

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Wiskundige denkactiviteiten ook mogelijk voor het vmbo?

Wiskunde C in het nieuwe programma

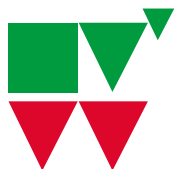
Wiskundeonderwijs voor de toekomst

Zambiaanse cirkels

Jaarvergadering NVvW op 5 november

Recreatie: Kaarten schudden

NR.7



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 91

JUNI 2016

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 91 NR 7

IN DIT NUMMER

WDA OOK MOGELIJK VOOR HET VMBO?

MARKO MEIJER

4



WIS EN WAARACHTIG

6

WISKUNDE C IN HET NIEUWE PROGRAMMA

MARJAN BOTKE

MERIJN SMIT

8

KLEINTJE DIDACTIEK

LONNEKE BOELS

11

ZWEMBAD EN CHINESE CAKE

MARTIN KINDT

12

GETUIGEN

DANNY BECKERS

16

WISKUNDEONDERWIJS VOOR DE TOEKOMST

KEES BUIJS

SONIA PALHA

BERT ZWANEVELD

18

HET FIZIER GERICHT OP...

ANNEMIEK VAN LEENDERT

MICHEL DOORMAN

22

LOGARITMEN SCHATTEN VIA HERHAALD DELEN

TOM COENEN

MARK TIMMER

25

RECREATIE

26

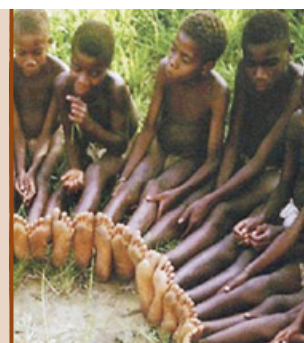
GECIJFERDHEID

30

ZAMBIAANSE CIRKELS

ARIE VAN KOOTEN

31



VERENIGINGSNIEUWS

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2016



32

Foto cover: Station Guillemins, Luik.
Fotograaf: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

UITDAGENDE PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

34

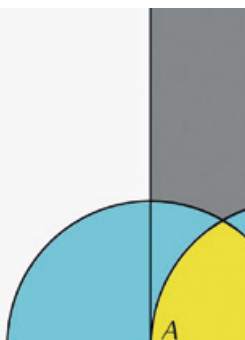
VERSCHENEN

37

WELK PERCENTAGE DRIEHOEKEN IS NU EIGENLIJK SCHERPHOEKIG?

FRED MUIJRERS

38



VANUIT DE OUDE DOOS

TON LECLUSE

40

WERKGROEP VMBO

RUUD JONGELING

42

TEGENVOETER

ROLAND MEIJERINK

43

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

44

VASTGEROEST

AB VAN DER ROEST

45

SERVICEPAGINA

46

Kort vooraf

Er zit iets paradoxaals in de cyclus van het onderwijsleven: onze professionele lente begint in september met het ontluiken van het nieuwe schooljaar. En daar waar de kalender nog wel eens sombert aan het eind van een cyclus zijn wij juist in een opperbeste vakantiestemming. En dat past misschien zelfs wel beter bij dankwoorden en afscheid nemen.

En dus kunnen we hier Ton Lecluse ook figuurlijk in het zonnetje zetten. Na 52 afleveringen stopt zijn rubriek *Vanuit de oude doos*. Voor Ton hoefde daar niet uitgebreid bij stilgestaan te worden, zelf zegt hij het in vier woorden: *de koek is op*. Ik wil het iets uitgebreider doen met het antwoord van Marcel Vonk (deeltjes fysicus en pokermiljonair), die ik onlangs interviewde in het kader van een *Beta en Bildung* project, op de vraag: liever statistiek of liever meetkunde in het voortgezet onderwijs? 'Uiteindelijk draait alles om meetkunde, dáár kun je het universum mee beschrijven.'

Nog meer zonnestrallen. Vorig jaar al zou Marjanne Klom stoppen als hoofd- en eindredacteur van de *Euclides*. De beoogde opvolgster kon, door een voor haar mooie wending van het lot, niet aantreden en dus vroeg de redactie Marjanne nog een jaar als eindredactrice te blijven. Waarvoor respect: jezelf weer helemaal opladen voor een taak waar je emotioneel al los van was, we vroegen niets minder aan Marjanne. En dat heeft ze met hetzelfde enthousiasme als de vier eerdere jaargangen gedaan. Dat verdient een groots compliment. Marjanne, dank je voor vijf mooie jaargangen *Euclides*.

De overige zon wens ik u, lezer, toe in de komende vakantie. Geniet er van!

Tom Goris

WDA OOK MOGELIJK VOOR HET VMBO?

Marko Meijer

Marko Meijer vroeg zich af of de wiskundige denkactiviteiten voorbehouden waren voor havo en vwo of dat ze op het vmbo ook ingezet konden worden. Zijn leerlingen gaven een overtuigend antwoord op deze vraag: 'Meneer wanneer gaan we dit weer doen?'



figuur 1 Mike, Sem en Mark met hun Mario

Wiskundige denkactiviteit

Sinds ik werkzaam ben in het onderwijs, verbaas ik mij regelmatig over het grote aanbod aan projecten en activiteiten bij wiskunde voor havo en vwo leerlingen. De wiskundige denkactiviteiten die ontwikkeld worden zijn uitdagend, nodigen uit tot creatief denken, doen een groot beroep op probleemoplossend denken en zijn vooral super leuk voor de leerling! Juist om deze reden ben ik verrast door het minimale aanbod voor de grootste groep uit ons onderwijs, het vmbo. Mijs inziens is het juist voor deze groep leerlingen inspirerend en goed om het boek eens opzij te leggen en op een andere manier kennis op te doen over het vak wiskunde.



figuur 2 Lars en Barry bouwen een huis, Lianne maakt een piramideboom

Mijn zoektocht

Binnen mijn zoektocht naar eigentijds onderwijs, gericht op de vmbo leerlingen, stuitte ik op de *21st century skills*. Dit zette mij tot nadenken over hoe ik opdrachten aan mijn leerlingen kan aanbieden. Waar ik in het verleden opdrachten voor mijn vmbo leerlingen voorstructureerde, besloot ik nu om de opdracht heel open aan te bieden, zonder na te denken hoe het leerproces van de leerling zich zou ontwikkelen en met een zeer verrassend resultaat!

Ontwerp je eigen bouwplaat

Om aan te sluiten bij hoofdstuk 7 *Ruimtefiguren* uit deel 1 van *Moderne Wiskunde* tl/havo besloot ik de leerlingen

een eigen bouwplaat te laten ontwerpen. De leerlingen gingen eerst op het internet op zoek naar voorbeelden van ontwerpen die zij graag wilden maken. Daarna tekenden zij hun bouwplaat in het klad, hetgeen direct tot vragen leidde:

Meneer, mijn puntjes van deze achthoek komen niet mooi tegenover elkaar te liggen.

Ofwel: hoe teken ik een regelmatig achthoek als grondvlak voor mijn gekozen prisma?

Meneer, als ik mijn piramide omhoog vouw, dan komt het bovenin niet mooi samen.

Ofwel: hoe construeer ik een gelijkbenige driehoek?

Meneer, ik heb bij mijn ontwerp van Mario het vierkant 7 bij 7 cm in plaats van 5 bij 5 cm getekend, maar wat moet ik nu bij de andere getallen doen.

Ofwel: hoe kan ik rekenen met vergrotingsfactoren?

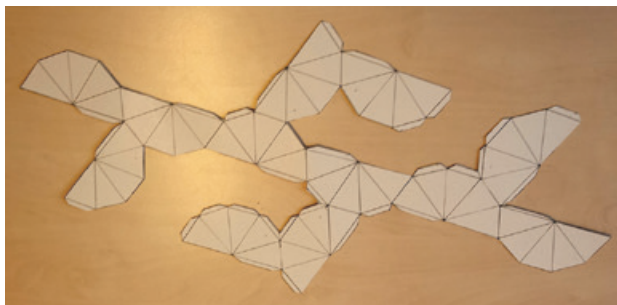
Meneer, bij ons ontwerp van de kleine sterdodecaëder komen de driehoekjes niet hetzelfde eruit te zien als bij het voorbeeld.

Ofwel: hoe teken ik vijf gelijkbenige driehoeken langs een gestrekte hoek?

In alle gevallen zijn de leerlingen zelf op zoek gegaan naar oplossingen. Zij zijn gaan nadenken (met behulp van mijn hulpvragen) over welke problemen zij eigenlijk



figuur 3 Saned en Ryan met hun auto



figuur 4

tegen aanliepen. Op het internet vonden zij filmpjes die hen hielpen om verder te gaan met de opdracht en soms kregen zij de uitleg die nodig was.

Opbrengst

In alle gevallen ging het om kennis die zij nog niet beheersten. Doordat zij hier zelf naar op zoek zijn gegaan, was de leeropbrengst zeer hoog! Het rekenen met factoren, het tekenen op schaal, het tekenen van hoeken, het construeren van een regelmatig zes- en achthoekig grondvlak, van een piramide tot een octaëder, van een huisje tot een kleine sterdodecaëder en van een autootje tot een vergroting van Mario, iedere leerling werkte binnen zijn of haar mogelijkheden. Dit maakte de opdracht voor iedere leerling aantrekkelijk en zinvol.

Daarnaast kon ik binnen deze opdracht goed differentiëren. Van een kubus tot een prisma met een achthoekig grondvlak, van een piramide tot een octaëder, van een huisje tot een kleine sterdodecaëder en van een autootje tot een vergroting van Mario, iedere leerling werkte binnen zijn of haar mogelijkheden. Dit maakte de opdracht voor iedere leerling aantrekkelijk en zinvol. Deze opdracht heeft mijn ogen geopend! Vmbo leerlingen zijn ontzettend creatief. Structuur in de pedagogische



figuur 5

aanpak is zeer belangrijk, maar uitdaging in de vorm van open opdrachten zorgt ervoor dat leerlingen probleemoplossend gaan denken, creatief en innovatief zijn. Dit alles draagt bij aan de 21ste eeuw vaardigheden die nodig zijn in de huidige maatschappij!

Over de auteur

Marko Meijer is docent wiskunde aan het C.S.G. Jan Arentsz, te Alkmaar. E-mailadres: mmeijer@ja.nl

MEDEDELING

WISKUNDE VOOR MORGEN

Het uitvoeren van reken-wiskundige bewerkingen wordt in de wereld buiten de school in toenemende mate overgelaten aan apparaten. Doordat er steeds meer van dergelijke apparaten beschikbaar komen en deze apparaten steeds geavanceerdere wiskunde aan kunnen, wordt de rol van de wiskunde in onze maatschappij steeds groter. Deze door apparaten uitgevoerde wiskunde onttrekt zich echter veelal aan het oog.

Tot nu toe wordt er in het reken- en wiskundeonderwijs weinig rekening gehouden met deze ontwikkelingen. Ongeveer twee jaar geleden is een groep van zo'n dertig wiskundendidactici zich gaan verdiepen in de vraag hoe het reken- en wiskundeonderwijs er uit zou moeten zien wanneer wel met deze ontwikkelingen rekening zou worden gehouden. Na enige tijd als informele groep te hebben gewerkt is de werkgroep omgevormd tot een gezamenlijke werkgroep van de NVvW en de NVORWO (de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs). Als naam voor de werkgroep is Wiskunde voor Morgen gekozen, waarbij het woord 'wiskunde' naar het onderwijs verwijst en rekenen en wiskunde omvat.

De werkgroep richt zich op de vraag, hoe het reken- en wiskunde onderwijs zo kan worden ingericht dat het de leerlingen van nu adequaat voorbereidt op het participeren in de maatschappij van morgen. De werkgroep probeert antwoorden op deze vraag te vinden door kennis te verzamelen, onderling kennis uit te wisselen en door gezamenlijk vraagstukken rond dit thema uit te diepen. Verder stelt de werkgroep zich tot doel het doordenken van het reken- en wiskundeonderwijs voor de toekomst op de agenda te plaatsen, binnen de beide verenigingen en het bredere onderwijsveld, maar ook binnen politiek en maatschappij. Zij doet dit onder meer door middel van bijdragen aan conferenties en tijdschriften en door rapporten en notities over dit onderwerp op te stellen en te verspreiden. De leden van de beide verenigingen vormen hierbij een belangrijke doelgroep en klankbord; informeel via conferenties en tijdschriften, maar mogelijk ook via enquêtes en dergelijke. Zo hebben leden van de werkgroep recentelijk bijdragen geleverd aan de studiedag van de NVvW, de Panama Conferentie en de Nationale Wiskundedagen.

Elders in dit nummer treft u een artikel aan van Kees Buijs en anderen dat de weerslag is van een van de bijdragen van de werkgroep aan de studiedag van de NVvW van november 2015: Wiskundeonderwijs voor de toekomst – naar een repertoire van instructievormen.

WIS EN WAARACHTIG

Hoe krijg je dat bankstel de hoek om

Tijdens een verhuizing krijgt bijna iedereen te maken met grote meubelstukken die een hoek om moeten. Ook wiskundigen houden zich met dit soort problemen bezig. Zij houden zich in het bijzonder bezig met de vereenvoudiging van het probleem: welke tweedimensionale meetkundige vormen kunnen verplaatst worden door een 'platte', één meter brede gang met een rechte hoek? De bepaling van de grootste vorm die op deze manier om een hoek kan worden geschoven, is nog steeds een onopgelost probleem.

In november 2015 waagden duizenden Nederlandse middelbare scholieren zich aan dit probleem tijdens de Wiskunde B-dag. Deze dag wordt al sinds 1999 georganiseerd door het Freudenthal Instituut en is een wedstrijd voor scholierenteams uit 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in hun profiel.

Vrijdag 18 maart werden in het Academieggebouw in Utrecht de tien landelijk best presterende teams in het zonnetje gezet. De winnaar was het Lorentz Casimir Lyceum uit Eindhoven. Volgens de jury leverden de leerlingen een wiskundig correct uitgewerkt en bijzonder goed toegelicht verslag aan, waarin ook nog eens humor zat. In een eigen onderzoek onderzocht dit team een variant op de bekende sofa van Hammersley. Van deze zelf gekozen vorm berekenden ze het maximale formaat dat nog door de gang geschoven kan worden. De volgende editie van de Wiskunde B-dag vindt plaats op 18 november 2016. Bron: *Wiskunde Persdienst*



Joost Göbbels, Henk Keffert, Max Frimout en Julius Krebbekx

Zilver en tweemaal brons voor toptalenten

Op de vijfde European Girls' Mathematical Olympiad heeft Mieke Wessel (17) uit Amstelveen een zilveren medaille behaald. Christel van Diepen (15) uit Malden en Esther Steenkamer (16) uit Roggel sleepten beiden een bronzen medaille in de wacht. Nooit eerder won het Nederlandse team zoveel medailles bij deze wiskunde-

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar wisenwaarachtig@nvww.nl.

wedstrijd speciaal voor meisjes. Coach Birgit van Dalen is zeer verheugd met het resultaat van haar team: 'We zijn heel trots op deze meiden. We wisten dat we een getalenteerd team hadden, maar dit resultaat heeft al onze verwachtingen overtroffen.' In het officiële landenklassement haalde Nederland een 12e plaats van de 31 deelnemende Europese landen, gedeeld met Frankrijk. In totaal deden 39 teams mee, waaronder gastteams uit onder meer de Verenigde Staten, Japan en Mexico. Het landenklassement werd aangevoerd door Rusland, gevolgd door de Verenigde Staten en Bulgarije.

Bron: *Persbericht Nederlandse Wiskunde Olympiade*



Esther Steenkamer, Christel van Diepen, Mieke Wessel en Aimée Jacobs

Sinaasappels stapelen

Wiskundigen hebben bewezen wat de beste manier is om bollen te stapelen in 8 en 24 dimensies. Het is de eerste keer in twintig jaar dat dit probleem is opgelost voor



een nieuwe dimensie. Het stapelen van bollen roept een bedrieglijk eenvoudige vraag op: met welke rangschikking kun je het grootste aantal bollen in een beperkte ruimte plaatsen? Makkelijk te

omschrijven, maar eindeloos ingewikkeld om te bewijzen. Johannes Kepler stelde in 1611 dat de beste schikking voor driedimensionale bollen zoals kanonskogels of sinaasappelen een piramide is. Het zou nog tot 1998 duren voordat Thomas Hales er in slaagde het bewijs daarvoor te publiceren. Pas zestien jaar daarna werd het met behulp van computerberekeningen formeel geverifieerd. In de tussentijd hebben wiskundigen hun pijlen gericht op hogere dimensie-aantallen. Maryna Viazovska van de Humboldt-universiteit in Berlijn heeft nu bewezen dat het rooster E8 zich het best leent om bollen in acht

dimensies te stapelen. Zij is volgens haar collega Henry Cohn van Microsoft Research de held van dit verhaal. Jammer genoeg is het niet duidelijk hoe dit bewijs uitgebreid kan worden naar nog meer dimensies. Bron: *NewScientist.nl*

Aanval op het getal π



Opnieuw hebben enkele wiskundigen de aanval geopend op de cirkelconstante π , het bekendste getal uit de wiskunde. Hun eis: vervang π door het getal tau (τ), volgens de omzetting $\tau \leftrightarrow 2\pi$. De

voorstanders van τ noemen de keuze van π een historische vergissing, die wiskundige formules onnodig ingewikkeld maakt en begrippen als de cosinus en de radiaal aan het zicht onttrekt. De cirkelconstante π werd pas populair toen de beroemde wiskundige Leonard Euler (1707 – 1783) het in 1706 ingevoerde symbool in zijn leerboeken ging gebruiken. Wiskundige Sander Niemeijer is al vanaf zijn studietijd overtuigd dat 2π als constante een betere keus zou zijn geweest. Hij legt uit hoe op een gegeven moment de eenheidscirkel steeds populairder werd. 'Daardoor werd de straal belangrijk. Toen hadden we beter ook meteen de cirkelconstante aan de hand van die straal kunnen definiëren', meent hij. 'Die keuze had de vele onnodige factoren 2 kunnen voorkomen en had het leren overzichtelijker gemaakt. Want wie als nieuwkomer moet snappen dat een kwart van een cirkel gelijk staat aan een hoek van $\frac{1}{2}\pi$, en niet gewoon een kwart τ , moet een extra denkstap maken.' Ondanks dergelijke argumenten hebben π -critici het niet gemakkelijk als ze de strijd met π , een icoon van de moderne wiskunde, willen aangaan. Ook is niet iedereen overtuigd van de kracht van τ als cirkelconstante. Zo denkt wiskundige Frits Beukers van de Universiteit Utrecht, die onder andere voor scholieren het boek *De geschiedenis en wiskunde van het getal pi* schreef, dat invoering van een nieuwe constante onhandig is. 'Niet doen,' laat hij desgevraagd weten en voegt daaraan toe: 'Het is volgens mij een teken van deze tijd dat men zich nu, na eeuwen gebruik, druk maakt om dit soort onnozele dingen. Waarschijnlijk draagt de laagdrempeligheid van internet hieraan bij.' Ook Jan Hogendijk ziet niets in de invoering van τ . 'De ene cirkelconstante is volgens mij niet beter dan de andere. Wat mij betreft doet het vechten tegen π aan als een gevecht van Don Quichotte tegen de windmolens.' Bron: *NewScientist.nl*

Abelprijs voor Andrew Wiles



Alain Goriely,
University of Oxford

De Britse wiskundige Andrew Wiles (62) krijgt dit jaar de Abelprijs. Wiles werd twintig jaar geleden wereldberoemd door de zogenaamde Laatste stelling van Fermat te bewijzen. Deze stelling zegt dat de vergelijking $x^n + y^n = z^n$ voor natuurlijke $n \geq 3$ geen niet-triviale geheelgetallige oplossingen heeft. Fermat formuleerde deze stelling in 1637, noteerde in een kantlijn een 'werkelijk schitterend

bewijs' te hebben gevonden waarvoor deze kantlijn helaas te smal was. Pas ruim 350 jaar later vond Wiles na jarenlang zoeken een bewijs. Wiles zei dat hij diep geroerd wordt door diepe, onverwachte connecties tussen uiteenlopende gebieden uit de wiskunde. Hiermee doelde hij op het verband tussen vergelijkingen als die van Fermat en elliptische krommen, een verband dat hem indertijd leidde naar een bewijs.

Bron: *NRC*

Alweer verrijkt. Nog steeds gratis.

Onze website breidt zich steeds weer uit met superpraktische **kaarten**. Zet deze kaarten op een eigen **prikbord** en deel het met collega's en/of leerlingen. Wat een gemak!

math4all.nl



Gratis, maar niet goedkoop.

WISKUNDE C IN HET NIEUWE PROGRAMMA

Marjan Botke
Merijn Smit

Vanaf dit schooljaar is er een nieuw eindexamenprogramma voor wiskunde A, B, C en D. Een nieuw examenprogramma vereist niet alleen de opzet van een nieuwe leerlijn met nieuw materiaal en nieuwe boeken, het vraagt ook om veranderingen in de organisatie van het vak op school. Voor het nieuwe programma wiskunde C houdt dit grotere veranderingen in dan we bij aanpassingen in het laatste decennium gewend zijn. In dit artikel informeren Marjan Botke en Merijn Smit u daarover en geven ze een overzicht van uitgangspunten en mogelijkheden.

Waarom is deze verandering fundamenteel anders?

Voorheen kenden we twee basisstromen in het wiskunde-aanbod in het voortgezet onderwijs: enerzijds wiskunde A met als lichtere basisvariant wiskunde C; anderzijds wiskunde B, met wiskunde D als keuzevak voor verbreding en verdieping. De traditioneel zwakkere leerlingen konden daarmee examen doen in een selectie van de totale wiskunde A-stof, waarbij vooral de abstractere onderdelen, zoals de afgeleide functie, werden weggelaten. Het nieuwe wiskundeprogramma dat in september 2015 van start is gegaan in 4 havo en 4 vwo kent – curieus genoeg – nog steeds dezelfde naamgeving, terwijl de veranderingen op sommige punten ingrijpend van aard zijn en de gevolgen verstrekend. In het bijzonder is wiskunde C bijna compleet vernieuwd, zodat het beter past in het C&M profiel. En hierin schuilt het meest cruciale aspect: wiskunde C is niet meer een lichte variant van wiskunde A.

Dit heeft twee belangrijke gevolgen. Ten eerste is wiskunde C niet meer slechts een deel van het wiskunde A-programma waaruit onderdelen zijn weggelaten. Het vak kent nu haar eigen onderdelen, zoals ruimtemeetkunde in het onderdeel *Vorm en ruimte* en logica in het onderdeel *Logisch redeneren*. Door deze kleinere overlap zijn de programma's van wiskunde A en C inhoudelijk dus niet meer te combineren zoals we dat gewend waren.

Ten tweede is het nieuwe C-programma niet langer gemaakt voor de traditioneel zwakkere leerlingen. Er is getracht de contexten beter te laten aansluiten op het C&M profiel en haar meest voor de hand liggende vervolgopleidingen. Daarmee is het een op zichzelf staand, volledig wiskundecurriculum. Het vermoeden bestaat echter dat de zwakkere leerlingen wel voor wiskunde C zullen blijven kiezen. De wiskunde C-leerlingen kunnen daarom in het nieuwe programma niet eenvoudig aanschuiven bij de wiskunde A-lesgroepen, noch qua inhoud, noch qua behoefte aan aandacht van en contact met de docent. Dat betekent dat de lesgroepen wiskunde A/C zoals veel scholen die nu kennen, niet meer op dezelfde manier kunnen functioneren.

Een flink aantal scholen heeft echter een klein aantal leerlingen die wiskunde C kiezen: vaak minder dan tien per jaar en soms zelfs maar een of twee. Hoe gaan we om met die kleine aantallen leerlingen? Hoe kunnen we lesgroepen maken waarin zij tot hun recht komen en hun leerbehoeften kunnen worden opgepakt?

Om na te gaan of er in het land al is nagedacht over de organisatie van wiskunde C in het nieuwe programma, heeft de werkgroep Havo-Vwo van de NVvW een oproep gedaan in de WiskundeE-brief. In deze oproep is gevraagd naar ideeën omtrent de praktische uitvoering en inroostering van wiskunde C. Er zijn zo'n twintig reacties gekomen op deze oproep en daarin wordt veelal aangegeven hoe de situatie nu is voor de wiskunde C leerlingen en hun docent in het oude programma. Een enkeling geeft aan wat de ideeën zijn voor het nieuwe programma.

Praktische modellen

Met de inbreng vanuit onze eigen werkgroep, de reacties op onze oproep en de ervaringen op de pilotscholen, hebben we een aantal mogelijkheden om wiskunde C aan te bieden op een rij gezet. We geven per mogelijkheid de voor- en nadelen aan, omdat deze modellen niet allemaal gelijkwaardig zijn.

Model 1

Leerjaar	Wiskunde A	Wiskunde C
6	Wiskunde A – 6 vwo	Wiskunde C – 6 vwo
5	Wiskunde A – 5 vwo	Wiskunde C – 5 vwo
4	Wiskunde A – 4 vwo	Wiskunde C – 4 vwo

In dit model zijn er aparte lesgroepen wiskunde C voor alle leerjaren. Dit model is geschikt voor scholen met voldoende grote aantallen leerlingen wiskunde C. Bij kleine aantallen leerlingen wordt het echter zeer kostbaar. Om hoge kosten voor kleine lesgroepen te vermijden, is er een aantal opties:

- overlap met wiskunde A;
- overlap over leerjaren heen.

Overlap met wiskunde A

Bijna alle leerstof in het vierde leerjaar komt overeen. Er is – afhankelijke van de gebruikte wiskundemethode – waarschijnlijk één hoofdstuk anders.

Model 2a

Leerjaar	Wiskunde A	Wiskunde C
6	Wiskunde A – 6 vwo	Wiskunde C – 6 vwo
5	Wiskunde A – 5 vwo	Wiskunde C – 5 vwo
4	Wiskunde A/C – 4 vwo	

In dit model zijn er aparte lesgroepen wiskunde C in leerjaar 5 en 6. In klas 4 zijn de lesgroepen A en C samengevoegd.

Nadelen: Voor de stof die niet hetzelfde is, zal de docent gedifferentieerd les moeten geven in de klas. Ook bij onderwerpen waar wel (gedeeltelijke) overeenkomsten zijn, zoals bijvoorbeeld lineaire en exponentiële functies, zullen tempoverschillen voor problemen zorgen. Als er maar weinig C-leerlingen in een klas zitten, kunnen ze gemakkelijk ondergesneeuwd raken bij deze constructie.

Voordelen: De clustering in leerjaar 4 levert een kostenbesparing op. Een ander voordeel bij dit model kan de uitgestelde keuze tussen wiskunde A en C zijn. De overlap in klas 5 van wiskunde C en wiskunde A is veel minder dan in het oude programma. Daarom zijn wij van mening dat het samenvoegen van wiskunde C en A in klas 5 niet verantwoord is. Een gedeeltelijke overlap is wel mogelijk.

Model 2b

Leerjaar	Wiskunde A		Wiskunde C
6	Wiskunde A – 6 vwo		Wiskunde C – 6 vwo
5	Wiskunde A – 5 vwo	Wiskunde A/C – 5 vwo	Wiskunde C – 5 vwo
4	Wiskunde A/C – 4 vwo		

In dit model hebben de leerlingen wiskunde C (en wiskunde A) één lesuur gezamenlijk en twee lessen apart in klas 5 (andersom is ook mogelijk). In de aparte lessen kan bijvoorbeeld het accent op de theorie liggen en op specifieke vragen, terwijl tijdens het gemeenschappelijke lesuur meer individueel of in groepen wordt gewerkt, waarbij de docent begeleidt. Hierdoor kan de docent zich beter richten op de leerlingen en krijgen de leerlingen de uitleg die ze nodig hebben.

Voorwaarde: Dit model moet wel passen bij het binnen de school/sectie gangbare didactische model en moet daarvoor verder worden uitgewerkt of aangepast.

Nadelen: De nadelen van model 2a worden in leerjaar 5 nog extra benadrukt.

Voordelen: Het gezamenlijke lesuur levert weer een kostenbesparing, terwijl de leerlingen ook in hun eigen groep aandacht kunnen krijgen. Ook is een eventueel noodzakelijke overstap (in de praktijk meestal van A naar C) van een leerling na klas 4 nog mogelijk.

Het is natuurlijk ook mogelijk om deze gedeeltelijke overlap ook in klas 4 aan te bieden.

Overlap over leerjaren heen

Het is ook mogelijk om leerlingen wiskunde C van verschillende leerjaren samen te nemen.

Model 3a

Leerjaar	Wiskunde A	Wiskunde C
6	Wiskunde A – 6 vwo	Wiskunde C – 5/6 vwo
5	Wiskunde A – 5 vwo	Leerstof in carrousel
4	Wiskunde A – 4 vwo	Wiskunde C – 4 vwo

De C-leerlingen in leerjaar 5 en 6 krijgen samen les en ook zoveel mogelijk dezelfde lesstof aangeboden. Het programma wisselt elk jaar zodat alle leerlingen in de twee carrouseljaren alle leerstof hebben doorgewerkt.

Voorwaarde: Dit model vraagt om een goede planning van de diverse leerstofonderdelen over de twee laatste eindexamenjaren, waar ook de voorbereidingen op school-examens en – voor 6 vwo-leerlingen – het centrale examen een plaats moet krijgen. In de periode vanaf het CE kan in leerjaar 5 leerstof worden geprogrammeerd die in elk cohort in leerjaar 5 wordt ingepland (bijvoorbeeld statistiek).

Nadelen: Niet alle leerstof kan in carrouselvorm aangeboden worden, vanwege de benodigde voorkennis en het verschil in abstractie en wiskundige bekwaamheid. Ook is bekend dat wiskundestof een relatief lange tijd nodig heeft om te bezinken, waardoor het niet wenselijk is om examenstof slechts één keer in twee jaar in korte tijd

aan te bieden. Een eventueel noodzakelijke overstap van wiskunde A naar C is – eventueel afhankelijk van het jaar – mogelijk zeer lastig. Ten slotte legt het roosteren van gezamenlijke lessen voor leerlingen uit klas 5 als klas 6 druk op het rooster en mag dit niet leiden tot beperkingen in keuze van het vakkenpakket.

Voordelen: Samenwerking van leerlingen uit verschillende leerjaren, ze kunnen elkaar als groep versterken. Het samenvoegen van twee lesgroepen levert een kostenbesparing op. Het is mogelijk om bovenstaand model te combineren met model 2a, met gezamenlijk les in klas 4 en een carrouselvorm in klas 5 en 6.

Model 3b

Leerjaar	Wiskunde A	Wiskunde C
6	Wiskunde A – 6 vwo	Wiskunde C – 5/6 vwo
5	Wiskunde A – 5 vwo	Leerstof in carrousel
4	Wiskunde A/C – 4 vwo	

Voor- en nadelen: de voor- en nadelen van beide modellen blijven onverminderd van kracht.

Een carroussel met leerjaren 4 en 5 is ook mogelijk, zodat de C-leerlingen in klas 6 als aparte groep lessen krijgen ter voorbereiding van hun examen.

Model 3c

Leerjaar	Wiskunde A	Wiskunde C
6	Wiskunde A – 6 vwo	Wiskunde C – 6 vwo
5	Wiskunde A – 5 vwo	Wiskunde C – 4/5 vwo
4	Wiskunde A – 4 vwo	Leerstof in carroussel

Nadelen: dezelfde nadelen gelden als bij model 3a. Bovendien is een uitgestelde keuze (modellen 2 en 3b) niet mogelijk.

Voordelen: dezelfde voordelen gelden als bij model 3a. Bovendien krijgen de leerlingen in hun examenjaar apart les voor een optimale voorbereiding op het examen. Een laatste optie is wiskunde C in drie leerjaren (4, 5 én 6) in carrouselvorm aan te bieden. Dit model lijkt ons echter niet verantwoord, omdat het leertempo van leerlingen in de verschillende jaren dan te groot wordt en het lastig wordt om een goed programma op te bouwen waarbij de voorkennis aanwezig is bij alle leerlingen en de opbouw in abstractie en wiskundige bekwaamheid moeilijk te waarborgen is.

Overwegingen en uitgangspunten voor een keuze

De precieze organisatie van het vak zal uiteraard afhangen van de school en haar onderwijskundige visie. Redenerend vanuit de twee grootste gevolgen van de veranderingen in het wiskunde C-programma, namelijk de beperktere overlap met wiskunde A en het hogere niveau, ligt de volgende insteek wel voor de hand:

1. maak gebruik van de inhoudelijke overlap voor zover dat praktisch uitvoerbaar is. Dat biedt ook mogelijkheden voor een eventuele overstap;
2. gebruik de eventueel vrijgekomen ruimte om de begeleiding en ondersteuning van alle leerlingen zo goed mogelijk te waarborgen. Denk hierbij aan de juiste aandacht voor kleine aantallen C-leerlingen bij grotere groepen A-leerlingen, maar ook voor de traditioneel zwakkere leerlingen die een – ten opzichte van vroeger – wat zwaardere wiskunde C kiezen.

Daarnaast hangt de keuze ook af van de hoeveelheid leerlingen die de keuze maken voor wiskunde C. Sommige modellen zijn geschikt voor heel kleine aantallen, andere zijn handig als je bijvoorbeeld twee lesgroepen kan combineren tot één. De organisatie van het vak gaat dan ook hand in hand met een goede voorlichting en schoolleidingen, decanen en mentoren zullen goed moeten worden geïnformeerd. Het nieuwe programma wiskunde C kan pas tot haar recht komen als vervolgoopleidingen het expliciet als voorwaarde gaan opnemen en als leerlingen en hun begeleiders het vak niet blijven zien als de laagste afstroommogelijkheid.

We hopen dat de bovenstaande modellen een beeld geven van de verschillende mogelijkheden om wiskunde C aan te bieden op school, en dat deze voorbeelden het gesprek over de wijze van invoering gemakkelijker zal maken. Uiteindelijk is het van belang dat schoolleiding en vaksectie met elkaar in gesprek gaan, zodat op basis van de gedeelde expertise op organisatorisch, pedagogisch en didactisch gebied een voor alle leerlingen goed onderwijsaanbod wiskunde A, B, C en (misschien) D wordt gerealiseerd.

Over de auteurs

Marjan Botke werkt als docent wiskunde bij het Erasmiaans Gymnasium Rotterdam. Ze geeft les in alle soorten wiskunde in de bovenbouw. Merijn Smit werkt als docent wiskunde bij het Gymnasium Haganum in Den Haag. Hij geeft les in alle soorten wiskunde in alle leerjaren. Beiden maken deel uit van de werkgroep Havo-Vwo van de NVvW. Ze hebben dit artikel geschreven vanuit en in samenwerking met de gehele werkgroep. E-mailadressen: botke@erasmiaans.nl en m.smit@haganum.nl



UW VAKKENNIS VERBREDEN OF VERDIEPEN?

De HU heeft een groot aanbod deeltijd bacheloropleidingen en masters. Ook voor cursussen en modules kunt u bij ons terecht. De opleidingen sluiten direct aan op de beroepspraktijk en worden veelal aangeboden in een vorm van blended learning. Hierdoor kunt u deels onafhankelijk van plaats en flexibel in tijd studeren. Zo kunt u uw studie goed met uw werk combineren.

Is de module Digitale didactiek in vo en mbo of de master leraar wiskunde iets voor u?

Kijk op www.onderwijsopvoeding.hu.nl

MAAK WERK VAN UW CARRIÈRE

**HOGESCHOOL
UTRECHT**

KLEINTJE DIDACTIEK

STATISTIEK MET GROTE DATASETS

Bij het vak Onderzoek en Ontwerpen voeren leerlingen een opdracht uit voor een echte opdrachtgever. De leerlingen uit de derde klas van mijn school, het Christelijk Lyceum Delft, gingen deze keer aan de slag als data-analist. Van een energiebedrijf hebben ze een grote set anonieme energiegegevens gekregen. Wat kunnen ze daarmee?

De vraag welk inzicht een dataset geeft, behoort tot het domein van de exploratieve data-analyse (EDA) waarvan John Tukey met zijn gelijknamige boek de grondlegger is. Eén van de snelste en eenvoudigste analysemethoden is volgens hem het tekenen van een grafiek bij de data.

Wat gebeurt er als je leerlingen een dataset geeft om te analyseren? Ten eerste blijken leerlingen een voorkeur te hebben voor het bekijken van de tabel of het handmatig samenvatten ervan. In de wiskundemethoden oefenen we vaak met kleine datasets en dan werkt dat eigenlijk wel prima. Bij een grote dataset gaat dat meestal niet goed of zelfs helemaal niet.

Ten tweede blijken leerlingen geen idee te hebben welk type grafiek bij welk type data behoort. Bij het vak O&O geef ik daarom een workshop over het maken van grafieken met *Excel* bij de data. Een deel van het gebruikte materiaal is te vinden op www.leergang-wiskunde.nl. In die workshop behandel ik (naast het antwoord op de vragen als 'hoe maak je een lijngrafiek in Excel?') onder andere het volgende:

- bij univariate data (data met maar één variabele) passen bijvoorbeeld: cirkeldiagram, dotplot, staafdiagram en histogram;
- bij bivariate data zijn spreidingsplots en lijngrafieken vaak zinvol. Als het om een vijfde klas zou gaan of bij wiskunde D zou ik ook het begrip correlatie introduceren. Dat doe ik in een derde klas nog niet. Wel behandel ik de vraag: hoe kun je zien of er een verband is of niet;
- bij multivariate data worden regelmatig stapeldiagrammen of meerdere lijngrafieken in één grafiek gebruikt;
- veel data die bivariaat lijken, zijn in werkelijkheid multivariaat. Denk bijvoorbeeld aan weergegevens: de variabelen zijn dan bijvoorbeeld de temperatuur in De Bilt om 12 uur 's middags en de dagen van het jaar. Als over meerdere jaren wordt gemeten, is het echter zinniger om voor elk jaar een aparte lijngrafiek te tekenen. Een andere oplossing is om het

daggemiddelde over een aantal jaren te berekenen om zo seizoensvariaties duidelijker in beeld te krijgen. De derde variabele is dan het jaartal. Of denk aan: geslacht, leeftijd, lengte;

- cirkeldiagram en staafdiagram worden meestal gebruikt als de gemeten variabelen van nominaal of ordinaal meetniveau zijn;
- een histogram kan een eerste idee geven of de data *normaal verdeeld* zijn. Het histogram is daarmee een belangrijke brug naar het idee van kansdichtheid bij kansrekening;
- afhankelijk van of het discrete of continue data zijn en hoeveel verschillende data je hebt, moet je wel of niet met klassen gaan werken;
- elk type grafiek heeft zijn eigen voor- en nadelen. Zo laat een histogram bijvoorbeeld goed de verdeling van de data zien. Een dotplot is in feite de voorloper van een histogram. Een steel-bladdiagram is dat ook als je dotplot of histogram een halve slag draait (en spiegelt oftewel de 'assen' verwisselt).

Het lijkt erop dat deze informatie in de wiskundeboeken voor havo en vwo wiskunde A in het nieuwe examenprogramma ontbreekt of alleen impliciet aanwezig is. Aan ons de taak om deze voor leerlingen expliciet te maken. Ten derde hebben leerlingen er geen idee van dat er een belangrijk verschil is tussen een database en een tabel. In een project voor 5 vwo verzamelden leerlingen meetdata tijdens het sporten. Deze werden eerst met de GR stuk voor stuk omgerekend (in dit geval naar procenten) en dan in Excel zodanig in een tabel gezet dat ze er daarna geen zinvolle bewerkingen meer op konden uitvoeren en de tabellen bovendien geen kolomnamen bevatten, cellen tussendoor leeg waren gelaten en per leerling een aparte tabel was gemaakt in plaats van één tabel met daarin alle onbewerkte meetwaarden van alle leerlingen. Excel was daarmee vooral een manier om de tabel grafisch mooi vorm te geven. Bij een database staan alle metingen van één moment op één regel en hebben alle kolommen unieke namen. Via het sorteren van kolommen, filteren, formules in Excel, draaitabellen enz. kun je er de benodigde informatie dan snel uithalen.

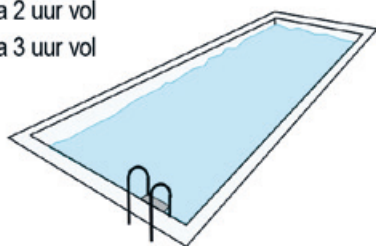
Lonneke Boels

Een ontmoeting tussen Martin Kindt en een Chinese promovenda was voor hem de aanleiding tot het schrijven van dit artikel. Twee woordproblemen die leiden tot een type algebra dat, algemeen gesproken, (te) weinig aandacht krijgt in ons onderwijs.

Een klassiek probleem

Het is alweer een poosje geleden dat Zhao Xiaoyan (roepnaam Yan)^[1] een kamer op het Freudenthal Instituut binnenliep om iets aan mijn kamergenoot te vragen. Terwijl ze mij groette keek ze terloops wat er op mijn scherm te zien was. Het was een plaatje bij een praatje over breuken dat ik binnenkort zou houden en het had duidelijk haar belangstelling. Het betrof een klassiek probleem: het vullen van een bassin met twee kranen (zeg A en B) met verschillende capaciteit.

alleen A open: na 2 uur vol
alleen B open: na 3 uur vol



De vraag hierbij is natuurlijk hoe lang het duurt voor het zwembad vol is als beide kranen openstaan. De standaardoplossing gaat als volgt: A vult in 1 uur de helft van het bad, B vult in dezelfde tijd één derde. Opgeteld is dit vijf zesde. Het duurt dus in elk geval langer dan 1 uur. Hoeveel langer? 12 minuten, want uit $t \times \frac{5}{6} = 1$ volgt: $t = 1\frac{1}{5}$ uur. Er is nog een andere mooie oplossing, vermeld door Freudenthal in zijn laatste boek^[2], die luidt: als het zwembad vol is, verhouden de bijdragen van de kranen A en B zich als 3 staat tot 2. Om $\frac{3}{5}$ van het bad vol te krijgen moet A dan $\frac{3}{5} \times 2$ uur open staan (en B natuurlijk $\frac{2}{5} \times 3$ uur). Voilà. In navolging van Freudenthal had ik ook een *slide* gemaakt waarop te zien is dat generalisatie van deze opgave tot leerzame algebra leidt:

alleen A open: na a uur vol
alleen B open: na b uur vol

Standaardoplossing, $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

Alternatieve oplossing: $\frac{b}{a+b} \times a$ of $\frac{a}{a+b} \times b$

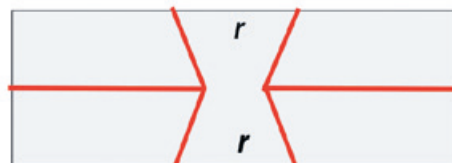
$\frac{ab}{a+b}$

Mijn *slides* waren in het Engels, zodat Yan ze zonder veel uitleg kon begrijpen en ze was blijkbaar geïntrigeerd want even later kwam ze terug met een probleem uit een Chinees wiskundeboek.

Het probleem van Yan

Stel je hebt een cake in de vorm van een rechthoekig blok, die aan de buitenkant geheel geglaazuurd is. Hoe kun je de cake onder een aantal personen verdelen zo dat ieder evenveel cake en evenveel glazuur krijgt?

In de versie van Yan was het aantal personen 5 en was de bodem van de cake een rechthoek met lengte a en breedte b . De symmetrische verdeling waar ze op aanstuurde zag er zo uit:



Hoe kom je hier op en wat zijn de afmetingen van de vijf parten? Als je geen rekening houdt met de hoogte, komt het probleem neer op het verdelen van zowel *oppervlakte* als *omtrek* van een rechthoek in vijf gelijke delen. Ik begin bij de omtrek. Elk van de vijf stukken moet een totale

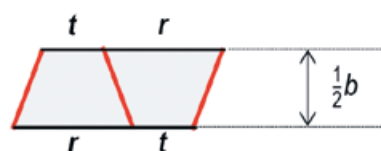
buitenrand hebben met lengte $\frac{1}{5}(2a + 2b)$. Voor de

figuur in het midden betekent dit dat de twee randstukken

- zeg r - elk $\frac{1}{5}(a + b)$ zijn. Als nu de oppervlakte van die

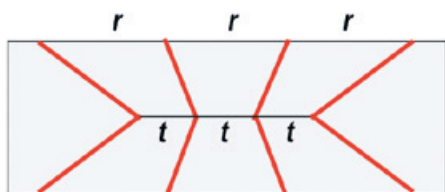
figuur $\frac{1}{5}ab$ is, zijn de overige vier stukken automatisch

ook elk het vijfde deel van het totaal. Ik hoef nog slechts de juiste *taille* (= t) van de figuur in het midden te vinden. Plaats bovenstuk en onderstuk naast elkaar:



Wil de oppervlakte gelijk zijn aan $\frac{1}{5}ab$, dan moet de basis van het parallellogram gelijk zijn aan $\frac{2}{5}a$. Dus: $r + t = \frac{2}{5}a$ en omdat $r = \frac{1}{5}(a + b)$ volgt: $t = \frac{1}{5}(a - b)$. Veel mooier had het toch niet kunnen zijn.

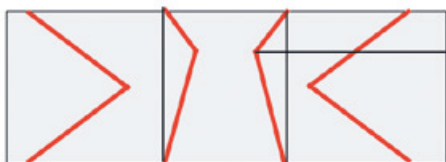
Een andere symmetrische verdeling krijg je door aan het middenstuk twee 'bi-trapezia' met hoogte b en met dezelfde t - en r -waarde te plakken en zo ontstaat er een nieuwe oplossing van het cakeprobleem:



Deze tweede oplossing vraagt wat meer snijwerk, dat wel. Bovendien werkt ze alleen als $3r \leq a$, en dat leidt dan tot $b \leq \frac{2}{3}a$.

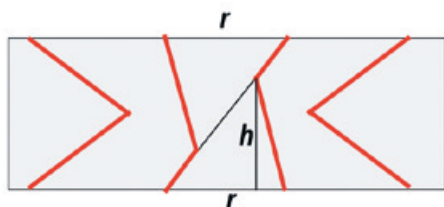
Oneindig veel oplossingen

Als je bedenkt dat het middenstuk in de beide voorgaande oplossingen gezien kan worden als een rechthoek (met zijden r en b) waaruit aan de b -kanten driehoekjes zijn weggesneden, begrijp je wel dat het een kwestie is van andere driehoekjes wegsnijden met dezelfde oppervlakte, om andere verdelingen te creëren. Bijvoorbeeld:



Merk op dat de afstanden van de knikpunten tot de zijkanen van de rechthoek gelijk zijn aan de helft van het verschil $a - t$ dus aan $\frac{1}{2}(a - \frac{1}{5}(a - b)) = \frac{2}{5}a + \frac{1}{10}b$.

Die knikpunten hoeven niet op dezelfde afstand van de lange zijde te liggen. Een bijzonder geval krijg je als het middenstuk bestaat uit twee aan elkaar gelijmde driehoeken.



Stel de hoogte van elk van de deeldriehoeken (met basis r) is h . Omdat de oppervlakte van beide samen

gelijk moet zijn aan $\frac{1}{5}ab$ volgt: $h \cdot \frac{1}{5}(a + b) = \frac{1}{5}ab$

ofwel: $h = \frac{ab}{a+b}$. Toevallig dezelfde formule als die werd

gevonden bij het twee-kranen-probleem. Wiskunde zit vol met verrassingen!

Variatie en generalisatie.

Een vruchtbaar didactisch idee is om leerlingen uit te dagen om zelf opgaven te ontwerpen over het hoofdstuk dat aan de orde is. Dat roept reflectie op en vraagt wat creativiteit. In de theorie van het realistisch wiskunde onderwijs spreekt men wel van 'eigen producties'.^[3] Neem het aanvankelijke kranenprobleem met concrete gegevens (2 en 3 uur vultijd). Als je leerlingen vraagt om zelf zo'n soort opgave te ontwerpen zijn er ten minste vijf mogelijkheden tot variëren:

1. de getallen (hier 2 en 3) veranderen;
2. de vultijd van één kraan en van beide kranen samen geven en die van de andere kraan vragen;
3. meer dan twee kranen opvoeren;
4. een andere context bedenken;
5. een combinatie van deze mogelijkheden.

Voor wat betreft de context: in mijn basisschooltijd kregen we een serie sommen op in de trant van: als A een werk kan doen in a dagen en B hetzelfde werk in b dagen, hoeveel dagen hebben zij dan nodig als zij het werk samen doen (met voor a en b concrete getallen). Onzinnig eigenlijk. Het zou kunnen dat samenwerken het tempo versnelt of vertraagt, je kunt je daar van alles bij voorstellen. Leerlingen zullen vast wel creatiever zijn, als ze een ander verhaaltje bedenken bij het zwembad-probleem. In de zestiende eeuw bedacht Christianus van Varenbrake deze ludieke variant:^[4]

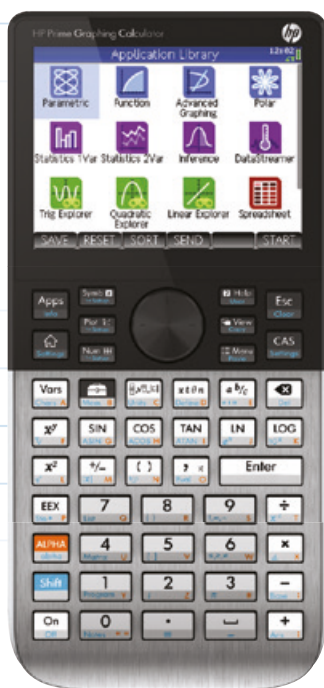
Eenen dronckaert drinct een tonnebiers alleene uut binnen 14 daghen. Ende als sijn wijf met hem drinct, so drincken zij die tonne uut binnen 10 daghen. Nu es de vraghe binnen hoeveel tijdt dat sijn wijf die tonne alleen uitdrincken soude.

In verschillende opzichten de omkering van het kranen-probleem. De context mag gewaagd zijn, als opgave is dit natuurlijk prima. Stel de capaciteit van de vrouw op

w dagen en er komt: $\frac{1}{14} + \frac{1}{w} = \frac{1}{10}$ met als oplossing $w = 35$.

Bij een vulprobleem met drie (of meer) kranen vergelijk ik de standaardoplossing met die gebaseerd op de verhoudingsgewijze bijdrage van elk. Noem de vultijden a , b , c .

De eerste leidt naar: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.



New Body & New Brain HP Prime



Wilt u meer weten over de krachtigste rekenmachine voor uw leerlingen?

Volledige support Noordhoff voor G&R en MW staat online!

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met meer rekenkracht en geheugen dan welke andere machine dan ook.

En voor een vergelijkbare prijs!

- Nieuwe consistente menustructuur met krachtige educatieve applicaties op een touchscreen: het os tenslotter 2016.
- Examenmode op de Prime betekent 1 knop indrukken. Binnen een paar tellen een examen-lokaal in de juiste CvTE examenstand.
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief gratis emulator (dus ook voor uw leerlingen)!



Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop, demo-units of een school-offerte neemt u contact op met p.schadron@hp-prime.nl

Bij de alternatieve aanpak moet je de verhouding van de bijdragen van A , B en C eerst slim omwerken tot: $bc : ca : ab$. Net als bij de standaardmethode is het

resultaat: $\frac{abc}{ab+bc+ca}$.

Hier is ook een inductieve aanpak mogelijk. Beschouw A en B samen als één kraan (zeg D) en de bijdragen van D en C aan een vol zwembad

verhouden zich dan als c staat tot $\frac{ab}{a+b}$. De vultijd in

het geval de drie kranen simultaan open staan is dus

$$\frac{c}{c+\frac{ab}{a+b}} \times \frac{ab}{a+b} = \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

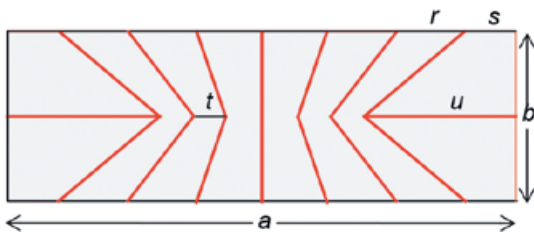
Zouden de leerlingen van nu zo'n herleiding kunnen uitvoeren? In lang vervlogen tijden werden zulke opgaven – in kale vorm, dat wel – op de mulo beoefend, dus het zou eigenlijk moeten kunnen. Hoe het verder gaat met grotere aantallen kranen hoef ik hier niet verder uit te leggen.

Het probleem van de cake kan heel goed worden aangesneden op school. Hoever je wilt gaan hangt natuurlijk af van in welke jaarklas je dat doet. Zelf zou ik niet starten met een verdeling-in-vijven, maar eerst een driedeling bekijken. Een tweedeling kan ook, maar zoals direct te zien is, geeft elke snede via een rechte lijn door het middelpunt van de rechthoek een goede oplossing. Bij een partitie in drieën hoef je alleen maar te zorgen voor een goed middenstuk (boven en onderrand gelijk aan

$\frac{1}{3}(a+b)$ en taille $\frac{1}{3}(a-b)$). De reststukken zijn dan

vanzelf goed. Een eerlijke verdeling in vier stukken is triviaal. Bij een even aantal stukken (> 4) kan worden gestart met een rechte snede door het middelpunt (loodrecht op de lange zijde van de cake).

Hieronder zie je zo'n verdeling in tien stukken.



Dit lukt niet bij elke rechthoek. Er moet hier gelden:

$$6 \cdot \frac{a+b}{10} \leq a \text{ hetgeen uitmondt in } b \leq \frac{2}{3}a.$$

Of algemener: dit type verdeling in n stukken met gelijke rand en gelijke oppervlakte lukt alleen als

$$(n-4) \cdot \frac{a+b}{n} \leq a. \text{ Hieruit volgt dan: } n \leq 4\left(\frac{a}{b} + 1\right).$$

Je kunt hier nog wat meer oefeningen in algebra aan koppelen. Bijvoorbeeld de vraag om s en u (zie figuur 8) uit te drukken in a , b en n . Met als resultaten:

$$s = \frac{2}{n}(a+b) - \frac{1}{2}b$$

$$u = \frac{2}{n}(a-b) + \frac{1}{2}b$$

Hieruit volgt: $s+u = \frac{4}{n}a$ en het trapezium met

evenwijdige zijden s en u en met

hoogte $\frac{1}{2}b$ heeft verifieerbaar de oppervlakte $\frac{1}{n}(ab)$ en

de buitenrand $\frac{2}{n}(a+b)$.

Terugblik

De toevallige binnenkomst van Yan heeft twee heel verschillende problemen in één artikel gebracht. Toch hebben die twee wel wat gemeen. Ze kunnen allebei worden gezien als voorbeelden van rijke contexten om algebra aan te koppelen en te oefenen. En ik durf te zeggen: mooie algebra. Dat 'mooi' heeft dan te maken met de symmetrie van de hier optredende vormen. Misschien iets om in ons onderwijs meer aandacht aan te besteden: algebra kan ook gewoon mooi zijn! Behalve symmetrie is ook de potentie tot variatie en generalisatie een gemeenschappelijk aspect. Het cake-probleem heeft dan nog een sterke meetkundige component, in mijn ogen een pluspunt. Ten slotte wil ik hier kwijt dat de algebra op school te ééndimensionaal is, te veel propedeuse op de analyse van één variabele. Maar als je bedenkt dat formules die optreden in natuurkunde of economie meestal meer variabelen bevatten, dan zie je het manco! Voorbeelden als in dit stukje kunnen dit misschien wat verhelpen.

Noten

- [1] Yan hoopt dit jaar te promoveren bij professor Marja van de Heuvel-Panhuizen op *Classroom Assessment*.
- [2] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education (China lectures)*, Kluwer Academic Publishers, pagina 37.
- [3] Adri Treffers heeft deze term geïntroduceerd.
- [4] Het voorbeeld is ontleend aan een rekenboek uit 1532. Zie Kool, M. en E. de Moor (2009), *Rekenen is leuker dan/als je denkt*, Bert Bakker, pagina 263.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplaanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippets, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



In de late middeleeuwen en vroegmoderne tijd was de almanak – een jaarkalender waarop alle belangrijke gebeurtenissen stonden aangegeven – een van de drukwerkjes waarmee de wiskundige zijn geld verdiende. Was het toeval dat het Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs (IOWO), opgericht in 1971 en sinds 1976 met opheffing bedreigd, in een van haar reclame-uitingen uitgerekend kalenderbladen gebruikte? Vermoedelijk wel: van alles waar het IOWO zich mee bezig hield, was de manier waarop de middeleeuwse wiskundige aan zijn dagelijks brood kwam wel ongeveer het laatste.



figuur 1 Rekenkalender (1978), titelblad

Het IOWO was een bijzonder instituut in het Nederlandse onderwijsveld. Het kwam voort uit de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW). Maakte de CMLW deel uit van een aantal begin jaren zestig door het ministerie in het leven geroepen commissies die zich met leerplanvernieuwing bezig hielden, de wiskunde had onder die commissies een bijzondere status. Ze was de enige commissie die het voor elkaar had gekregen om de onderwijsvernieuwingen die de regering beoogde te bereiken, nader te doen faciliteren en te begeleiden door een eigen instituut: het IOWO. In 1971 had de Nederlandse overheid voor vijf jaar subsidie toegezegd. Die subsidie was in de loop der jaren niet alleen in omvang toegenomen, maar was in 1976 zelfs verlengd tot uiterlijk 1980,

met de expliciete opdracht om naar andere financiering om te zien. Eén van de manieren waarop het IOWO haar financiering dacht veilig te stellen was door haar werk serieus te nemen en het belang daarvan uit te dragen. Ze deed aan onderwijsontwikkeling in proefscholen, in samenwerking met docenten en lerarenopleidingen. Ook ouders werden meegenomen in de onderwijsvernieuwingen. Van verschillende IOWO-projecten bestond ook oudermateriaal. Om het belang van dat werk te onderstrepen werd ook reclame gemaakt en werd het netwerk ook geregeld getrakteerd op een extraatje, zoals dus bijvoorbeeld de rekenkalender.

Als nieuwjaarsgeschenk werd rond 1 januari 1978 een aantal kalenderbladen met een ringbandje toegestuurd aan alle scholen waar het IOWO banden mee onderhield. Die bladen bevatten een datum met een tekening en een idee met betrekking tot een rekenactiviteit. In het begeleidende schrijven werd het voornemen uitgesproken om in het komende schooljaar een rekenkalender uit te geven in deze sfeer. Mensen met ideeën voor geschikte rekenopdrachten werden aangemoedigd om die in te sturen aan de samenstellers: Ed de Moor en George Schoenmaker. Inderdaad kreeg de losbladige uitgave een vervolg in een tijdens het schooljaar 1978-1979 uitgegeven boekje met de titel *Rekenkalender*. Daarin was de koppeling met de kalender, behoudens de titel, losgelaten. Het concept was wel hetzelfde: ook in het boekje was een vrolijke collage van rekenopdrachten te vinden, allemaal aanleiding tot een lesidee of een gesprek over rekenen en wiskunde. In het boekje stonden, naast de rekenideeën, verwijzingen naar *de Wiskrant* en het *Wiskobas Bulletin*, beide uitgaven van het IOWO. Daarnaast tekeningen en losse kreten die het geheel verluchtigden: 'Wenn alles schläft und einer spricht, Den Zustand nennt man Unterricht' op pagina 99. Of 'Men kan ook zonder Wiskunde gelukkig worden!' op pagina 138 (inderdaad stond Wiskunde wel met een hoofdletter gespeld!). En 'Een rekenmethode gezien waar in het antwoordenboek ook alle antwoorden van de tafel van nul stonden' op pagina 150. Wie het boekje van achter naar voren door zijn vingers liet

Patronen

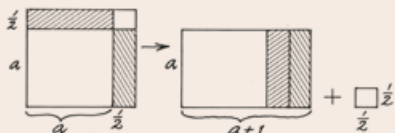
Leerlingen zijn vaak heel gevoelig voor regelmatigheden. Het valt direct op, dat alle uitkomsten op 0,25 eindigen en sommige krijgen de volgende regel:

$$6,5^2 = 6 \times 7 + 0,25 \text{ "in de smiezen"}$$

Tracht de leerlingen dit eerst zelf te laten ontdekken en ga er dan op in:

$$\begin{aligned} \text{a) } 6,5 \times 6,5 &= (6 + 0,5) \cdot (6 + 0,5) = \\ &= 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 0,5 + (0,5)^2 = \\ &= 6 \times 6 + 6 + 0,25 = \\ &= 6 \times 7 + 0,25 \end{aligned}$$

b) of meetkundig:



c) of "gewoon" met algebra
 $(a + \frac{1}{2})^2 = a(a + 1) + \frac{1}{4}$

d) Leg ook verband met de rij
 $5^2, 15^2, 25^2, 35^2, \dots$

e) Bestudeer ook de verschillen van de termen van het patroon.

30



Patronen

Reken de volgende kwadraten uit:

$$\begin{aligned} 0,5^2 &= 0,25 \\ 1,5^2 &= 2,25 \\ 2,5^2 &= \dots \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} 10,5^2 &= \dots \\ 11,5^2 &= \dots \end{aligned}$$

.

.

.

Zie je een mooi patroon?
 Ontdek je een regel?



31

figuur 2 Rekenkalender
 (boekje) pagina 30-31

figuur 3 Rekenkalender
 (boekje) pagina
 124-125

Leuke breuken

Met gebruikmaking van de sommen van het eerste rijtje kan gevraagd worden om (handig) uit te rekenen:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})$$

Er kan verband gelegd worden met algebra.

$$\text{rijtje 1: } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{rijtje 2: } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Laat de leerlingen ook eens maken:

$$1 - \frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} =$$

Vraag dan naar het verband met de eerste rij.

124



Leuke breuken

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} =$$

Zet de antwoordenreeks van de rijtjes voort en maak de sommen erbij.

125

bladeren werd getrakteerd op een 'filmpje' van een skateboardende jongere die het logo van het IOWO in de lucht tekende. Dat logo bestond uit een Möbius-ring.

Veel van de opdrachten waren voorzien van suggesties om de opgaven op verschillende niveaus uit te breiden. In de opdracht op pagina 18, bijvoorbeeld, lag de nadruk op het rekenen in het tientallig positiestelsel, en de herkomst en betekenis van het 'één onthouden'. De suggestie bij deze opdracht was: 'In hogere leerjaren of als leerlingen het bovenstaande goed begrijpen en beheersen, kan in een andertallig stelsel gerekend worden.' Verwezen werd daarbij naar 'Het land van acht' in het *Wiskobasbulletin*, waar in het achttallig stelsel werd gerekend. Het was

een poging om met name voor de pabo-studenten het probleem van het leerproces van kinderen bij het aanleren van de rekenkundige operaties inzichtelijk te maken. Door hen te confronteren met het achttallig stelsel en de rekenoperaties daarin, werden zij (idealiter) gedwongen te reflecteren op hun eigen leerproces.

Dat laat wel zien hoezeer ook het IOWO schatplichtig was aan de vernieuwingsbeweging van de New Math, waar ze liever niet mee geassocieerd werd. Binnen veel New Math methoden was het rekenen in andere talstelsels een populair onderwerp. Natuurlijk, sommige van de New Math aanhangers wilden rekenen los onderwijzen van de getalrepresentatie; hun onderwijsdoel was wat dat betreft fundamenteel anders dan dat van de onder-

wijsontwikkelaars van het IOWO. Maar de pogingen om aansluiting te zoeken bij de beleavingswereld van het kind, het kind bewust proberen te maken van zijn of haar handelen, en de reflectie op het denkproces van het kind in plaats van de focus op de rekenvaardigheden te leggen – dat waren allemaal elementen die in beide groeperingen zeer gewaardeerd werden.



figuur 4 Rekenkalender (boekje)

Wat illustreert nu het bestaan van een dergelijke uitgave ten aanzien van het reken- en wiskundeonderwijs? Het laat in elk geval zien dat het IOWO zich bewust was van haar rol en betekenis. Medewerkers beseften terdege dat zij onderwijzers en ouders nodig hadden om veranderingen in het reken- en wiskundeonderwijs voor elkaar te krijgen. Die onderkenning van de rol van onderwijzers en ouders was een van de succesfactoren achter het IOWO. Daarmee deden ze recht aan de democratiseringsbeweging. Op de welwillendheid van de overheid verkeken ze zich: in 1980 was het definitief gedaan met het IOWO. De onderwijsontwikkeling kon in sterk afgeslankte vorm voortgang vinden aan de universiteit Utrecht, het latere Freudenthal Instituut, maar het grootste deel van de taken verdween richting de Stichting Leerplanontwikkeling en lerarenopleidingen – zoals de overheid het in 1971 had aangekondigd.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundeleraar, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

WISKUNDEONDERWIJS VOOR DE TOEKOMST

NAAR EEN REPERTOIRE VAN INSTRUCTIEVORMEN

Kees Buijs
Sonia Palha
Bert Zwaneveld

De tijd van de traditionele les waarin de docent alleen maar de stof uitlegt en de leerling luistert, lijkt grotendeels voorbij. De les van de toekomst wordt gekenmerkt door nieuwe instructievormen. Welke dat kunnen zijn, verneemt u van Kees Buijs, Sonia Palha en Bert Zwaneveld, allen lid van de werkgroep *Wiskunde voor Morgen*.

Wiskundige leerprocessen

Wiskundige leerprocessen zijn vaak lange-termijnleerprocessen waarbij begrippen, relaties en eigenschappen steeds nader verkend, onderzocht en doorgrond worden en waarbij strategieën en procedures die met die begrippen samenhangen, op een steeds doelmatigere en (soms) abstractere manier uitgevoerd worden. Zulke leerprocessen vinden doorgaans in een cyclische opbouw plaats, veelal aangeduid als voortgaande mathematisering^[1, 2, 3], waarbij datgene wat op een zeker moment eigen gemaakt en ingeoefend wordt, de basis vormt voor begrippen en strategieën van een hoger niveau. Naast deze 'verticale kant' van het leerproces is er veelal ook een 'horizontale kant' waarbij begrippen, eigenschappen en strategieën op een steeds efficiëntere manier in een steeds breder spectrum van probleemsituaties worden toegepast – dit kunnen aan de alledaagse realiteit ontleende situaties zijn, maar ook wiskundige situaties. In toenemende mate behoren hiertoe ook *informatiedragers* zoals tabellen en grafieken, spreadsheets, databestanden, zoekmachines, digitale uitklapmenu's, doorklikssystemen, en andere digitale informatiebronnen die als gevolg van technologische ontwikkelingen een steeds belangrijkere rol in onze samenleving spelen.

Instructie als hoeksteen van het wiskundeonderwijs

Een van de factoren die bepalend zijn voor de kwaliteit van het wiskundeonderwijs, is instructie. Van oudsher

speelt instructie een sleutelrol in het wiskundeonderwijs naast andere factoren zoals lesmateriaal, beoogde leerdoelen, organisatie van het onderwijs in de klas en visie op het (wiskunde)onderwijs. Hoewel er al geruime tijd diverse vormen van schriftelijke instructie in het onderwijs gebruikt worden (zoals in het leerboek opgenomen instructiekaternen en 'adaptieve' online instructie), is het toch vooral de mondelinge, door de docent gegeven instructie die als voornaamste katalysator van het wiskundige leerproces geldt. Zulke instructie kan op veel uiteenlopende manieren plaatsvinden, waarbij de inbreng van de leerlingen en de mate van openheid van de instructie belangrijke 'parameters' vormen.

Uitleggen als meest basale instructievorm; interactieve instructie

Stap voor stap uitleggen wat essentiële kenmerken van een begrip zijn of hoe een bepaalde procedure in z'n werk gaat, kan wellicht als de meest basale vorm van instructie aangemerkt worden. Daarbij kan de mate van inbreng van de leerlingen variëren: de beginnende leraar is soms allang blij als hij een geschikte uitleg kan produceren

zonder dat deze 'onderbroken wordt' door op- en aanmerkingen van leerlingen. Maar gaandeweg zal de leraar zich realiseren dat een uitleg rijker en efficiënter wordt als er juist wel inbreng van de leerlingen is: betere aandacht, meer meedenken met de leraar, beter begrijpen van handelingen, begrippen of relaties, enzovoorts. Dit bevordert ook dat er in toenemende mate een gezamenlijke wiskundige taal door leraar en leerlingen gesproken wordt waardoor wederzijdse communicatie soepeler verlopen kan. Tevens werkt dit in de hand dat de leraar beter overziet in hoeverre de leerlingen een bepaald concept of bepaalde strategie doorzien en dus hoe efficiënt zijn uitleg is geweest.

Substantieel wordt de inbreng van leerlingen als de leraar een uitleg begint met het stellen van relevante vragen en zijn uitleg mede baseert op de suggesties en ideeën die de leerlingen aandragen. Dat kan bevorderen dat een uitleg beter aansluit bij de eigen informele kennis en strategieën van leerlingen en dat zij de samenhang met voorafgaande leerstof beter doorzien. Belangrijk bij deze gewoonlijk als *interactieve instructie* aangeduide instructievorm^[4,5] is dat er mede op basis van wat er door

figuur 1 Voorbeeld van een PISA opgave

M266Q01

Vraag 1: TIMMERMAN

Een timmerman heeft 32 meter planken en wil daarmee een rand om een bloemperk maken. Hij overweegt de volgende ontwerpen voor het bloemperk.

Omcirkel "ja" of "nee" voor elk ontwerp om aan te geven of het bloemperk met 32 meter planken gemaakt kan worden.

A

B

C

D

Ontwerp bloemperk	Kan met dit ontwerp het bloemperk worden gemaakt met 32 meter planken?
Ontwerp A	ja / nee
Ontwerp B	ja / nee
Ontwerp C	ja / nee
Ontwerp D	ja / nee

leerlingen aangedragen wordt, een gezamenlijke wisselwerking tot stand komt waarbij de focus steeds nadrukkelijker op die kernideeën of oplossingsstrategieën komt te liggen die van essentieel belang voor de leerdoelen in kwestie zijn.

Instructie op basis van eigen probleemoplossende activiteiten van leerlingen

Een instructievorm waarbij een nog sterker beroep op de inbreng van de leerlingen wordt gedaan, doet zich voor als een lesactiviteit niet met een uitleg begint, maar met een korte oriëntatie op de leerstof, gevolgd door een opdracht aan de leerlingen om, alleen of in kleine groepjes, zelf te proberen tot een oplossing van een bepaald probleem te komen en om deze oplossing zodanig te noteren dat er in de afsluitende nabespreking verslag over uitgebracht kan worden. Dit kan een lesactiviteit aan de ene kant lastiger maken omdat er mogelijk leerlingen zijn die niet direct goed op gang komen bij het zoeken naar een oplossing. Bovendien is het nodig dat de leraar een goed idee heeft wat voor oplossingen (informele en formele; omslachtige en efficiënte, correcte en niet correcte) er zoal te verwachten zijn, zodat hij bij de oriëntatie op het probleem passende hints kan geven of een richting voor de oplossing kan suggereren. Een belangrijk voordeel van een dergelijke probleemgeoriënteerde lesopzet is echter dat de leerlingen gedwongen zijn om zelf actief in samenspraak met medeleerlingen op zoek naar een oplossing te gaan, dat ze leren om deze op hun eigen manier te noteren en te verwoorden. Ook voor hun zelfvertrouwen en hun gevoel van eigenwaarde kan het gunstig zijn om op deze manier aan de slag te zijn.

Van cruciaal belang is dan de wijze waarop de nabespreking plaatsvindt. Aan de ene kant dienen de leerlingen de ruimte te krijgen om hun oplossingen te demonstreren en te verantwoorden en om op elkaars oplossingen in te spelen. De leraar moet zulke oplossingen snel kunnen overzien, parafraseren en op het bord (laten) weergeven. Maar er dient ook een element van aansturing, bewustmaking en verdieping in de bespreking aanwezig te zijn, en juist hierin schuilt een aspect van instructie. De leerlingen moeten immers de samenhang tussen verschillende oplossingen gaan zien, verschillende niveaus van oplossing, essentiële eigenschappen en verbanden die daarin besloten liggen. Het zal duidelijk zijn dat een dergelijke vorm van instructie op basis van de eigen probleemoplossende activiteiten van leerlingen nogal wat vraagt van de docent maar aan de andere kant ook zeer lonend kan zijn doordat deze in hoge mate kan bijdragen aan een dieper inzicht in de

leerstof, aan een gevoel van samen bezig zijn om wiskundige kennis op te bouwen, en aan een daarmee samenhangende constructieve wiskundige attitude.^[6]

Instructie bij het leren probleem-oplossen

Nu is het zelf oplossen van problemen niet alleen waardevol in het licht van leerprocessen die specifiek betrekking hebben op bepaalde begrippen, relaties en procedures – het is ook op zichzelf in toenemende mate een belangrijk leerdoel van wiskundeonderwijs. Dat blijkt wel uit het feit dat het vaardigheidsniveau van leerlingen bij veel toetsen en examens, met inbegrip van belangrijke internationale onderzoeken zoals Pisa en Timss, steeds meer wordt bepaald via het meten van het probleemoplossend vermogen van leerlingen. Bovendien wordt probleemoplossen (*problem solving*), met gebruikmaking van strategieën zoals modelleren, schematiseren en beargumenteren, als een essentieel aspect van 21ste eeuwse vaardigheden beschouwd.^[7] Hetzelfde geldt voor het kritisch kunnen omgaan met de grote hoeveelheden numerieke gegevens die ons via internet en andere media bereiken, het kunnen analyseren en 'bewerken' van dergelijke gegevens, en het kunnen doorzien van verbanden tussen op verschillende manieren gepresenteerde gegevens.^[8] Het zal duidelijk zijn dat je het oplossen van problemen als leerling niet optimaal onder de knie krijgt via lessen waarbij instructie in de vorm van uitleggen de bovenaan voert. Het gaat immers in hoge mate om activiteiten zoals:^[9]

- het zelf analyseren en modelleren van een situatie;
- het zelf bedenken en uitvoeren van een oplossingsplan;
- het proces van terugkomen op een gekozen werkwijze omdat deze niet voldoet;
- en het reflecteren op een verkregen oplossing om te achterhalen of deze past bij de centrale vraag uit het probleem.

Uiteraard kan een leraar wel helpen om zulke activiteiten bij leerlingen goed op gang te krijgen en te bestendigen door stimulerende opmerkingen, tussentijdse evaluatie of door 'er even bij te gaan zitten'. Maar instructie in de vorm van uitleggen past niet zo bij dergelijke lessen.

Veeleer komt het erop aan dat de leraar de voorwaarden en het 'leerklimaat' creëert waarin probleemoplos-

sende activiteiten goed kunnen gedijen, dat er ruime gelegenheid is om de resultaten van zulke activiteiten gezamenlijk uit te wisselen en te overdenken. Daarbij hoeft de nadruk niet altijd op de meest elegante, geavanceerde of efficiënte oplossingswijze te liggen, maar meer op de mate van doordachtetheid, de mate van onderbouwing, de wijze van visualisering van een oplossing, en derge-

'UITBREIDING VAN INSTRUCTIEVORMEN OP BASIS VAN EIGEN PROBLEEMOPLOSSENDE ACTIVITEITEN VAN LEERLINGEN.'

figuur 2



lijke. Het instructie-element tijdens een nabespreking bestaat er voor de leraar dan ook vooral uit dat hij dergelijke aspecten van een oplossing goed voor het voetlicht weet te brengen, zodat de leerlingen zich bewust worden van het belang van dergelijke aspecten voor het leren probleemoplossen; en dat er een gezamenlijke gedachteswisseling tot stand komt over de samenhang van verschillende oplossingswijzen en de verantwoording daarvan.

Continuüm van instructievormen

De hierboven geschetste instructievormen zijn niet in alle opzichten scherp van elkaar te scheiden en overlappen elkaar enigszins. Zo kan stap voor stap uitleggen door de leraar verwant zijn aan interactieve instructie waarbij de uitleg plaatsvindt op basis van door de leerlingen aangedragen ideeën en suggesties. En deze laatste instructievorm vertoont natuurlijk gelijkenis met instructie op basis van de eigen probleemoplossende activiteiten van leerlingen zoals dat hierboven is besproken. Men zou dan ook kunnen spreken van een continuüm aan instructievormen waarbij de mate van openheid van de instructie in combinatie met de mate van inbreng van de leerlingen de voornaamste 'parameters' vormen. Aan de ene kant van dit continuüm bevinden zich de meer gesloten instructievormen, zoals 'instructie op papier' en online-instructie waarbij de voornaamste stappen uit het beoogde oplossingsproces doorgaans stapsgewijs worden weergegeven; terwijl meer in het midden de hierboven beschreven instructievormen geplaatst kunnen worden waarbij de leraar stap voor stap uitleg geeft zonder substantiële inbreng van de leerlingen, of waarbij sprake is van interactieve instructie. Aan de andere kant van het continuüm zijn er instructievormen waarin geen instructie vooraf plaatsvindt zoals bij de andere instructievormen; en waarin de inbreng van de leraar vooral gericht is op het creëren van de omstandigheden en het leerklimaat voor een vruchtbaar oplossingsproces enerzijds en het goed tot z'n recht komen, met elkaar in verband brengen

en beargumenteren van de verschillende gevonden oplossingswijzen anderzijds.

Wiskundeonderwijs voor de toekomst: gebruik van een repertoire aan instructievormen

Niet elke leraar zal evenveel affiniteit met alle genoemde instructievormen hebben. In de praktijk zal veelal sprake zijn van een combinatie waarbij bijvoorbeeld schriftelijke instructie naast instructie via stap voor stap uitleggen wordt gehanteerd. Naarmate het belang van het leren probleemoplossen en van wiskundige denkactiviteiten^[10] breder wordt onderkend, lijkt het echter gewenst dat er een verdere uitbreiding van deze combinatie plaatsvindt in de richting van instructievormen op basis van de eigen probleemoplossende activiteiten van leerlingen. Voor de toekomst van het wiskundeonderwijs lijkt het essentieel dat leerlingen ruime gelegenheid krijgen om ervaring op te doen met zaken zoals het analyseren en modelleren van probleemsituaties, het zelf construeren van oplossingen, het doorzien van de samenhang tussen oplossingen en het beargumenteren van de (on)juistheid van een oplossingswijze. Dat vraagt van de leraar een daarmee overeenkomende, andere rol waarbij instructie op basis van de eigen probleemoplossende activiteiten van leerlingen plaatsvindt, meer gericht is op gezamenlijke verdieping en doordenking, en op het samenvatten en verhelderen van de kern van wat aan de orde is gekomen. Dit betekent uiteraard niet dat de meer klassieke instructievormen zoals uitleggen in het geheel niet meer van belang zijn, maar wel dat elke leraar steeds meer over een breed repertoire aan instructievormen dient te beschikken dat al naar gelang de situatie op passende wijze ingezet kan worden om het onderwijs vorm te geven. Met het oog daarop lijkt het tevens aan te bevelen om in de lerarenopleidingen systematische aandacht aan het gebruik van verschillende instructievormen te schenken, waarbij met name ook het belang van open instructievormen in de trant van hierboven belicht zou kunnen worden.

Noten

- [1] Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction. The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer.
- [2] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- [3] Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. (Diss.) Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [4] Nelissen, M. H. J. (1992). *Uitleggen*. Praktijckahiers reken-wiskundeonderwijs, red. R. de Jong en I. Verkruysse. Gorinchem: De Ruiter.
- [5] Buijs, K. (2011). Instructie in het reken-wiskundeonderwijs – Aanzet tot een werkkader. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 30(2), 6-14.
- [6] Oonk, W. & De Goeij, E.T.J. (2006). Wiskundige attitudevorming. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 25(4), 37-39.
- [7] Boswinkel N. & Schram, E. (2011). *De toekomst telt*. Enschede: SLO.
- [8] Gravemeijer, K.P.E. (red.) (2015). *Reken- en wiskundeonderwijs voor 2032 – Een reactie op het hoofdlijnenadvies*. (internetpublicatie).
- [9] CTWO (Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs) (2007). *Rijk aan betekenis – Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs.
- [10] Drijvers, P. H. M., Streun, A. van, & Zwaneveld, G. (2012). *Handboek wiskundendidactiek*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

HET FIZIER GERICHT OP...

WISKUNDIGE EXPRESSIES VOOR BRAILLE-AFHANKELIJKE LEERLINGEN

Annemiek van Leendert
Michiel Doorman

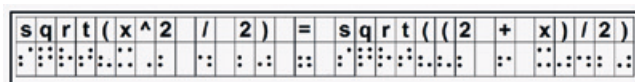


In Flzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering schrijven Annemiek van Leendert en Michiel Doorman over wiskundeonderwijs in braille.

In het onderwijs kom je soms leerlingen tegen die voor het lezen en schrijven op braille aangewezen zijn. Voor deze braille-afhankelijke leerlingen vormt het lezen van wiskundige expressies een grote uitdaging. In de afgelopen decennia hebben onderzoekers zoals Dominique Archambault^[1] zich ingespannen om wiskundige expressies op de braille-leesregel van een computer toegankelijk te maken voor braille-afhankelijke leerlingen. Daarmee heeft de braille-afhankelijke leerling echter nog niet dezelfde mogelijkheden als een goedziende leerling. De braille-notatie is een lineaire notatie. Een braille-afhankelijke leerling leest de expressie helemaal van links naar rechts. Pas nadat de leerling de hele expressie heeft gelezen, weet hij dat het om een vergelijking van twee wortels gaat.

Reguliere notatie $\sqrt{\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{2+x}{2}}$

Braille-notatie, zie figuur 1



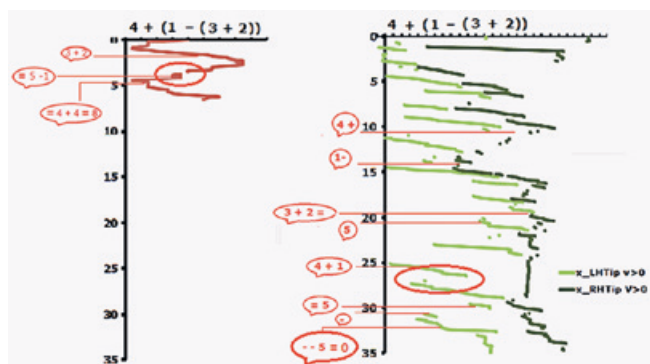
figuur 1 Een wiskundige expressie in de braille-notatie

Braille-afhankelijke leerlingen moeten dus veel memoriseren en dat vraagt veel van de verwerkingscapaciteit van het kortetermijngeheugen. We zijn daarom in het

Over de auteurs

Kees Buijs (CvTE), Sonia Palha (Hogeschool van Amsterdam), Bert Zwaneveld (Open Universiteit) zijn lid van de werkgroep *Wiskunde voor Morgen*
E-mailadressen: kbuys@dds.nl, s.abrantes.garcez.palha@hva.nl en G.Zwaneveld@uu.nl

promotieonderzoek op zoek naar methoden om braille-afhankelijke leerlingen te ondersteunen bij het sneller doorgronden van een expressie. Een eerste vraag die daarbij opkwam is: hoe doen goedzienden dat eigenlijk? Waar gaat onze eerste aandacht naar uit en hoe vaak wisselen we tussen lokale en globale kenmerken als we een expressie bekijken? Onze hypothese is dat inzicht in hoe goedziende leerlingen wiskundige expressies lezen en begrijpen, kan helpen bij het vinden van methoden voor het ondersteunen van braille-afhankelijke leerlingen. In een exploratief onderzoek hebben we de oog- en vingerbewegingen die goedziende respectievelijk braille-afhankelijke leerlingen maken bij het lezen en begrijpen van algebraïsche expressies onderzocht en met elkaar vergeleken. Aan dit onderzoek deden zes goedziende en vier braille-afhankelijke leerlingen mee. De oogbewegingen werden met behulp van een *eye tracker* en de vingerbewegingen met behulp van een *finger tracker* geregistreerd.



figuur 2

Links: oogbeweging van een goedziende leerling
Rechts: bewegingen van de linker- en rechterwijsvinger van een braille-afhankelijke leerling

De data die we zo verzamelden kunnen in een grafiek gezet worden om een beeld te krijgen van het kijk- en tastgedrag. We geven bij het tastgedrag alleen de beweging van links naar rechts weer, omdat de beweging van rechts naar links slechts een verplaatsing is. De braille-afhankelijke leerling leest namelijk niet van rechts naar links. In figuur 2 zijn de resultaten van een goedziende en een braille-afhankelijke leerling te zien. De opdracht was: 'Bereken $4 + (1 - (3 + 2))$ '. Op de *x*-as wordt de expressie weergegeven, op de *y*-as de tijd die nodig is om de berekening uit te voeren. In de tekstballoonnetjes staat wat de leerling uitsprekt.

De goedziende leerling begint na ongeveer één seconde te spreken. Hij leest de expressie van links naar rechts en dan terug van rechts naar links. Hij fixeert ongeveer een halve seconde op het cijfer '1' (rode cirkel). Terwijl hij de expressie van rechts naar links scant, berekent hij '5 - 1' in plaats van '1 - 5'. Hij voert de berekening (fout) uit in

zeven seconden. Bij de andere goedziende leerlingen zien we op die plek een extra knik naar rechts als de leerling vervolgens '1 - 5' zegt.

De braille-afhankelijke leerling scant in de eerste drie seconden met haar linker wijsvinger '4 + ', daarna verkent zij de rest van de expressie. Dan begint zij weer opnieuw en zegt, na elf seconden: '4 + '. Ze negeert het haakje voor het cijfer '1', ze zegt namelijk '4 + 1', en controleert of dat toegestaan is. Haar linker wijsvinger beweegt naar links om dat deel van de expressie opnieuw te scannen (rode cirkel). Gedurende deze periode houdt ze haar rechter wijsvinger op het einde van de expressie. Ze voert de berekening uit in ongeveer 32 seconden.

In dit voorbeeld is te zien dat de braille-afhankelijke leerling veel meer tijd en 'heen en weer' bewegingen nodig heeft. De haakjes, ook de overbodige buitenste haakjes, lijken het kijkgedrag van de goedziende leerling te sturen. De braille-afhankelijke leerling lijkt deze buitenste haakjes te negeren. Als de kijkrichting van rechts naar links gaat, maakt de goedziende leerling een fout ('5 - 1').

Uit deze studie blijkt dat braille-afhankelijke leerlingen veel meer tijd nodig hebben en (delen van) de expressie veel vaker scannen dan goedziende leerlingen.

Goedziende leerlingen overzien snel de structuur en gebruiken die ook. We willen in een vervolgonderzoek bekijken hoe we die structuur ook voor braille-afhankelijke leerlingen eerder in beeld kunnen brengen, tastbaar kunnen maken. Als u wiskunde geeft aan een braille-afhankelijke leerling en u of uw leerling interesse heeft in dit onderzoek, kunt u contact opnemen met de auteurs.

Noot

- [1] Archambault, D. (2009). Non visual access to mathematical contents: State of the art and prospective. In *Proceedings of the WEIMS Conference* (pp. 43-52).

Over de auteurs

Annemiek van Leendert is werkzaam bij de ambulante onderwijskundige begeleiding van Koninklijke Visio Onderwijs. Ze zet zich in voor het wiskundeonderwijs voor leerlingen met een visuele beperking. Ze doet promotieonderzoek bij het Freudenthal Instituut, Universiteit van Utrecht (promotor Paul Drijvers, copromotor Michiel Doorman) en het Erasmus MC (promotor Hans van der Steen, copromotor Johan Pel). E-mailadres: A.J.M.vanLeendert@uu.nl. Michiel Doorman is universitair hoofddocent aan het Freudenthal Instituut. Bovendien is hij lid van het bestuur van de NVvW. E-mailadres: M.Doorman@uu.nl

DE BESTE KEUZE VOOR HET NIEUWE SCHOOLJAAR

Met zichtbare en gemakkelijke examenstand.

Het knipperende LED-lampje aan de bovenzijde van deze drie TI-grafische machines maakt controle tijdens tentamen of examen eenvoudig.

NIEUW



TI-84 Plus T
=
TI-84 Plus + LED



**EXAMEN-
STAND**



De populaire TI-84 Plus CE-T is nu ook in de kleuren rood en blauw beschikbaar (zolang de voorraad strekt).



Info: ti-cares@ti.com

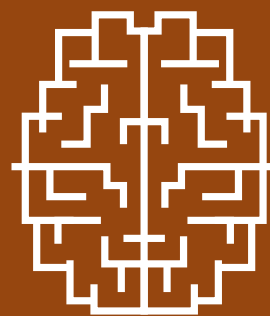
Logaritme – een betekenisvolle aanpak met herhaald delen. Zo luidde de kop van het artikel in Euclides 91-3 van Pauline Vos en Børge Espedal. Tom Coenen en Mark Timmer vinden het een mooie manier om een begin te maken met logaritmen, maar ze signaleren hier ook een nadeel.

In *Euclides* 91-3 bespraken Pauline Vos en Børge Espedal een interessante manier om met logaritmen te werken: *herhaald delen totdat je bij 1 uitkomt*. Deze methode wordt ook gebruikt om logaritmen te schatten die niet precies op een geheel getal uitkomen. Zo wordt geredeneerd dat $\log(800)$ zich tussen 2 en 3 bevindt, aangezien je in twee stappen bij $800 : 10^2 = 8 > 1$ eindigt en in drie stappen bij $800 : 10^3 = 0,8 < 1$. Een prima techniek. Daarna wordt geredeneerd dat $\log(800)$ dichterbij 3 ligt dan bij 2, met als argument dat 1 dichterbij 0,8 ligt dan bij 8. Deze redenering gaat echter niet op – als bedoeld wordt dat er naar de verschillen tussen de getallen gekeken moet worden (0,2 en 7). Beschouw bijvoorbeeld eens $\log(200)$, dat ook tussen 2 en 3 ligt aangezien $200 : 10^2 = 2$ en $200 : 10^3 = 0,2$. Nu ligt 1 dichterbij 0,2 dan bij 2, dus volgens de argumentatie van Vos en Espedal zou dat betekenen dat $\log(200)$ dichterbij 3 dan bij 2 ligt. Dat is echter niet het geval, aangezien $\log(200) \approx 2,3$. Een correcte wijze om te bepalen of een logaritme dichterbij het ene of het andere gehele getal ligt gaat via de kennis dat $x^{0,5} = \sqrt{x}$. Zo komt bijvoorbeeld $10^{2,5}$ overeen met $100 \cdot \sqrt{10}$, en is $\log(100 \cdot \sqrt{10})$ precies 2,5. Daar volgt direct uit dat $\log(a \cdot 100)$, met $1 < a < 10$, dichterbij 2 ligt als $a < \sqrt{10}$ en dichterbij 3 als $a > \sqrt{10}$. We passen deze gedachte nu toe in de aanpak van *herhaald delen totdat je bij 1 uitkomt*, waarbij we op dezelfde manier beginnen: $200 : 10 = 20$; $20 : 10 = 2$; $2 : 10 = 0,2$. Het getal 2 vergelijken we nu met $\sqrt{10}$. (Bij een ander grondtal gaat het uiteraard analoog via de wortel van dat grondtal.) Aangezien de wortel niet mooi uitkomt, kwadrateren we aan beide kanten en vergelijken we 4 met 10. Uit het feit dat $4 < 10$ (en dus $2 < \sqrt{10}$) volgt dat $\log(200)$ dichterbij 2 ligt dan bij 3. In het geval van $\log(800)$ vergelijken we 8 met $\sqrt{10}$ en vinden we $64 > 10$ (en dus $8 > \sqrt{10}$), dus ligt $\log(800)$ dichterbij 3 dan bij 2. Op basis van deze inzichten kan uiteindelijk alsnog gebruik gemaakt worden van een zekere vorm van afstand van de tussenantwoorden 2 en 0,2 tot 1, in het geval van het bepalen van $\log(200)$, door niet te kijken naar hun verschil met 1 maar naar het getal waardoor gedeeld moet worden om van 2 bij 1 te komen en het getal om van 1 vervolgens bij 0,2 te komen. Aangezien er vanuit 2 door 2 gedeeld moet worden om op 1 uit te komen, en vervolgens door 5 gedeeld moet worden om op 0,2 uit te komen, ligt

$\log(200)$ dichterbij 2 dan bij 3. De correctheid van deze methode volgt direct uit het feit dat er bij beide stappen door $\sqrt{10}$ gedeeld zou worden als de logaritme precies halverwege zou zitten (uitgaande van grondtal 10). Over het algemeen lijkt de eerdergenoemde techniek met het kwadrateren eenvoudiger te zijn, aangezien er dan geen delingen uitgevoerd hoeven te worden. Overigens is het uiteindelijk maar de vraag in welke mate het überhaupt nuttig is om het geschatte interval te verkleinen van $(a; a + 1)$ naar $(a; a + 0,5)$ of $(a + 0,5; a + 1)$... Vos en Espedal vermelden vervolgens dat er ook prima overgestapt kan worden naar grondtallen anders dan 10. Inderdaad is het herhaald delen dan in principe alsnog een valide en inzichtelijke techniek, hoewel het al snel lastig wordt als het niet meer een logaritme van de vorm ${}^a\log(b \cdot a^n)$ betreft (met a, b en n positief en geheel, en $1 \leq b < a$). Probeer bijvoorbeeld maar eens ${}^3\log(94)$ te bepalen door 94 herhaaldelijk door 3 te delen – dan moet je al met breuken aan de slag, waarbij je in feite toch weer ouderwets aan het kijken bent welke machten van 3 (die in de noemer terechtkomen) het getal 94 insluiten. Inderdaad, in het artikel van Vos en Espedal wordt ook bij ${}^2\log(100)$ al weer teruggegrepen op herhaald vermenigvuldigen. Ook wordt daar vermeld dat er beredeneerd kan worden dat ${}^2\log(100)$ dichterbij 7 ligt dan bij 6, uitgaande van $2^6 = 64$ en $2^7 = 128$. Ons vermoeden is dat hier geredeneerd wordt dat 100 dichterbij 128 ligt dan bij 64, aangezien er geen alternatieve verklaring gegeven wordt. Ook die redenering gaat echter niet op. Vergelijk bijvoorbeeld ${}^2\log(92)$: hoewel 92 dichterbij 64 ligt dan bij 128, geldt toch ${}^2\log(92) \approx 6,52$ – dichterbij 7 dan bij 6 dus. Hoewel de door Vos en Espedal beschreven methode niet voor alle situaties inzichten zal geven en de methode van schatten door slechts te kijken naar de afstand tot 1 in het algemeen onjuist blijkt te zijn, is het herhaald delen op zichzelf alsnog een mooie manier om via slim gekozen voorbeelden een begin te maken met logaritmen.

Over de auteurs

Tom Coenen is docent wiskunde aan CSG Reggesteyn te Nijverdal. Mark Timmer is docent wiskunde aan het Carmel College Salland te Raalte. Beiden werken zij bovendien als vakdidacticus aan de Universiteit Twente. E-mailadressen: t.j.m.coenen@utwente.nl en m.timmer@utwente.nl



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Wellicht heeft u de komende vakantie tijd voor een spelletje kaarten waar weinig wiskundige kennis voor nodig is. Dat laatste voor het spelletje zelf, voor een deel van de vragen is die kennis wel nuttig!

Er ligt een stapel van n kaarten op tafel. Ze zijn genummerd van 1 tot en met n . Op de achterzijden van de kaarten staan dezelfde nummers, maar dan negatief. Zo staat dus op kaart nummer 3 aan de voorzijde $+3$ en op de achterzijde -3 . We noemen dat de waarde van de zijden (voor- of achterzijde). Het kaartnummer is het nummer zonder teken. We starten met een stapel met alle kaarten met de voorzijde boven en op volgorde. Kaart nummer 1 ligt onderop de stapel en kaart nummer n bovenop. Het schudden gaat als volgt: we pakken de bovenste kaart van de stapel, draaien hem ondersteboven en leggen hem terug. Daarna pakken we in één greep de twee bovenste kaarten, draaien ze samen om en leggen ze zo terug. De bovenzijde van de bovenste kaart heeft dan waarde $1 - n$, dus negatief. Daaronder hebben we kaart nummer n , met waarde aan de bovenzijde $+n$. We gaan zo door met draaien, steeds een kaart meer, tot we als laatste de hele stapel ondersteboven draaien. Dit is één ronde en daarna gaan we door met een nieuwe ronde, op dezelfde manier als de eerste keer. We onderzoeken wanneer alle kaarten weer met de positieve zijde boven liggen. Het aantal keren dat we dan hebben gedraaid noemen we d . En d is afhankelijk van n , dus hebben we een functie $d(n)$. Dit lijkt een methode om de kaarten grondig te schudden, maar is dat ook zo? De vraag luidt: Hoe vaak moeten we draaien tot alle kaarten weer met de positieve zijde boven liggen? En in welke volgorde liggen ze dan? Om het u wat gemakkelijker te maken geven we een viertal observaties (zie kader), die we kunnen bewijzen, maar dat vragen we niet. Het gaat om het ontdekken van een aantal eigenschappen en de patronen die daarbij ontstaan. De observaties kunt u zien als hints.

OBSERVATIES

- a. We kijken steeds aan het einde van een hele ronde op een bepaalde plaats in de stapel welke kaart daar ligt. Daarin moet na een eindig aantal rondes herhaling optreden. Zowel de kaartnummers als de waarden van de zijden doorlopen dus cycli. De lengte van die cycli hoeft niet op elke plaats in de stapel even groot te zijn. Ook kunnen de cycli van de waarden van de zijden langer zijn dan die van de kaartnummers. De cykellengte van de kaartnummers van de onderste kaart noemen we C , en natuurlijk is $C \leq n$. Observatie: op andere plaatsen zijn de cycli óf even lang, óf korter dan C , maar altijd een deler van C . Gevolg: na C rondes liggen de kaarten weer in de oorspronkelijke volgorde.
- b. Steeds is C het kleinste natuurlijke getal > 0 waarvoor geldt: $2^C \equiv \pm 1 \pmod{N}$. Daarbij is $N = g(n)$ een functie van n .
 - a. $d(n) = n \cdot C$ of $n \cdot C - 1$. Een misschien geruststellend resultaat: $d(n) \leq n^2$.
 - b. Afbeelding van alle cycli bij n kaarten op een deel van de cycli bij m kaarten: Bij n kaarten noteren we de cykel van de kaartnummers op de p^e plaats van onder als cykel $P(n) = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_0\}$ met $p_0 = p$. Dan zijn er waarden van m en s waarvoor geldt: bij m kaarten is er bij elke cykel $P(n)$ op de q^e plaats van onder een cykel $Q(m) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_0\}$ met $q = s \cdot p$ en voor elke i : $q_i = s \cdot p_i$ ($0 < i \leq n$). Voor de waarden van de zijden geldt hetzelfde.

Opgave 1 – Bepaal $d(n)$ voor $n = 3, 4$ en 5 . En in welke volgorde liggen de kaarten dan?

Bij opgave 2 letten we even alleen op de situaties na een geheel aantal rondes. Voor $n = 2^k$ of $n = 2^k - 1$ blijken de plus- en mintekens op de zijden die boven liggen na elk geheel aantal rondes steeds een mooi patroon op te leveren en kunnen we aan de hand daarvan de waarde van $d(n)$ voorspellen.

Opgave 2a – Onderzoek dit voor $n = 4, 7$ en 8 en beschrijf het gevonden patroon van plussen en minnen.

Opgave 2b – Wat is, als $n = 2^k$ en $n = 2^k - 1$, in het algemeen de waarde van $d(n)$? Leg uit hoe u dat weet.

Voor $n = 4$ heeft u wellicht gezien dat na elke hele ronde de kaart met kaartnummer 3 steeds op dezelfde plaats in de stapel terecht komt: het is een dekpunt. Op plaats 3 is er dus een cykel met lengte 1.

Opgave 3a – Onderzoek voor welke waarden van n er een kaart is die na één ronde weer op dezelfde plaats in de stapel ligt. Die zal dus ook na meerdere rondes daar blijven. Tip: Bepaal voor verschillende waarden van n de volgorde van de kaartnummers na één ronde en probeer daar regelmaat in te vinden.

Opgave 3b – En voor welke n zijn er cycli van lengte 2?

Voor opgave 4 kijken we naar de waarden w van de zijden aan het einde van elke ronde. Dat zijn dus $2n$ getallen en $2n$ plaatsen (onder- en bovenzijde van de kaarten). Na elke ronde is daarin een bepaalde permutatie opgetreden. (Het is natuurlijk voldoende om alleen de bovenkanten van de kaarten te noteren.) Zo zien we dat de onderste kaart steeds een ronde later boven op de stapel ligt en daarbij één keer is gedraaid.

We kunnen die permutatie beschrijven met een functie $y = f_n(x)$ die beschrijft welke waarde y na het uitvoeren van de permutatie ligt op de plaats waar eerst x lag. Door die functie herhaald toe te passen kunnen we daarmee $d(n)$ bepalen. Of anders gezegd: op de plek waar aanvankelijk w_0 staat komt achtereenvolgens $w_1, w_2, \dots$ met $w_{i+1} = f_n(w_i)$.

Opgave 4a – Bepaal die functie $f_n(w)$. Eventueel geeft u twee of meer functies, afhankelijk van het domein van w , maar het mooiste is natuurlijk een enkele functie. (Voor het oplossen van opgave 4b en 5 is dat nodig). Hint: zie observatie b.

Opgave 4b – Bepaal N als functie van n , dus $N = g(n)$, zoals beschreven bij observatie b.

Opgave 5a – Zie observatie d. Controleer dat deze zich voordoet voor $n = 4$ en $m = 13$ en bepaal de bijbehorende waarde van s .

Opgave 5b – Ga na voor welke waarden van s en m dit bij gegeven n het geval is.

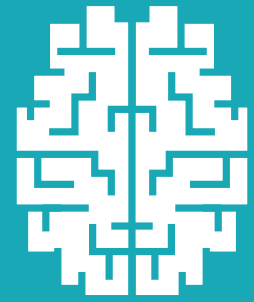
Dit probleem werd ons toegezonden door F. van Hoeve. Daarbij lagen de kaarten bij de start met 1 boven. We hebben echter bewust gekozen voor de startvolgorde met 1 onder en de negatieve waarden op de achterzijden van de kaarten. Dit omdat dat gemakkelijker bleek. Als u zich uitgedaagd voelt om de observatie(s) te bewijzen, dan is dat natuurlijk mooi. Tip: in opgave 4 heeft u misschien observatie b al bijna bewezen. Dit kunt u dan gebruiken om observatie a te bewijzen en vervolgens c en d. Maar wie weet bedenkt u een hele andere methode voor een bewijs.

Wij wensen u een fijne vakantie, wellicht met een pak kaarten op zak.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvrager van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 25 augustus 2016 binnen zijn.

ERDŐS GYÁRFÁS VERMOEDEN

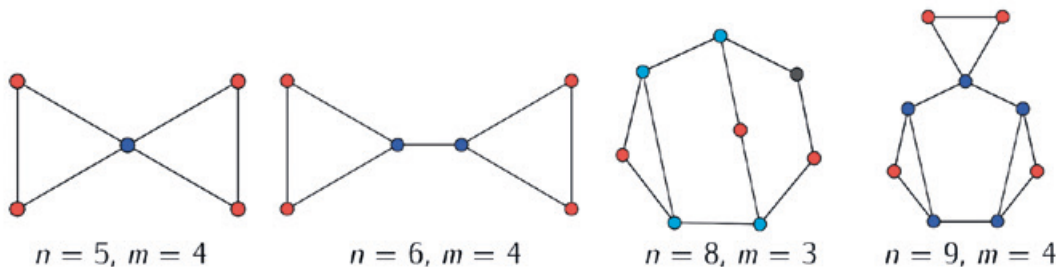


Een mooi vermoeden: Elke graaf met een minimum graad 3 bevat altijd een cykel met lengte 2^k . In deze puzzel lieten we u onderzoeken wat de eigenschappen zouden zijn van een mogelijk tegenvoorbeeld met n punten: $T(n)$.

Opgave 1 – Toon aan dat een graaf, met minimum graad 3, altijd cyclen bevat. En: niet elk punt hoeft deel uit te maken van een cykel.

Zelfs een graaf waar alle punten graad 2 hebben bevat cyclen, immers er zijn geen eindstandige punten met graad 1. Een voorbeeld met een punt niet in een cykel kunnen we als volgt construeren: Begin met een los punt P . Verbind P door middel van drie lijnen met drie grafen waarin elk punt minstens graad 3 heeft. Dan ligt P niet in een cykel en ook P heeft graad 3. Dit was eigenlijk een hint voor de volgende opgaven.

Opgave 2 ging over grafen zonder cyclen van lengte 2^k , waarin er m punten zijn met graad 2 en de rest graad 3 of hoger. Bepaal de kleinste waarde van m voor grafen met $n = 5, 6, 8$ en 9 punten. Mogelijke voorbeelden vindt u in figuur 1. Resultaat: $m = 3$ voor $n = 8$ en $m = 4$ voor $n = 5, 6$ of 9 . Bij meerder inzenders bevatte de grafen met $n = 8$ en vooral $n = 9$ helaas toch een cykel van lengte 8.



figuur 1

We poneerden de volgende stelling: Als een tegenvoorbeeld $T(n)$ bestaat, dan bestaat er een i , waarvoor geldt: voor alle $j \geq i$ bestaat er een tegenvoorbeeld $T(j)$. In **opgave 3** moest u dit bewijzen.

Bewijs: Maak $T(j)$ door meerdere kopieën van $T(n)$ in een keten aan elkaar te koppelen. Dat kan door ze direct aan elkaar te koppelen, of met een lijn er tussen. Met k kopieën kunnen we zo grafen maken met $nk - (k - 1)$ punten tot en met nk punten. Als dit maximum aansluit op het minimum aantal punten voor een graaf met $k + 1$ kopieën ($= n(k + 1) - k$ punten) weten we het antwoord: het minimum bij k kopieën is $i = nk - (k - 1)$.

Dus moet gelden: $nk + 1 = n(k + 1) - k$ en dat geeft $k = n - 1$.

Invullen geeft: $i = n(n - 1) - (n - 2) = n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1$. Voor $n = 7$ vinden we zo $i = 37$.

De waarde van i kan echter kleiner door op een handige manier grafen $T(n)$ en de ons reeds bekende grafen met $m = 3$ of $m = 4$ aan elkaar te koppelen.

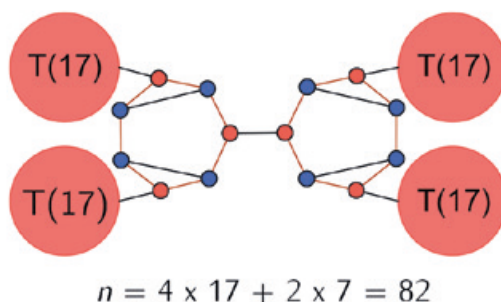
Opgave 4 – Stel dat $T(7)$ of $T(17)$ goede tegenvoorbeelden zijn. Bepaal de kleinste mogelijke waarden van i .

A. Grünfeld was de enige die respectievelijk de kleinste waarden $i = 19$ en $i = 65$ heeft gevonden.

$T(7)$: Met drie kopieën ($k = 3$) van $T(7)$ in een keten zonder verbindingslijnen hebben we $21 - 2 = 19$ punten. Koppelen we ze via lijnen aan een driehoek, dan zijn dat er $21 + 3 = 24$. En met $k = 4$ in een keten minimaal $28 - 3 = 25$ punten. Dat sluit mooi op elkaar aan. Even controleren of het daarna ook nog goed gaat:

Het maximum met $k = 4$: $28 + 3 = 31$ en met $k = 5$ minimaal $35 - 4 = 31$. Sluit ook aan en de overlap wordt steeds groter naarmate k toeneemt. Dus voor $T(7)$ hebben we $i = 19$.

$T(17)$: Nu hebben we vier kopieën van $T(17)$ nodig. Daarmee kunnen we grafen maken van 65 tot en met 68 punten. Samen met grafen met $m \leq 4$ kunnen we die 68 nog flink opschroeven. Twee grafen met $m = 3$ aan elkaar geeft $m = 4$. We kunnen bijvoorbeeld gebruiken: $n = 3$, $n = 7$, $n = 3 + 7 = 10$ en $n = 7 + 7 = 14$. In die combinaties kan het aantal punten met vier kopieën van $T(17)$ variëren van $n = 65$ tot en met $n = 82$ (zie figuur 2). En dat sluit aan op een graaf met vijf kopieën die minimaal $5 \cdot 17 - 4 = 81$ punten heeft. Zo vinden we $i = 4 \cdot 17 - 3 = 65$.



figuur 2

Ten slotte definieerden we een half tegenvoorbeeld als een graaf met slechts één punt met graad 2 en de rest 3 of meer (dus $m = 1$) zonder cycli van lengte 2^k .

In **opgave 4b** vroegen we hoe het zit als er halve tegenvoorbeelden zouden zijn. Het antwoord is eenvoudig: koppel er twee via de punten met graad 2 aan elkaar en je hebt een echt tegenvoorbeeld. Het kan zelfs als er precies één punt is met graad 1 en de rest graad 3 of hoger, dan zetten we er drie aan elkaar. Hiermee hebben we dus het vermoeden van Erdős Gyárfás aangescherpt tot:

Elke graaf met n punten die op één na graad 3 of hoger hebben, bevat een cykel van lengte 2^k . Als het vermoeden waar is, dan volgt hier uit dat halve tegenvoorbeelden niet bestaan. En ook: als het vermoeden waar is, dan zijn er oneindig veel voorbeelden te construeren.

Als extra vroegen we nog na te denken over een algemene formule $i = f(n)$, maar dat lukt niet zonder een algemene formule voor m . Het is wel mogelijk een scherpere ondergrens te geven dan die bij opgave 3. Voor meer informatie mag u ons mailen. Helaas was het aantal inzendingen de laagste die wij tot nu toe hebben gehad. Was het zo moeilijk? Tijdgebrek? Misschien te veel puzzelen in plaats van wiskundige berekeningen? We horen graag uw suggesties.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 91-5 is:

Naam	Punten
J. Meerhof	197
K. Vugs	191
J. Verbakel	188
H. Klein	159
H. Linders	149
L. Pos	140
A. Grünefeld	105
J. Guichelaar	79
K. van der Straaten	78
L. Cizkova	61

We feliciteren Jan Meerhof van harte met de ladderprijs.

In deze interactieve rubriek belicht Kees Hoogland aspecten van gecijferdheid.
Deze keer: kritisch kijken.



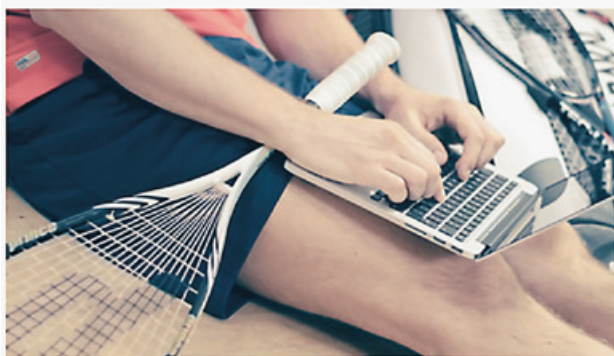
Vooraf

Getallen, patronen en structuren trekken dagelijks in een bonte stoet aan ons voorbij. Getallen en wiskundige redeneringen worden gebruikt om informatie aan ons over te brengen of om ons iets aan de man te brengen. Kritisch kijken is daarbij een onmisbare attitude. Niet alleen om echte fouten en misleidingen op te sporen, maar ook om geen gelegenheid te missen eens hartelijk te lachen over echte *bloopers*.

Causaliteit en correlatie

Een heel veel gemaakte fout is het door elkaar halen van causaliteit en correlatie. Er zijn heel veel verschijnselen die 'samenhangen'. Pas met een algemeen geaccepteerde of aannemelijke onderliggende theorie over oorzaak en gevolg kan er sprake zijn van causaliteit. Dat sporten goed is voor je gezondheid, is een redelijk geaccepteerde theorie. Dat je door een uurtje badmintonnen per week meer gaat verdienen, is nog maar de vraag. Met welk niveau leerlingen kun je hierover een goed klassengesprek hebben? En doe je dat ook?

nrc.next: Sporten is goed voor je gezondheid én voor je salaris

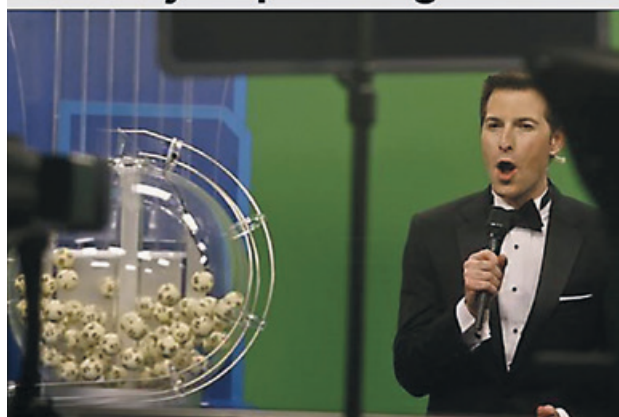


Mensen die regelmatig sporten, vinden makkelijker een baan en verdienen meer, zo blijkt uit onderzoek.

Bloopers

Als uitsmijter van een jaargang stukjes over gecijferdheid nog twee voorbeelden van echte bloopers.

De buit: 1.500.000.000 miljard Recordjackpot VS gevallen



Laat uw klas eens zulke voorbeelden verzamelen. Binnen enkele weken heb je er vast al een aantal te pakken. Ik houd me aanbevolen.

Over de auteur

Kees Hoogland is vakexpert rekenen, wiskunde, gecijferdheid bij SLO. Website: www.gecijferdheid.nl, E-mailadres: cph@xs4all.nl

ZAMBIAANSE CIRKELS

Arie van Kooten

Het Wereld Wiskunde Fonds helpt de Kalwala Secondary School in Zambia door boeken en materialen aan te schaffen. Die hulp gaat via Stichting *Joy for a Toy*. De voorzitter van deze stichting, Arie van Kooten, beschrijft op poëtische wijze wat het WwF met uw bijdragen voor de Kalwala school betekent.



In elk leven komt ooit dat moment. Je hoort dat de wereld rond is, maar je ziet het nog niet. Als je wegloopt van de ander verdwijnt hij langzaam uit het zicht. Lesgeven in Zambia, het mooiste land ter wereld: Wij schrijven hier alles op een bord waar enorme kraters in gapen, die alleen dienst kunnen doen als cirkels tijdens de meetkunde lessen. 'Talk and chalk' heet dit perfecte leermodel. En de kinderen zitten dan met zijn twintigen om één boek. Gezellig, dat wel. En als het krijt op is? Dan is het krijt op.



Joy of a Toy

giro NL54 INGB 0002 2665 20 Maarssen

Stichting *Joy of a Toy* is in 1990 opgericht door Arie van Kooten en Ger Limpens, die elkaar kennen van hun wiskundestudie. Het doel van *Joy of a Toy* is de ondersteuning van de allerarmsten op het platteland van Zambia. Inmiddels heeft de stichting een weeshuis, een ziekenhuis en een school gebouwd voor de aidswezen van Kalwala's Village. Zie www.joyofatoy.nl (het archief van de rondzendbrieven laat zich lezen als een roman...)

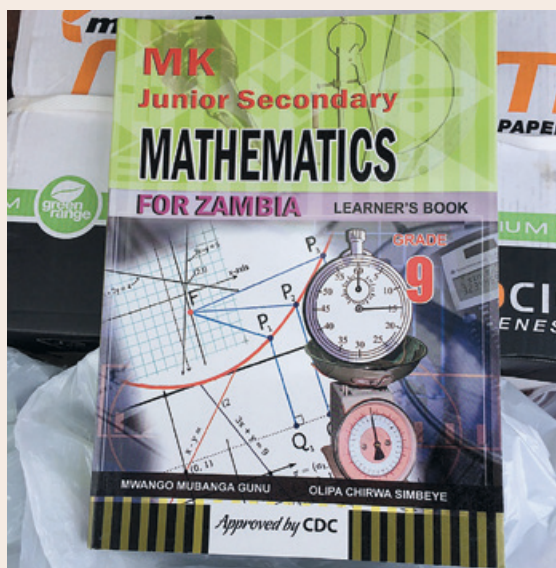
We vegen het bord met proppen papier en het ene wiskundeboek wordt integraal overgeschreven van het bord. En dan zal ik ze gaan vertellen dat in *The Netherlands* de scholen volgepropt zitten met computers, tablets en smartboards? Dank je de koekoek. Want wat moet ik dan zeggen als ze vragen waarom dat zo is? Dat de wereld nou eenmaal zo in elkaar zit? Dat je arm bent als je aan de ene kant geboren wordt, en rijk aan de andere? En dat daar niets aan te doen is? Dat geloof je toch zeker zelf ook niet. Natuurlijk is daar wat aan te doen. Als je dat echt wilt.

En het WwF wil dat. Mooi toch? Ze hebben ervoor gezorgd dat de Kalwala Secondary School in Zambia genoeg wiskunde boeken en materialen heeft gekregen om goed wiskundeonderwijs te verzorgen. Zodat ook deze kinderen hun talenten kunnen ontwikkelen. Want dat is het grootste wonder. Dat sommige van de leerlingen hier zo vanuit de bush op deze school gedumpt worden. De bush, waar ze voornamelijk op de koeien gelet hebben. In het begin weten ze nog niet eens wat een breuk is.



En dat ze dan binnen een paar jaar de meest ingewikkelde integralen, matrices, en trigonometrische formules begrijpen. Het is onvoorstelbaar. Ik heb daar een grenzeloze bewondering voor. En natuurlijk gaat het niet alleen om die integralen en matrices. Het gaat erom dat ze leren denken, leren redeneren, leren samenwerken.

Education is the most powerful weapon you can use to change the world. Mandela zei het al, en het valt niet te ontkennen. De wereld kan alleen verder als we onze waarden doorgeven aan de volgende generatie. En het WwF helpt daar op deze manier prachtig aan mee. Hun hulp reikt gelukkig voorbij de continenten. En de Zambiaanse docenten van Kalwala zijn dankbaar voor die steun. Niet alleen omdat ze nu hun leerlingen



beter kunnen helpen. Zoals elke echte docent hopen zij namelijk dat hun kinderen zo goed worden als zij hadden willen zijn. Maar ook omdat zij op deze manier voelen, dat we met elkaar verbonden zijn. Wat is er mooier dan van betekenis te zijn voor een ander.

Vaak sta ik stil onder de Afrikaanse zon. En in deze chaos, met stof en zon en wanorde voel ik mij thuis. Want het is waar, er zijn geen computers, tablets en smartboards. En vaak ook geen stoelen, banken, schriften. Maar toch lacht een Afrikaans kind. Ondanks alles. Ze hebben nog niet gehoord dat de wereld rond is. Maar ze zien het wel. Ze zijn met elkaar verbonden. Elke Zambiaanse cirkel is rond. Ze weten dat je op deze wereld niet van elkaar kunt weglopen. Als de wereld echt rond is, loop je de ander altijd tegemoet. In Kalwala zullen we niet vergeten dat het WwF ons tegemoet gelopen is.

Over de auteur

Arie van Kooten is voorzitter van stichting *Joy of a Toy*.
E-mailadres: kootenvana@gmail.com

JAARVERGADERING/ STUDIEDAG 2016



Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/
studiedag 2016 van de Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren op
zaterdag 5 november 2016.

Aanvang: 10:00 uur

Sluiting: 16:00 uur

Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4,
3906 EA Veenendaal

Themagedeelte van de studiedag

Grenze(n)loze wiskunde

Wiskunde speelt zich natuurlijk niet alleen af binnen de muren van een lokaal. Tijdens deze studiedag onderzoeken we de grenzen van ons wiskundeonderwijs en dan vooral wat aan de andere kant van die grenzen gebeurt. Daarbij kunt u bijvoorbeeld denken aan landsgrenzen en dan rijzen vragen als: Hoe is daar de discussie rond tussendoelen, eindtermen en didactiek? Wat kunnen we van elkaar en van andere culturen leren? We staan echter niet alleen stil bij geografische grenzen, maar ook bij de vakgrenzen. We vinden dat wiskunde een algemeen vormende rol heeft, ondersteunend is voor andere vakken (het is toch handig als je iets kunt uitrekenen) en van belang is voor vervolgonderwijs en beroepen. Maar houden we wel voldoende rekening met al deze doelen die buiten de grenzen van de wiskunde zelf liggen? Hoe vaak overlegt u met uw collega's van natuurkunde of economie? En de wiskunde van grenzeloosheid zal ook niet ontbreken tijdens deze studiedag. Daarbij kunt u denken aan onderwerpen als limieten, het begrip oneindig, reële getallen en hun didactiek. Op deze studiedag bieden wij ruimte aan al deze aspecten van de grenze(n)loze wiskunde. Laat het ons weten als u hierdoor geïnspireerd raakt en een idee voor een werkgroep heeft. Heeft u leservaringen die u wilt delen of wilt u actuele onderwerpen met collega's bespreken? Dan wordt u ook nadrukkelijk uitgenodigd om een bijdrage aan deze studiedag te leveren.

Verantwoordelijk voor de inhoud van dit programma-onderdeel zijn Lidy Wesker-Elzinga (e-mailadres: l.wesker@nvvw.nl) en Michiel Doorman (e-mailadres: m.doorman@nvvw.nl). Ideeën voor bijdragen kunt u aan hen doorgeven.



Agenda

10:00–11:00 uur – **Jaarvergadering**

1. Opening door de voorzitter, Swier Garst.
2. Jaarrede door de voorzitter.
3. Notulen van de jaarvergadering 2015.
4. Jaarverslagen 2015/2016 NVvW en *Euclides*.
5. Jaarrekening en balans 2015/2016, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. De bestuursleden Douwe van der Kooi en Marianne Lambriex treden af en stellen zich niet herkiesbaar. In *Euclides* nummer 1 van september zal het bestuur in de tweede uitnodiging nieuwe bestuurskandidaten voorstellen. Het bestuur nodigt leden van harte uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (e-mailadres: secretaris@nvww.nl). Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden. In het bijzonder worden leden die werkzaam zijn in de onderbouw van het voortgezet onderwijs uitgenodigd zich kandidaat te stellen.
7. Rondvraag.
8. Sluiting van de jaarvergadering.

Programma Studiedag

11:00 – 11:15	Inleiding op de studiedag
11:15 – 12:00	Plenaire lezing door Theo van den Bogaart
12:00 – 12:15	Koffie/thee
12.15 – 13.15	Workshopronde 1A / lunch en markt
13.15 – 14.15	Workshopronde 1B / lunch en markt
14.15 – 14.30	Wisseltijd
14:30 – 15:30	Workshopronde 2
15:30 – 16:00	Plenaire voordracht
16:00	Afsluiting

De indeling van de studiedag is gewijzigd ten opzichte van vorige jaren om de deelnemers meer gelegenheid te geven de markt te bezoeken. Iedereen volgt een workshop in ronde 1A óf in ronde 1B, zodat er tijd is voor lunch en marktbezoek.

Dus reserveer in uw agenda: NVvW–dag, zaterdag 5 november 2016

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op 5 november 2016. Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich wenden tot Heleen van der Ree (e-mailadres: hoofdbureau@nvww.nl)

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

HET ZICHTBAAR MAKEN VAN DE DISCRIMINANT

Twee parameters zijn genoeg om iedere tweedegraadsvergelijking te kunnen beschrijven. Maar die twee parameters kun je dan opvatten als de coördinaten van een punt. En waar liggen dan de punten die horen bij de tweedegraadsvergelijkingen die precies één oplossing hebben? Dat is het uitdagende probleem waar Jacques Jansen zich deze keer voor gesteld ziet.



figuur 1

Geïnspireerd door het boek *Wiskundigen mogen niet huilen* van Gerardo Soto Y Koelemeijer (zie figuur 1) en een lezing^[1] van Jaap Top, gehouden op het KWG wintersymposium van januari jongstleden, heb ik een workshop in elkaar gezet voor de sectie wiskunde van het Strabrecht College te Geldrop. Jaap Top is hoogleraar Wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen, met getaltheorie en algebraïsche meetkunde als leeropdracht. In zijn lezing bespreekt hij een nieuwe beleving van 'discriminant groter dan nul of juist kleiner dan nul' van veeltermvergelijkingen. Hij reageert op een publicatie uit 1892 van de Duitse wiskundige Felix Klein met als titel *Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen*. Klein herinnert de lezer weer aan eerder werk van onder andere James Joseph Sylvester (1864). Niet zo lang geleden schreef Ionica Smeets in haar wekelijkse column^[2] in *de Volkskrant* over het afleiden van formules. In deze leuke column heeft zij het over die suffe *abc*-formule. Maar hoe suf is die *abc*-formule dan wel? Wat is het verhaal er achter? Is het zinvol om dat verhaal of die geschiedenis door te geven aan onze leerlingen? Soto y Koelemeijer breekt een lans voor de geschiedenis van de wiskunde in de les. Ik besluit om aan mijn voormalige sectiegenoten een tijdlijn te presenteren, zie figuur 2.

figuur 2



2000 v. Chr.

Eigenlijk kan ik meteen verwijzen naar het mooie Zebraboek *Babylonische Wiskunde* van Ab van der Roest en Martin Kindt^[3]. Ongeveer vierduizend jaar geleden komen we al een vierkantsvergelijking tegen. Die wordt echter niet met de *abc*-formule opgelost. Toen was er al een beeldcultuur, een meetkundige aanpak.

8e eeuw

Martin Kindt^[4] schreef in *Euclides* 89.7 over de aanpak van de Arabische wiskundige Al Khwarizmi. We zijn nu beland in de 8e eeuw. Via meetkundige weg gaf hij een algoritme voor het oplossen van een vierkantsvergelijking. Kindt noemt dat 'aanvulling-tot-vierkant-methode'. Algebraïsch noemen we dat kwadraat afsplitsen. Mijn collega's laat ik in de workshop even knippen. Er ontstaat wel een discussie. Hoe krijg je de leerlingen van het knippen af, om tot abstraheren te komen? Vaak wordt de *abc*-formule meegedeeld en mogen de leerlingen de formule toepassen in het oplossen van rijtjes vierkantsvergelijkingen. Hoe zit het met kubische vergelijkingen? Kun je dan ook iets afsplitsen? Dat kan, maar niet altijd. Het kwadraat wordt vervangen door een derde macht en meetkundig gezien wordt het afgesplitste vierkantje vervangen door een afgesplitst kubusje. Zie mijn artikel^[5] in *Euclides* 90.4. Een voorbeeld. $x^3 + 6x^2 + 12x - 100 = 0$. Bij de meetkundige interpretatie hebben we een kubus met ribbe x , drie blokjes met afmetingen van 2 bij x bij x en drie blokjes met afmetingen van 2 bij 2 bij x . De inhoud van die zeven blokjes samen is 100. We kunnen er een grote kubus van maken met ribbe $x + 2$ maar dan moeten we een kubus met ribbe 2 toevoegen. De inhoud van de grote kubus is dan 108. Er geldt dus

$$(x + 2)^3 = 108. \text{ Dus } x = -2 + \sqrt[3]{108} \approx 2,76.$$

16e eeuw

Ondertussen zitten we in de 16e eeuw. Men kon toen al derdegraads vergelijkingen oplossen. De derdegraadsvergelijking $t^3 + tx + y = 0$ heeft een oplossing van de vorm:

$$t = \sqrt[3]{-\frac{y}{2} + \frac{\sqrt{-3D}}{18}} + \sqrt[3]{-\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{-3D}}{18}}$$

met $D = -4x^3 - 27y^2$.

D heet de discriminant van de kubische vergelijking. De formule vertelt ons niet of de vergelijking een oplossing heeft of niet. Deze formules werden opgesteld door Girolamo Cardano. Hier kun je met de leerlingen even bij stilstaan. Hoe gingen de Italiaanse wiskundigen in de

16e eeuw met elkaar om, als het ging over het oplossen van kubische vergelijkingen? U kent vast de verhalen van Scipione del Ferro, Tartaglia en Cardano.

19e eeuw

Jaap Top had het in zijn lezing over een heel andere aanpak voor het bepalen van het aantal oplossingen van een n^{e} -graadsvergelijking. Ik vertel dat aan mijn collega's en zij raken enthousiast. 'Dit heb ik nooit geweten', hoor ik ze zeggen. We beginnen simpel met het onderzoeken van vierkantsvergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ waarbij natuurlijk geldt $a \neq 0$. Dus we kunnen net zo goed meteen voor a de waarde 1 kiezen. Zo'n vierkantsvergelijking wordt dus vastgelegd door slechts twee getallen, b en c . Dan denk je al snel aan een getallenpaar (b, c) en dat kun je als een punt in een coördinatenstelsel zien. Dan is het handig om b en c te vervangen door x en y – daar zijn we vertrouwd mee – maar dan moet je x in de vergelijking ook vervangen. We kiezen als variabele t . Dus we beschouwen de vierkantsvergelijking $t^2 + xt + y = 0$ die gekarakteriseerd wordt door het punt (x, y) .

Wordt het u nu te veel? Een vierkantsvergelijking wordt door een punt vervangen in het XOY-vlak. Punt $P(2, -8)$ correspondeert met vierkantsvergelijking $t^2 + 2t - 8 = 0$. Er geldt $t^2 + 2t - 8 = (t + 4)(t - 2)$. Waar liggen nu alle punten in het XOY-vlak die corresponderen met vierkantsvergelijkingen met oplossing 2? En waar liggen alle punten die corresponderen met vierkantsvergelijkingen met oplossing -4 ?

We vullen $t = 2$ in de vergelijking $t^2 + xt + y = 0$ in en vinden $4 + 2x + y = 0$. Daarmee hebben we de lijn $y = -2x - 4$. Zo vinden we bij $t = -4$ de lijn met vergelijking $y = 4x - 16$. Het snijpunt van deze lijnen is natuurlijk punt $P(2, -8)$. Op beide lijnen ligt ook een speciaal punt dat het bijbehorend nulpunt 'dubbel' heeft. Bij $t = 2$ bedoelen we dan de vergelijking $(t - 2)^2 = 0$. Die vergelijking correspondeert met punt $(-4, 4)$. U kunt nagaan dat voor $t = -4$ dat het punt $(8, 16)$ wordt.

Voor de hand ligt nu de vraag: waar liggen alle punten die corresponderen met vierkantsvergelijkingen met precies één oplossing? Met de kennis van nu zeggen wij natuurlijk dat voor x en y in $t^2 + xt + y = 0$ moet gelden: $x^2 - 4y = 0$. De punten liggen op een dalparabool met vergelijking $y = 0,25x^2$. Deze kromme wordt ook wel *discriminantkromme* genoemd. De beide lijnen door punt

$P(2, -8)$: $y = 4x - 16$ en $y = -2x - 4$, zijn raaklijnen aan die parabool, zie figuur 3. Gaat u zelf even na:

- veeltermen met een vast nulpunt $t = u$ vormen een rechte lijn;
- veeltermen met een meervoudig nulpunt vormen een parabool;
- de lijn bij een vast nulpunt raakt aan deze parabool;
- de coördinaten van een punt hebben betekenis! Gaat u na welke betekenis?

Toch is het verstandig om die formule voor de discriminantkromme op een heel andere manier af te leiden zodat u straks weet hoe u dat bij kubische vergelijkingen van de vorm $t^3 + xt + y = 0$ moet doen. Die discriminant zult u vast niet paraat hebben...

Andere aanpak

Grafisch gezien hoort bij $t^2 + xt + y = 0$ een dalparabool die de x -as raakt voor $t = u$. We kunnen nu twee vergelijkingen opstellen als u een oplossing is: $u^2 + ux + y = 0$ en $y = u^2$; $u^2 + ux + u^2 = 0$; $u(2u + x) = 0$; $x = -2u$. En nu hebben we een parametervoorstelling die we gemakkelijk kunnen omzetten in de vergelijking $y = 0,25x^2$.

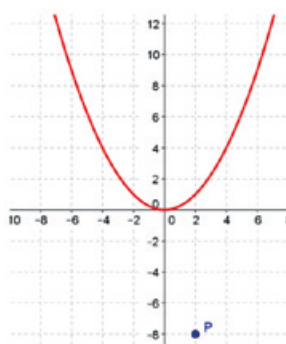
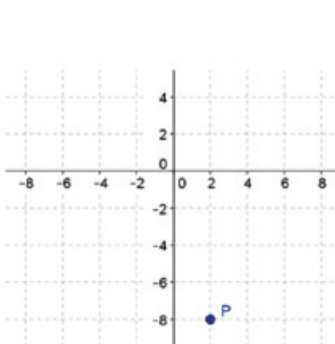
Nut van de discriminantkromme bij vierkantsvergelijkingen

U kunt snel zien hoeveel oplossingen een vierkantsvergelijking heeft: zoek het bijbehorende punt op in het XOY-vlak en kijk hoeveel raaklijnen u uit dat punt aan de parabool kunt trekken. U zult waarschijnlijk denken: 'dat kun je toch meteen zien aan het teken van de discriminant'. Inderdaad. Maar hoe bepaal je snel het aantal reële oplossingen bij een derdegraadsvergelijking?

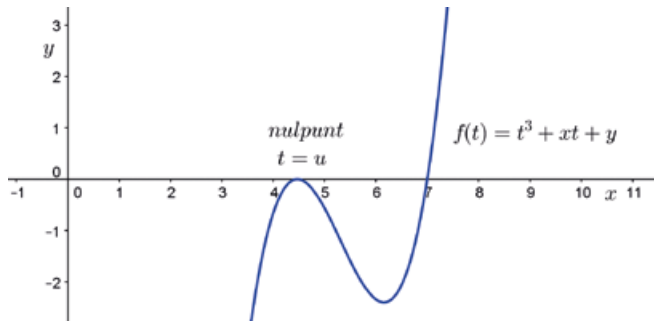
Aantal reële oplossingen bij een kubische vergelijking

Elke derdegraadsvergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kan teruggebracht worden – de kwadratische term werken we weg – tot de vorm $x^3 + px + q = 0$ met p en q als reële getallen.

Dit gaat na een substitutie van $t = x + \frac{b}{3a}$ in de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. De vergelijking $x^3 + px + q = 0$ vervangen we weer door $t^3 + xt + y = 0$. De vergelijking correspondeert weer met een punt in het XOY-vlak. Voorbeeld: $t^3 + 2t + 7 = 0$ correspondeert met het punt $(2, 7)$.



figuur 3



figuur 4

De vraag is natuurlijk waar je de derdegraadstermen met één meervoudig nulpunt terug kunt vinden. Zo'n nulpunt kan tweevoudig of zelfs drievoudig zijn. Bij drievoudig denken we bijvoorbeeld al snel aan de vergelijking $t^3 = 0$ of $(t - 5)^3 = 0$. Vergelijking $t^3 = 0$ correspondeert met de oorsprong. In het algemeen zijn die punten terug te vinden op de meetkundige plaats van punten (x, y) met de eigenschappen dat $t = u$ een meervoudig nulpunt is. De bijbehorende grafieken zijn derdegraadskrommen die de t -as raken voor $t = u$, zie figuur 4. De afgeleide is daar nul, in de top is de raaklijn immers horizontaal.

Voor de functie noteren we $f(t) = t^3 + xt + y$ met als afgeleide $f'(t) = 3t^2 + x$. Voor het meervoudig nulpunt $t = u$ geldt dan:

$$\begin{aligned} - & u^3 + xu + y = 0 \\ - & 3u^2 + x = 0 \end{aligned}$$

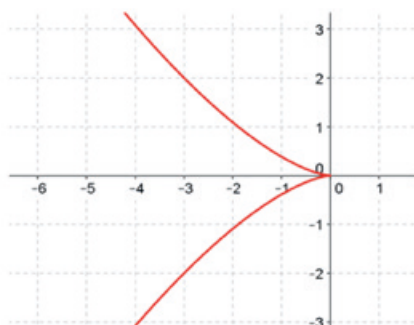
Dat is te herleiden tot: $x = -3u^2$ en $y = 2u^3$. We vinden

de volgende parametervoorstelling: $\begin{cases} x = -3u^2 \\ y = 2u^3 \end{cases}$

Wilt u een rechtstreeks verband tussen x en y ? Gaat u

maar na, dat is $y^2 = -\frac{4}{27}x^3$. In figuur 5 is de discriminantkromme afgebeeld.

figuur 5



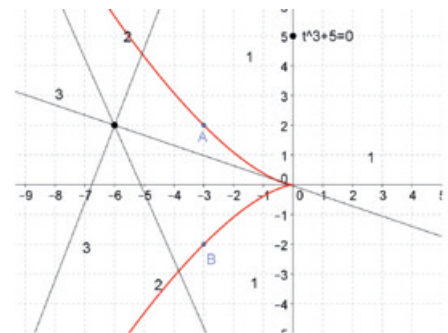
Met behulp van de raaklijnenknop in *GeoGebra* kunt u vanuit een willekeurig punt het aantal raaklijnen bepalen en daarmee het aantal reële oplossingen van de bijbehorende kubische vergelijking. In figuur 6 is dat gedaan voor punt $(-6, 2)$ dat correspondeert met de vergelijking $t^3 - 6t + 2 = 0$. Het zal duidelijk zijn dat er voor de leerlingen veel te onderzoeken valt. Figuur 6 leent zich

goed om allerlei onderzoeksvragen te stellen. Op de website is een aantal voorbeelden te vinden.

Kubische vergelijkingen waarbij een derde macht is af te splitsen

Waar zijn de kubische vergelijkingen gebleven waarbij je een derde macht (een kubus) kunt afsplitsen? Bijvoorbeeld de kubische vergelijking $x^3 + 6x^2 + 12x - 100 = 0$ is terug te brengen tot $(x + 2)^3 = 108$. Of door die handige substitutie tot $t^3 - 108 = 0$. Het corresponderende punt in het XOY -vlak is $(0, -108)$. Zowel algebraïsch als meetkundig is het duidelijk dat er precies één reëel nulpunt is. Vanuit $(0, -108)$ is er één raaklijn te trekken aan de discriminantkromme $y^2 = -\frac{4}{27}x^3$. Voor u een uitdaging om aan te tonen dat alle kubische vergelijkingen waarbij je een derde macht kunt afsplitsen, corresponderen met punten op de y -as.

figuur 6



Verder onderzoek

We komen nu toe aan de vierdegraadsvergelijkingen. Ook deze kunnen we oplossen met het gereedschap voor kwadratische en kubische vergelijkingen. Dat hebben we te danken aan Lodovico Ferrari, de pleegzoon van Cardano. Vergelijkingen van de vorm $t^4 + xt + y = 0$ en zelfs $t^n + xt + y = 0$ kunnen verder onderzocht worden. Het zichtbaar maken van discriminantkrommen kan fraaie modellen opleveren: we werken dan wel met drie variabelen. Zo zijn er modellen gemaakt, door bijvoorbeeld Roderich Hartenstein (student van Felix Klein), zie figuur 7, bij de vergelijkingen $t^4 + xt^2 + yt + z = 0$. U voelt

figuur 7



wel aan welke uitdagingen hier liggen. Jaap Top, ik geef hem helemaal gelijk, ziet mogelijkheden voor een profielwerkstuk. Ik zou er ook een stukje handenarbeid aan willen toevoegen. Het is belangrijk om te beseffen dat het gaat om wiskunde die ontwikkeld is in de 19e eeuw. Men beschikte nog niet over allerlei elektronische apparatuur en fraaie software.



vakbladeuclides.nl/917jansen

Noten

- [1] Presentatie van Jaap Top op het KWG Wintersymposium: www.math.rug.nl/~top/lectures/KWGwintersymposium2016.pdf
- [2] Smeets, I. (2016, 6 februari). Ionica zag een getal. *De Volkskrant*.
- [3] Roest, A. van der, & Kindt, M. (2012). *Babylonische Wiskunde*. Zebraboekje nummer 20. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
- [4] Kindt, M. (2014). De abc-formule en de salontafel. *Euclides* 89(7), 8 – 11
- [5] Jansen, J. (2015). Derdegraadsvergelijkingen oplossen door te zagen. *Euclides* 90(4), 17 – 18
- [6] Met dank aan Matthijs Wiolders, voormalig docent Open Universiteit

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

VERSCHENEN

LIEFDE & WISKUNDE



Ondertitel: Het hart van de verborgen werkelijkheid

Auteur: Edward Frenkel

Uitgever: Novacento, Amsterdam (2015)

ISBN: 978-94-91126-04-8

Prijs: € 24,50 (363 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Edward Frenkel (1968) is hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Californië, Berkeley, lid van de American Academy of Arts and Sciences, en winnaar van de Hermann Weyl Prize voor wiskundige fysica. Als begaafde jongeman werd Frenkel niet tot de Universiteit van Moskou toegelaten omdat hij Joods was, maar hij klon letterlijk over vijf meter hoge hekken om illegaal colleges te kunnen volgen. Een verhaal over passie en doorzettingsvermogen. Een paar vooraanstaande hoogleraren namen hem onder hun hoede en zo kreeg hij de kans al heel jong over zijn onderzoek te publiceren. Verder publiceerde hij voor een algemeen publiek in The New York Times en The Scientific American. Als 21-jarige, nog voor hij gepromoveerd was, werd Frenkel uitgenodigd om als gasthoogleraar aan de Harvard-universiteit te doceren. Frenkel woont in Berkeley, Californië.

Liefde & Wiskunde stond in 2013 op de bestsellerlijst van de The New York Times en werd in 2015 met de Euler Book Prize bekroond.

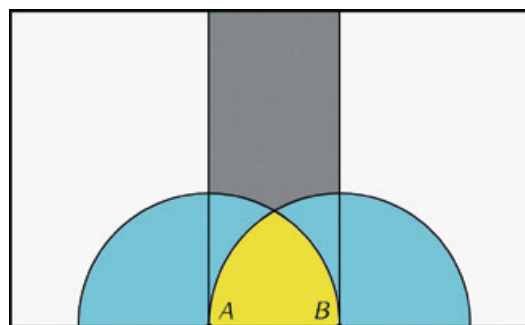
Liefde & Wiskunde vertelt twee met elkaar vervlochten verhalen. Het ene is de meeslepende autobiografie van Frenkel waarin hij laat zien hoe wonderlijk de Liefde is verbonden met de Wiskunde. Het andere is een tintelende verhandeling over hoe symmetrie en de daarbij horende groepentheorie de wiskunde en de theorie van de elementaire deeltjes in de natuurkunde beheerst. We lezen hoe het leven van wiskunde is doordrenkt en hoe het befaamde Langlands-Programma ogenschijnlijk verschillende wiskundige onderwerpen onder één noemer probeert te brengen.

WELK PERCENTAGE DRIEHOEKEN IS NU EIGENLIJK SCHERPHOEKIG?

Fred Muijers

Op het artikel *Stokjesdriehoek had aandacht van Lewis Carroll in Euclides 91-4* is een aantal reacties gekomen die mogelijk de lezer verder helpen op onderzoek te gaan en zeker leerlingen tot redeneringen of simulaties kunnen aansporen. Fred Muijers komt nog een keer op de stokjesdriehoeken terug.

Collega Gé Groenewegen is in de historie gedoken. Het is augustus 1900. Tijdens het Internationale Wiskunde Congres in Parijs houdt David Hilbert zijn beroemd geworden lezing *Über Mathematische Probleme*. Daarin geeft hij de wiskundegemeenschap een aantal problemen om in de twintigste eeuw op te lossen. In dit artikel speelt probleem 6 een centrale rol: Het onderzoek naar de grondslagen van de meetkunde leidt tot de vraag of we op dezelfde manier die takken van de natuurkunde, waar wiskunde een belangrijke rol speelt, met behulp van axioma's kunnen vastleggen. Allereerst gaat het dan om de kansrekening en de mechanica.^[1] Het ging Hilbert om serieuze natuurkundige zaken, maar het antwoord op zijn zesde probleem schept ook duidelijkheid in de paradox in genoemd artikel in *Euclides 91-4*. Daarin wordt een antwoord gezocht voor het probleem: neem willekeurig drie punten A , B en C in het vlak. Hoe groot is de kans dat de gevormde driehoek ABC scherphoekig is? Twee verschillende benaderingen gaven twee verschillende antwoorden: 17,8% en 36,0%. Het gestelde probleem is overigens afkomstig uit het boek *Pillow Problems: Thought out During Wakeful Hours* van Lewis Carroll. Kijkend naar figuur 1 kunnen we nog een derde aanpak aangeven. Neem de driehoek en leg nu de kortste zijde op AB . Het derde hoekpunt C moet verder dan $|AB|$ af liggen van zowel A als B , en ligt dus buiten de getekende halve cirkels. In dit gebied geven alleen de punten C in de smalle grijze strook een scherphoekige driehoek. Ligt C in het witte gebied, dan is driehoek ABC stomp. Figuur 1 laat zien dat 'bijna alle' driehoeken een stompe hoek hebben. De paradox wordt groter. Hoe lossen we dit op? Uiteindelijk bleek probleem 6 aan te pakken als een axiomatiek van de kansrekening goed wordt vastgelegd. In 1933 gaf Andrey Kolmogorov antwoord in zijn boek *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Daarin komen de bekende axioma's voor. Zie kader. Uniforme verdelingen behoren tot de meest eenvoudige voorbeelden van een dergelijk kanssysteem. We kennen allemaal het gooien met een eerlijke dobbelsteen (zes mogelijke uitkomsten, elk met kans $1/6$) en het trekken van een balletje uit een lottomachine. Maar neem nu eens een enorm grote lotto-



figuur 1

machine, met daarin voor elk natuurlijk getal een balletje. De machine draait en trekt een getal voor ons. Hoe beschrijven we dit? Elk natuurlijk getal n heeft een kans p_n om getrokken te worden. Volgens de kansaxioma's is $0 \leq p_n \leq 1$. En omdat de totale

kans gelijk is aan 1, geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Dan volgt

meteen dat niet alle kansen p_n aan elkaar gelijk kunnen zijn. Een uniforme verdeling op $\mathbb{N}$ bestaat niet. We kunnen wel zeggen *neem een willekeurig getal onder de 100 in gedachten*, maar de uitspraak *kies een willekeurig natuurlijk getal* is niet welgedefinieerd.

Terug naar het gestelde probleem dat begon met drie punten in een vierkante kamer. Er bestaat een uniforme verdeling op een vierkant. En zo kan een persoon C die vierkante kamer binnenkomen en 'ergens' gaan staan. Maar als men schrijft: 'Neem willekeurig drie punten A , B en C in het vlak', dan is niet duidelijk wat er bedoeld wordt. Je kunt de totale kans van 1 niet uniform verdelen over het hele vlak. De eerste zin uit de puzzel is dus niet welgedefinieerd! En zo ontstaat de paradox.

We moeten zelf nog een nadere invulling geven aan de startsituatie, door een kansruimte en een kansverdeling te kiezen. In figuur 1 zien we de twee opties uit [2]. We

leggen de langste zijde van de driehoek op AB . Dan geeft het gele gebied de mogelijkheden voor hoekpunt C . Leg daar een uniforme verdeling op en bereken de kans op een stompe hoek. Maar als we besluiten de middelste zijde op AB te leggen, dan is hoekpunt C een willekeurig punt in het blauwe gebied. Dat geeft een andere kansruimte en ook een andere kans op een stompe hoek. Leggen we de kortste zijde op AB , dan lopen we vast. Bij het gebied waar C kan liggen past nu geen uniforme verdeling. Dat gebied is een halfvlak met een hapje er uit. Het plaatje kan wel suggereren dat het witte stuk veel en veel groter is dan de grijze strook, maar zonder een kansmaat kunnen we dat niet kwantificeren. Zowel Gé Groenewegen als Jan Smit, oud-KU-docent van mij, doen suggesties voor vervolgen die zeker ook door leerlingen begrepen en uitgevoerd kunnen worden. Laten we het vlak beperken tot een groot vierkant: $[-N, N] \times [-N, N]$. Daar kunnen we een uniforme verdeling op leggen en de kans op een stompe driehoek bepalen. Neem dan de limiet voor $N \rightarrow \infty$ en kijk wat dat oplevert. Men heeft dat gedaan (zie [3]) en wat blijkt, de kans op

een scherphoekige driehoek is $1 - \frac{97}{150} - \frac{\pi}{40} \approx 0,275$.

Definitie van een kansexperiment.

Kolmogorov noemt drie ingrediënten die nodig zijn:

1. Een uitkomstenruimte U die alle mogelijke basisuitkomsten van het experiment vastlegt.
2. Een collectie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van U , die we gebeurtenissen noemen. De lege verzameling en de hele U horen daar bij. En hierbij regels over doorsnede, vereniging en complement van gebeurtenissen.
3. Een kansmaat $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ die aan iedere gebeurtenis een kans toekent $\mu(U) = 1$ en er gelden diverse regels zoals een somregel voor kansen bij disjuncte gebeurtenissen.

Kijk, dit hangt niet af van de grootte van het vierkant. Daarmee lijkt dit verhaal toch nog een happy end te krijgen. Totdat... iemand begon met een cirkel met de oorsprong als middelpunt en met straal N en daarbinnen drie willekeurige punten koos (zie [4]). En deze persoon vond als kans op een scherphoekige driehoek

$1 - \frac{9}{8} + \frac{4}{\pi^2} \approx 0,280$. Opnieuw verschillende antwoorden.

U snapt inmiddels waarom. We zijn uitgegaan van verschillende kansruimten. Een uniforme verdeling op de cirkelschijf is anders dan die op een vierkant. En zouden we beginnen met een rechthoek die twee keer zo lang is als breed, dan vinden we weer een ander percentage scherphoekige driehoeken. Tot slot keren we nog één keer terug naar de 'willekeurige driehoek' met een opgave voor de lezer.

Elke driehoek heeft een omgeschreven cirkel. We beginnen daarom met een cirkel en daarop punt A . Kies nu willekeurig nog twee punten, B en C , op de cirkel. Dit is welgedefinieerd. Op de cirkelrand bestaat een uniforme verdeling. Bereken de kans dat we op deze manier een scherphoekige driehoek vinden.

Noten

- [1] *Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.*
- [2] Muijrsers, F. (2016) Stokjesdriehoek had aandacht van Lewis Carroll. *Euclides*, 91(4), 27–28
- [3] Langford, E. (1969) The probability that a random triangle is obtuse. *Biometrika*, 56, 689–690
- [4] Hall, G.R. (1982) Acute triangles in the n -ball. *Journal of Applied Probability*, 19, 712–715

Over de auteur

Fred Muijrsers is docent aan de lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Tevens is hij coördinator van de eerstegraadsopleiding tot leraar wiskunde van de HAN masterprogramma's. E-mailadres: fred.muijrsers@han.nl

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

UITDAGING

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



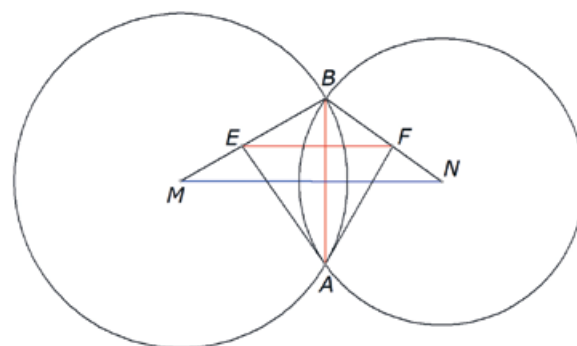
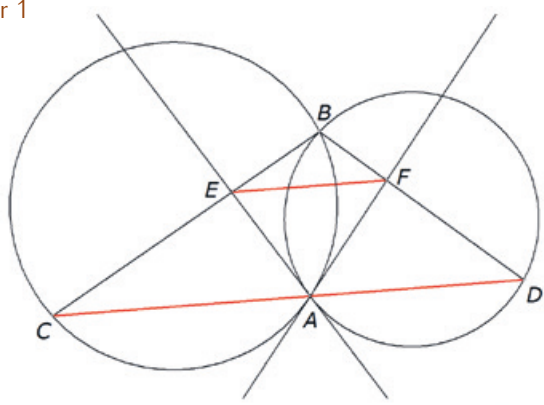
In deze rubriek besprak ik de afgelopen zeven jaren opgaven die de vorige eeuw tot vlak na de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. De koek is op. De in mijn ogen mooiste opgaven heb ik in ruim vijftig artikelen besproken, in het licht van het huidige curriculum wiskunde-B voor het vwo. Als afsluiting volgen hier twee opgaven die nog net actueel zijn nu de synthetische meetkunde nog in het vwo-programma wordt geëxamineerd. Het zijn geen examenopgaven van destijds, maar wel mooie koordenvierhoekopgaven met bijpassende cirkeleigenschappen. De eerste is een opgave die in mijn Cito-tijd was afgekeurd als te moeilijk voor een eindexamen (oordeelt u zelf!). De tweede opgave is een zelfbedachte variant hierop. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerking aan.

Opgave 1

Twee cirkels snijden elkaar in de punten A en B . Een lijn door A snijdt de cirkels in C en D . De raaklijnen in A aan beide cirkels snijden de lijnen BC en BD in E en F . Zie figuur 1.

Bewijs dat $EF \parallel CD$.

figuur 1



figuur 2

Opgave 2

Twee cirkels, met middelpunten M en N , snijden elkaar in de punten A en B . De raaklijnen in A aan beide cirkels snijden de lijnen BM en BN in E en F . Zie figuur 2.

Bewijs dat $EF \parallel MN$.

Uitwerking opgave 1, de eerste stap

Lukt het u? Wellicht eerst een hint: $AEBF$ is een koordenvierhoek. Nu bent u aan zet.

Uitwerking opgave 2, de eerste stap

Ook nu is $AEBF$ een koordenvierhoek. Gaat u er maar eens voor zitten en voltooi uw bewijs.

Eerste opgave, het bewijs

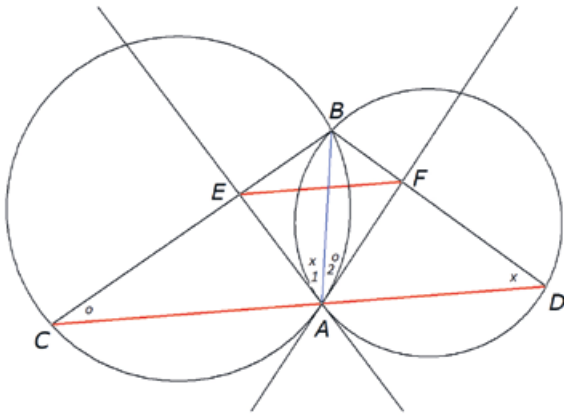
Teken AB , zie figuur 3.

$\angle A_1 = \angle D = x$ (raaklijn en koorde, op boog AB in rechter cirkel)

$\angle A_2 = \angle C = o$ (raaklijn en koorde, op boog AB in linker cirkel)

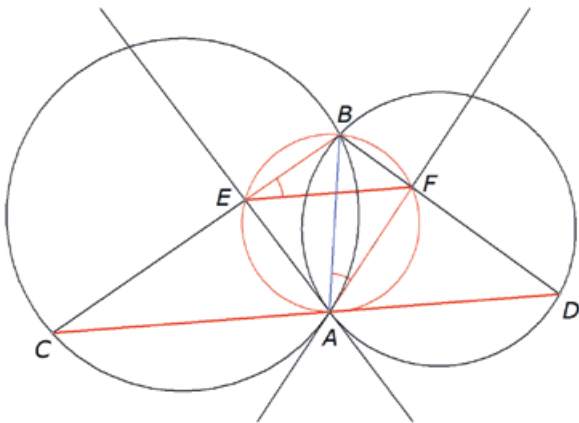
$\angle EBF = \angle CBD = 180^\circ - \angle C - \angle D = 180^\circ - o - x$
(hoekensom driehoek BCD), dus

$\angle EBF + \angle EAF = (180^\circ - o - x) + (x + o) = 180^\circ$



figuur 3

Dus $AEBF$ is een koordenvierhoek. Dus is er een cirkel door de punten A , E , B en F , en is het feest, we krijgen er weer omtrekshoeken bij! Zie figuur 4, ziet u het?



figuur 4

$\angle FAB = \angle FEB$ (*constante hoek*, beide op boog BF).
Maar zojuist liet ik zien dat $\angle FAB = \angle C = o$. Dus geldt:
 $\angle C = \angle FEB$, waaruit volgt: $CD \parallel EF$ (*F-hoeken*). q.e.d.

Tweede opgave, het bewijs

Teken AB , AM en AN . Het bewijs is vrijwel identiek aan het vorige, zie figuur 5.

Stel $\angle FAB = o$, dan is $\angle BAM = 90^\circ - o$ (raaklijn staat loodrecht op straal)

$\angle MAB = \angle MBA = 90^\circ - o$ ($MA = MB =$ straal, driehoek MAB is gelijkbenig)

en ook $\angle AMB = 2o$ (*hoekensom driehoek MAB*)

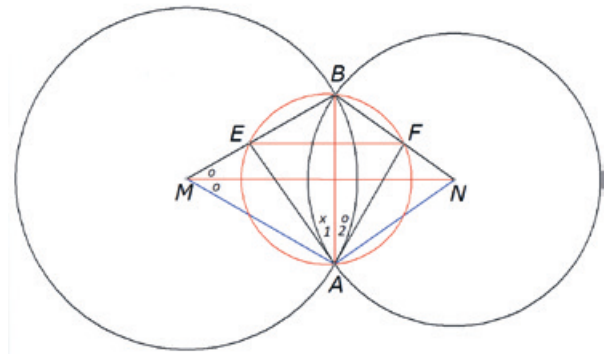
en ook $\angle NMB = o$ (driehoeken AMN en BMN zijn congruent, ZZZ)

Analoog kun je laten zien dat $\angle EAB = x$ dus $\angle BAN = \angle ABN = 90^\circ - x$

$\angle EBF = \angle MBN = (90^\circ - o) + (90^\circ - x) = 180^\circ - x - o$

$\angle EAF = x + o$, dus $\angle EBF + \angle EAF = (180^\circ - x - o) + (x + o) = 180^\circ$

Dus is $AEBF$ een koordenvierhoek. Teken de cirkel om deze koordenvierhoek, en, net zo als bij de vorige opgave: $\angle FAB = \angle FEB$ (*constante hoek*, beide op boog BF). Maar zojuist liet ik zien dat $\angle FAB = \angle NMB = o$. Dus geldt: $\angle NMB = \angle FEB$, waaruit volgt: $MN \parallel EF$ (*F-hoeken*). q.e.d.



figuur 5

De tekeningen zijn gemaakt met *Geocadabra*. Mijn programma ontdekte naderhand deze evenwijdigheid bij de eerste opgave, waar de examenmakers aanvankelijk slechts de koordenvierhoek ontdekten.

Wanneer u nog meer opgaven zoekt voor synthetische meetkunde, er staat een aardige verzameling op mijn website: <http://members.casema.nl/alecluse/>.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

De werkgroep vmbo van de NVvW heeft sinds kort een nieuwe voorzitter: Ruud Jongeling. Ruud belicht wat de werkgroep doet en nodigt vmbo docenten uit om een actieve rol te spelen binnen deze werkgroep.

Soms lijkt het er op dat in het wiskundeonderwijs voor het vmbo niets verandert. Het examenprogramma bestaat al dertien jaar, de digitale examens zijn er ook al zo'n tien jaar en hoe lang geleden was het ook alweer dat het examenonderdeel statistiek definitief naar het schoolexamen verhuisde en meetkunde een vast onderdeel werd van het centraal examen? Dat wil niet zeggen dat er niets gebeurt in het vmbo. Iedereen die les geeft in de beroepsgerichte leerwegen weet dat er momenteel hard gewerkt wordt aan de vernieuwing van de beroepsgerichte programma's. Het lijkt een kwestie van tijd voor ook de vernieuwing van het curriculum van de algemene vakken in het vmbo aan de orde komt. Landelijk trekt het rapport van de commissie Schnabel nogal wat aandacht. Heeft wiskunde als apart vak in de beroepsgerichte leerwegen nog bestaansrecht of gaat het vak straks op in leerdomeinen? Recent gooide ook het inspectierapport *De Staat van het Onderwijs* met daarin kritische opmerkingen over ongelijke kansen en doorstroommogelijkheden, een steen in de onderwijsvijver. Het roept de vraag op welke veranderingen in het wiskundeprogramma van het vmbo-gt wenselijk en mogelijk zijn om doorstroom naar de havo succesvol te laten zijn. Docenten in het vmbo zitten ondertussen niet stil. Er is door hen in de afgelopen jaren veel tijd en energie geïnvesteerd in het rekenonderwijs maar ook zijn docenten enthousiast aan de gang gegaan met digitaal onderwijs. Langzaam maar zeker komt er ook op dit gebied een aanbod voor vmbo leerlingen. Een aantal docenten maakt zich druk over de digitale examens. Voldoen zij wel aan de eisen die je aan een examen mag stellen? Weer anderen hebben het initiatief genomen de vmbo/onderbouw-conferenties die in het verleden door APS werden georganiseerd, nieuw leven in te blazen. Dat resulteerde afgelopen januari in een succesvolle eerste conferentie. Bij zoveel lopende en nieuwe ontwikkelingen past een actieve werkgroep vmbo die het bestuur van de NVvW informeert en adviseert maar ook zelf actief is en initiatieven neemt. De werkgroep vmbo heeft zich dan ook vernieuwd en is meer dan ooit een werkgroep voor en door vmbo-docenten. Momenteel is de werkgroep bezig met het organiseren van de tweede vmbo/onderbouw conferentie die zal plaatsvinden op 26 januari 2017. Verder organiseerde de werkgroep, in samenwerking met het CvTE, op 24 juni in Utrecht examenbesprekingen voor vmbo-docenten over de digitale examens van dit schooljaar. De werkgroep werkt mee aan een gezamenlijke publicatie over rekenen van de NVORWO, NVvW en SLO. Verder probeert de werkgroep *Euclides* aantrekkelijker te maken voor vmbo-docenten door

het plaatsen van artikelen en werkbladen gericht op het vmbo. Is dit wat vmbo-docenten die lid zijn van de NVvW van ons verwachten? Dat hopen we natuurlijk wel maar om daar een beter beeld van te krijgen ontvangen de tweede-graads docenten die lid zijn van de NVvW aan het begin van het nieuwe schooljaar een uitnodiging om een enquête in te vullen. De vragen in de enquête gaan over wat je verwacht van de werkgroep vmbo en welke keuzes de werkgroep volgens jou zou moeten maken. Uiteraard vraagt de enquête ook wat je zelf wilt bijdragen. Kun je daar niet op wachten en wil je nu al actief meewerken dan kun je contact opnemen met de secretaris van de werkgroep, Ebrina Smallegange (e-mailadres: e.smallegange@nvvw.nl).

Over de auteur

Ruud Jongeling is wiskundeleraar bij het Da Vinci College in Roosendaal, een school voor de beroepsgerichte leerwegen in het vmbo en het praktijkonderwijs. Sinds februari van dit jaar is hij voorzitter van de werkgroep vmbo van de NVvW. E-mailadres: rj.jongeling@kpnmail.nl

MEDEDELING

NATIONALE WISKUNDE DAGEN

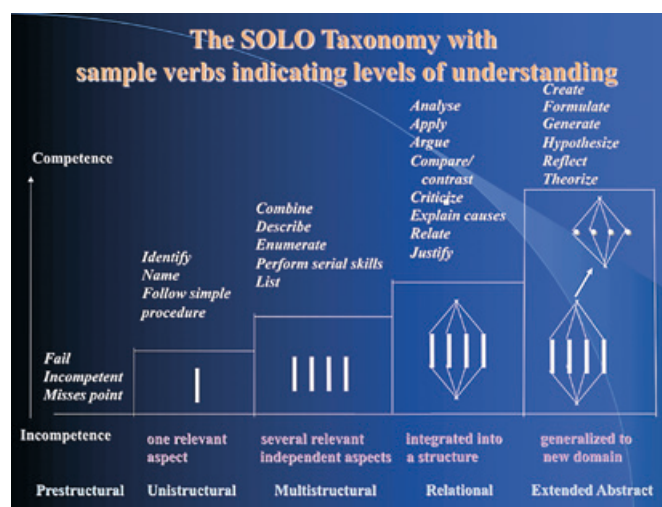


Op vrijdag 3 en zaterdag 4 februari 2017 worden de 23e Nationale Wiskunde Dagen gehouden. Als wiskundeleraar moet je van tijd tot tijd nieuwe ideeën op kunnen doen en creatief en actief met je vak bezig zijn. Dat kan door te luisteren naar een goed verhaal, door actief mee te doen in werkgroepen en door met collega's van gedachten te wisselen. De NWD biedt die gelegenheid en is bedoeld voor alle wiskundelaren die les geven aan leerlingen van 12 tot 18 jaar van ieder schooltype.

Kosten per persoon: € 405,00 bij overnachting op een tweepersoonskamer en € 440,00 bij overnachting op een eenpersoonskamer. Begin september wordt de programma-folder naar de scholen gestuurd. U kunt zich alleen online via de website inschrijven voor de NWD. De inschrijving wordt de tweede helft van september 2016 geopend.

Meer informatie over de NWD kunt u vinden op www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen
Inlichtingen: Saskia Klaasing, telefoon 030 253 98 18.
E-mailadres: nwd@uu.nl

Sinds begin vorig jaar ben ik docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek houd ik u op de hoogte van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.



figuur 1 SOLO taxonomie

De meeste toetsen in de bovenbouw bestaan uit één grote contextrijke opgave, waarbij de leesvaardigheid erg belangrijk is. De beoordeling van de toets (onvoldoende, voldoende, goed of zeer goed) wordt bepaald aan de hand van de zogeheten SOLO-taxonomie.^[1] Ik ben geen expert, maar ik zal u uitleggen hoe deze taxonomie in de praktijk door onze sectie wordt geïnterpreteerd. Dat doe ik aan de hand van figuur 1 en een voorbeeldopgave. Er zijn overigens ook toetsen (bijvoorbeeld over algebra en calculus) die niet bestaan uit één grote opgave, maar 'gewoon' uit meerdere kleine sommetjes, van verschillende moeilijkheidsgraden.

In een toets over het onderwerp niet-rechthoekige driehoeken krijgen leerlingen een verhaaltje over een man die een tuin heeft, die voorzien moet worden van gras en een aantal leidingen. Een schematische tekening van de tuin is gegeven, inclusief de afmetingen van een aantal zijdes en hoeken, plus de prijs van gras en leidingen. De vraag is hoeveel de man in totaal zal uitgeven. De tuin is een onregelmatige veelhoek, met een klein, betonnen segment waar geen gras hoeft te komen. De bedoeling is dat leerlingen met de sinus- en cosinusregels voor zijdes en hoeken meerdere afmetingen berekenen en met de

sinusregel voor oppervlaktes (plus formules voor oppervlaktes van sectoren en segmenten) de totale oppervlakte vinden. Ten slotte kunnen ze met behulp van vermenigvuldigen en optellen de totale kosten bepalen. Alle benodigde formules worden overigens bijgeleverd op een formuleblad.

Het laagste niveau is *prestructural*: de leerling weet geen enkele juiste berekening uit te voeren en krijgt logischerwijs een onvoldoende. Bij *unistructural* weet de leerling een relevante vaardigheid te tonen, in dit geval bijvoorbeeld het correct toepassen van de sinus- of cosinusregel. Als een leerling meerdere vaardigheden toont noemen we dat *multistructural*. Afhankelijk van de jaargang leiden twee of drie vaardigheden én een poging tot het geven van een antwoord tot een voldoende. Het integreren van de vaardigheden in een structuur noemt men *relational* en resulteert in de beoordeling *goed*. In het genoemde voorbeeld moeten de berekende totale kosten correct zijn, eventueel op een kleine reken- of afrondfout na. Het hoogste niveau heet *extended abstract* en geeft de beoordeling *zeer goed*. De leerling heeft dan een nieuw aspect aan het probleem toegevoegd, bijvoorbeeld door een generalisatie of een aantal aannames. In de voorbeeldtoets moet men bijvoorbeeld rekening houden met het betonnen segment. (Strikt genomen, voldoet de toets daarmee niet helemaal aan de eisen, die stellen dat de vraagstelling een leerling niet mag voorschrijven wat voor de hoogste beoordeling precies moet worden gedaan.) Een leerling moet altijd aangeven wát precies berekend wordt en een berekening of andere toelichting is uiteraard vereist. Voor de beoordeling *goed* moeten de antwoorden gerelateerd worden aan de context (inclusief juiste eenheden) en moet de leerling duidelijk uitleggen welke strategie is gevolgd. Bij *zeer goed* wordt er extra gelet op de juiste wiskundige notatie en moeten aannames en andere beslissingen worden beargumenteerd. Meer weten? Ga naar www.tegenvoeters.nl of stuur een reactie naar rmeijerink@karamu.school.nz.

[1] Zie www.johnbiggs.com.au/academic/solo-taxonomy/

PLOFSOMMEN MET NEGATIEVE GETALLEN

Een klassieker: de plofsommen van het Rekenweb. Lonneke Boels laat zien dat, met name voor het schatten van de positie van negatieve kommagetallen op de getallenlijn, deze applet nog steeds van waarde is.



figuur 1 Uitleg op het startscherm



figuur 2 Instellingen voor het oefenen met kommagetallen



figuur 3 Plofsommen met negatieve getallen en zelf gekozen instellingen. Bij een gemiste ballon komt deze in de lucht te hangen zoals bovenin de figuur te zien is

Schatten van negatieve getallen op de getallenlijn vinden leerlingen in het begin lastig. Zodra het over negatieve kommagetallen gaat, blijkt dat zelfs nog lastiger, zelfs voor leerlingen in de bovenbouw van havo en vwo zoals ik in *Kleintje Didactiek* van nummer 6 van deze jaargang liet zien. Het spelletje plofsommen oefent juist deze vaardigheid. Het spel is er in allerlei varianten, waaronder een *game variant*. Het doel van het spel is de ballon zo nauwkeurig mogelijk te plaatsen op de getallenlijn. Vervolgens valt er een dartpijl naar beneden. Des te nauwkeuriger de schatting is des te hoger het aantal punten dat je scoort. Afhankelijk van de instellingen van de spelvariant stopt het spel als je drie fouten maakt (de pijl mist de ballon helemaal) of na een vast aantal beurten. Voor hele negatieve getallen is er al een standaardspel. Het is raadzaam om hiermee eerst te oefenen. Om negatieve kommagetallen te oefenen, gebruik ik de variant *zelf instellen*. Kies de getallenlijn niet te groot en gebruik hulpstreepjes. Bij één of twee cijfers achter de komma zal een aantal leerlingen ontdekken dat ze verkeerd om denken. Het getal $-2,3$ wordt dan bijvoorbeeld op de positie van $-1,7$ geplaatst. Het is een prima afwisseling van een les uit het boek over negatieve getallen en u behandelt zo stof die niet in de wiskundeboeken voorkomt.

Pluspunten

- het is een spelvorm en het gaat over een onderwerp dat aansluit op de stof van de middelbare school;

- je kunt het spel ook met twee spelers spelen (niet getest);
- je kunt het spel zo instellen dat het precies dat oefent wat de leerling lastig vindt;
- je kunt het spel zo instellen dat het precies aansluit op de stof uit het boek of dat het juist een stapje verder gaat dan de stof uit het boek;
- het is door de vele instellingsmogelijkheden geschikt voor zowel onder- als bovenbouw van vmbo, havo en vwo. De eenvoudigste varianten met hele getallen tot tien zijn te spelen vanaf groep 4 van de basisschool;
- wie redelijk goed kan schatten, kan zichzelf toch nog verbeteren doordat de behaalde score afhankelijk is van de nauwkeurigheid van de schatting;
- de schaal of getallen op de getallenlijn kan worden gevarieerd, zowel tussen spellen als in één spel.

Minpunten

- de installatie van *Java* kan complex zijn. Na elke *update* van mijn *browser*, werkt het spel een tijdje niet meer totdat ik *Java* weer heb bijgewerkt of geïnstalleerd. Voor elke browser moet je *Java* apart installeren;
- de game variant zou weer moeten werken maar op mijn computer geeft deze nog steeds problemen waardoor ik het niet meer kan spelen. Dit was een van de leukere en lastigste varianten omdat de getallenlijn dan steeds in schaal varieerde;
- op de iPad werkt het spel niet en op de Mac schijnt het alleen met oudere versies van *Java* te werken. (niet getest).

Eindoordeel: aanschaffen

Geschikt voor: basisschool groep 6, 7 en 8, vmbo onderbouw, havo en vwo klas 1 en 2

Kosten: gratis

Getest op: laptop met Internet Explorer 11.0.30

Makers: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Te vinden via www.rekenweb.nl of direct op www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00254/

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

NEDERLAND – DUITSLAND: ABC-FORMULE OF PQ-FORMULE

Ab van der Roest ziet een merkwaardig verschil in de manier waarop in Nederland en in Duitsland kwadratische vergelijkingen opgelost worden. En zo ontstaat er toch nog een beetje een Nederland – Duitsland deze zomer.

Bij Nederland – Duitsland denk je al snel aan een voetbalwedstrijd. Uitslag van te voren al bekend, want ‘we’ winnen zelden van Duitsland. We moeten op andere terreinen scoren. Misschien op het gebied van de wiskunde?

In Nederland zijn we helemaal vertrouwd met de *abc*-formule. Als een leerling een tweedegraads vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ moet oplossen grijpt hij, soms zonder nadenken, naar die bekende formule. Voor sommigen is het zo’n reflex, of misschien zo’n houvast, dat zelfs een vergelijking als $x^2 - 5x = 0$ ermee opgelost wordt.

Felix, een eerstejaars student uit Duitsland, studeert in Wageningen. Hij vroeg me of een tweedegraadsvergelijking ook met de *pq*-formule opgelost mocht worden. Dit was voor mij iets nieuws en er viel dus iets te leren. Hij legt me geduldig uit hoe die formule werkt. $x^2 + px + q = 0$ is de vergelijking waar de formule voor geldt.

Oplossingen zijn $x_{1,2} = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 - q}$. Ziet er

moeilijker uit dan de ons bekende *abc*-formule. Een klein beetje herschrijven geeft een iets vriendelijker formule:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} \text{ en die formule wordt wel}$$

herkenbaar. Controle met een eenvoudige vergelijking, bijvoorbeeld $x^2 - 4x - 5 = 0$, laat zien dat de goede oplossingen gevonden worden. Het bewijs met kwadraat afsplitsen is niet moeilijk. Je kunt natuurlijk ook $a = 1$, $b = p$ en $c = q$ invullen in de *abc*-formule, er vanuit gaande dat die wel bewezen is.

Waarom wordt op een school in Duitsland de *pq*-formule geleerd en bij ons de *abc*-formule? Het bewijs, met behulp van kwadraat afsplitsen, van de *pq*-formule vind ik eenvoudiger dan het bewijs van de *abc*-formule. Maar is de toepasbaarheid dat ook? Neem bijvoorbeeld de vergelijking $2x^2 - 2x - 1 = 0$, dan is het bij ons rechtstreeks invullen. Een probleem is het ‘mooi schrijven’: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

en de deling $\frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Bij de *pq*-formule

is het invullen niet lastiger en je hoeft geen deling uit te

voeren: $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ en $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$. Het

mooi schrijven is hier eenvoudiger, namelijk $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Je moet dan wel even de $(\frac{1}{2}p)^2$ in de gaten houden,

want de noemer is een kwadraat.

Ook bij een iets ingewikkelder vergelijking $7x^2 - 6x - 3 = 0$ is de *pq*-formule niet lastiger. Eerst herleiden tot

$$x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{3}{7} = 0 \text{ en dan invullen geeft}$$

$$x_{1,2} = \frac{6}{14} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{36}{49} + \frac{12}{7}} = \frac{3}{7} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{36 + 84}{49}} =$$

$$\frac{3}{7} \pm \frac{1}{14}\sqrt{120} = \frac{3}{7} \pm \frac{1}{7}\sqrt{30}.$$

Waarom dan toch de *abc*-formule in Nederland?

Misschien omdat die formule makkelijker te programmeren is. Om benaderingen van de oplossingen te vinden, voldoet de *abc*-formule prima en is die makkelijker dan de *pq*-formule. Wanneer exacte antwoorden gevraagd worden is de *pq*-formule makkelijker. Zijn de Duitsers dan toch exacter dan de Nederlanders? Voorlopig is mijn conclusie dat we het ook hier verliezen van de Duitsers. Ik hoop dat ik iets mis en dat iemand me op een andere conclusie laat uitkomen.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Marjanne Klom, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
– leden: € 80,00
– leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
– studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
– leden van de VVWL of het KWG: € 60,00
Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

2016

vr/za
26/8
27/8

AMSTERDAM

Vakantiecursus wiskunde, zie www.platformwiskunde.nl
Organisatie Platform Wiskunde Nederland

vr/za
2/9
3/9

EINDHOVEN

Vakantiecursus wiskunde, zie www.platformwiskunde.nl
Organisatie Platform Wiskunde Nederland

za
17/9

UTRECHT

Symposium Geschiedenis Wiskundeonderwijs
Organisatie Werkgroep WGRWO van de NVvW

za
5/11

VEENENDAAL

Jaarvergadering/Studiedag NVvW
Organisatie NVvW

vr
11/11

EINDHOVEN

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr
18/11

LANDELIJK

Wiskunde B-dag / voorronde A-lympiade
Organisatie Freudenthal Instituut

2017

23/1
t/m
2/2

LANDELIJK

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr/za
3/2
4/2

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut

wo
8/2

LANDELIJK

OnderbouwWiskundeDag
Organisatie Freudenthal instituut

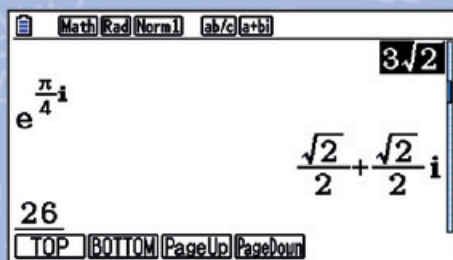
Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 92

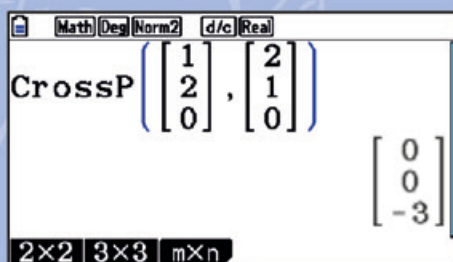
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	6 september 2016	20 juni 2016
2	1 november 2016	29 augustus 2016
3	15 december 2016	17 oktober 2016
4	31 januari 2017	21 november 2016
5	21 maart 2017	9 januari 2017
6	9 mei 2017	6 maart 2017
7	27 juni 2017	1 mei 2017

Tien redenen om voor de CASIO fx-CG20 te kiezen...

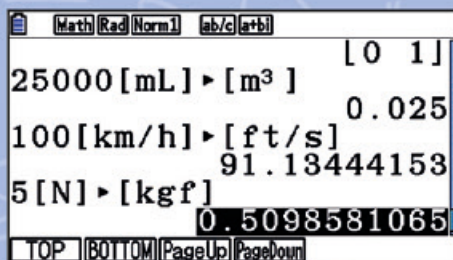
10. Extra mogelijkheden in het rekenscherm:



Exacte weergave en omrekenen getalstelsels.



Vectorrekenen.



Omzetten van eenheden.



In de CASIO fx-CG20 Leerlingentest werden topmerken grafische rekenmachines met elkaar vergeleken. De leerlingen waren er snel uit: de CASIO fx-CG20 is uniek in prestaties en daarmee superieur. In deze en in de volgende uitgaven van Euclides publiceren wij de 10 voordelen die het meest genoemd werden in de CASIO fx-CG20 Leelingentest. Kijk, vergelijk en oordeel zelf.



De CASIO fx-CG20 is CvTE goedgekeurd voor het centraal examen 2016 en daarna.

Uw leerlingen kiezen voor de CASIO fx-CG20

Méer informatie of workshop aanvragen? Bel +31 (0)20 545 10 70 – e-mail: educatie@casio.nl – www.casio-educatie.nl

GETAL & RUIMTE

NEEMT JE MEE

Nieuw

vanaf schooljaar
2015-2016:

Leerwerkboeken bij
vmbo-bk tot en met
leerjaar 2

De complete 10^e editie
vmbo, inclusief
klas 4

Vraag
nu een
beoordelings-
exemplaar
aan!

GETAL & RUIMTE: BEWEZEN KWALITEIT

Getal & Ruimte is de grootste
wiskundemethode voor het
voortgezet onderwijs. Al bijna
50 jaar toonaangevend!

Ga voor meer informatie naar
www.getalenruimte.noordhoff.nl!



GETAL & RUIMTE:

- staat midden in de belevingswereld van de leerling;
- biedt een heldere didactische structuur;
- biedt gevarieerde, uitdagende en motiverende opgaven;
- biedt RTTI-gecertificeerde toetsen;
- is afgestemd op de tussendoelen;
- biedt een optimale doorstroom naar de bovenbouw en het examen.