

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

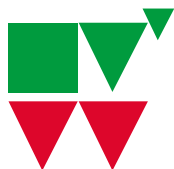
Onderwijs voor de toekomst – maar wat kunnen we leren van het verleden

Op hoekenjacht in het Verre Oosten – een olympiadeopgave

Vissen en Erwtten – een verslag van de OnderbouwWiskundeDag

Uitgerekend? – ons bestuur beschrijft de stand van zaken en noemt suggesties voor de toekomst

NR.2



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 91 | NOVEMBER 2015

EUCLIDES JAARGANG 91 NR 2

IN DIT NUMMER

ONDERWIJS VOOR DE TOEKOMST

JENNEKE KRÜGER

4

WIS EN WAARACHTIG

7

GETUIGEN

DANNY BECKERS

8

OP HOEKENJACHT IN HET VERRE OOSTEN

MIKE DAAS

10



DE MATHEKALENDER

HENNIE TER MORSCHÉ

13

GECIJFERDHEID

KEES HOOGLAND

15

MET DANK AAN HET WERELDWISKUNDEFONDS

JULIËTTE FEITSMA

17

EEN UITDAGING

ROB BOSCH

19

UITDAGENDE PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

21



KLEINTJE DIDACTIEK

LONNEKE BOELS

22

TEGENVOETER

ROLAND MEIJERINK

24

VISSSEN EN ERWTEN

MONICA WIJERS

25

[illegible]

VANUIT DE OUDE DOOS

TON LECLUSE

28

Coverfoto: Allen Lambert Galleria,
Toronto, Canada.

Fotograaf: Job van de Groep.

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

VASTGEROEST
AB VAN DER ROEST

31

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL
LONNEKE BOELS

34

VERENIGINGSNIEUWS
UITGEREKEND?
NOTULEN VAN DE NVVW-JAARVERGADERING



35

RECREATIE

38

SERVICEPAGINA

42

Kort vooraf

Op 7 september jongstleden was het dertig jaar geleden dat György Pólya (George voor intimi) op 97-jarige leeftijd overleed. Een student aan de lerarenopleiding vertelde me dit tijdens het vak Probleem-oplossen. Hierbij maken ze uitgebreid kennis met het stappenplan van Pólya en de daarbij behorende heuristieken, voor het eerst gepubliceerd in zijn boek *How to solve it* in 1945. Deze student vertelde ook dat hij genoten had van een film over een college van Pólya zelf. Hierin laat hij zijn studenten nadenken over de vraag in hoeveel delen de ruimte gesplitst wordt door vijf vlakken.^[1] Nog steeds actueel want het is een denkactiviteit. En met een beetje fantasie staan er in dit nummer wel tien bijdragen waar op de een of andere manier het stappenplan van Pólya te herkennen is. Bijvoorbeeld het *Kleintje didaktiek* van Lonneke Boels, stap 1: het probleem begrijpen. Of zoals Mike Daas bij het oplossen van een olympiadeprobleem letterlijk schrijft: Misschien is het dus een goede stap om te gaan kijken naar het andere deel van wat we moeten bewijzen. Dat is stap 2: maak een plan. Stap 3: voer het plan uit. Zien we terug bij Ab van der Roest: 'We leenden een stukje papier en een pen van het *Mathematikum*.' Tot slot vraagt Monica Wijers zich af óf de leerlingen tijdens de OnderbouwWiskunde-Dag wel terugblikken op hun werk. Stap 4: kijk terug op zowel antwoord als proces. Pólya heeft het dus verdiend om even stil te blijven staan bij zijn sterfdag. Bijvoorbeeld door naar zijn college te kijken. *Teaching is not a science, it is an art* zegt hij in de inleiding. Hoe lang geleden is het dat iemand u een kunstenaar noemde?

Tom Goris

[1] Te vinden op YouTube met de titel *Polya explains the problem solving technique*.

ONDERWIJS VOOR DE TOEKOMST

Jenneke Krüger

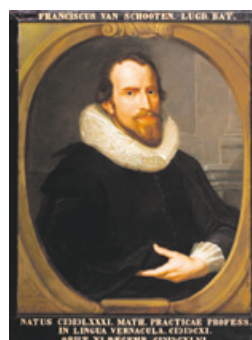
KIJK EENS ACHTEROM!

In de vorige *Euclides* zijn de laatste centrale examens uitgebreid besproken. Maar hebben deze examens altijd de status gehad die ze nu hebben? Waar komen ze vandaan en vooral ook: waarom? Jenneke Krüger beschrijft de rol van de docenten in de examinering door de eeuwen heen.

Een vooruitblik op 2020: wat kunnen we dan vieren? Antwoord: anderhalve eeuw centrale eindexamens en een eeuw schoolexamens! In 1870 kreeg de HBS centrale examens en bijbehorende examenprogramma's. Wiskunde was een van de meest omvangrijke examenvakken. In 2020 is wiskunde, als er niet snel iets verandert, zelfs een kernvak; zonder wiskunde geen diploma havo of vwo. Wiskundeleraars kunnen dus tevreden zijn over hun belangrijke positie, houden zo! Of zou een cynicus opmerken dat wiskunde anno 2020 te belangrijk gevonden wordt om aan docenten over te laten?

'Voor alle vakken met een centraal eindexamen geldt, dat circa 60% – 70% in het CE getoetst wordt, het overige deel wordt aan de leraren toevertrouwd om in het SE te toetsen. Voor wiskunde B echter zijn alle (sub)domeinen toetsbaar in het CE. Voor wiskunde worden de gedetailleerde examensyllabi in een voorgeschreven format verwerkt door de auteurs van de paar wiskundemethodes die er nog zijn. Vervolgens bereiden wiskundeleraars leerlingen voor op de centrale examens door uitvoering van de lesstof in de boeken. Het schoolexamen is zo onbelangrijk dat slechts aan één criterium voldaan hoeft te worden: de cijfers van het SE moeten dicht bij die van het CE liggen...'

De conclusie van deze cynicus: wiskundeleraars zijn brave uitvoerders van wat door anderen bedacht is. Dat was ook wel eens anders. In het wiskundeonderwijs is examinering waarschijnlijk altijd belangrijk geweest, maar centrale examens bepaald niet. Hier volgen beknopte enkele voorbeelden uit het Nederlandse wiskundeonderwijs, vanaf 1600, met vooral aandacht voor examinering en de rol van docenten. Deze onderwijsvernieuwingen vanaf 1600 tot midden negentiende eeuw hadden als belangrijke drijfveer het tekort aan vakmensen met een moderne opleiding in wiskunde. Rond 1600 ging het om landmeters en militaire ingenieurs, in de achttiende eeuw was in veel meer vakgebieden gebrek aan mensen die een goede kennis van wiskunde hadden en die kennis konden toepassen in hun werk en ook in de negentiende eeuw stagneerden de industrie en economie door gebrek aan mensen met een moderne opleiding in natuurwe-



figuur 1 Frans van Schooten sr., Duitse Mathematique 1611-1645

tenschappen, toepasbare wiskunde en moderne vreemde talen. Alle besproken opleidingen waren minstens 50 jaar succesvol.

Oplossingen: een vernieuwend curriculum en goede docenten

In januari 1600 bekrachtigden de curatoren van de universiteit Leiden en de legeraanvoerder prins Maurits hun overeenkomst: de universiteit Leiden zou een Nederlandstalige, dus niet-universitaire opleiding voor militair ingenieur onder haar hoede nemen, de Duitse Mathematique. Simon Stevin schreef de *Instructie*, het eerste Nederlandstalige leerplan, waarin hij onder meer het doel en de inhoud van de opleiding omschreef, evenals werkvormen, lesindeling en te gebruiken leermaterialen. Een militair ingenieur beheerste ook landmeten, een belangrijk onderdeel van het onderwijsprogramma. Over examens staat niets in dit gedetailleerde leerplan. Voor de uitvoering van het programma werd met zorg een uitstekende docent uitgekozen. In 1600 was dat de bekende rekenmeester Ludolf van Ceulen, samen met de landmeter Simon van Merwen. Na hun overlijden in 1610 nam de assistent van Van Ceulen, de onbekende landmeter Frans van Schooten, zie figuur 1, als invaller zonder vaste aanstelling de theoriecolleges en het veldwerk over. Hij had Duitse Mathematique gestuurd en Van Ceulen geassisteerd, ook werkte hij soms voor het leger. Na vier jaar was duidelijk dat hij uitstekende kennis had van de theorie en de praktijk en dat de studenten zijn colleges waardeerden; hij kreeg de benoeming tot professor Duitse Mathematique. Het college-dictaat uit circa 1622 dat van hem bewaard is gebleven,

toont een zeer doordachte structuur, per onderwerp een opbouw van eenvoudig naar complex, een afwisseling van 'kale' problemen en contexten en extra onderwerpen voor studenten die wilden verbreden of verdiepen. Al in augustus 1600 werd het, mede op verzoek van studenten, mogelijk een examen af te leggen voor landmeter, binnen de opleiding Duytsche Mathematique te vergelijken met ons huidige bachelor examen. Het werd afgenomen door de eigen hoogleraar. In 1756 was het startjaar van de Fundatie van Renswoude, bestaande uit drie afzonderlijke Fundaties, in Delft, Den Haag en Utrecht. De doelstelling van de Fundatie was een excellente beroepsopleiding bieden aan kansarme begaafde jongens uit het kinderkuis waaraan elk van de drie Fundaties verbonden was. De financiering kwam van een van de rijkste vrouwen van de Republiek, Maria Duyst van Voorhout. Zij benoemde de drie kinderkuisen tot haar enige erfgenaam, op voorwaarde dat ze het kapitaal, een half miljoen per kinderkuis, zouden besteden aan een aparte opvoeding en onderwijs van getalenteerde weesjongens. Dat onderwijs moest opleiden tot technische beroepen, zoals wiskundige, waterbouw, schilderkunst, beeldhouwen, en dergelijke. De regenten legden veel afspraken vast over vakken, organisatie, structuur van het onderwijs, verantwoordelijkheden, pedagogie, et cetera, maar niets over de inhoud van het onderwijs. Wel werd vastgelegd dat studenten regelmatig een voortgangsexamen aflegden. De wiskundedocent had een centrale positie binnen de opleiding. De eerste wiskundedocent in Utrecht was Laurens Praalder, zie figuur 2. In tegenstelling tot zijn collega's had Laurens Praalder geen academische opleiding, maar hij had een uitstekende reputatie als wiskundeleraar, die ook landmeetkunde en navigatie onderwees en adviseerde over praktische zaken, zoals molenbouw. Vanaf 1751 was hij mathematicus en examiner van het Zeemanscollege in Rotterdam, van 1761 tot 1792 verzorgde hij het onderwijs aan de Fundatie in Utrecht. Hij bepaalde zelf de inhoud van zijn lesprogramma en schreef zijn eigen lesmateriaal. Er was echter wel frequent contact met de regenten en elke student kreeg regelmatig een voortgangstoets in het bijzijn van de regenten. Praalder gaf aan wanneer een student aan de volgende toets toe was. Er was geen sprake van een eindexamen, als de student de basistheorie bijna achter de rug had kozen de regenten een geschikt beroep, geadviseerd door Praalder en met inbreng van de student. Er werd een praktijkplaats gezocht, vaak door Praalder, die in deze fase het contact met de praktijkopleiders onderhield. Gedurende de hele opleiding ging het theorie-onderwijs door. De student kreeg eervol ontslag zodra hij na afronding van zijn opleiding zicht had op een zelfstandige positie. In 1863 lukte het minister J.R. Thorbecke de eerste Nederlandse wetgeving voor het middelbaar onderwijs door het parlement te krijgen. De vijfjarige HBS was een belangrijk onderdeel van die wet. De HBS had als doelstellingen algemene vorming, voorbereiding voor



figuur 2 Laurens Praalder, Fundatie van Renswoude 1761-1792



figuur 3 P.M.V. van de Rivière, wiskundeleraar Gemeente HBS Dordrecht 1865-1894

hogere posities in industrie en handel en voorbereiding op de bestaande ingenieursopleiding. De wiskundeleraars moesten een opleiding op universitair of ingenieursniveau hebben om in de hogere leerjaren les te mogen geven. Thorbecke zag wiskunde op de HBS vooral als ondersteunend voor natuurkunde. In de wet- en regelgeving was opgenomen welke vakken gegeven moesten worden (voor de Rijks HBS). Van deze 18 vakken werden er 16 in het eindexamen getoetst. Wiskunde en natuurwetenschappen hadden samen ongeveer een derde van de lestijd, evenals talen en literatuur. Over de inhoud van de vakken werd in 1863 niets vastgelegd, maar Thorbecke gaf wel een (zwaarwegend) advies over de inhoud van wiskunde. Leerlingen moesten een keer per jaar gelegenheid krijgen om aan het eindexamen deel te nemen. De HBS was vrijwel meteen populairder dan verwacht; vanaf 1864 werd in veel gemeenten een vijfjarige HBS opgericht. Er waren dus veel hoog opgeleide leraren wiskunde nodig, zie tabel 1.

	HBS	Leerlingen	Wiskundeleraars (geschat)
1865	16	1187	30
1875	32	2604	70
1885	36	2991	80
1895	40	4264	90
1905	45	7178	100

tabel 1

Het verwachte tekort aan bevoegde leraren wiskunde viel mee, niet alleen afgestudeerde academici, maar ook betrekkelijk veel ingenieurs gingen lesgeven aan een HBS, zie figuur 3. Het aantal leerlingen per school groeide, vooral na 1895. In de eerste periode deden de meeste leerlingen geen eindexamen, maar gingen na enkele jaren of uiterlijk na het vierde leerjaar van school, zonder diploma. Het ging in die eerste periode vooral om het onderwijs en minder om 'het papiertje'. Wiskundeleraars bepaalden zelf het lesprogramma en de te gebruiken boeken. Voor de onderwerpen en de verdeling over de leerjaren baseerden ze zich op ervaringen in het onderwijs, op Franse scholen, op tweede afdelingen van gymnasia en soms op militaire vooropleidingen. Daarnaast richtten wiskundeleraars zich op de eisen van de vervolgoopleidingen, het propedeutisch examen van

de Polytechnische School en de toelatingsexamens van de KMA en andere technisch gerichte opleidingen. Ook hun eigen ideeën over didactiek of over het belang van bepaalde wiskunde onderwerpen speelden een rol. Er was al snel een rijke keus aan boeken, meestal geschreven door wiskundeleraren, soms vertalingen van Franse of Duitse tekstboeken. Een examenprogramma was er die eerste jaren niet, er was dus ook geen standaardprogramma. Zowel Thorbecke als D.J. Steyn Parvé, inspecteur voor het middelbaar onderwijs, waren van mening dat scholen de vrijheid moesten hebben om zich te kunnen aanpassen aan regionale omstandigheden. Elke HBS bood echter wel minimaal de 16 vakken aan waarover eindexamen afgenomen werd.

Eindexamen

Het eindexamen, schriftelijk en mondeling, werd volgens de wet afgenomen door provinciale examencommissies, die grotendeels samengesteld waren uit leraren van de regionale scholen. Het hele examen nam een aantal dagen in beslag, in de stad waar zo'n commissie zetelde. Elke commissie stelde zelf de examenvragen en het examenrooster vast en bepaalde eventueel welke vakken alleen mondeling of alleen schriftelijk werden geëxamineerd. Voor de kandidaten was deze combinatie van schriftelijk en mondeling, vaak niet in hun woonplaats, behoorlijk zwaar. Voor de commissies was de organisatie complex. Bovendien was er nogal wat verschil tussen de examencommissies wat betreft de uitvoering, waardoor ongelijkheid voor de kandidaten ontstond. In 1870 voerde minister Fock een landelijk centraal schriftelijk examen in, met bijbehorende examenprogramma's, overigens tegen de zin van het Kamerlid Thorbecke. Het schriftelijk examen werd op school afgenomen, de mondelinge examens werden nog steeds door de provinciale commissies afgenomen. Het examenprogramma voor wiskunde was omvangrijker dan het advies van Thorbecke uit 1862. Algebra, meetkunde en trigonometrie werden uitgebreid en er kwam een facultatief onderwerp bij: projectieve meetkunde. Het schriftelijk examen wiskunde bestond uit vier onderdelen van drie uur: meetkunde, stekunde, trigonometrie en beschrijvende meetkunde. Over het algemeen waren de examenresultaten voor wiskunde bevredigend, maar wiskunde legde een groot beslag op de studie- en examentijd.

Binnen enkele jaren waren er veel klachten over de negatieve invloed die het eindexamen op het onderwijs uitoefende: versnippering, hoge werkdruk voor leerlingen en te weinig aandacht voor onderwerpen buiten het examenprogramma. Er kwamen voorstellen tot wijziging van onder meer de onderwijsinspectie, leraren, examencommissies en leden van de Tweede Kamer. Betrekkelijk vaak werden voorgesteld: vermindering van het aantal te examineren vakken, vervanging van het mondeling regionaal examen door een schoolexamen, afschaffen van de literatuurexamens en vermindering van de omvang van

het wiskundeprogramma, onder andere door het facultatief maken van beschrijvende meetkunde. Pas in 1920 kwam er een schoolexamen in plaats van het regionale examen en vervielen onder andere mechanica en kosmografie als examenonderdeel.

Er was waardering voor het onderwijsaanbod van de HBS, vooral wat betreft de natuurwetenschappen met wiskunde en de moderne vreemde talen. Een diploma op basis van een afsluitend examen zal hebben bijgedragen aan de brede maatschappelijke waardering van de HBS. Echter, aanvankelijk gaf een HBS-diploma wel vrijstelling van het propedeutisch examen van de Polytechnische School in Delft, maar had het voor geen enkele andere opleiding onmiddellijk voordeel. Dat was ongetwijfeld een reden waarom betrekkelijk weinig leerlingen aan het eindexamen deel namen. Dat veranderde geleidelijk, het HBS-diploma kreeg meer status en daarmee werd het eindexamen nog weer belangrijker en de druk op leerlingen en docenten hoger. Dat is onder meer zichtbaar rond 1900 in de tekstboeken. Daaruit verdwenen onderwerpen zoals combinatoriek, complexe getallen, et cetera. omdat daar volgens de auteurs gezien de omvang en zwaarte van het examenprogramma geen tijd voor was. Het enorme belang dat nu aan het schooldiploma gekoppeld is, de sterk genomen nadruk op individuele centrale examinering en het wantrouwen van parlement en regering ten opzichte van leraren veroorzaken gedurende een groot deel van het jaar een staat van permanente overspanning, waarin plaats is voor weinig anders dan Het Examen. Voor het kernvak wiskunde geldt dat nog sterker dan voor andere vakken. Daartegenover staat de razendsnelle ontwikkeling van digitale technologie. Die maakt niet alleen de voortdurende discussie over de grafische rekenmachine achterhaald, maar zorgt er ook voor dat een individuele centrale examinering binnenkort volstrekt onmogelijk is, al zullen CvTE en CITO dat niet snel toegeven. Dit systeem met een centraal eindexamen bestaat binnenkort 150 jaar. Tijd voor een andere afsluiting van de schoolloopbaan, met meer invloed van goed opgeleide docenten wiskunde!

Noot

Dit artikel is gebaseerd op het proefschrift van de auteur: Krüger, J. (2014). *Actoren en factoren achter het wiskundecurriculum sinds 1600*. Universiteit Utrecht. <http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/301858>

Over de auteur

Jenneke Krüger werkte in het voortgezet onderwijs als docent natuurwetenschappen en wiskunde, onder meer in bovenbouw havo en vwo. Ze was vervolgens tien jaar leerplanontwikkelaar bij SLO en promoveerde in 2014 op een onderwerp uit de geschiedenis van het wiskunde-onderwijs. Ze houdt zich nu freelance bezig met onderwijs in natuurwetenschap en wiskunde en de geschiedenis daarvan. E-mailadres: jenneke.kruger@gmail.com

Ionica Smeets hoogleraar

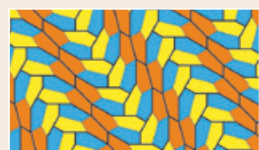


Voormalig 'wiskundemeisje' Ionica Smeets is begin juli benoemd tot deeltijd hoogleraar *Science Communication* aan de Universiteit Leiden. Ze gaat de komende vijf jaar onderzoek doen naar wetenschapscommunicatie, studenten doceren over het vak

en hen enthousiasmeren voor een carrière in het vakgebied. Bron: *de Volkskrant*

Kierloos tegelen met de vijfhoek

Met een regelmatige, vijfhoekige tegel kun je geen vloer betegelen zonder dat er gaten of kieren overblijven. Maar er bestaan scheve vijfhoeken waarmee dat wel mogelijk is. Tussen 1918 en 1985 werden veertien van zulke tegels gevonden, en toen bleef het heel lang stil. Tot vorige week. Toen presenteerden Casey Mann, Jennifer McLeod and David Von Derau van de Universiteit van Washington Bothell, de vijftiende vijfhoekbetegeling.



De nieuwe vijfhoekbetegeling bestaat uit een eindeloze herhaling van identieke groepjes van drie tegels. Elk groepje bevat drie vijfhoeken, waarbij een van

de drie het spiegelbeeld van de andere twee is (je kunt een scheve tegel 'spiegelen' door hem ondersteboven neer te leggen, met de bovenkant op de vloer). Voor de puristen is het een beetje jammer dat deze nieuwe vijfhoekbetegeling door een computer gevonden is. Bron: [Kennislink.nl](http://kennislink.nl)

Cum laude diploma's in het vo

Eind juni heeft de ministerraad ingestemd met het voorstel van staatssecretaris Dekker dat middelbare scholieren op vmbo TL, havo en vwo vanaf dit schooljaar cum laude kunnen slagen. Zij moeten dan wel slagen met een gemiddelde van minimaal een 8,0. Dekker: 'Voor leerlingen is het ervaren van succes en beloning voor prestaties een enorme stimulans om zich te blijven ontwikkelen. Een derde van de Nederlandse leerlingen in het voortgezet onderwijs vindt dat ze te weinig worden uitgedaagd om het beter te doen. Het iudicium cum laude stimuleert uitblinkers om net dat stapje extra te zetten om tot die bijzondere prestatie te komen.'

Bron: www.primaonderwijs.nl/vo

X + Y



Vanaf eind augustus was de film $x + y$ in Nederland te zien in de bioscopen. Een hartverwarmende film over de licht autistische tiener Nathan, die met zijn talent voor wiskunde een plek weet te veroveren in de Britse ploeg voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Meer informatie over $x + y$ en de trailer is te vinden op <http://imaginefilm.nl/verwacht/26-catalogus/718-x-y>. Bron: <http://wiskundeolympiade.nl>

Onderwijsraad: mavo moet weer terugkomen

De positie van het vmbo in het Nederlandse onderwijsstelsel dreigt te worden ondermijnd. Het afnemende aantal leerlingen zet de organiseerbaarheid van goed onderwijs onder druk en er zijn zorgen over de aantrekkelijkheid van het vmbo. Daarom moet de mavo weer terugkomen. Daarvoor pleit de Onderwijsraad in een advies dat eind juni is aangeboden aan de Tweede Kamer. Het huidige vmbo, met vier verschillende niveaus, is te onoverzichtelijk, onduidelijk en heeft een negatief imago. De raad pleit ervoor het vmbo weer op te splitsen in twee opleidingen: mavo en vakmanschap. Het advies van de Onderwijsraad volgt op een voorstel van de MBO Raad van eind april, waarin werd gepleit voor een samenvoeging van de twee hoogste vmbo-niveaus met de havo. Bron: www.primaonderwijs.nl/vo

Drie bronzen medailles voor Nederlands Olympiade team



Het Nederlands team heeft tijdens de Internationale Wiskunde Olympiade in Thailand drie bronzen medailles behaald. Eva van Ammers, Bob Zwetsloot en Yuhui Cheng (v.l.n.r.) behaalden alle drie een bronzen medaille. Zij wisten twee van de zes pittige wiskundeopgaven op te lossen. Tim Brouwer loste

één opgave op en behaalde daarmee een eervolle vermelding. Eva van Ammers: 'Na zo'n 200 uur voorbereiding afgelopen maand ben ik superblij dat ik nu een medaille binnen heb!' Zie ook het artikel *Op hoekenjacht in het Verre Oosten* in deze *Euclides*.

Bron: <http://wiskundeolympiade.nl>

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



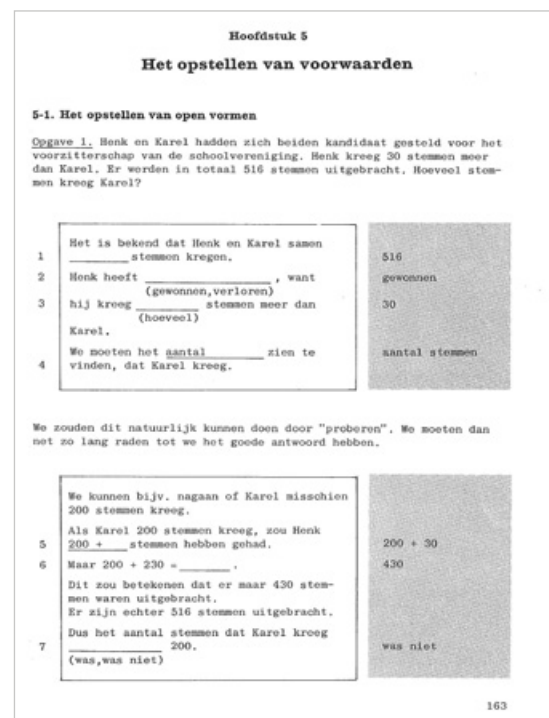
Van alle didactische experimenten die de jaren zestig en zeventig rijk waren, was de geprogrammeerde instructie één van de meest intrigerende. Geen van de andere pogingen combineerde zo fraai het ongebreidelde vooruitgangsgeloof, het (heden ten dage) onvoorstelbare vertrouwen in egaliteitsstreven, de democratiseringsprincipes, het Koude Oorlogsdenken en het doordringen van moderne technologie in de samenleving. Bovendien was het aantal geprogrammeerde cursussen dusdanig groot, en verdwenen ze begin jaren zeventig zó plots, dat men rustig van een hype kan spreken.

Het idee van de geprogrammeerde cursussen lifte mee op de successen die werden behaald met de automatische rekenautomaten die in opkomst waren. Eind jaren veertig en begin jaren vijftig werd geëxperimenteerd met zogenaamde automatische systemen met terugkoppeling. Tot de verbeelding sprekende voorbeelden waren de 'zelfstandig' hun weg zoekende robotjes van Norbert Wiener en Claude Shannon. Diverse pogingen om machines denkstappen te laten zetten werden ondernomen in verschillende onderzoeksprojecten die bekend waren onder de titel *cybernetica*.

Midden jaren vijftig werden er in psychologische instituten en binnen het *Office of Naval Research* in de Verenigde Staten al tests gedaan om met machines, mensen bepaalde handelingen te leren verrichten. De machines moesten het leerproces ondersteunen omdat zowel in het leger als in het onderwijs de aantallen leerlingen groeiden. Men zocht dus naar mogelijkheden om de tijd van de docent efficiënter in te zetten – in eerste instantie door met name toetswerk machinaal te verrichten, vervolgens ook door de leerstof gedoseerd aan te bieden. De machine bepaalde op basis van de reactie van de leerling wat de vervolgstap moest zijn; de docent kwam eraan te pas als de leerling vastliep. Voor psychologen waren deze projecten ook interessant omdat ze meer informatie leverden over wat 'leren' betekende en over wat 'denkprocessen' inhielden.

In 1961 waren er al 81 commercieel verkrijgbare methoden die het geprogrammeerde leren mogelijk moesten maken. Sommige maakten gebruik van een computer of een mechanisme; vele ook bestonden uit een veel eenvoudiger principe, zoals een boek dat in heel kleine stapjes bepaalde vaardigheden trainde en dat je verwees naar extra stof of je juist bladzijden liet overslaan, afhankelijk van de antwoorden van de lezer op specifieke vragen. In de westerse landen waren op datzelfde moment zo'n 160 onderzoeksprojecten bekend. Voor onderwijzers was het voordeel dat de zelfwerkzaamheid van de leerlingen hen tijd gaf om individuele leertrajecten te ondersteunen.

In het Nederlandse wiskundeonderwijs sloeg de hype iets later toe, maar waren er vanaf het begin van de



figuur 1 L. Bunt en H. Broekman, *Algebra. Een geprogrammeerde cursus deel F* (1969), pagina 163

jaren zestig ook experimenten gaande. Dit resulteerde in diverse cursussen voor tal van vakken en niveaus. Aan de Leidse universiteit werd studenten sociale wetenschappen in de jaren zestig bijvoorbeeld een geprogrammeerde cursus wiskunde voorgezet. In het voortgezet onderwijs bestond er midden jaren zestig een aantal geprogrammeerde cursussen voor de talen en voor wiskunde. De meest in het oog springende wiskundecursussen waren die van L. Bunt, die samen met H. Broekman een geprogrammeerde cursus uit Amerika bewerkte; en die van een groep auteurs rond F. Bouman, die zich met subsidie van de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs verenigde in de Werkgroep Geprogrammeerde Instructie. Beide auteursgroepen verzorgden een zesdelige serie boeken over algebra.

Beide methoden waren van het type dat uitsluitend gebruik maakte van een boek waarin men antwoorden op opdrachten zelf kon controleren en naar aanleiding van de resultaten verder kon werken, extra opdrachten kreeg, opdrachten opnieuw kon doen, of apart instructie kreeg van de docent. In figuur 1 kunt u zien hoe zo'n geprogrammeerde cursus eruit zag. De leerling werd bij de hand genomen en stapje voor stapje kon hij bepaalde problemen oplossen. De gekleurde vakken waren afgedekt met een strook papier en zodoende niet leesbaar voor de leerling. Die zag alleen de tekst met invulvakken, met daaronder soms aangegeven opties. Na het maken van de opdrachten controleerde hij de antwoorden. Door nu zelfstandig de theorie door te werken, tests te maken en naar aanleiding van de uitkomst daarvan – beslissing van de docent – extra opdrachten te maken of door te werken, ging de leerling door de algebra-stof heen. Bunt testte zijn methode uit op een aantal scholen in Utrecht; de methode van Bouman werd eerst door 600 leerlingen doorgewerkt en naar aanleiding van ervaringen herzien. Vervolgens werd de herziene editie nogmaals door 750 leerlingen gebruikt. De publicaties waren dus een derde versie.

De reacties op de geprogrammeerde cursussen waren lauw. Van diverse cursussen verschenen recensies in *Euclides*. Deze waren met enige reserve geschreven. Recensenten spraken wel bewondering uit voor het werk, maar twijfelden ook of dit wel zou werken. Het enthousiasme dat sommige buitenlandse onderzoekers hadden ten aanzien van de mogelijkheden van deze methodes lijkt hier te hebben ontbroken. Nu bestond er in Nederland ook reeds een aantal methoden die door stimulering van de zelfwerkzaamheid van de leerling trachtte recht te doen aan de individuele onderwijsbehoeften. Daar kwam bij dat de machines, die de docent werkelijk tijd bespaarden, hier



figuur 2 Werkgroep geprogrammeerde wiskunde, *Algebra deel 12* (deel 2 voor de MAVO, 1969) – titelblad



figuur 3 Bouman e.a., *Algebra 1. Een geprogrammeerde cursus voor het VWO HAVO* (1965) – omslag

ontbraken: ze waren vrij prijzig. Qua tijdswinst verschilden de geprogrammeerde instructies dus niet van beschikbare alternatieven. Maar bovendien waren Nederlandse wiskunde-onderwijzers niet erg genegen zich in te laten met cybernetica en machines: men was bezig met kinderen te leren denken, en dat zag men niet ondersteund door geprogrammeerde cursussen.

Belangrijker nog dan de invloed van de computer op het onderwijs, was tot 1970 de invloed van de computer op het denken over onderwijs en over wat het betekende om iets te leren. Het feit dat er twee grote experimenten in Nederland liepen, suggereert dat men geprogrammeerde

instructies serieus nam. Het ging de Nederlanders om het leerproces, want machines om de docent ook daadwerkelijk tijdswinst te laten boeken waren niet beschikbaar. Achterliggende gedachte:

de leerling was programmeerbaar zoals een computer. Het leerproces werd gezien als een gewenningsproces en ook de ontrafeling van wiskundige procedures in kleine stapjes was gebruikelijk. Het was dus niet vreemd om geprogrammeerde cursussen in te zetten om, via de zelfwerkzaamheid van de leerling, meer individueel onderwijs vorm te kunnen geven. Het resulteerde in de overtuiging dat programmeren en leren wezenlijk verschillende zaken waren.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundeleraar, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

OP HOEKENJACHT IN HET VERRE OOSTEN

Mike Daas

In juli 2015 vond in Chiang Mai, Thailand, de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats. Het Nederlandse team sleepte hier drie bronzen medailles en een eervolle vermelding in de wacht. Deelnemer en meetkundeliefhebber Mike Daas, inmiddels student wis—, natuur— en sterrenkunde aan de UvA, bespreekt in dit artikel de eerste opgave van wedstrijddag 2: een elementaire maar complexe meetkundeopgave.



Thailand is niet een land waar je zomaar komt. Ik was dan ook uitzinnig toen bekend gemaakt werd dat ik met vijf teamleden daarnaartoe ging. Minder dan drie weken later stapten we al het vliegtuig in voor een vlucht van tien uur om daarna van Bangkok naar Chiang Mai door te reizen. Eerst trinden we nog een week intensief in een mooi hotel; daarna vertrokken we naar het zeer grote en luxueuze hotel waar de IMO gehouden werd. Onder het genot van live muziek in de lobby ontmoetten we veel deelnemers van andere landen; een unieke ervaring, evenals de vele excursies door de tropische en adembenemende omgeving. Natuurlijk werd er ook nog wiskunde gedaan. Op de twee wedstrijddagen besteedden alle deelnemers 4,5 uur aan het oplossen van in totaal zes opgaven. Hieronder doe ik verslag van opgave 4, de eerste opgave van wedstrijddag 2. De opgave luidt als volgt:

Driehoek ABC heeft omgeschreven cirkel Ω en middelpunt O . Een cirkel Γ met middelpunt A snijdt het lijnstuk BC in de punten D en E , zodanig dat B, D, E en C allemaal verschillend zijn en in deze volgorde op BC liggen. Laat F en G de snijpunten van Γ en Ω zijn, zodanig dat A, F, B, C en G in deze volgorde op Ω liggen. Zij K het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek BDF en het lijnstuk AB . Zij L het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek CGE en het lijnstuk CA . Veronderstel dat de lijnen FK en GL verschillend zijn en elkaar snijden in het punt X . Bewijs dat X op de lijn AO ligt. Zie figuur 2.

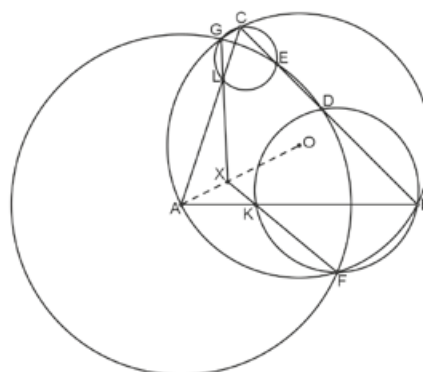
Laten we allereerst kijken wat we weten van het punt X . Afgezien van dat het op FK en GL ligt, weten we er nog eigenlijk niets over. Misschien is het dus een goede stap om te gaan kijken naar het andere deel van wat we moeten bewijzen. Wat weten we van de lijn AO ? De punten A en O zijn beide middelpunten van cirkels, namelijk van respectievelijk Γ en Ω . Hieruit volgt dat AO de middelloodlijn is van het lijnstuk FG , gevormd door de snijpunten van die twee cirkels. Als we nu zouden kunnen aantonen dat X ook op de middelloodlijn van FG ligt, dan zijn we klaar. Het mooie is dat we nu het vervelende punt O al kwijt zijn, dus dit klinkt als een goed plan, zie figuur 3.

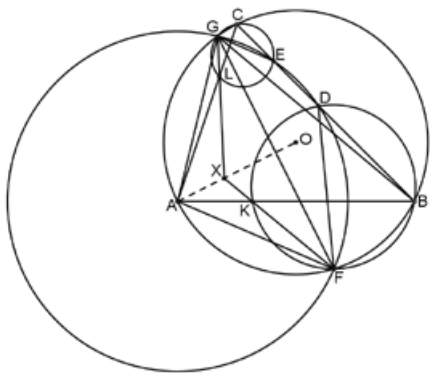


figuur 1 Van links naar rechts: Yuhui Cheng, Mike Daas, Bob Zwetsloot, Tim Brouwer, Dirk van Bree, Levi van de Pol, Eva van Ammers. Levi is geen teamlid, hij is winnaar van de door het Freudenthal Instituut beschikbaar gestelde aanmoedigingsprijs.

Omdat er zoveel cirkels in ons plaatje zitten, is het verleidelijk om te kijken of we dit zouden kunnen ompraten naar een hoekengelijkheid. Nu is A het middelpunt van Γ , dus geldt dat $|AF| = |AG|$. Als ook nog X op de gewenste middelloodlijn ligt, geldt ook dat $|XF| = |XG|$. Dan volgt uit alle gelijkbenige driehoeken dat $\angle KFA = \angle GFA - \angle GFK = \angle FGA - \angle FGL = \angle LGA$. Omgekeerd, als we

figuur 2





figuur 3

deze laatste hoekengelijkheid zouden kunnen bewijzen, dan hebben we de opgave ook opgelost. Laten we beginnen bij $\angle KFA$. Helaas kunnen we met deze hoek aanvankelijk nog niet zo lekker hoekenjagen. KA is namelijk geen koorde van een van de cirkels. Het is misschien slimmer om hem te schrijven als het verschil van twee hoeken. Punt D ligt op een cirkel door K en F en op Γ , dus misschien is dit vanuit hoekenzaagperspectief wel interessant. Schrijf nu dus $\angle KFA = \angle DFA - \angle DFK$. Het enige probleem is nu nog dat we van $\angle DFA$ nog niet zoveel weten, afgezien van het feit dat hij gelijk is aan $\angle FDA$. Het zou dus slim kunnen zijn om deze hoek ook op te delen. Op cirkel Γ door D en F liggen verder nog E en G , en op cirkel Ω door F en A liggen ook B , C en G . We zien dat G twee keer voorkomt; erg interessant. Laten we dus schrijven dat $\angle DFA = \angle DFG + \angle GFA$, en dus geldt dat $\angle KFA = \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK$. Dit ziet er nog helemaal niet mooi uit, maar dat is het wel. Van alle drie de hoeken aan de rechterkant kunnen we namelijk wat zeggen. We weten bijvoorbeeld dat vierhoek $FDEG$ een koordenvierhoek is, dus zien we dat $\angle DFG = 180^\circ - \angle DEG = \angle CEG$. Verder volgt uit boog GA van Ω dat $\angle GFA = \angle GBA$ en uit boog DK dat $\angle DFK = \angle DBK = \angle CBA$. Alles samennemend kunnen we dus zeggen dat $\angle KFA = \angle CEG + \angle GBA - \angle CBA$. En nu gebeurt er iets moois. We zien dat we $\angle KFA$ kunnen berekenen door $\angle CEG$ te nemen en daar $\angle CBA - \angle GBA$ vanaf te trekken. Merk nu op dat $\angle CBA - \angle GBA = \angle CBG$ en dus kunnen we schrijven dat $\angle KFA = \angle CEG - \angle CBG$. Zo hebben we aan de rechterkant nog maar twee hoeken over. Hiermee kunnen we gewoon vrolijk verder gaan met hoekenjagen. Uit boog CG van de kleine cirkel volgt dat $\angle CEG = \angle CLG$ en uit boog CG van Ω volgt dat $\angle CBG = \angle CAG = \angle LAG$. We kunnen nu dus zeggen dat $\angle KFA = \angle CLG - \angle LAG$. De twee hoekjes aan de rechterkant liggen nu wel weer erg dichtbij elkaar. We kunnen

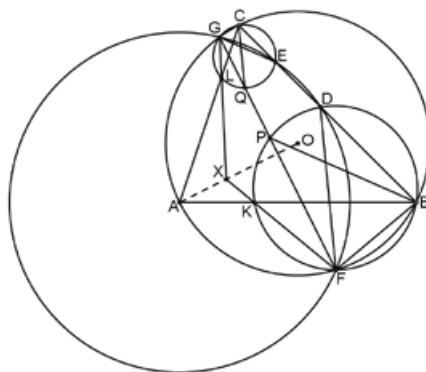
zelfs iets over hen samen zeggen als we de buitenhoekstelling gebruiken in driehoek ALG . Die zegt namelijk dat $\angle LGA + \angle LAG = \angle CLG$. Plotseling volgt hieruit dat $\angle LGA = \angle CLG - \angle LAG = \angle KFA$ en dat is precies wat we wilden laten zien. We hebben de opgave opgelost!

Dit ziet er nu misschien allemaal eenvoudig uit, gewoon een aantal koordenvierhoeken goed gebruiken en vanzelf kom je er wel uit, maar schijn bedriegt. Juist door het grote aantal cirkels in het plaatje is het erg moeilijk om het overzicht te bewaren en juist erg makkelijk om bijvoorbeeld ergens de 'verkeerde' boog te nemen. Ook liggen de punten F , D , E en G vaak nogal naar in het plaatje, waardoor sommige hoekjes erg klein worden en er heel gauw een foutje insluipt. Terwijl bovenstaande oplossing enkel gebruik maakt van de punten die de opgave al gegeven heeft, was mijn eigen idee om de snijpunten te definiëren van FG met de omgeschreven cirkels van driehoek BDF en CEG , want vaak red je het bij IMO-opgaven nou eenmaal niet met alleen maar de punten die zijn gegeven, zie figuur 4. Noem deze nieuwe punten respectievelijk P en Q . Uit koorde KP volgt dat $\angle XFG = \angle KFP = \angle KBP$ en uit koorde LQ volgt dat $\angle XGF = \angle LGQ = \angle LCQ$. Als je om de opgave op te lossen zou willen aantonen dat $\angle XFG = \angle XGF$ dan volstaat het dus te laten zien dat $\angle KBP = \angle LCQ$. Schrijf dat $\angle KBP = \angle KBD - \angle PBD$. Omdat je met $\angle KBD$ niet

zoveel kan, is het interessanter om te schrijven dat $\angle KBD = \angle DBF - \angle KBF = \angle CBF - \angle ABF$, waaruit volgt dat $\angle KBP = \angle CBF - \angle ABF - \angle PBD$. Over

alle hoekjes aan de rechterkant weten we iets. We zien namelijk dat uit koordenvierhoek $CBFG$ volgt dat $\angle CBF = 180^\circ - \angle CGF = 180^\circ - \angle CGQ$. Verder weten we weer dat vanwege $|AF| = |AG|$ geldt dat $\angle ABF = \angle ACG = \angle LCG$ en dat uit boog DP volgt dat $\angle PBD = \angle PFD = \angle GFD$. We kunnen dus schrijven dat $\angle KBP = 180^\circ - \angle CGQ - \angle LCQ - \angle GFD$. Nu volgt uit het feit dat vierhoek $GFDE$ een koordenvierhoek is, dat $\angle GFD = 180^\circ - \angle GED = \angle GEC$.

figuur 4



Ook zien we dat uit hoek CG volgt dat $\angle GQC = \angle CEG = \angle GFD$, dus weten we dat $\angle KBP = 180^\circ - \angle CGQ - \angle LCG - \angle GQC$. Deze hoekjes liggen allemaal erg dicht bij elkaar. We zien nu dat uit de hoekensom in driehoek CQG volgt dat $180^\circ - \angle CGQ - \angle GQC = \angle QCG$ en dus geldt dat $\angle KBP = \angle QCG - \angle LCG = \angle LCQ$, precies wat we wilden laten zien. Jammer genoeg kreeg ik deze oplossing toen niet helemaal rond binnen de tijd, maar omdat ik toch nog tot de helft was gekomen kreeg ik toch nog vier punten. Zo ziet men dat er veel verschillende wegen zijn die naar Rome leiden. Deze twee oplossingen (Op vakbladeuclides.nl/912daas vindt u nog een derde bewijs) lijken eenvoudig, maar doordat ze uit zoveel kleine stapjes bestaan, wordt het een complex geheel. Precies zoals het hoort op de IMO. En het plaatje heeft nog meer interessante eigenschappen waar niet naar gevraagd is. Hierdoor worden de deelnemers nog sneller op een zijspoor gebracht. Neem bijvoorbeeld het feit dat $\angle GDK = 90^\circ$. Misschien een leuke opgave voor thuis?

Met dank aan Kees van Schenk Brill, docent van Mike aan het St. Michael College Zaandam (en IMO-deelnemer in 1996).

Websites

De scores van het Nederlandse team:
www.imo-official.org/team_r.aspx?code=NLD&year=2015
 Over de Internationale Wiskunde Olympiade:
<http://imof.co>
 Over de Internationale Wiskunde Olympiade 2015:
www.imo2015.org
 Over de Nederlandse Wiskunde Olympiade:
www.wiskundeolympiade.nl

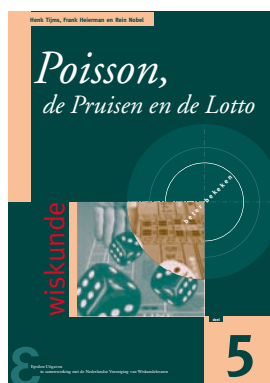


vakbladeuclides.nl/912daas

Over de auteur

Mike Daas nam als vwo-scholier van het St. Michael College Zaandam drie jaar lang deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. In 2015 maakte hij deel uit van het Nederlandse team. Nu studeert hij zowel wiskunde als natuur- en sterrenkunde aan de Universiteit van Amsterdam (UvA).
 E-mailadres: dutchmikedas@gmail.com

Weer beschikbaar in Zebra-reeks



deel 5 Poisson, de Pruisen en de Lotto

Henk Tijms, Frank Heierman
en Rein Nobel

deel 15 De juiste toon Jan van de Craats



deel 27 Kunst en Wiskunde Bruno Ernst en Ton Konings

Laatst verschenen in deze reeks: deel 46, **Knopen in de wiskunde**, Meike Akveld en Ab van der Roest.

E Epsilon Uitgaven

prijs per deel € 10
 prijs voor NVvW-leden op jaarmarkten € 9
 abonnement per vijf delen € 44
www.epsilon-uitgaven.nl

DE MATHEKALENDER

Hennie ter Morsche

EEN ONLINE WISKUNDEWEDSTRIJD

Een wiskundewedstrijd die nog niet zo bekend is, maar waar uw leerlingen gewoon aan mee kunnen doen: de Mathekalender. Hennie ter Morsche legt uit hoe de Mathekalender werkt, wat voor een soort opgaven er op staan en hoe u er aan mee kunt doen.



figuur 1 De Mathekalender van 2014

Een adventskalender maakt de aanloop naar de feestdagen spannend doordat in de periode van 1 tot en met 24 december dagelijks een luikje van de kalender kan worden geopend, waarachter een lekkernij (meestal van chocola) wordt verborgen. De *Mathekalender* is een digitale adventskalender die op de website www.mathekalender.de te vinden is, zie figuur 1. In plaats van allerlei lekkernijen verbergt deze kalender achter haar luikjes wiskundepuzzels. De bedoeling is om zoveel mogelijk van de in totaal 24 puzzels op te lossen, niet alleen om mooie prijzen in de wacht te slepen, maar ook om een leuke wiskundige uitdaging aan te gaan. De puzzels bestaan uit meerkeuzevragen. Een voorbeeld van een dergelijke opgave uit de kalender van afgelopen jaar is het zogenaamde kofferspel, zie figuur 2.

figuur 2 Het kofferspel



In een lange rij staan 101 koffers, die opeenvolgend genummerd zijn met de getallen $0, 1, 2, \dots, 100$. De Grinch en Knecht Ruprecht spelen met deze koffers het zogenaamde *T*-koffer-spel (waarbij *T* een positief geheel getal is).

De Grinch kiest twee getallen x en y met $0 \leq x, y \leq 100$ en $|x - y| \leq 50$, en verstopt een kurkentrekker in koffer x en een fles rum in koffer y . Alle andere koffers blijven leeg. Knecht Ruprecht mag dan in de rij in totaal T koffers openmaken: de eerste koffer mag Ruprecht willekeurig kiezen. Elke volgende koffer mag alleen geopend worden, wanneer aangrenzend links of rechts daarvan reeds een koffer geopend is. Knecht Ruprecht wint het spel, wanneer hij zowel de kurkentrekker als de fles rum vindt; anders wint de Grinch. Beide spelers maken hun keuzes die voor henzelf het meest gunstig zijn.

We definiëren p (respectievelijk q en r) als de kans dat Ruprecht het 60-koffer-spel (respectievelijk het 70-koffer-spel, en het 80-kofferspel) wint. Welke van de volgende uitspraken is waar?

1. $p = 30/101$, $q = 40/101$ en $r = 50/101$.
2. $p = 60/101$, $q = 70/101$ en $r = 80/101$.
3. $p = 3/9$, $q = 4/9$ en $r = 5/9$.
4. $p = 3/10$, $q = 4/10$ en $r = 5/10$.
5. $p = 3/11$, $q = 4/11$ en $r = 5/11$.
6. $p = 3/12$, $q = 4/12$ en $r = 5/12$.
7. $p = 1/6$, $q = 1/3$ en $r = 2/3$.
8. $p = 1/4$, $q = 1/3$ en $r = 1/2$.
9. $p = 1/3$, $q = 1/3$ en $r = 1/3$.
10. $p = 1/3$, $q = 1/3$ en $r = 1/2$.

De oplossing staat aan het eind van dit artikel. De puzzels zijn vaak opgaven in de sfeer van de adventstijd, waarin de Kerstman, zijn knechten en andere fictieve wezens een figurerende rol spelen. Alle opgaven zijn tienkeuze vraagstukken, zodat er geen bewijzen of toelichtingen worden gevraagd. Op de Nederlandse website van de kalender www.3tu.nl/ami/en/mathekalender zijn alle puzzels van de jaren 2012 en 2013 opgenomen. Mooi oefenmateriaal voor leerlingen en andere belangstellenden die aan de wedstrijd willen meedoen. Deze website bevat ook de spelregels van de wedstrijd en andere voor deelnemers nuttige informatie.

De *Mathekalender* is een gezamenlijk initiatief van de 3TU federatie AML, een samenwerkingsverband van de drie technische universiteiten in Nederland en het Duitse instituut Matheon, een soortgelijke samenwerkingsverband van de drie universiteiten in Berlijn. De opgaven zijn zowel in het Duits als in het Nederlands gesteld. Om de opgaven van de adventskalender op te lossen, is plezier in de wiskunde en wiskundekennis behorende bij ongeveer klas 4 van het havo/vwo aan te bevelen, maar in feite kan iedere ambitieuze leerling met zijn kennis en gevoel voor wiskunde met succes de opgaven oplossen. De opgaven zijn uitdagend, en soms van het niveau van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. In tegenstelling tot gewone adventskalenders, waarbij de deurtjes meestal 's morgens worden geopend, geeft de *Mathekalender* haar geheimen pas 's avonds prijs. Van 1 tot en met 23 december gaat het deurtje om 18.00 uur open en kan aan de som van die dag worden begonnen; op 24 december al om 10.00 uur. Bijzonder is de wijze waarop men prijzen kan winnen. Voor een goede oplossing van een puzzel ontvangt een deelnemer een aantal loten. Het aantal hangt af van het tijdstip, waarop de oplossing is ingeleverd. Aan het einde van de wedstrijd worden er fraaie prijzen verloot en natuurlijk is het zo dat hoe meer loten men heeft, hoe groter de kans is op een mooie prijs. Ook tussentijds zijn er prijzen te verdienen. Voor de beste Nederlandse scholier stelt AML een hoofdprijs (een laptop, een tablet of een binair horloge) ter beschikking. De opgaven zijn afkomstig van medewerkers van AML, en van Matheon. Dit verradt ook de wiskundige aard van de opgaven. Zij zijn toegepast van aard, gerelateerd aan methoden en technieken zoals je die bij de toegepaste wiskunde tegenkomt, maar meer speels van karakter. Zo zou men het kofferspel kunnen koppelen met de waarschijnlijkheidsrekening en het vakgebied van de combinatorische optimalisering. Natuurlijk wordt van de deelnemers niet verondersteld dat ze kennis van de verschillende specialismen bezitten. Men kan zich alleen individueel inschrijven voor de adventswedstrijd (vanaf 1 november), maar dat sluit niet uit dat men gezamenlijk (bijvoorbeeld in de klas) aan een puzzel kan werken. Inschrijving is vanaf 1 november mogelijk via de genoemde Duitse website, de officiële website van de wedstrijd. Bij de inschrijving ontvangen de deelnemers een account, waarmee men bijvoorbeeld ook kan deelnemen aan de forumdiscussie van de kalender. Tot slot het antwoord op de vraag van het kofferspel. Het juiste antwoord is alternatief 10, de uitwerkingen zijn te vinden op www.mathekalender.de/info/Loesungsheft_2014.pdf

Over de auteur

Voordat hij met pensioen ging was Hennie ter Morsche opleidingsdirecteur van de opleiding Technische Wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven.
Email: h.g.termorsche@tue.nl

VERSCHENEN

WANNEER IS CHERYL JARIG?



Ondertitel: +99 andere wiskunderaadsels
Auteur: Birgit van Dalen en Quintijn Puite
Uitgever: Bertram + de Leeuw Uitgevers BV
ISBN: 789-46-1561-96-1
Prijs: € 14,95 (216 pagina's; paperback)

In april 2015 zette een tv-presentator uit Singapore een wiskunderaadsel op zijn facebookpagina. De hersenkraker 'Wanneer is Cheryl jarig?' ging de hele wereld over en een discussie barstte los. Want, hoe los je deze lastige vraag op? In *Wanneer is Cheryl jarig?* helpen Quintijn Puite en Birgit van Dalen je de logica van wiskunde onder de knie te krijgen. Ze leren je hoe je een probleem moet oplossen door terug te gaan naar de basis. Hoe pak je een raadsel aan, waar begin je? Echte wiskunde lijkt misschien lastig, maar iedereen kan leren logisch te denken. Aan de hand van hints en duidelijke antwoorden kan iedereen straks lastige raadsels oplossen.

In deze interactieve rubriek belicht Kees Hoogland aspecten van gecijferdheid. Deze keer gaat hij in op de ontwikkeling van de opvattingen over wat rekenen in zou moeten houden.



Beelden zijn een krachtige manier om concepten over te brengen. In de media lijkt er haast wel een Babylonische spraakverwarring te zijn in de discussie over rekenen. Bij elk gloedvol betoog over rekenen denk ik altijd: 'Wat zou het achterliggende mentale beeld zijn?' Ik zal enkele van de meest voorkomende opvattingen beschrijven en voorzien van een typerend beeld. De opvattingen waren in verschillende tijdperken dominant. De genoemde tijdperken zijn uiteraard niet zo scherp afgebakend.

Opvatting 1: 1950-1975 Cijferen – Een vrij persistente opvatting is dat de essentie van rekenen het cijferen is, dat wel zeggen het kunnen uitvoeren van bewerkingen op kale getallen volgens vaste procedures met de hand en op papier: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De staartdeling is het icoon van deze opvatting. Is dat een relevante bezigheid? In een land dat dreef op handel, scheepvaart en industrie was deze ambachtelijke vaardigheid van het grootste belang. Zonder cijferen geen fabrieken, geen handel, geen zeereizen. Het rekenboek *De Cijfferringhe* van Willem Bartjens haalde tussen 1600 en 1700 met gemak de honderdste druk. De kwantitatieve kant van de wereld ziet er vandaag heel anders uit en het kale cijferen heeft daarin veel van zijn relevantie verloren. Zie figuur 1.

opgave 93.71

- a. $(\frac{3}{7} - \frac{5}{9}) / (\frac{4}{7} + \frac{4}{9})$
- b. $(\frac{3}{7} + \frac{5}{11}) / (\frac{3}{16} : \frac{5}{9})$
- c. $12,31 \times 0,0165$
- d. $2345677646 : 342 =$

figuur 1

Opvatting 2: 1975-2000 Rekenen in context – Een andere opvatting luidt dat het bij rekenen vooral gaat om het kunnen oplossen van praktische kwantitatieve problemen. Zo'n probleem moet dan wel gepresenteerd worden in taal of in beeld. Dat noemen we een context. Deze benadering is op dit moment gemeengoed in het onderwijs in Nederland. De huidige schoolboeken en toetsen staan er vol mee. In realistisch reken- en wiskundeonderwijs komen veel van dit soort contextopgaven voor. Maar ook in leergangen die gericht zijn op probleemoplossen, toepassen en modelleren. Zie figuur 2.

Opvatting 3: 2000-2025 Gecijferdheid – Wereldwijd wint een derde opvatting snel aan populariteit. Die zegt dat

Nationale rekentoets voor verpleegkundigen en verzorgenden

Een kind van 36 kg met hartinsufficiëntie krijgt 50µg Acetyldigitoxine/kg lichaamsgewicht, verdeeld over 6 doses per 24 uur. In voorraad zijn deelbare tabletten van 0,25 mg Acetyldigitoxine.

Hoeveel tabletten krijgt het kind per keer?



figuur 2

leerlingen gecijferd moeten worden om met de kwantitatieve kant van de wereld om te gaan. Gecijferdheid neemt, meer nog dan realistisch rekenen, de wereld om ons heen als uitgangspunt. Die is zo rijk, zo gevarieerd en soms zo complex, dat leerlingen een zeer uitgebreid repertoire nodig hebben om zich daarin te redden. Bij vermenigvuldigen gaat het niet om een som en een goed antwoord, maar om het herkennen van vermenigvuldigstructuren in bloemperken, stapelingen etc. Bij delen gaat het niet om de staartdeling maar om verdeel- en uitdeelproblemen bij recepten, bij verhoudingen, bij medicatie etc. Maar het gaat bovendien om het trekken van conclusies uit getalsmatige informatie. Interpreteren, analyseren, ordenen, (in)schatten, structureren en selecteren van kwantitatieve informatie zijn vaardigheden die horen bij gecijferdheid. Kortom leerlingen toerusten voor de veelheid aan kwantitatieve verschijningsvormen in de echte wereld. Zie figuur 3.



figuur 3

Mijn uitdaging aan u. Sta de komende maanden bij elk artikeltje dat u leest over rekenen, eens stil wat daarbij de achterliggende, veelal impliciete, opvatting is over rekenen. Mogelijk voelt u zich zelf het meest thuis bij één van deze opvattingen. Ook dat geeft nuance aan de discussie.

Over de auteur

Kees Hoogland is vakexpert rekenen, wiskunde, gecijferdheid. Hij werkte vele jaren bij APS en vanaf 1 september 2015 bij SLO. Website: www.gecijferdheid.nl. E-mailadres: cph@xs4all.nl

RECTIFICATIE

Bij het examenartikel van het Cito in *Euclides* nummer 1 is abusievelijk een verkeerd 'over de auteurs' geplaatst. Hierbij de correcte versie.

Over de auteurs

Ivo Claus, Sjoerd Crans, Ger Limpens, Jos Remijn, Melanie Steentjes en Harco Weemink zijn wiskundemedewerkers en toetsdeskundigen van Cito in Arnhem (website: www.cito.nl).

Hun emailadressen zijn achtereenvolgens:

ivo.claus@cito.nl, sjoerd.crans@cito.nl,
ger.limpens@cito.nl, jos.remijn@cito.nl,
melanie.steentjes@cito.nl en harco.weemink@cito.nl.

WEBSITE

JAARVERSLAGEN NVvW EN EUCLIDES

Tijdens de jaarvergadering van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 7 november 2015** staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van *Euclides* jaargang 91 nummer 2.



vakbladeuclides.nl/912nvvw



vakbladeuclides.nl/912euclides



APS Rekenen en Wiskunde

Ook in het schooljaar 2015-2016 organiseert APS Rekenen en Wiskunde diverse cursussen en studiedagen, o.a.:

- | | |
|-------------|---|
| 12 november | Start cursus Toegevoegde waarde van digitale media in de rekenles vo en mbo |
| 8 december | Examentraining rekenen vo/mbo |
| 14 december | Start Opleiding rekencoördinator |
| 28 januari | Wiskundeconferentie vmbo en havo/vwo onderbouw |

U kunt zich aanmelden via onze site www.aps.nl/agenda.

Maatwerk trainingen, coaching en studiemiddagen rekenen/wiskunde. Rekendidactiek, omgaan met verschillen in de rekenles, zwakke rekenaars, nieuwe examenprogramma's wiskunde.

Informatie

APS-Academie
030 28 56 722
academie@aps.nl
www.aps.nl



MET DANK AAN HET WERELDWISKUNDEFONDS

Juliëtte Feitsma

WISKUNDEMATERIAAL IN SIERRA LEONE

Het WwF maakte in januari 2015 drieduizend euro over aan het *Women in Action Development Project* in Sierra Leone. Daarmee konden wiskundeboeken, rekenmachines en wiskundesets worden gekocht voor de *Kulafai Rashideen Islamic Secondary School* in Makeni City.

Achtergrond

Wiskunde is een van de verplichte vakken die een leerling van de *junior secondary school* in Sierra Leone met voldoende resultaat moet afsluiten om toegang te krijgen tot de *senior secondary school* en vervolgens tot de universiteit. Maar jammer genoeg lukt dat de meeste leerlingen niet. De resultaten van het *Basic Education Certificate Examination (BECE)* van 2011 laten zien dat in dat jaar 22% van de leerlingen slaagde voor wiskunde, vergeleken met 29% in 2010. De resultaten zijn ontmoedigend en nauwelijks verbeterd sinds 2005. Het totale slagingspercentage voor het examen was amper 47% in 2011. Het doel van het *Women in Action Development Project (WIADP)* is zich te richten op zaken die nu direct nodig zijn voor kwaliteitsverbetering van het wiskundeonderwijs.

Doelstellingen

- verbeteren en daarna in stand houden van wiskunde-instructiemateriaal;
- verbeteren en behouden van wiskundemateriaal voor de leerlingen;
- docenten en leerlingen motiveren en hun inspanningen verlichten door ze lesstof en praktisch materiaal ter beschikking te stellen;
- het interesseniveau voor het vak wiskunde bij de leerlingen verhogen.

Uitvoering

Nadat de regering van Sierra Leone in april 2015 had aangekondigd dat de scholen weer open mochten (na de ebola-epidemie), ging het *WIADP* team op bezoek bij de *St. Joseph Secondary School* om de uitvoering van het wiskundeproject te bespreken. Ongelukkigerwijs was al twee keer een leerling overhaast per ambulance naar het ziekenhuis gebracht, omdat ze symptomen van ebola vertoonden. Dit leidde bij medeleerlingen en hun ouders tot hevige angst omdat zij hadden ervaren hoe het ebola-virus al veel mensen had gedood. Daarom kwamen de meeste leerlingen niet meer naar school uit angst besmet te worden met het virus. Er heerste wanorde op de school en niemand kon vertellen wanneer de lessen weer zouden beginnen. Het lokale team besloot daarom het project te implementeren op een andere school die eveneens een



grote behoefte had aan wiskundemateriaal. Er werd een ontmoeting gepland met het hoofd en het management van de *Kulafai Rashideen Islamic Secondary School* in Makeni City, een provincie in het noorden van Sierra Leone. Deze school heeft in totaal 250 studenten en 20 opgeleide docenten. Het is een gemengde school. Anders dan de *St. Joseph Secondary School* die alleen voor meisjes is. Evenals alle andere *secondary schools* in Sierra Leone ontbreekt het deze school aan basis wiskundemateriaal. Leerlingen en docenten hebben geen leerboeken, geen rekenmachines, geen wiskundesets. Na tien jaar rebellenoorlog waren de scholen bezig op te krabbelen. De ebola-epidemie deed dat allemaal weer te niet. In een bijeenkomst met het hoofd en andere leden van het schoolteam werd het doel van het project besproken. Het team van *WIADP* informeerde het schoolteam dat de materialen zijn bedoeld voor de wiskundeleraars en leerlingen die zich voorbereiden op het *Basic Education Certificate Examination*. Voor de aanschaf van het materiaal werden drie leden van het schoolteam toegevoegd aan het team van *WIADP*; dat deden ze in Makeni. Het gekochte wiskundemateriaal verlicht de inspanning van de docenten; zij ondervonden een grote belasting door het gebrek aan leerboeken en materialen. De leerlingen kunnen het op school gebruiken, aan het einde van de schooldag geven ze het terug aan de docenten. Of ze kunnen het lenen om thuis te gebruiken. Men hoopt zo de motivatie voor het vak te vergroten, zowel bij de docenten als bij de leerlingen en de leerlingen een grotere kans te geven om te slagen voor het examen dat nodig is voor een hogere opleiding.

Over de auteurs

De contactpersoon in Nederland, Josephine Thoronka, stuurde dit verslag, opgesteld door de vrijwilligers van *WIAD* in Makeni. Vertaling: Jultiëtte Feitsma, pr-functio-naris WwF. E-mailadres: JultiëtteFeitsma@kpnplanet.nl

VERSCHENEN

HET WISKUNDEHONDJE



Ondertitel: En meer verhalen over vormen en getallen
Auteur: Margriet van der Heijden, met illustraties van Iris van der Graaf
Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds
ISBN: 978-90-5712-450-1
Prijs: € 14,95 (128 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Hoe reken je met hagelslag? Waarom zijn 220 en 284 vrienden van elkaar? Bestaat er een oneindige cirkel? En wanneer is 7 hetzelfde als 0111? In Het wiskundehondje vertelt Margriet van der Heijden je van alles over ronde, zielige, perfecte, slechte, herfstige, machtige en oneindige getallen. Maar ook hoe je kunt goochelen met letters, hoe je van een cirkel een rechthoek maakt, en wat de allermooiste formule is. Als je goed kijkt, zie je overal om je heen wiskunde. Het wiskundehondje neemt je mee langs die wiskunde en laat je er een beetje aan snuffelen. Het laat zien hoe mooi getallen, vormen en patronen zijn. Deze verhalen zijn een selectie uit de rubriek Vormen en getallen van de kinderwetenschapspagina van NRC Handelsblad, en zijn speciaal voor deze editie geïllustreerd door Iris van der Graaf.

VERSCHENEN

LABYRINTHEN EN DOOLHOVEN



Auteur: Wim Kleijne
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015),
Zebrareeks deel 44
ISBN: 978-90-5041-148-6
Prijs: € 10,00 (56 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Dit deel uit de Zebra-reeks gaat over labyrinten en doolhoven. Bij uitstek zijn dit constructies die te vinden zijn in pretparken. Dat geeft al gauw de indruk dat we hier te maken hebben met dingen die je alleen op een zondagmiddag met kinderen gaat bezoeken. Maar labyrinten en doolhoven hebben een rijke cultuurgeschiedenis achter zich en je kunt er bovendien fascinerende wiskunde mee bedrijven. En dat alles van gemakkelijk tot behoorlijk diepgaand. Al deze zaken komen in dit boekje aan de orde. En daarom is er in dit deel van de Zebrareeks 'voor elck wat wils' te vinden.

In *Euclides* jaargang 90, nummer 6 gaat Ab van der Roest een uitdaging aan met zijn leerlingen. Deze uitdaging komt er op neer dat je in een probleem een zekere structuur ontdekt waardoor de oplossing heel simpel wordt. Het snelle antwoord levert bij Ab een reep chocola op. In dit stukje geeft Rob Bosch een paar vergelijkbare uitdagingen die volgens hem ook wel een reep waard zijn.

Als eerste uitdaging vragen we de leerlingen de volgende rij getallen aan te vullen. Zo'n opgave heeft veel weg van een opgave in een IQ-test: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. De aanvulling: 55, 89, 144, ..., zullen de meeste leerlingen wel vinden. Daarvoor delen we geen chocola uit. De tweede uitdaging is om de som van de eerste negen getallen uit de rij te bepalen. Terwijl de leerlingen de som bepalen als $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 = 88$, geef ik zonder enige berekening en aarzeling het antwoord 88. Hoera, een reep verdient! De bovenstaande rij getallen is de Fibonacci-rij waarin een getal de som is van zijn beide voorgangers en we de rij beginnen met twee keer het getal 1. Als we het n -de getal in de rij aangeven met f_n dan geldt dus $f_1 = f_2 = 1$ en $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ met $n = 2, 3, 4, \dots$. Het snelle antwoord volgt uit de volgende relaties:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2 \\ f_2 &= f_4 - f_3 \\ f_3 &= f_5 - f_4 \\ \dots &= \dots - \dots \\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1} \end{aligned}$$

Als we links en rechts alles bij elkaar optellen, dan vallen de rechterleden bijna allemaal tegen elkaar weg zodat we eenvoudig zien dat: $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$. Dit is vergelijkbaar met de snelle oplossing in het door Ab gestelde probleem.

De tweede reep kunnen we verdienen met de volgende uitdaging. Tel uit de rij Fibonacci-getallen de getallen op de eerste, derde, vijfde tot en met het getal op de elfde plaats op. In formulevorm: bereken $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{11}$. De leerlingen gaan weer aan de slag met $1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 = 144$. In die tijd heb ik alweer het antwoord 144 uit de hoge hoed getoverd. Hoe kan dit weer zo snel?

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \\ f_3 &= f_4 - f_2 \\ f_5 &= f_6 - f_4 \\ \dots &= \dots - \dots \\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \end{aligned}$$

Nu blijft er in het rechterlid alleen de term f_{2n} over. We zien dat $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$. Voor een snelle oplossing kijken we dus even naar het volgende Fibonacci-getal; in de bovenstaande uitdaging dus naar $f_{12} = 144$.

We sluiten af met een bewerkelijke uitdaging. Wat is de som van de kwadraten van de eerste acht getallen uit de rij? Daar gaan we $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 + 441 = 714$. Dat is wel even werk maar ook hier kunnen we het antwoord betrekkelijk snel geven als $21 \times 34 = 714$. Om de structuur te begrijpen geven we nog een eenvoudiger voorbeeld: $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \times 8$. In dit geval is het iets lastiger om na te gaan wat er achter steekt maar het blijkt weer eenzelfde structuur te zijn als in de vorige uitdagingen. Uit de definitie van de Fibonacci-getallen volgt dat $f_n \cdot f_{n+1} = f_n (f_n + f_{n-1}) = f_n^2 + f_n \cdot f_{n-1}$. Voor de som van de kwadraten vinden we nu:

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1 \cdot f_2 \\ f_2^2 &= f_3 \cdot f_2 - f_2 \cdot f_1 \\ f_3^2 &= f_4 \cdot f_3 - f_3 \cdot f_2 \\ \dots &= \dots - \dots \\ f_{n-1}^2 &= f_n \cdot f_{n-1} - f_{n-1} \cdot f_{n-2} \\ f_n^2 &= f_{n+1} \cdot f_n - f_n \cdot f_{n-1} \end{aligned}$$

We hebben weer een patroon waarbij er in het rechterlid bijna alles tegen elkaar wegvalt. We zien dat $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_{n+1} \cdot f_n$. Uit het rijtje Fibonacci-getallen kunnen we direct de som van de kwadraten uitrekenen door het laatste getal te vermenigvuldigen met zijn opvolger. Deze prestatie vind ik wel twee repen waard. Met de Fibonacci-getallen kunnen we nog veel meer uitdagingen aangaan. Anders gezegd, van deze getallen kunnen ze in Veenendaal zeker chocola maken.

Over de auteur

Rob Bosch is universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie en lid van de redactie van *Euclides*. E-mailadres: dr.robboert.bosch@gmail.com



Maakt wiskunde uitdagender

MathPlus is ontwikkeld om wiskunde leuk en uitdagend te maken voor alle leerlingen. Zo kiezen leerlingen zelf hoe ze de theorie leren. Ook zien ze waarom de wiskunde die je leert belangrijk is, of hoe die in de praktijk wordt gebruikt. MathPlus is hiermee ook de ideale kennismaking met Wiskundige Denkactiviteiten (WDA).

Speelt beter in op niveauverschillen

Er bestaan relatief grote verschillen wat betreft de niveaus en leerstijlen van leerlingen. MathPlus geeft u als docent meer mogelijkheden om in te spelen op deze verschillen. Directe feedback, verschillende manieren van uitleggen en opgaven op hun eigen niveau betrekken de leerlingen meer bij de les. Met het adaptief werken met MathPlus komen alle leerlingen sneller op het gewenste niveau en kunnen goede en excellente leerlingen zich profileren.

Geeft u inzicht en overzicht

MathPlus stelt de interactie tussen docenten en leerlingen centraal. U kunt bijvoorbeeld op elk gewenst moment de voortgang van leerlingen monitoren via een online dashboard. U ziet het meteen: wie heeft wat gemaakt en wat vonden ze moeilijk? Met deze inzichten kunt u uw tijd en aandacht nog beter verdelen over uw leerlingen.

Ervaar MathPlus

Vraag nu een gratis proeflicentie aan.

 Bel onze helpdesk
073 628 8766

Mail naar: sales.vo@malmberg.nl
Of kijk op: www.mathplus.nl

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

EEN AFSLUITENDE LES OVER GETALLEN.

Jacques Jansen gaf, op verzoek van een collega, een gastles in een 2 vwo klas. Het doel was om de leerlingen de magie van getallen te laten ervaren. Missie geslaagd!



figuur 1

Een paar jaar geleden stond op de voorpagina van een tv-gids^[1] de afbeelding van figuur 1. Een intrigerende foto waardoor je meteen zin kreeg om een onderzoek naar gehele getallen te doen. Collega PJ deed dat in zijn tweede klas, een mix van atheneum- en gymnasiumleerlingen. Aan mij vroeg hij, met twee lessen aan het eind van een middag het project af te sluiten. Mijn collega kwam er snel achter dat het project helaas te hoog gegrepen was. Priemgetallen, Fibonacci, Laatste Stelling van Fermat, modulo-rekenen en cryptografie: het was allemaal een brug te ver. De uitdaging voor mij was om de leerlingen toch iets van de magie van getallen mee te geven. Maar wat dan en zou dat gaan lukken? Uit mijn in de loop der jaren, vooral uit de *Pythagoras*, verzamelde repertoire putte ik de volgende programmaonderdelen:

- leeftijd en huisnummer raden, wat is het geheim;
- altijd 1089;
- wat weten we van het getal 3;
- wiskundige feiten over het getal 3;
- met slechts drie drieën kun je verschillende getallen maken.

Daar moet toch wel iets bij zitten dat de leerlingen gaat boeien!

Leeftijd en huisnummer raden

Deze rekenopdracht stond ooit in de *Pythagoras*:^[2]

- schrijf je huisnummer op;
- verdubbel dat huisnummer;
- tel er vijf bij op;
- vermenigvuldig met 50;
- tel je leeftijd in jaren erbij;
- tel daarbij het aantal dagen dat in een jaar zit;
- geef de einduitkomst.

Een opdracht om zonder gebruik van de rekenmachine uit te voeren. Ik vertel de leerlingen dat ik helderziende ben. Tal van uitkomsten verschijnen op het bord en bij iedere uitkomst vertel ik de leerling hoe oud hij is en wat zijn huisnummer is. Succes is verzekerd! Vervolgens vertel ik de leerlingen dat ook zij helderziende kunnen worden. Sommigen hebben al snel door dat je van het cijfer dat de honderdtallen aangeeft 6 moet aftrekken om het huisnummer terug te krijgen. Dan gaan we het geheim helemaal prijs geven. Zie de tabel hieronder. De doelstelling om enig inzicht te krijgen in het tientallig stelsel was gehaald. En tussendoor ook nog wat algebraïsche- en rekenvaardigheden aan de man gebracht.

Huisnummer	H	Uitwerking
verdubbelen	$2H$	
5 erbij	$2H + 5$	
Maal 50	$50(2H + 5)$	$100H + 250$
Leeftijd L erbij	$100H + 250 + L$	
365 erbij	$100H + 250 + L + 365$	$100H + L + 615$
Actie: 615 er af halen	$100H + L$	

Altijd 1089

Het volgende probleem ken ik al vanaf mijn lagere (basis) school.

- schrijf een getal van drie cijfers op;
- zet de drie cijfers in omgekeerde volgorde;
- trek van het grootste getal het kleinste getal af;
- zet van deze uitkomst de drie cijfers in omgekeerde volgorde;
- tel dit laatste getal op bij genoemde uitkomst;
- en wat krijg je dan?

Dit cijferkunstje, dat ook ooit in de *Pythagoras* stond^[3], krijgt natuurlijk de opdracht mee: bewijs dat er altijd 1089 uitkomt. De leerlingen kregen op een werkblad de hint om variabelen in te voeren. Een willekeurig getal van drie cijfers kun je voorstellen door abc . Ga er vanuit dat $c > a$. Zet de letters in omgekeerde volgorde: cba . Reken uit $cba - abc$. Maak het bewijs nu zelf af.

Hier volgt de uitwerking.

Actie	Willekeurig getal van drie cijfers	Voorbeeld
Schrijf een getal van drie cijfers op.	abc	248
Zet de drie cijfers in omgekeerde volgorde.	cba	842
Trek van het grootste getal het kleinste getal af.	$cba - abc = (c - a) \cdot 100 + (a - c)$	$842 - 248 = 594$
Merk op dat $(a - c)$ negatief is. Leen een 100 en splits het op in 90 en 10. En: $0 < (10 + a - c) < 10$	$(c - a - 1) \cdot 100 + 90 + 10 + (a - c)$	
Zet van deze uitkomst de drie cijfers in omgekeerde volgorde.	$(10 + a - c) \cdot 100 + 90 + (c - a - 1)$	495
Tel dit laatste getal op bij genoemde uitkomst	$(-1 + 10) \cdot 100 + 90 + 90 + (10 - 1) = 1089$	$594 + 495 = 1089$

KLEINTJE DIDACTIEK

CONTEXTOPGAVEN – SCHRAPHMETHODE

A 45 De UEFA Cup is een internationale voetbalcompetitie waaraan clubs uit heel Europa meedoen. In het seizoen 2008-2009 begint de competitie met een eerste ronde met 80 teams, die via het afvalsysteem met uit- en thuiswedstrijden uitmaken wie in de groepsfase komen. In de groepsfase spelen telkens vijf teams een halve competitie. De bovenste drie teams van elke groep gaan samen met acht andere teams verder met het afvalsysteem met uit- en thuiswedstrijden. Alleen de finale bestaat uit één wedstrijd.

a Hoeveel wedstrijden worden in totaal gespeeld?

A 45 De UEFA Cup is een internationale voetbalcompetitie waaraan clubs uit heel Europa meedoen. In het seizoen 2008-2009 begint de competitie met een eerste ronde met 80 teams, die via het afvalsysteem met uit- en thuiswedstrijden uitmaken wie in de groepsfase komen. In de groepsfase spelen telkens vijf teams een halve competitie. De bovenste drie teams van elke groep gaan samen met acht andere teams verder met het afvalsysteem met uit- en thuiswedstrijden. Alleen de finale bestaat uit één wedstrijd.

a Hoeveel wedstrijden worden in totaal gespeeld?

Wat doe je met leerlingen die moeite hebben met de teksten in opgaven en examens? In een serie van drie artikelen bespreek ik enkele methoden, allereerst de schrapmethode. Leer leerlingen aan om:

- eerst de tekst te skimmen: dit is een vorm van snellezen. Lees van elke alinea de eerste en laatste zin en kijk naar opvallende stukjes;
- dan de vraag te lezen;
- dan de tekst te scannen. Je zoekt naar de informatie die je nodig hebt om de vraag te beantwoorden. Als je de informatie hebt, hoef je meestal niet meer verder te lezen.

Vervolgens komt het schrappen:

- markeer of onderstreep alle belangrijke informatie;
- schrap alle overbodige tekst;
- markeer/onderstreep alle overgebleven getallen;
- lees als dat nodig is de tekst intensief. Je leest dan de tekst helemaal, dus alle woorden.

De tips voor het beter leren lezen van teksten, komen van mijn collega's van de talen.^[1] Een oefening om leerlingen dit aan te leren is om ze een wiskunde-opgave te geven uit het boek of een examen en hen bovenstaande stappen te laten toepassen. Uiteraard hoort bij deze specifieke opgave ook de tip: maak een schets (van het wedstrijdschema).

Tot mijn verrassing bleek in mijn 6 vwo wiskunde C-klas afgelopen schooljaar een flink deel van de elf leerlingen niet in staat om alle overbodige informatie te schrappen in een examenopgave. Sommige leerlingen schrapten nauwelijks in de tekst en een enkeling schrapte belangrijke informatie. Dit schooljaar ga ik dit dus nog regelmatig met mijn leerlingen oefenen.

[1]  vakbladeuclides.nl/912boels

Lonneke Boels

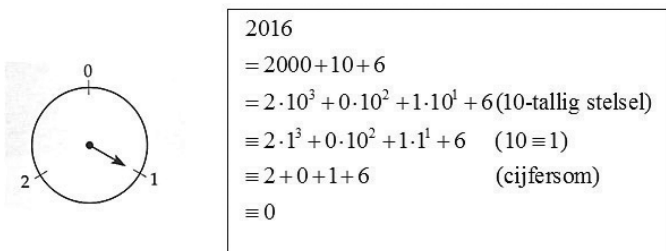
De leerlingen zullen u erop wijzen dat het eerste en derde cijfer verschillend van elkaar moeten zijn. Bij de aftreksom kun je ook 99 als uitkomst verwachten maar daar weet u wel raad mee: 099. Het getal 3 kwam vaak in bovenstaand probleem voor. Vandaar een bruggetje naar het volgende.

Wat weten we van het getal 3?

Eerst geef ik wat meningen, feiten en uitdrukkingen over het getal drie.

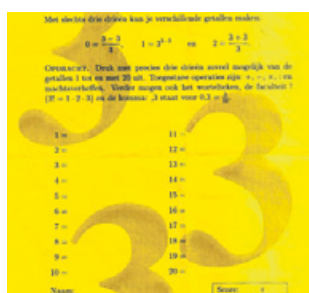
- Joris Driepinter, personage uit reclamefilmpjes van vroeger om het drinken van melk te stimuleren;
- alle goede dingen bestaan in drieën;
- de Heilige Drie-eenheid;
- 3 is het eerste geluksgetal en eerste mannelijke getal;
- tweede priemgetal en eerste oneven priemgetal;
- eerste tweelingpriemgetal en tweede driehoeksgetal.

figuur 2



Daarna wat meer wiskundige feiten over het getal drie. We hebben het bijvoorbeeld over driehoeksgetallen maar ook over 'deelbaarheid door drie'. Bijvoorbeeld: Is 2016 deelbaar door 3? Hoe kun je dat snel nagaan? Er is een regel voor 'deelbaarheid door 3'. Dat weten de leerlingen wel: een getal is deelbaar door 3 precies dan als de cijfersom deelbaar is door 3. Waarom geldt die regel altijd? En dat hebben ze waarschijnlijk niet gehad. Klokrekenen kennen ze. Met 12 cijfers dus. Een getal dat een 12-voud is komt uit op de nul. Dus 24 uur is gelijk aan 0 uur, 14 uur is gelijk aan 2 uur. De vraag is nu of een getal waarvan de cijfersom deelbaar is door 3, zelf ook deelbaar is door 3, dus ook een drievoud is. Reden om te gaan klokrekenen op een klok met maar drie cijfers. Zie figuur 2. Zo vinden we dat 4 uur gelijk is aan 1 uur. De wijzer op vier valt samen met 1. We noemen 4 equivalent met 1 en noteren $4 \equiv 1$. Er geldt ook dat $10 \equiv 1$. Ik beperk me voor deze tweede klas dus tot het voorbeeld

figuur 3



2016. Cijfersom is 9. We moeten dus nagaan of 2016 een drievoud is en dus nagaan dat $2016 \equiv 0$. En dat gaat lukken.^[4] Toch weer wat aan modulo rekenen gedaan.

Met slechts drie drieën kun je verschillende getallen maken.

In 1997 werd op de jaarvergadering van de NVvW een opdracht aan de bezoekers uitgereikt, zie figuur 3. Het maken van getallen met precies drie drieën bleek ook in de les bruikbaar. Altijd een succesnummer, nu ook weer. De getallen 1 tot en met 7 en het getal 9 hadden de leerlingen zo gevonden. De andere drievouden 12, 15 en 18 ook.

Het werken met komma 3 vonden ze lastig, zoals

$$10 = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{3} \quad \text{en} \quad 20 = \frac{3+3}{3}.$$

Er zijn ook getallen, 8 onder andere, die op veel manieren gemaakt kunnen

worden. Een paar varianten: $3! + \frac{3!}{3}$, $\left(\frac{3!}{3}\right)^3$ en $\left(\sqrt{\frac{3!}{3}}\right)^{3!}$.

Het is aardig om nog naar andere varianten te zoeken. Natuurlijk vraagt u zich af of je 3 ook kunt vervangen door 5 of 7. Bij de getallen 0, 1 en 2 is het kopieerwerk. De andere getallen vergen vast een andere aanpak. Wederom een uitdaging. Na een korte pauze gaan de leerlingen in het laatste uur in tweetallen aan het werk. Helaas komen ze niet toe aan het bewijs van 'altijd 1089'. Alle energie en tijd zijn gaan zitten in getallen maken met precies drie drieën.

Tot slot

Voor de leerlingen waren het twee lesuren met veel afwisseling. Zij beten zich vooral vast in het werken met drie drieën. Een collega heeft dat zelfs uitgeprobeerd in de brugklas, met succes. Hij mailde mij: 'Ik heb in de brugklas een *hype* ontketend, want ze zijn massaal aan de slag gegaan om alle twintig getallen te vinden.'

Noten

- [1] Omslag VPRO gids. Zie ook het boek VPRO gids *Covers* verschenen in 2011, met hoogtepunten uit 85 jaar omslagontwerpen voor het VPRO-programmablad.
- [2] *Pythagoras*, 32, 6, 1993
- [3] *Pythagoras*, 16, 2, 1976
- [4] *Pythagoras*, 40, 6, 2001

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
 E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

TEGENVOETER

TOETSEN

Roland Meijerink

Kia ora! Mijn naam is Roland Meijerink, ik ben 33 jaar en sinds eind januari docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek ga ik u regelmatig op de hoogte houden van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.



De vorige keer vertelde ik iets over het curriculum op mijn school, in de bovenbouw *NCEA* geheten. Om een niveau af te ronden moet een leerling aan het eind van het jaar grofweg tachtig studiepunten (*credits*) hebben behaald, waarbij een studiepunt voor een studiebelasting van tien uur staat. Deze punten kunnen worden behaald door per onderwerp een toets af te leggen. Voor wiskunde zijn dat per jaar tussen de 18 en 24 punten, of 2 tot 5 punten per toets. Sommige toetsen (*internals*) worden gedurende het jaar door de school zelf geproduceerd en afgenomen. Deze zijn vergelijkbaar met repetities of schoolexamens. De *externals* in het vierde kwartaal zijn vergelijkbaar met de Nederlandse centraal schriftelijke examens. Deze worden niet alleen extern gefabriceerd, maar ook extern door zogeheten *moderators* nagekeken en (opvallend!), er wordt door ingehuurd krachten gesurveilleerd. Voor beide soorten toetsen geldt dat het resultaat niet becijferd wordt, maar ingedeeld in een categorie: onvoldoende (*not achieved*); voldoende (*achieved*); goed (*achieved with merit*) of zeer goed (*achieved with excellence*). Als een leerling binnen een vak veel goede resultaten behaalt, kan het diploma met een aankeuring (*endorsement*) worden behaald. Met het oog op een (universitaire) vervolgopleiding en een bijbehorende studiebeurs kan zo'n aantekening van groot belang zijn. De beoordelingscriteria staan per onderwerp in algemene

termen beschreven in de zogeheten *standards*. Per toets worden die algemene zinnen als 'de leerling moet kennis van meetkunde etaleren in het oplossen van problemen en daarbij verbanden leggen' vertaald in concrete eisen als 'een leerling moet de stelling van Pythagoras correct toepassen'. Binnen mijn sectie is de sectievoorzitter (*head of faculty*) in principe verantwoordelijk voor alle toetsen. Hij maakt veel gebruik van toetsen die worden aangeleverd door de vakvereniging en past deze naar onze wensen aan.

Persoonlijk vind ik het beoordelingssysteem wel sympathiek. Cijfers creëren een soort schijnnaauwkeurigheid, terwijl je eigenlijk onderscheid wilt maken tussen leerlingen die 'het' niet, redelijk, goed of zeer goed hebben begrepen. Ook doen cijfers niet altijd recht aan het daadwerkelijke niveau van de leerling. De regels voor *NCEA* bieden in zo'n geval de mogelijkheid ook werk dat tijdens de lessen is gedaan mee te laten tellen in de beoordeling – zolang er maar wordt voldaan aan eisen betreffende authenticiteit en controleerbaarheid. In

een enkel geval kan zelfs werk van buiten de lessen meetellen. Denk bijvoorbeeld aan een leerling, die voor het vak Engels iets met mondelinge spreekvaardigheid moet doen, op

het toetsmoment niet goed presteert, maar eerder in de week voor de hele school een indrukwekkende toespraak heeft voorbereid en gehouden. Van die mogelijkheid heb ik overigens nog geen gebruik gemaakt. Wel heb een leerling regelmatig een *resubmission* laten doen: als hij ergens een 'domme' fout heeft gemaakt, die hij in tweede instantie snel inziet en kan verbeteren, hoeft hij niet de hele toets te herkansen. Zo'n herkansing is overigens bij een *internal* altijd mogelijk, bij onze sectie in de regel binnen twee weken.

Een volgende keer zal ik meer vertellen over de inhoud van de toetsen en over het systeem voor de onderbouw. Tot die tijd kunt u voor meer verhalen terecht op www.tegenvoeters.nl. Vragen of reacties zijn welkom op rmeijerink@karamu.school.nz

'CIJFERS CREËREN EEN SOORT SCHIJNNAUWKEURIGHEID.'

ONDERBOUWWISKUNDEDAG 2015

De OnderbouwWiskundeDag (OWD) is een wedstrijd waarbij teams van derdeklassers de hele dag aan een uitdagende wiskundeopdracht werken. Het open karakter van de opdracht maakt dat de teams een complete weg afleggen van probleemstelling via strategiebepaling, oplossing en argumentatie naar presentatie van de gevonden oplossing. Monica Wijers bespreekt de resultaten van de OWD van 2015.

De opdracht

In 2015 ging de opdracht over het schatten van de omvang van een populatie vissen in een vijver met behulp van de zogenaamde vangst – terugvangstmethode. Bij deze methode wordt eerst een aantal vissen gevangen en gemerkt. Deze vissen worden teruggezet in de vijver. Na enige tijd wordt opnieuw een aantal vissen gevangen. Op basis van het percentage gemerkte vissen in deze tweede vangst wordt de populatie-omvang geschat. In het eerste deel van de OWD-opdracht bedenken en krijgen de leerlingen een aantal verschillende manieren om de populatie-omvang van vissen in een vijver te schatten en ze vergelijken de resultaten van het gebruik van verschillende rekenvoorschriften en formules. Ze werken daarbij zowel met gegevens uit een enkele vangst-terugvangstmeting als met gegevens van meerdere metingen uit dezelfde populatie. Niet alle teams herkennen in het eerste deel van de opdracht dat verschillende rekenmethodes en formules ‘hetzelfde’ zijn. Ze merken wel op dat verschillende formules bij een concreet rekenvoorbeeld hetzelfde resultaat geven, maar zetten niet de stap naar een formele redenering. Dit wijst op beperkt aanwezige *symbol sense*. In kader 1 is de eerste formule afkomstig uit de opdracht, de tweede heeft het team zelf bedacht. De meeste teams zijn in staat dit eerste deel van de opdracht met een voldoende resultaat af te ronden.

Systematisch opzetten en uitvoeren van een simulatie

Bij al deze schatmethoden is er onzekerheid over de mate van nauwkeurigheid van de schattingen, omdat er geen informatie bekend is over de werkelijke populatie-omvang. Het is niet meteen duidelijk of en in welke mate de steekproefomvang van de eerste en de tweede vangst van invloed zijn op de nauwkeurigheid van de schattingen. Om de leerlingen hierover te laten nadenken, gaan ze in het tweede deel van de opdracht met concreet materiaal (spliterwten) een simulatie-experiment opzetten en uitvoeren voor een vangst-terugvangstprocedure. De leerlingen weten dan van tevoren hoeveel vissen (erwten) er in totaal zijn. Door nu de vangst-hervangstprocedure

toe te passen om de populatie te schatten en de schattingen te vergelijken met de werkelijke aantallen, kunnen ze verstandige dingen zeggen over de betrouwbaarheid van de procedure. Het is hierbij de bedoeling om systematisch te werk te gaan en de verschillende variabelen, zoals bijvoorbeeld de populatiegrootte, de omvang van de eerste, tweede en eventueel derde vangst, systematisch te variëren. Idealiter wordt deze variatie onderbouwd vanuit aannames en veronderstellingen. Ook het systematisch noteren van aanpak en meetresultaten hierbij is belangrijk om goed conclusies te kunnen trekken.

De resultaten

Uit de resultaten van dit tweede deel komt een gevarieerd beeld naar voren. Veel teams hebben moeite met het opzetten van een systematisch experiment met onderbouwing en conclusies. Dit resultaat verbaasde ons enerzijds, anderzijds gaf het ons een bruikbaar criterium voor de beoordeling: op welke wijze, met welke onderbouwing is het experiment opgezet en uitgevoerd en welke conclusies zijn er getrokken? Bij het nakijken van het werk van de 26 teams bleek dat het doel van de experimenten vaak niet expliciet wordt vermeld. Er is slechts een klein

Kader 1

Bij deze formule wordt het aantal vissen wat gemerkt is vermenigvuldigd met het aantal gevangen vissen op dag 2. Dit antwoord wordt weer gedeeld door het aantal vissen op dag 2 wat al gemerkt was: $N = (K \cdot n) : k$. Ook hadden we zelfs nog een formule bedacht, maar het antwoord kwam wel op hetzelfde uit als het antwoord uit de eerste formule:

$$N = n(K : k)$$

$$N = \text{schatting}$$

$$n = \text{het totaal aantal gevangen vissen van dag 2 (of dag 3, 4, ...)}$$

$$K = \text{aantal gevangen en gemerkte vissen op dag 1}$$

$$k = \text{het aantal gemerkte vissen, gevangen op dag 2 (of dag 3, 4, ...)}$$

aantal teams dat aangeeft dat ze op deze manier willen testen welke van de formules de beste schatting geeft. In totaal gebruikt ongeveer de helft van de teams ten minste twee verschillende formules bij het maken van de populatieschattingen in het experiment. Ongeveer een kwart van de teams voert alleen losse experimenten uit, waarbij in elk experiment bijna alles wordt veranderd: de populatieomvang, het aantal gemerkte vissen, het aantal vissen in tweede vangst en het aantal herhalingen. Deze teams maken vervolgens per experiment een schatting van de populatie-omvang, waarbij ze vaak maar een van de formules gebruiken. Een deel van de teams trekt expliciet een conclusie op basis van deze tamelijk willekeurige resultaten. Ze concluderen dan bijvoorbeeld dat de vangst-terugvangstmethode niet goed werkt als de schattingen ver af liggen van het getelde aantal. Zie bijvoorbeeld kader 2, werk van leerlingen van een tto-school. Komen de schattingen meer in de buurt van de getelde populatie dan zijn ze wel tevreden over de methode. Hierbij wordt geen verband gelegd met variabelen als de

Kader 2

We simulated the counting of fish with split peas. We marked a random number of peas and picked a number of peas out of the box and wrote down how many marked peas were in there. We do this to prove if this method of counting objects works or not.

1. Total number of peas: 91
Total number of marked peas: 18
Picked 9 peas; marked 1
Picked 14 peas; marked 4
2. Total number of peas: 109
Total number of marked peas: 11
Picked 16 peas; marked 3
Picked 12 peas; marked 1
3. Total number of peas: 100
Total number of marked peas: 10
Picked 11 peas; marked 2
Picked 15 peas; marked 2

Calculations:

1. $\frac{1}{9} = \frac{19}{x}; x = \frac{171}{1} = 171$
 $\frac{4}{14} = \frac{19}{x}; x = \frac{266}{4} = 66,5$
2. $\frac{3}{16} = \frac{11}{x}; x = \frac{176}{3} = 58,6$
 $\frac{1}{12} = \frac{11}{x}; x = \frac{132}{1} = 132$
3. $\frac{2}{11} = \frac{10}{x}; x = \frac{110}{2} = 55$
 $\frac{2}{15} = \frac{10}{x}; x = \frac{150}{2} = 75$

The answers we got from our calculations are not the same as the total number of peas. This shows this is not a reliable method to work with.

$\frac{\text{aantal gepalste}}{\text{aantal gemerkte}} \times \text{wat je in totaal ge markteerd hebt} = \text{Schatting aantal}$

gemerkte vissen	totaal aantal vissen	totaal aantal gepalste vissen	aantal gemerkte gepalste vissen	berekening
10	100	10	1	$\frac{10}{1} \times 10 = 100$
10	100	15	3	$\frac{15}{3} \times 10 = 50$
10	100	25	5	$\frac{25}{5} \times 10 = 50$
10	100	17	3	$\frac{17}{3} \times 10 \approx 57$
13	120	25	3	$\frac{25}{3} \times 13 \approx 108$
13	120	7	0	$\frac{7}{0} \times 13 = \text{K.N.}$
13	120	12	1	$\frac{12}{1} \times 13 = 156$
13	120	8	3	$\frac{8}{3} \times 13 \approx 35$
13	120	10	0	$\frac{10}{0} \times 13 = \text{K.N.}$
16	120	11	1	$\frac{11}{1} \times 16 = 176$
16	120	5	1	$\frac{5}{1} \times 16 = 80$
16	120	10	1	$\frac{10}{1} \times 16 = 160$
16	120	10	3	$\frac{10}{3} \times 16 \approx 53$
16	120	9	2	$\frac{9}{2} \times 16 = 72$
16	135	7	1	$\frac{7}{1} \times 16 = 112$
16	135	10	0	$\frac{10}{0} \times 16 = \text{K.N.}$

figuur 1

grootte van de populatie, het aantal en aandeel gemerkte exemplaren, het aantal terug gevangen vissen en het aantal 'metingen'.

Er zijn ook teams die weliswaar enigszins systematisch variëren, maar die niet aangeven waarom ze de betreffende aantallen kiezen en daar ook in de conclusie – als die er al is – niet naar verwijzen. Zo is er een team dat – zonder toelichting – de volgende vijf situaties onderzoekt:

totaal	waarvan gemerkt
100	10
120	13
120	16
135	16
135	27

Per situatie voeren ze vier, vijf of zes keer een terugvangst uit, op grond waarvan ze de populatie schatten met een van de in de opdracht gegeven formules, zie figuur 1. Dit experimenteerwerk leidt niet tot een conclusie en ook in het advies wordt niet verwezen naar deze resultaten.

Ten slotte is er een zeer klein aantal teams dat duidelijk bewust varieert. In het citaat in kader 3 is te zien hoe de winnaars, een team van het Scala College uit Alphen aan den Rijn, hun manier van variëren onderbouwen. Ze voeren het aantal gemerkte erwten in vijf stappen op van 15 van de 100 naar 59 van de 100, en bij elk aantal voeren ze drie terugvangsten uit. Vervolgens doen ze hetzelfde met een totaal van 20 erwten waarvan er achtereenvolgens 3, 5, 8, 10 en 12 gemerkt zijn. De conclusie blijft weliswaar enigszins impliciet, maar in hun advies geeft het team wel aan dat het van het aantal vissen in de populatie afhangt (boven of onder de 50) welke formule de beste schatting geeft.

We put a total of 100 peas into a little cup. We started marking 15 peas. We took out different amounts to calculate the average. We carefully wrote down our results. Then we repeated the assignment with different numbers that are marked, to make it more accurate and precise. We did the same experiment another time, but instead of using 100 peas, we used 20 to see if the results would be different when a smaller amount of peas is used.

Conclusies

Het systematisch opzetten en uitvoeren van een reeks experimenten om uitspraken te doen over de betrouwbaarheid van verschillende manieren van schatten, is lastig. De derde klas leerlingen die hebben meegedaan aan de OWD 2015 doen pogingen hiertoe, maar de meerderheid komt daarbij niet tot een overtuigende aanpak. Daar zijn natuurlijk allerlei oorzaken voor aan te wijzen. Het kan liggen aan de formulering van de opdracht, die misschien te open of niet duidelijk genoeg was. Het kan ook zijn dat de teams veel meer hebben gedaan dan uiteindelijk in het werkstuk is opgenomen. Het lijkt erop dat de teams geen goed beeld hebben van de te variëren grootheden en van de te verwachten effecten daarvan. De meeste teams lijken de simulaties/experimenten niet te herkennen als middel om uitspraken over de betrouwbaarheid van bepaalde methodes en condities te doen. Dit is ook geen onderbouwstof. Toch zien we dat de leerlingen wel in staat zijn een aanzet te maken. Het lijkt ons een belangrijke vorm van wiskundig denken en een bruikbare vaardigheid zeker in het licht van het toenemend gebruik van grote datasets.

Bronnen

De Haan, D., Doorman, L. M., Jonker, V. en Wijers, M. (2012). De OnderbouwWiskundeDag. *Nieuwe Wiskrant*, 32(1), 12-16.
De Haan, D., Jonker, V., Wijers, M. en Doorman, M. (2013). Pauzes op school. *Euclides*, 89(3), 7-9.
www.uu.nl/onderzoek/freudenthal-instituut/onderwijs/voortgezet-onderwijs/onderbouw-wiskunde-dag (hier zijn de opdrachten van alle OWD's te downloaden)

Over de auteur

Monica Wijers is werkzaam bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. E-mailadres: M.Wijers@uu.nl

VERSCHENEN

INVERSIE



Ondertitel: Spiegelen in lijn en in cirkel

Auteur: Jacques Jansen

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015),
Zebrareeks deel 45

ISBN: 978-90-5041-149-3

Prijs: € 10,00 (72 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

In dit Zebraboekje leer je spiegelen, niet alleen in een lijn maar vooral in een cirkel. Je gaat na hoe je een schaakbord binnenstebuiten kunt keren. Je zult ontdekken dat oude meetkundige problemen van ver voor de geboorte van Christus met inversie fraai op te lossen zijn. Ook kom je het Raakprobleem van de Griekse meetkundige en astronoom Apollonius van Perga (262 – 190 v.Chr.) tegen: 'Hoe construeer je cirkels die drie gegeven cirkels raken?' Je leert hoe je een apparaat kunt ontwikkelen dat een cirkelbeweging kan omzetten in een rechtlijnige beweging. Door het maken van veel opgaven, vaak met het inzetten van het computerprogramma *GeoGebra*, maak je kennis met de eigenschappen van inversie.

UITDAGING

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A^o 19 $\frac{48}{49}$

Deze keer twee opgaven uit 1948/1949 die mooi passen in het nieuwe vwo-programma. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1

De hoogtelijnen AD en BE van de driehoek ABC worden door het hoogtepunt H zodanig verdeeld dat $AH = HD$ en $BH = 4HE$. Men vraagt de hoeken van driehoek ABC te berekenen.

Opgave 2

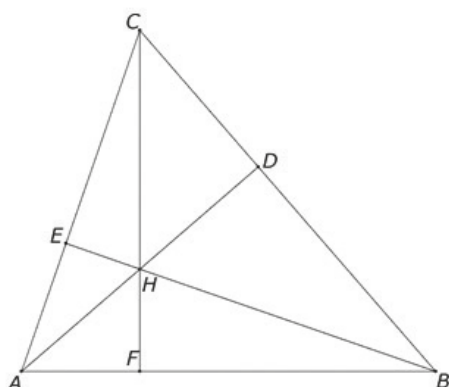
In driehoek ABC ligt op de basis AB een punt D . De bissectrice van $\angle A$ snijdt CD in P , de bissectrice van $\angle B$ snijdt CD in Q . P ligt dicht bij C dan Q . Gegeven is dat $CP = PQ = QD$; $\angle ACD = \gamma_1$, $\angle BCD = \gamma_2$, $\angle ADC = \delta_1$.

- Bewijs dat $\sin \gamma_1 = 2 \sin \delta_1$
- Bewijs dat $\sin \gamma_1 = 4 \sin \gamma_2$
- Bereken $\angle A$ en $\angle B$, als gegeven is dat $\angle ACB = 90^\circ$

Lukt het u verder?

En een extra vraag achteraf: Hoe heeft de maker van de eerste opgave deze wellicht gecomponeerd?

figuur 1

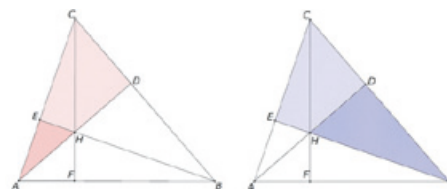


Opgave 1 – zie figuur 1 voor een werkschets.

Een inventarisatie:

- er zijn gelijkvormige driehoeken aanwezig, waarvan verbanden tussen zijden gegeven zijn; zouden deze ons verder kunnen helpen?
- stel $HE = 1$, dit mag zonder de algemeenheid te schaden. Dan is $BH = 4$;
- Descartes' aanpak: stel bijvoorbeeld $AH = HD = x$.

Probeer het nu even?



figuur 2

Zie figuur 2: driehoek AHE is gelijkvormig met driehoek ACD (hh). Dat geeft

$$(1) \dots \gamma = \angle AHE, \text{ dus } \cos \gamma = \cos \angle AHE = \frac{1}{x}$$

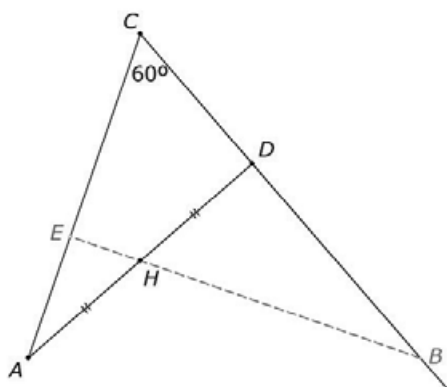
En driehoek BDH is gelijkvormig met driehoek BCE (hh). Dat geeft

$$(2) \dots \gamma = \angle BHD, \text{ dus } \cos \gamma = \cos \angle BHD = \frac{HD}{BH} = \frac{x}{4}$$

Uit (1) en (2) volgt: $x = 2$. Dan is $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, dus $\gamma = 60^\circ$, en $\angle CAD = \angle CBE = 30^\circ$. Nu kan meteen de lengte van AE en BD worden bepaald in de aanwezige 30° - 60° - 90° -driehoeken: $AE = \sqrt{3}$ en $BD = 2\sqrt{3}$.

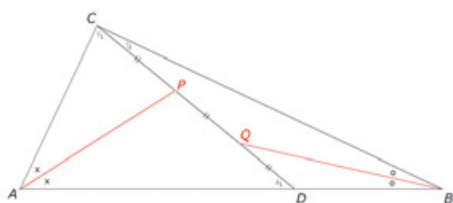
$$\text{Dus } \tan \angle BAD = \frac{BD}{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{4}; \angle BAD \approx 40,89^\circ;$$

$\angle BAC \approx 70,89^\circ$. De derde hoek van driehoek ABC mag u zelf doen. Hoe deze opgave wellicht bedacht is? Als toets-



figuur 3

constructeur gebruik je vaker de omgekeerde truc: begin met een fraaie beginsituatie (in dit geval met een tophoek C van 60°), kies punt A op het ene been en trek hoogtelijn AD , zie figuur 3. Gebruik het midden van AD als hoogtepunt, waarmee de driehoek ABC vast ligt. Onderzoek nu welke extra gegevens je in deze driehoek kunt ontdekken. Je vindt dan snel dat $HE = \frac{1}{2}AH$ en $BH = 2DH$, en de opgave is klaar, en kan zoals gegeven worden omschreven.



figuur 4

Opgave 2 – zie figuur 4 voor een werkschets.

Een inventarisatie:

- omdat gegeven is hoe in de driehoeken ADC en BDC de bissectrices de zijde CD verdelen in verhouding 1:2, zou de bissectricestelling je dan misschien verder kunnen helpen?
 - is de cosinusregel hier inzetbaar, of de sinusregel?
- Kunt u hier iets mee?

De bissectricestelling geeft in driehoek ACD de verhou-

ding $\frac{AC}{AD} = \frac{CP}{DP} = \frac{1}{2}$. De sinusregel in deze driehoek

geeft $\frac{AC}{\sin \delta_1} = \frac{AD}{\sin \gamma_1}$, dus $\frac{AC}{AD} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \gamma_1} = \frac{1}{2}$.

Hiermee is onderdeel a af.

Hoe kan γ_2 hierbij betrokken raken in onderdeel b?
Lukt dat u?

Dit kan op een analoge manier. De bissectricestelling

geeft in driehoek BCD de verhouding $\frac{BC}{BD} = \frac{CQ}{DQ} = \frac{2}{1}$.

De sinusregel in deze driehoek geeft $\frac{BC}{\sin \delta_2} = \frac{BD}{\sin \gamma_2}$.

Omdat $\delta_1 = 180 - \delta_2$, is $\sin \delta_2 = \sin(180^\circ - \delta_1) = \sin \delta_1$.

Dus $\frac{BC}{BD} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \gamma_2} = \frac{2}{1}$, zodat $\sin \delta_1 = 2 \sin \gamma_2$. Wanneer je

dit invult in het antwoord van onderdeel a, is hiermee ook onderdeel b beantwoord.

Bij onderdeel c weten we dus: $\sin \gamma_1 = 4 \sin \gamma_2$ én $\gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1$. Uit de laatste betrekking volgt $\sin \gamma_2 = \sin(90^\circ - \gamma_1) = \cos \gamma_1$, zodat $\sin \gamma_1 = 4 \cos \gamma_1$, dus $\tan \gamma_1 = 4$, dus $\gamma_1 = 75,97...^\circ$. De betrekking van vraag a geeft dan $\delta_1 = 29,017...^\circ$, zodat $\angle BAC = 180^\circ - 75,97...^\circ - 29,017...^\circ \approx 75,019^\circ$. $\angle ABC$ mag u zelf doen.

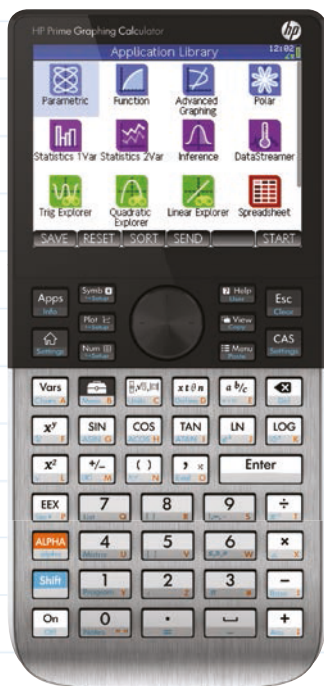
De tweede opgave is een aardige toepassing van de combinatie van de bissectricestelling en de sinusregel. In de klas kan de opgave worden uitgebreid. Geef bijvoorbeeld dat $AB = 6$, en vraag de lengtes te bepalen van alle lijnstukken.

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl



New Body & New Brain

HP Prime



Geen upgrade van een bestaande machine, maar een nieuwe processor, veel geheugen en het beste scherm.

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met een touchscreen scherm
- Krachtige applicaties o.a. voor Functie-onderzoek, plotten van impliciete functies, Spreadsheet, Meetkunde, Statistiek, CAS en meer!
- Schets een functie met uw vinger op het scherm, waarbij HP Prime het functievoorschrift genereert
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief emulator (dus ook voor uw leerlingen)!

Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop of demo-units neemt u contact op met **p.schadron@hp-prime.nl**



MET JESSE IN HET MATHEMATIKUM

Tijdens een werkweek met 4 havo bezocht Ab van der Roest het *Mathematikum* in het Duitse Gießen. Vooraf was hij bang dat leerlingen niet geïnteresseerd zouden zijn, maar dat viel gelukkig mee. Vooral Jesse maakte het bezoek en ook zijn dag goed.

In het *Mathematikum* hangt een plaat met daarop de tekening van een parabool met vergelijking $y = x^2$. In de punten met coördinaten $(-10, 100)$, ..., $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, ..., $(10, 100)$ is een spijker geslagen. Over twee spijkers hangt een touwtje. Het verbeeldt als het ware een lijn tussen twee punten, één met een negatieve x -coördinaat en één met een positieve. Het snijpunt met de y -as kon afgelezen worden. Het touwtje is zo lang, dat ook de x -coördinaten van de punten aangegeven worden, zie figuur 1. Als het touwtje bijvoorbeeld hangt om een spijker in punt $(-5, 25)$ en om een in $(3, 9)$, dan snijdt deze de y -as in $(0, 15)$. Een touwtje om de spijker in $(-4, 16)$ en in $(1, 1)$ heeft als snijpunt $(0, 4)$.



figuur 1

Er was geen bijschrift en toen Jesse me vroeg wat de betekenis was, wist ik het niet meteen. Hij keek nog eens goed en riep toen: 'Ik weet het, het snijpunt van het touwtje is hetzelfde als het product van de x -coördinaten van de punten!' Nou ja, er moet wel een minteken bij. Is dit dan altijd waar? De mogelijkheden werden onderzocht, en steeds klopte het vermoeden. Een stelling moet bewezen worden en dat hebben we gedaan. We leenden een stukje papier en een pen van het *Mathematikum*. Het bewijs is niet moeilijk.

Neem de punten (a, a^2) en (b, b^2) . Van de lijn die door deze twee punten gaat stellen we de vergelijking op.

$$rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = b + a.$$

Je krijgt dus $y = (b + a)x + n$. Het punt (a, a^2) invullen geeft: $a^2 = (b + a)a + n$ en $n = a^2 - ab - a^2 = -ab$.

Vergelijking van de lijn is dus $y = (b + a)x - ab$ en de stelling is bewezen. Een variant op dit bewijs (meer geschikt voor vwo-leerlingen). Bereken de snijpunten van de parabool $y = x^2$ en de lijn $y = ax + b$.

We gebruiken de substitutie methode en lossen de vergelijking $x^2 = ax + b$ op:

$$x^2 = ax + b$$

$$x^2 - ax = b$$

$$\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 = b + \frac{1}{4}a^2$$

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$$

We vermenigvuldigen de x -coördinaten met elkaar en dat geeft:

$$\left(\frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}\right)\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}\right) = \frac{1}{4}a^2 - b - \frac{1}{4}a^2 = -b.$$

Klaar.

Dit is meteen ook in te zien als je bedenkt dat de som van de oplossingen van de algemene vergelijking van de

tweede graad $ax^2 + bx + c = 0$ gelijk is aan $-\frac{b}{a}$ is en het product $\frac{c}{a}$.

In een werkweek zo met een leerling in gesprek over een stelling in de wiskunde vind ik een bijzonderheid. *Mathematikum* bleek voor veel leerlingen een goede keuze. Ze vonden het erg leuk en voor sommigen was het ook leerzaam. Het geeft inspiratie om te onderzoeken. Nu denkt u misschien dat het bijzondere leerlingen zijn. Dat zijn ze, want 's avonds kwam er een zeer verontwaardigde en boze beheerder van de jeugdhoeve klagende over mijn leerlingen en werden we bijna gesommeerd de koffers te pakken. De leerlingen hadden een stoel (die volgens hen kapot was) uit het raam gegooid en verbrand op het kampvuur. Een gedenkwaardige dag.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

WIJ ZIJN **KLAAR** VOOR DE **NIEUWE EXAMENS**

HAVO 2018 EN VWO 2019

U kunt kiezen uit deze drie grafische rekenmachines.
Mét door het CvTE goedgekeurde examenstand*



Binnenkort volgt meer informatie. Kom naar de NVVW Jaardag!
Of neem direct contact op met educatief consultant Jurgen Schepers j-schepers@ti.com.

* Voor de TI-Nspire™ CX geldt de voorwaarde dat de examenstand uit moet staan bij binnenkomst van de examenruimte.
Dat dient te worden gecontroleerd. Maar dat was u waarschijnlijk toch al van plan.



OPROEP



Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) roept enthousiaste collega's op te solliciteren naar de functie van

Eindredacteur van Euclides

ter vervanging van Marjanne Klom, die na een aantal jaren deze taak graag wil overdragen. De redactie bestaat uit enthousiaste collega's, die elk op hun eigen terrein bijdragen leveren aan ons mooie blad.

De eindredacteur zorgt onder andere voor

- het verbeteren en corrigeren van spelfouten in artikelen;
- het controleren of illustraties gebruikt kunnen worden;
- het aanleveren van formules in artikelen aan de vormgever;
- het ondersteunen van de hoofdredacteur bij diverse werkzaamheden;
- het onderhouden van de contacten met vormgever.

Er vindt nauw overleg plaats met de andere leden van de (kern)redactie, die daartoe enkele malen per jaar bij elkaar komen.

Het spreekt vanzelf, dat de eindredacteur beschikt over de volgende eigenschappen

- de Nederlandse taal goed beheerst;
- werkzaam is in het onderwijs;
- stressbestendig is in verband met deadlines;
- goede contactuele vaardigheden bezit.

Het betreft een prachtige, uitdagende en voldoening gevende functie, die de nodige tijd vraagt. Daarom stelt het bestuur een detachering van omstreeks 1 dag per week ter beschikking. Dit betreft meestal 0,2 wtf.

Nadere inlichtingen omtrent de werkzaamheden kunnen worden ingewonnen bij de redactievoorzitter Henk Rozenhart. E-mailadres: h.rozenhart@nvww.nl. Tel: 072-5716448

Sollicitatiebrieven met Curriculum Vitae dienen voor 23-11-2015 te worden gemaild aan de secretaris van de NVvW, de heer C. Garst. E-mailadres: secretaris@nvww.nl

VERSCHENEN

BASISKENNIS EN BASISVAARDIGHEDEN



Auteurs: Anne Kaldewaij en Arjen Valstar
Uitgever: Syntax Media, Utrecht (2015), Reeks
Wiskunde voor Bachelor en Master, deel 1
ISBN: 978 94 91764 09 7
Prijs: € 23,00 (166 pagina's; paperback)

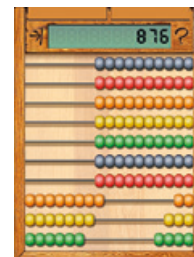
Van de achterkaft

Dit boek lost de aansluitingsproblemen op in het hoger onderwijs op het gebied van wiskunde. Je leert er goed mee rekenen en met formules omgaan. Het biedt zonder poespas en in een toegankelijke schrijfstijl een gedegen basis voor een succesvolle studie in het hoger onderwijs. Door adequate uitleg, vele voorbeelden en opgaven wordt de student stap voor stap naar een hoog niveau geleid. Je kunt het boek geheel zelfstandig doorwerken. De antwoorden van de opgaven zijn achter in het boek opgenomen. Op de website van de uitgever staan uitgebreide uitwerkingen van alle opgaven. Het boek is ook goed bruikbaar bij de voorbereiding van het examen Wiskunde B en voor hen die hun wiskunde 'van vroeger' willen ophalen. Op zorgvuldige wijze is met de aanpak van toen een boek voor deze tijd samengesteld. Dit is het eerste deel van de nieuwe serie *Wiskunde voor bachelor en master*. Het richt zich specifiek op algemene wiskundige basiskennis en basisvaardigheden: van het rekenen met getallen en letters tot het vlot en foutloos differentiëren van functies.

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

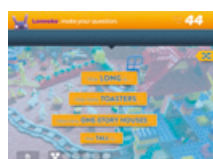
QUASIMATE!

Lonneke Boels



Een van de leerdoelen van het reken- en wiskundeonderwijs is om leerlingen te leren hun antwoord eerst te schatten. Het nut van schatten kan zijn om een antwoord te controleren of te gebruiken in situaties waarbij gegevens ontbreken, zoals in het dagelijks leven vaak het geval is. Lonneke Boels vond een spel dat deze vaardigheid oefent.

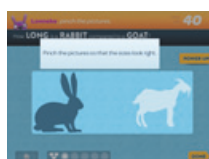
Bij het spel *Quasimate!* is schatten precies wat er wordt gevraagd. Je kiest steeds zelf een deel van je vraag. Bijvoorbeeld: hoe lang is...? of hoe breed is...? Daarna kies je een voorwerp of gebied, zoals een speelkaart of Europa. Je krijgt dan de vraag die je moet beantwoorden. Bijvoorbeeld: hoe lang is een speelkaart. Of er komt nog een zinsdeel achter waardoor je twee zaken moet vergelijken, bijvoorbeeld: hoe lang is een speelkaart vergeleken met een voetbal? Met je vingers maak je de speelkaart op het scherm (een rechthoek) kleiner dan de voetbal (een cirkel). De hoogte van een voetbal blijkt 2,5 keer die van een speelkaart te zijn. De vragen zijn in het Engels.



figuur 1 Zelf de vraag samenstellen



figuur 2 Een makkelijke vraag



figuur 3 Een iets moeilijker vraag

Als je dicht bij het juiste antwoord bent, krijg je 300 punten, iets verder er vandaan is 200 punten en nog verder weg 100 punten. Zit je helemaal mis dan krijg je geen punten. Daarna begint het proces van vraagtypen kiezen opnieuw. Twijfel je aan het correcte antwoord? Klik op *really?!* en er komt uitleg over de gegevens, bijvoorbeeld via Wikipedia. Er staat ook bij welke eenheden gebruikt zijn, cm bijvoorbeeld. De bronnen zijn soms wel erg uitgebreid of de informatie is er niet of niet eenvoudig te vinden. Bij de bal van voetbal (*soccer*) wordt verwezen naar de Wikipedia pagina van *football* (rugby).

Je begint met vier 'levens'; elke grote fout kost je een leven en dan krijg je een nieuwe vraag over hetzelfde onderwerp (bijvoorbeeld snelheid). Je moet in totaal vijf vragen goed hebben; één van elk onderwerp. De vragen gaan bijvoorbeeld over de snelheid van een fietser, de grootte van landen of gebieden ten opzichte van elkaar, geschiedenis (wanneer is iets uitgevonden) en lengte van dieren ten opzichte van elkaar. Met het goed beantwoorden van een vraag, kun je ook 'schatten' verdienen.

Dan kun je bijvoorbeeld een plaatje opvragen van een 'huishoudtrap'. Die blijkt veel groter te zijn dan het keukentrapje dat ik in gedachten had.

Pluspunten

- leuk spel voor wie van Triviant-achtige vragen houdt;
- de moeilijkheidsgraad van de vragen verschilt en hangt ook af van je eigen ervaringen, dit maakt het spel voor veel leeftijden geschikt;
- je kunt het ook tegen elkaar spelen;
- er is een reclamevrije gratis variant. Deze stelt uit elke *quest* een vraag;
- via de website is extra support beschikbaar en je kunt jezelf als docent registreren voor gebruik op school;
- door het gebruik van het metrieke stelsel geschikt voor Nederland.

Minpunten

- het lijkt soms te veel op een kennisquiz in plaats van een manier om te leren schatten;
- methoden om te leren schatten moeten apart met leerlingen worden (na)besproken om het leereffect te vergroten;
- de vragen en het spel zijn in het Engels. Leerlingen moeten bijvoorbeeld weten dat *long* de horizontale lengte is (wat leerlingen in een plaatje misschien breedte zouden noemen) en *tall* de verticale lengte of hoogte. In het Nederlands wordt met de lengte van een konijn meestal de hoogte bedoeld;
- de geschiedenisvragen hebben weinig met getalgevoel en schatten binnen rekenen/wiskunde te maken.

Eindoordeel: aanschaffen

Geschikt voor: groep 8 basisschool, vmbo, havo, vwo.

Kosten: gratis of € 1,99 voor één quiz, € 3,99 voor twee quizen, € 5,99 voor vier quizen.

Getest op: iPad met iOS 8.3.

Meer informatie: www.motionmathgames.com

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundeleraar op het Christelijk Lyceum Delft. E-mailadres: L.Boels@chrlyceumdelft.nl



Toen bleek dat Daan en Sanne niet konden rekenen ging er een schok door onderwijsland. Het kan en mag niet zo zijn dat leerlingen slecht kunnen rekenen. Een uitgebreide discussie volgde. In dit stuk willen we de stand van zaken beschrijven en suggesties voor de toekomst noemen.

Tot nu

Zoals gezegd, het kan en mag niet zo zijn dat leerlingen slecht kunnen rekenen. Gelukkig is er flink ingezet om de situatie van een rekenachterstand bij leerlingen aan te pakken. Een steunpunt Taal en Rekenen is opgezet. De NVvW leidde het project *RekenVoort*. Referentieniveaus zijn beschreven. Digitale toetsen zijn ontwikkeld. Het resultaat van de toets staat in de slaag/zakregeling. Er zijn syllabi horende bij de verschillende referentieniveaus geschreven. Een raamwerk om de nascholing voor docenten te organiseren, is ontworpen. Er is zo stevig ingezet op het wegwerken van de rekenachterstanden dat het wel lijkt of er een compleet nieuw vak in het voortgezet onderwijs is ontstaan. Dat vak, rekenen, telt dan ook nog eens prominent mee als het gaat over het behalen van het diploma. Het was niet duidelijk wie de docenten voor dat vak zouden moeten zijn. Gevolg: voor de NVvW was het niet vanzelfsprekend dat zij het loket voor het rekenonderwijs was. Dezelfde redenering werd gevoerd door de vakverenigingen van vakken zoals natuurkunde, scheikunde, economie, biologie en aardrijkskunde. Wie dus een gesprek wilde voeren met leraren die belast waren met rekenen vond geen georganiseerd aanspreekpunt. Daarbij valt wel op te merken dat elk van de genoemde vakken er baat bij heeft tijd in te ruimen voor rekenen.

Onder druk van de rekentoets gingen scholen op diverse manieren aan de slag om het rekenonderwijs te organiseren. Veel scholen achtten wiskundeleraars het best in staat om het rekenonderwijs te verzorgen. Soms ging dit zelfs ten koste van een lesuur wiskunde. Hier komen de leden van de NVvW in beeld. De NVvW is nu aan zet.

Is de wiskundeleraar het best in staat om rekenonderwijs te verzorgen? Een vraag met meer mogelijke antwoorden. Kijk in de wiskundeboeken van klas een en twee havo/vwo en bekijk het volledige curriculum van het vmbo. Daarin komen voortdurend onderwerpen aan de orde die ook onderdeel zijn van het rekenprogramma. Kijken we om ons heen, dan zien we geen enkel land waar rekenen en wiskunde twee aparte vakken zijn. Maar als we de opleiding tot wiskundeleraar bekijken dan zien we weinig aandacht voor rekendidactiek. Er is bovendien een gapend gat tussen de basisschool-rekendidactiek en de didactiek in het voortgezet onderwijs.

NVvW in overleg

In januari 2015, na het verschijnen van het rapport van de commissie Steur, laaide de discussie over de rekentoets weer op. Steeds weer de toets... Toen is de NVvW met een reactie op de situatie gekomen door te proberen via een andere kijk op de zaak het denken over het rekenen nieuw leven in te blazen. Door de discussie naar het rekenonderwijs te verleggen en door aandacht te vragen voor het gegeven dat de verschillende onderwijsniveaus een eigen aanpak vereisen. Dit alles vanuit de gedachte 'Onderwijs leerlingen die zaken waar ze last van hebben als ze dat niet weten.' In de gesprekken die we als bestuur met vertegenwoordigers uit de politiek en met het ministerie voerden, bleek dit nieuwe licht op de rekenzaak een welkome toevoeging. De NVvW werd geaccepteerd als vertegenwoordiger van het reken- en wiskundeonderwijs voor het voortgezet onderwijs. Hierdoor kan de NVvW meedenken over de vorm die het rekenonderwijs in de toekomst moet krijgen en over de vorm en inhoud waarin de rekenvaardigheid van de leerlingen getoetst zou kunnen worden.

Verder

Intussen zijn er feiten te melden. In september 2015 is door het ministerie van OCW en NVvW een traject gestart om te bekijken of het vmbo-curriculum wiskunde meer toekomstgericht kan worden gemaakt. Het vmbo ondergaat ingrijpende veranderingen en wiskunde en rekenen kunnen deel uitmaken van die veranderingen. Verder maakt de NVvW bij de vertegenwoordigers van de scholen,





de vo-raad, duidelijk dat rekenen bij de wiskundelessen een uitbreiding van het aantal wekelijkse lessen voor de leerlingen betekent. Daar ligt nog wel werk. Daarnaast bleek uit een tussenrapportage (juni 2015) van het ministerie van OCW dat op 300 scholen het rekenen niet goed op orde was.

Tot slot

Er is nog een lange weg te gaan: maak rekenen, net als taal, een duidelijker onderdeel van alle vakken. Wellicht kan de rekendiscussie van de laatste jaren juist leiden tot het bereiken van dit doel. Dan zijn we als nog beter geworden in leerlingen wiskunde leren en hen voor te bereiden op een goed burgerschap.

Over de auteurs

Swier Garst is voorzitter en Ebrina Smallegange is bestuurslid van de NVvW. E-mailadressen: voorzitter@nvvw.nl en e.smallegange@nvvw.nl

NOTULEN VAN DE NVvW-JAARVERGADERING

ZATERDAG 8 NOVEMBER 2014, VEENENDAAL

Kees Lagerwaard

Opening

Voorzitter Marian Kollenveld opent de jaarvergadering. Ze heet allen van harte welkom. Een speciaal welkom is er voor de aanwezige ereleden van onze vereniging en voor vertegenwoordigers van de NVON en onze Vlaamse zustervereniging. Over erelid Jan Maassen meldt ze dat het zijn vijftigste achtereenvolgende jaarvergadering is.

Jaarrede

De voorzitter spreekt de jaarrede uit. De volledige tekst van de jaarrede is terug te lezen in *Euclides* nummer 3 jaargang 90.

Notulen

De notulen van de jaarvergadering 2013 worden zonder vragen of opmerkingen vastgesteld.

Jaarverslagen

Over het NVvW-jaarverslag van verenigingsjaar 2013-2014 wenst geen der aanwezigen het woord. Ook het jaarverslag *Euclides* jaargang 89 lokt geen vragen of opmerkingen uit. De twee jaarverslagen worden vastgesteld onder dankzegging aan de auteurs Marjanne de Nijs en Kees Lagerwaard.

Financiën

Penningmeester Gert de Kleuver geeft een toelichting op onze goede financiële situatie. Zijn relaas over de balans met een nadelig saldo van een kleine veertig mille is zo helder dat niemand hierover een vraag heeft. Gert spreekt zijn dank uit aan Elly en Pim van Bommel voor het vele en goede boekhoudkundige werk dat zij jarenlang hebben verricht. Ook de uitleg over de exploitatierekening en de begroting lokt geen vragen uit. Het bestuur stelt voor de contributie ongewijzigd te laten, behalve de korting voor dubbelleden. Dat zijn leden van zowel het KWG als de NVvW. De korting voor hen wordt verlaagd naar 20 euro, gelijk aan de korting die het KWG hanteert. De kascontrolecommissie heeft geen onregelmatigheden geconstateerd, waarna de penningmeester onder applaus wordt gedechargeerd.

Bestuursverkiezing

Marian meldt dat Douwe van der Kooi aftredend is en herkiesbaar. Er zijn geen tegenkandidaten, zodat Douwe kan worden herkozen. Ook Kees Lagerwaard is aftredend, maar hij is niet herkiesbaar. Hij wordt door de voorzitter bedankt voor zijn secretariaatswerkzaamheden in de afgelopen zes jaar. Vervolgens neemt bestuurslid Henk Rozenhart het woord. Voorzitter Marian Kollenveld treedt af. Henk noemt dit een belangrijk moment in de geschiedenis van onze vereniging. Marian is 23 jaar lid geweest van het bestuur en daarvan heeft zij 16 jaar de rol van voorzitter vervuld. Haar invloed op het Nederlandse wiskunde onderwijs is groot geweest. Zo groot dat het ondoenlijk is om de lijst van prestaties hier op te sommen. Henk noemt er slechts twee als voorbeeld: het bestaan van het vak wiskunde D en de invloed van leraren bij het tot stand komen van nieuwe examenprogramma's. Onder het voorzitterschap van Marian heeft de NVvW de blik veel meer naar buiten gericht en is daarmee een belangrijker speler geworden in het wiskunde-onderwijs. Henk stelt voor om, als blijk van waardering en dank, Marian tot erelid van de NVvW te benoemen. Een minutenlange staande ovatie maakt duidelijk dat de leden daar van harte mee instemmen. Voorts worden de voorgestelde kandidaten Ebrina Smallegange, Kees Garst en Swier Garst tot bestuurslid benoemd.

Rondvraag

Hiervan wordt geen gebruik gemaakt.

Sluiting

Henk Rozenhart sluit de jaarvergadering en geeft het woord aan Henk van der Kooij voor het inleiden van de studiedag.

Alweer verrijkt. Nog steeds gratis.

www.dukohamminga.nl

Onze website breidt zich steeds weer uit met superpraktische kaarten.

Zet deze kaarten op een eigen **prikbord** en deel het met collega's en/of leerlingen.

Wat een gemak!

math4all.nl

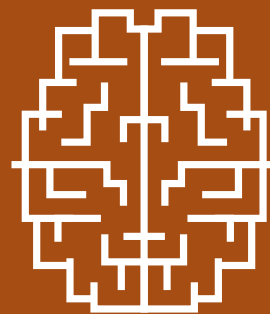


Math4all

Gratis, maar niet goedkoop.

PUZZEL 91-2

SPELEN MET HELEN



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Dhr. J. Meerhof bracht ons op het idee om eens naar driehoeken ABC te kijken met zijden a , b en c en een hoektransversaal $CD = d$, waarbij D de zijde $AB = c$ in twee stukken p en q verdeelt. Daarbij was de eis dat de lengtes van a , b , c , d , p en q allemaal gehele getallen zijn.

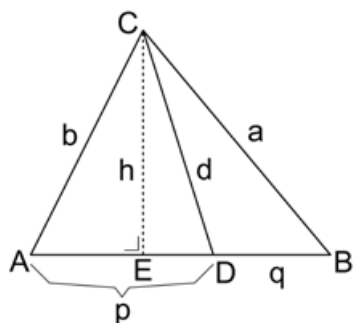
Hij schreef: 'Als ik mijn leerlingen wil laten werken aan zo'n figuur, dan wil ik dat deze lengtes geheel zijn. En de vraag is: hoe doe ik dat?' Hij gaf een, volgens hem 'flauwe' oplossing door drie Pythagorasdriehoeken te combineren tot een driehoek met transversaal CD . De hoogtelijn CE is dan meteen ook geheel, zie figuur 1. Een leukere oplossing die hij beschreef zijn 'willekeurige' driehoeken met a , b en c geheel en $\angle ACD = \angle B$. In dat geval is de hoogtelijn niet per se geheel, maar d , p en q zijn in elk geval rationale getallen. De driehoek kan dan worden uitvergroot tot ook d , p en q geheel zijn, zie figuur 2.

De volgende vraag die hij stelde was: 'Zijn dit alle mogelijkheden of zijn er meer en hoe bepalen we die dan?' Daarmee gaan we nu aan de slag, met in opgave 2 een uitstapje naar het tekenen van geheeltallige driehoeken op roosterpunten. Het geheel kan van praktisch nut zijn als u zelf opgaven wilt maken met geheeltallige figuren.

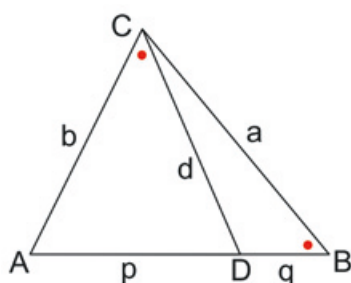
Opgave 1 – Toon aan dat als de lengtes a , b en c geheeltallig en $\angle ACD = \angle B$, dan zijn d , p en q rationale getallen (figuur 2).

Als de hoekpunten van een driehoek op roosterpunten van een rechthoekig rooster liggen wordt er in de onderbouw soms een zo klein mogelijk rechthoekig lijstje omheen getekend, om zo de oppervlakte te berekenen. De zijden van dat lijstje zijn dan roosterlijnen. Het maken van zo'n driehoek is niet moeilijk, maar wat als we dat willen doen met een driehoek met gegeven zijden? Dat lukt niet altijd, maar in elk geval wel als de zijden a , b en c en de oppervlakte gehele getallen zijn.

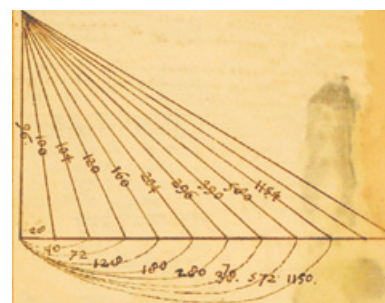
Opgave 2 – De driehoeken met zijden 13, 14, 15 en 5, 29, 30 hebben een geheeltallige oppervlakte. Bepaal de ligging van die driehoeken zodat A , B en C op roosterpunten liggen.



figuur 1



figuur 2



figuur 3

Om een driehoek te maken zoals in figuur 1, zoeken we drie Pythagorasdriehoeken met elk een gehele rechthoekszijde gelijk aan de hoogte $CE = h$. De manier waarop we deze driehoeken kunnen vinden is al heel oud. Een mooi voorbeeld is figuur 3, waar negen geheeltallige rechthoekige driehoeken (niet op schaal) zijn getekend met hoogte 96. Van nog twee driehoeken zijn de maten niet gegeven.

Opgave 3 – Onderzoek of die laatste twee driehoeken in figuur 3 ook geheeltallig kunnen zijn en of er eventueel nog meer zijn. Geef daarbij aan hoe u dit handig kunt berekenen.

Maar we hoeven niet per se drie Pythagorasdriehoeken te gebruiken om een driehoek met transversaal te maken waarvan alle lijnstukken rationaal zijn. Het kan ook met 3 ‘gewone’ rechthoekige driehoeken, mits hun hoogte h gelijk is en de andere zijden rationaal. Die hoogte h is dan meestal niet rationaal, maar h^2 is dat wel. Er zijn dan oneindig veel rechthoekige driehoeken te vinden met één rechthoekszijde gelijk aan h en de andere twee zijden rationaal.

Opgave 4 – Bepaal minstens vijf verschillende rechthoekige driehoeken met $h = \sqrt{15}$, waarvan de andere twee zijden rationaal zijn.

(Nog mooier is natuurlijk: geef een recept voor oneindig veel verschillende zulke rechthoekige driehoeken.) Stel uit drie ervan een driehoek (niet gelijkbenig of rechthoekig) met transversaal CD samen, zodat alle lijnstukken a, b, c, d, p en q in uw figuur rationaal zijn. Na vermenigvuldigen met een geschikt getal krijgen we zo een driehoek met transversaal met alle lijnstukken geheel zoals beoogd.

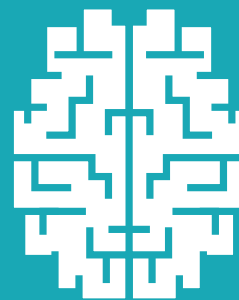
Het is niet heel moeilijk om aan te tonen dat alle mogelijke driehoeken met transversaal waarin alle lijnstukken geheel zijn op deze manier gevonden kunnen worden.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 23 november 2015 binnen zijn.

UITWERKING PUZZEL 90-6

BIJNA BIJ DE KONIJNEN AF



Wobien Doyer
Lieke de Rooij

In deze puzzel werden verschillende rijen a_i van positieve gehele getallen bekeken die allemaal aanvankelijk overeen bleken te komen met de bekende rij van Fibonacci, ook wel gezien als model voor de groei van een konijnenpopulatie, vandaar de titel.

Opgave 1a – Bepaal een niet-dalende rij van zo klein mogelijke getallen waarin geen drie getallen voorkomen die de zijden van een driehoek zouden kunnen vormen.

De laatste twee termen a_i en a_{i+1} zijn altijd de grootste reeds bestaande termen, dus als voor een volgende term a_{i+2} de driehoeksongelijkheid $a_{i+2} < a_i + a_{i+1}$ niet geldt, dan geldt hij voor geen enkel drietal. De kleinste mogelijkheid is dan $a_{i+2} = a_i + a_{i+1}$. Gevolg: die rij begint met 1, 1 en dan is elke volgende term de som van de laatste twee termen. Dus 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ofwel de rij van Fibonacci, maar met een heel andere definitie.

Opgave 1b – Idem, maar nu waren wel drietallen die recht- of stomphoekige driehoeken kunnen vormen toegestaan maar niet scherphoekig.

Met weer de laatste en dus grootste twee termen a_i en a_{i+1} moet dan gelden: $a_{i+2}^2 \geq a_i^2 + a_{i+1}^2$, met a_{i+2} zo klein

mogelijk. Dat betekent dat $a_{i+2} = \left\lceil \sqrt{a_i^2 + a_{i+1}^2} \right\rceil$ ($\lceil \cdot \rceil$ = naar boven afgerond). Dan begint de rij weer met 1, 1, 2, 3,

maar dan volgt 4, want $\left\lceil \sqrt{2^2 + 3^2} \right\rceil = 4$. De rij wordt 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 20, 25, 33, ... en bevat de rechthoekige

driehoeken (3,4,5), (12,15,20) en (15,20,25).

Volgen er nog meer? Een bewijs hebben we niet, maar in de eerste 50000 getallen (tot ruim 5000 cijfers) van de rij komt het niet voor. De kans wordt steeds kleiner maar nooit 0, want zoals bekend^[1] zijn er Pythagorasdriehoeken te construeren die zo weinig als gewenst van de limietverhouding (zie opgave 1c) afwijken, dus wie weet?

Opgave 1c – Gegeven was dat als n (= de lengte van de rij) nadert tot oneindig, dan nadert de verhouding van de drie laatste termen een zekere limiet. Een bewijs hiervan was optioneel. Wel werd gevraagd: wat is die verhouding, ofwel wat is de vorm van de driehoek die je daarmee kunt maken?

Enkelen waagden zich aan het bewijs. De verklaring dat de verhoudingen die van een rechthoekige driehoek benaderen

was niet heel moeilijk en berust op het feit dat het relatieve verschil tussen a_{i+2} en $\sqrt{a_i^2 + a_{i+1}^2}$ steeds kleiner wordt.

Immers, met $a_{i+2} = \left\lceil \sqrt{a_i^2 + a_{i+1}^2} \right\rceil$ geldt dat $0 \leq a_{i+2} - \sqrt{a_i^2 + a_{i+1}^2} < 1$ en de termen worden steeds groter. Voor de

limiet geldt dan: $a_i^2 + a_{i+1}^2 = a_{i+2}^2$. Ofwel de limiet is een rechthoekige driehoek. Vervolgens moet nog worden aangetoond dat de verhouding tussen opeenvolgende zijden inderdaad convergeert naar een limiet. Om dat netjes te doen is deze rubriek te kort. Maar als die verhouding tussen opeenvolgende termen constant wordt, en voor de limiet geldt $a_i^2 + a_{i+1}^2 = a_{i+2}^2$, dan verhouden de kwadraten zich per definitie als de guldensnede-verhouding. Het wordt dus een

rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden zich verhouden als $1 : \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

Opgave 2a – Zoek zoveel mogelijk gehele positieve verschillende getallen ≤ 100 , waar geen viertal a, b, c en d in voorkomt waarvoor $a - b = c - d$; met a, b, c en d verschillend, wat helaas niet door iedereen zo werd opgevat. In dat geval zijn er 12 getallen te vinden, wat we goed hebben gerekend.

Met a, b, c en d verschillend: de meeste inzenders deden dat met de 'hand', waarbij steeds het kleinst mogelijke getal aan de rij werd toegevoegd. Dan kom je op 12 getallen uit. De heren G. Bouwhuis (met behulp van literatuur en slim gebruik van internet^[2]) en H. Bakker (door programmeren, wat hiervoor niet zo eenvoudig is) versloegen iedereen (ook ons) met rijen van 13 getallen. Een nader onderzoek met de computer leverde bijna 7000 verschillende rijtjes van 13. De eerste: 1, 2, 3, 5, 8, 14, 23, 41, 58, 66, 74, 90, 100. Meer dan 13 getallen kwam niet voor. Hoewel er dus hoogstens reeksen van 13 zulke getallen blijken te zijn, luidde een te bewijzen stelling in het trainingsmateriaal voor de IMO: bij elke keuze van 16 verschillende gehele positieve getallen ≤ 100 zijn er altijd twee paren (zeg a, b en c, d) te vinden waarvoor geldt: $a - b = c - d = v$.

Opgave 2b – Bewijs die stelling. We hielpen u een klein eindje op weg.

Een bewijs uit het ongerijmde: stel er bestaan wel 16 getallen zonder zulke paren. Daarvan kunnen we $\binom{16}{2} = 120$

verschillende paren vormen. Met de getallen 1 tot en met 100 zijn slechts de verschillen 1 tot en met 99 mogelijk, dus 99 verschillende verschillen. Er zullen dus in die 16 getallen verschillen v zijn die meer dan 1 keer voor moeten komen. Volgens de veronderstelling is er bij onze getallen geen viertal a, b, c en d , zodanig dat $a - b = c - d = v$, dus moeten er drietallen a, b, c zijn met $a - b = b - c = v$, met b als 'middengetal'. Echter, b kan niet het middengetal van meerdere drietallen zijn: als $a - b = b - c = v_1$ en $d - b = b - e = v_2$ dan is $d - a = c - e$, en dat is in tegenspraak met onze veronderstelling. Er moeten dus minstens $120 - 99 = 21$ verschillende middengetallen b te vinden zijn. Dat kunnen er echter hoogstens 14 zijn, niet de kleinste en ook niet de grootste van de 16. Conclusie: Er bestaan geen 16 zulke getallen. Op deze manier bewijzen dat 15 getallen niet mogelijk is lukt niet, dan heb je $105 - 99 = 6$ middengetallen nodig en die zijn er wel.

Noten

[1] Zie https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple#Geometry_of_Euclid.27s_formula

[2] Zie <https://oeis.org: rij A004133> zie $a(13)$

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 90-7 is:

Naam	Punten
K. van der Straaten	203
R. Stolwijk	195
G. Bouwhuis	156
F. Göbel	134
J. Verbakel	128
H. Bakker	119
K. Vugs	117
J. Meerhof	109
H. Klein	103
L. Pos	61

De felicitaties en de ladderprijs gaan naar Kees van der Straaten.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Marjanne Klom, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen

Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075

E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

2015

za
7/11

VEENENDAAL

Jaarvergadering/Studiedag

Organisatie NVvW, zie ook pagina 36

vr
13/11

EINDHOVEN

Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

LANDELIJK

Wiskunde A-lympiade/Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

2016

za
9/1

UTRECHT

Wintersymposium KWG
Organisatie KWG

18/1
28/1

LANDELIJK

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do
28/1

UTRECHT

Wiskunde conferentie vmbo en havo/vwo onderbouw
Organisatie APS in samenwerking met NVvW en SLO

wo
3/2

LANDELIJK

OnderbouwWiskundeDag
Organisatie Freudenthal Instituut

vr/za
5/2
6/2

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

do
17/3

LANDELIJK

W4Kangoeroe
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

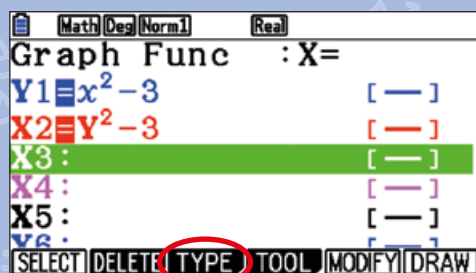
Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 91

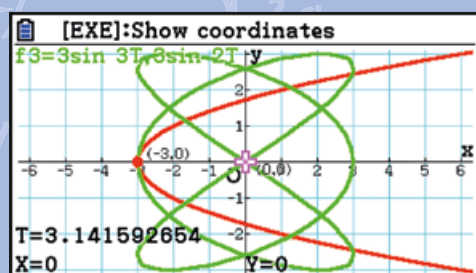
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	17 december 2015	19 NOVEMBER 2015
4	2 februari 2016	23 november 2015
5	22 maart 2016	11 januari 2016
6	10 mei 2016	7 maart 2016
7	28 juni 2016	2 mei 2016

Tien redenen om voor de CASIO fx-CG20 te kiezen...

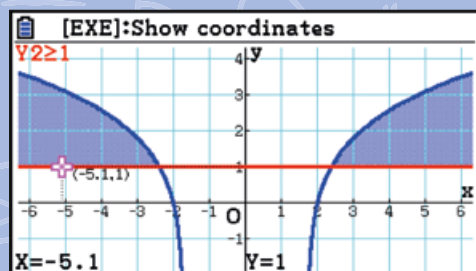
5. Meerdere grafieken in één scherm:



Met TYPE kun je allerlei soorten functies invoeren.



Lissajous en Inverse samen in één scherm.



Ook ongelijkheden worden weergegeven.



In de CASIO fx-CG20 Leerlingentest werden topmerken grafische rekenmachines met elkaar vergeleken. De leerlingen waren er snel uit: de CASIO fx-CG20 is uniek in prestaties en daarmee superieur. In deze en in de volgende uitgaven van Euclides publiceren wij de 10 voordelen die het meest genoemd werden in de CASIO fx-CG20 Leelingentest. Kijk, vergelijk en oordeel zelf.



De CASIO fx-CG20 is CvTE goedgekeurd voor het centraal examen 2016 en daarna.

Uw leerlingen kiezen voor de CASIO fx-CG20

Méer informatie of workshop aanvragen? Bel +31 (0)20 545 10 70 – e-mail: educatie@casio.nl – www.casio-educatie.nl

Kom ook naar het Noordhoff Uitgevers wiskundecongres!

Hét vakcongres voor wiskundedocenten

Thema:
Innovatie

Meld u
nu aan!

 Noordhoff Uitgevers

Donderdag 19 november 2015
Het Aviodrome in Lelystad

Meer informatie en aanmelden via:
www.nuwiskundecongres.nl