn muren. Alle andere lijnstukjes zijn deuren die echter maar van één kant zijn te openen met een passende sleutel. Er zijn drie verschillende sleutels: Rob krijgt er een voor de deuren tussen rode en witte punten, die alleen opengaan als hij het rode punt links van zich heeft. Wim voor de deuren tussen witte en blauwe punten (witte punt links) en Bart voor die tussen blauwe en rode punten (blauwe punt links).

Zo ziet u in figuur 1 wat er kan gebeuren als Rob naar binnen wordt gestuurd. Aan het eind zit hij gevangen in een oranje gekleurde cel, welke buitendeur hij ook aanvankelijk kiest.

A triangular lattice graph with vertices colored blue, white, red, and orange. The vertices are labeled B (top), R (bottom left), and W (bottom right). Red arrows indicate a path from R to W , and orange arrows indicate a path from B to W .

Opgave 1 - Hoeveel cellen kunnen er maximaal zijn bezocht, inclusief de cellen waar ze eindigen?

Opgave 2a - Bepaal een kleuring, zo dat Rob zoveel mogelijk cellen kan hebben bezocht.

Opgave 2b – Zelfde vraag:
Onderzoek of het mogelijk is dat als Rob en Wim de gevangenis in worden gestuurd, ze samen alle cellen vanbinnen kunnen hebben gezien. Zo niet, hoeveel cellen kunnen Rob, Wim en Bart dan samen hebben gezien?

Nu mag u het aantal punten op de zijden en in het binnengebied van D zelf bepalen.

Opgave 4a – Bepaal een triangulatie en kleuring met zo min mogelijk punten, maar minstens één in het binnengebied van D , zodanig dat Rob nadat hij is vastgelopen alle cellen kan hebben bezocht.

Opgave 4b - Idem, maar nu met minstens acht punten in het binnengebied.

Ten slotte:

Opgave 5 – Leg uit, dat bij elke triangulatie en elke kleuring onder de gegeven voorwaarden, elke persoon ergens binnen de driehoek D zal vastlopen in een oranje cel.

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op maandag 5 december binnen zijn.

Op de website vindt u de uitwerkingen van puzzels 91-7 en spoedig ook die van 92-1. Vanaf de vorige *Euclides* verschijnen de uitwerkingen drie weken na het sluiten van de inzendingstermijn op de website, inclusief de volledige ladderstand.



LADDERSTAND

J. Verbakel	188
H. Linders	183
H. Klein	175
L. Pos	165
A. Grünefeld	132
J. Guichelaar	107
F. van Hoeve	86
J. Remijn	79
K. van der Straaten	78
G. Bouwhuis	75

43



NOTULEN VAN DE NVVW-JAARVERGADERING

ZATERDAG 7 NOVEMBER 2015, VEENENDAAL

Kees Garst

Opening

De voorzitter, Swier Garst, heet iedereen welkom, in het bijzonder de aanwezige ereleden en afgevaardigden van NVON (Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen), NVORWO (Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs), I&I (vakvereniging informatica en IT) en CvTE (College voor Toetsen en Examens). Er zijn afmeldingen binnengekomen van prof F. van der Blij en Joop van Doormolen.

Jaarrede

De voorzitter spreekt de jaarrede uit. De volledige tekst van de jaarrede is terug te lezen in *Euclides* nummer 3 van jaargang 91.

Notulen

De notulen van de jaarvergadering 2014 worden zonder vragen of opmerkingen vastgesteld.

Jaarverslagen

De jaarverslagen 2014-2015 van de NVvW en van *Euclides* (gepubliceerd in de digitale editie van *Euclides* jaargang 91 nummer 2) worden vastgesteld, onder dankzegging aan de auteurs, respectievelijk de secretaris Kees Garst en de eindredacteur Marjanne Klom.

Financiën

Penningmeester, Gert de Kleuver, licht een aantal zaken toe. Het exploitatiesaldo over 2014-2015 bedraagt €99,88. T.b.v. het 100-jarig jubileum wordt alvast een reservering gemaakt. Ook de rente over het in een keer verstrekte bedrag voor het project vakinhoudelijke nascholing draagt bij aan het vermogen.

Baten: In 2013 is de begroting vastgesteld voor 2014-2015, maar tevens is in 2013 besloten tot contributieverhoging. Dit heeft tot gevolg gehad dat de inkomsten uit contributies hoger zijn dan begroot. Daarnaast leidt de toename van het aantal leden tot toegenomen inkomsten. De verkoop van Zebraboekjes en inkomsten uit advertenties hebben ook bijgedragen aan een hoger bedrag aan baten dan begroot.

Lasten: De bestuurskosten zijn hoger uitgevallen dan begroot; de bureaunkosten zijn daarentegen verlaagd. Dit heeft te maken met het onderscheiden van de werkzaamheden die de beleidsmedewerker Heleen van der Ree uitvoert voor het bestuur en voor de ledenadministratie.

De begroting 2016-2017 verwacht een tekort van € 9300,-, maar hierbij wordt opgemerkt dat verdisconteerd moet worden dat er een reservering wordt gemaakt voor het 100-jarig jubileum. De kascontrolecommissie geeft in haar verslag aan dat er geen onregelmatigheden zijn geconstateerd, waarna de penningmeester wordt gedechargeerd voor het gevoerde beleid. De penningmeester stelt voor de contributie voor het komende jaar niet te verhogen en spreekt zijn dank uit voor het zorgvuldige werk dat Heleen en Peter van der Ree verrichten t.b.v. de financiële administratie.

Aanpassing van de statuten

Het bestuur stelt voor een drietal artikelen in de statuten als volgt aan te passen:

Artikel 3 c:

Het lidmaatschap van een zogenaamde koepelorganisatie, te weten van de vereniging thans genaamd: "Federatie van Onderwijsbonden CMHF/VCP" (Centrale van Middelbare en Hogere Functionarissen bij Overheid, Onderwijs, Bedrijven en Instellingen/VCP: Vakcentrale voor Professionals), gevestigd te Zeist, danwel een daarvoor in de plaats tredende instelling;

In een reactie stelt een lid dat a.g.v. de plaats van de vereniging als onderdeel van een overkoepelende vakbond de naam van de vereniging beter gewijzigd kan worden in Nederlandse Vakbond van Wiskundeleraren. De voorzitter licht toe dat de NVvW als vereniging lid is en benoemt enkele

voordelen van dit lidmaatschap, zoals juridische bijstand en inkomsten voor de vereniging. Maar bovenal wil de vereniging er zijn voor de wiskundeleraren en het wiskundeonderwijs. De voorzitter brengt artikel 3c in stemming en dit wordt met de vereiste meerderheid aangenomen.

Artikel 8.1: nieuwe tekst

Het algemeen bestuur bestaat uit ten minste vijf personen die door de algemene vergadering worden gekozen uit de leden.

Het dagelijks bestuur bestaat uit drie (3) leden, namelijk de voorzitter, secretaris en penningmeester.

Ook deze aanpassing wordt met de vereiste meerderheid aangenomen.

Artikel 8.3: nieuwe tekst

Bestuursleden worden gekozen voor een termijn van maximaal drie jaar. Een aftredend bestuurslid is terstond herkiesbaar. Een bestuurslid kan maximaal drie termijnen achter elkaar zitting nemen in het bestuur.

De voorzitter licht toe dat deze aanpassing het huidige bestuur en toekomstige besturen een inspanningsverplichting oplegt om te zorgen voor continue vernieuwing in het bestuur en, in geval dat niet binnen de gestelde termijnen lukt, ze bij de leden terug moeten komen om verantwoording af te leggen. Deze aanpassing wordt eveneens met de vereiste meerderheid aangenomen. De voorgestelde aanpassing van het huishoudelijk reglement vloeit voort uit de aangenomen statutenwijzigingen en is verder niet apart in stemming gebracht.

Bestuursverkiezing

De bestuursleden Lidy Wesker en Gert de Kleuver zijn aftredend, stellen zich verkiesbaar en worden herkozen. De bestuursleden Henk Rozenhart, Christiaan Boudri, Ab van der Roest en Henk van der Kooij treden af als bestuurslid. De voorzitter maakt in zijn dankwoord duidelijk welke bijdragen de aftredende bestuursleden hebben gehad voor de vereniging en het wiskundeonderwijs in het algemeen. In het bijzonder worden genoemd: de rol van Henk Rozenhart als 'oliemannetje' van het bestuur, Christiaan Boudri als pleitbezorger van het wiskundeonderwijs in het mbo/hbo, Henk van der Kooij met zijn brede kennis op vele terreinen van het wiskundeonderwijs zowel in Nederland als daarbuiten en voor zijn inzet binnen de programmacommissie van de studiedag, en Ab van der Roest onder meer voor zijn bijdragen aan de cursus 'Hoe kijk je een examen na'. Bovengenoemden krijgen als dank een schilderij aangeboden van de kunstenaar Johan IJzerman die zich heeft laten inspireren door de thema's leraar, wiskunde en vereniging.

De voorgestelde kandidaten Tanja Groenendaal, Michiel Doorman, Wim Caspers en Gert Treurniet worden tot bestuurslid benoemd.

Rondvraag

Hiervan wordt geen gebruikgemaakt.

Sluiting

De voorzitter sluit de vergadering en geeft het woord aan Henk van der Kooij voor het inleiden van de studiedag.

WEBSITE

JAARVERSLAGEN NVvW EN EUCLIDES

Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 5 november 2016 staan de jaarverslagen van de NVvW en Euclides op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van Euclides jaargang 92 nummer 2.



vakbladeuclides.nl/922nvw



vakbladeuclides.nl/922euclides

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075

E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

2016

vr
11/11

EINDHOVEN

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr
18/11

LANDELIJK

voorrunde A-lympiade / Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

di
22/11

ZWOLLE

Conferentie Aansluiting PO-vmbo rekenen en wiskunde
Organisatie NVvW, NVORWO en SLO.

2017

23/1
t/m
2/2

LANDELIJK

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr 3/2
za 4/2

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut

wo
8/2

LANDELIJK

OnderbouwWiskundeDag
Organisatie Freudenthal Instituut

do
16/3

LANDELIJK

Op de scholen: W4Kangoeroe,
WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor
basis- en middelbare scholieren
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 92

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	15 december 2016	17 oktober 2016
4	31 januari 2017	21 november 2016
5	21 maart 2017	9 januari 2017
6	9 mei 2017	6 maart 2017
7	27 juni 2017	1 mei 2017

Whiz-Kit voor Whizzkids!

U kent ze vast wel, leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo die de 'gewone' wiskundestof snel onder de knie hebben en het leuk vinden uitgedaagd te worden. Speciaal voor hen heeft Casio een boekje ontwikkeld met opgaven die net verder gaan dan de basisstof

Wilt u GRATIS één of meer van deze boekjes ontvangen? Stuur dan een e-mail naar educatie@casio.nl

**De ultieme
uitdaging voor
Whizzkids!**



GETAL & RUIMTE

Ontdek Getal & Ruimte 12e editie havo/vwo onderbouw!

Vraag nu uw
beoordelings-
materiaal aan!

getalenruimte.noordhoff.nl

Nieuw bij de 12e editie havo/vwo onderbouw:

- adaptief oefenmateriaal met gerichte feedback;
- differentiatie in niveau, o.a. door leerroutes in het digitale lesmateriaal;
- motiverend en gevarieerd lesmateriaal;
- instructievideo's van de WiskundeAcademie;
- speciale rekenkaternen bij de werkboeken;
- De delen 1 en 2 voor leerjaar 1 havo/vwo en 1 vwo zijn beschikbaar voor schooljaar 2017-2018. De delen voor leerjaar 1 van het vmbo en Numbers & Space verschijnen een jaar later.

Meer weten of een beoordelingsexemplaar aanvragen? Ga naar

www.getalenruimte.noordhoff.nl



[www.twitter.com/getal_en_ruimte](https://twitter.com/getal_en_ruimte)



www.facebook.com/GetalenRuimte