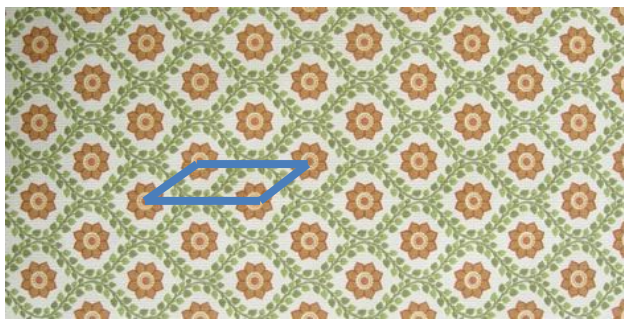


Groepen en behangpatronen

Inleiding

Als je een keer 's nachts niet kunt slapen en je tuurt naar het behang, bedenk je dan eens wat een variatie je hebt in behangpatronen. Je hebt bloemetjes (zie figuur 1, links), bellen, driehoeken, alle kleuren en patronen. En als je een keer op vakantie bent en je loopt door een oud paleis of door het Alhambra of de Taj Mahal, dan zie je hoe ook daar in de betegelde muren enorm veel variaties zijn in vormen, kleuren en patronen (zie figuur 1, rechts). Er lijken oneindig veel variaties te zijn, maar wiskundigen hebben ontdekt dat er maar 17 'groepen' zijn waarbinnen alle patronen passen. Daarover gaat dit artikel.



Figuur 1 Een fragment van een stuk bloemetjesbehang (links) en van een muur van de Taj Mahal (rechts). In het bloemetjesbehang is ook een parallellogram aangegeven met het basispatroon.

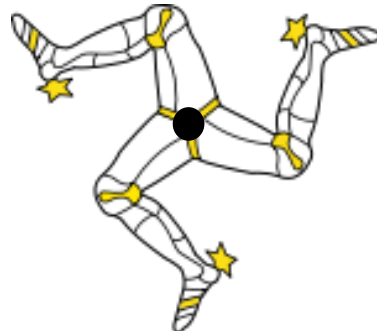
Het eerste dat opvalt bij de behangfragmenten in figuur 1 is dat er sprake is van symmetrie; je kunt een lijn trekken door het patroon en in deze lijn wordt het patroon gespiegeld. Ook kun je een punt kiezen waarom heen je kunt roteren zodat het patroon weer terug komt. Met het begrip symmetrie heb je al kennis gemaakt op de middelbare school.

Symmetrie

In de eerste klas begin je met twee soorten symmetrie (zie Reichard et al, 2012); lijnsymmetrie en draaisymmetrie. Bij lijnsymmetrie is er sprake van spiegelen, je kunt een figuur zodanig dubbelvouwen dat de ene helft precies op de andere helft past (zie figuur 2). Bij draaisymmetrie kun je een figuur zo draaien (over een hoek $< 360^\circ$) dat hij weer op zichzelf past (zie figuur 3).

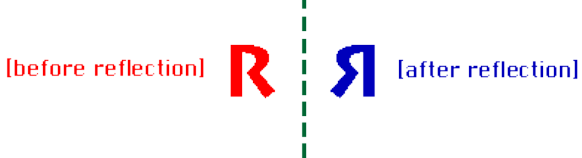
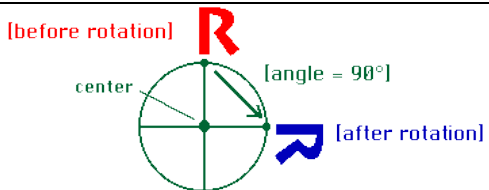
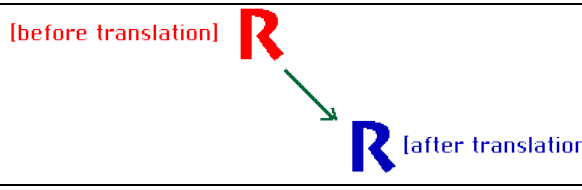
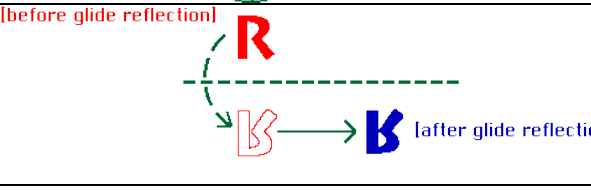


Figuur 2 Lijnsymmetrie in een hartje, de lijn geeft de spiegellijn aan.



Figuur 3 Draaisymmetrie in het symbool van het eiland Man. Het rondje geeft het punt aan waaromheen gedraaid kan worden.

Er zijn in het platte vlak in totaal vier verschillende soorten symmetrieën van het (platte) vlak namelijk spiegeling (*reflection*), draaiing (*rotation*), verschuiving (*translation*) en schuifspiegeling (*glide reflection*) (zie tabel 1). Bij een verschuiving (ook wel translatie) verplaats je alle punten van het vlak over een vaste afstand. Bij een schuifspiegeling is er eerst een spiegeling in een lijn gevolgd door een verschuiving parallel aan de lijn.

 [before reflection] R [after reflection]	 [before rotation] R [angle = 90°] [after rotation]
 [before translation] R [after translation]	 [before glide reflection] R [after glide reflection]

Tabel 1 De vier verschillende soorten symmetrieën, bron <http://mathforum.org/sum95/suzanne/symsusan.html>

Als je van alle regelmatige behangpatronen de symmetrieën bestudeert blijken hier allemaal regelmatigheiden achter te zitten. Het is bijvoorbeeld zo dat er alleen een rotatie mogelijk is over 60, 90, 120 of 180 graden. En het basispatroon (zie het parallellogram in figuur 1) kan maar 5 verschillende vormen hebben; een vierkant, een rechthoek, een parallellogram, een driehoek of een zeshoek. Door op een meer wiskundige manier te kijken en daarmee de symmetrische patronen te bestuderen, blijkt er dus meer aan de hand te zijn dan een mooie regelmatige verschijning. Als je door het patroon heen kijkt, dan blijkt er een veel abstractere wereld te zijn, die zich achter het patroon bevindt. Het zijn deze abstracte achterliggende structuren die bestudeerd moeten worden om bijvoorbeeld te begrijpen dat er maar een beperkt aantal behangpatronen zijn. Daarbij wordt er gebruikt gemaakt van het concept ‘groep’. De symmetrieën van het patroon vormen een symmetriegroep.

Groepen

Dit concept van ‘groepen’ ben je op de middelbare school nog niet tegengekomen. Het is ook een relatief modern begrip, het is pas sinds 1832 een onderwerp van studie. Het is een begrip dat kijkt naar de symmetrieën van allerlei wiskundige structuren, dus niet alleen naar de symmetrieën van behangpatronen in een plat vlak.

De groepentheorie is ontwikkeld in een zoektocht naar de vraag of er voor elke polynomiale vergelijkingen een formule te vinden is die de oplossingen geeft. Een polynomiale vergelijking is bijvoorbeeld een kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, deze vergelijking heeft 0, 1 of 2 oplossingen. De oplossingen kun je altijd vinden met de *abc formule*, een variant hierop was waarschijnlijk al bekend bij de Babyloniers rond 1800 v Chr. Er is dus een formule, met alleen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken, waarmee de oplossingen altijd gevonden kunnen worden. Een dergelijke formule werd ook gevonden voor de oplossingen van een derdegraadsvergelijking (in de zestiende eeuw door Cardano) en voor een vierdegraads vergelijking (door Ferrari en Tartaglia iets later in diezelfde eeuw). Dat het aantal oplossingen van een

vijfdegraads vergelijking niet in een eenduidende formule te vatten was, werd in 1824 bewezen door Abel (Daems en Smeets, 2011).

Het was Evariste Galois die in 1832 met behulp van de coëfficiënten van een vijfdegraadsvergelijking kon vaststellen of de vergelijking met gewone bewerkingen oplosbaar zou zijn (Yanofsky, 2014). Hij deed dit door gebruik te maken van het concept 'groepen', waarbij hij een model maakt van het idee van symmetrie en dit toepast op in dit geval de vijfdegraads vergelijking. Door de symmetrie kon hij vaststellen of een vijfdegraadsvergelijking oplosbaar is. Hij zag in dat de oplossingen van een vergelijking voldoen aan bepaalde relaties, en dat sommige verwisselingen van de oplossingen deze relaties behouden (Daems en Smeets, 2011). Deze verwisselingen (of in de wiskunde 'permutaties') vormen een 'groep'. Hij was de eerste die met dit abstracte concept kon werken.

Al snel werd duidelijk dat dit concept van symmetrieën niet alleen in het geval van polynomiale vergelijkingen gebruikt kon worden, maar dat het concept van symmetrieën op vele andere gebieden van de wiskunde en de natuurwetenschappen gebruikt kan worden. Er zijn namelijk ontzettend veel

gebieden waar symmetrie in voorkomt, en waar 'groepen' dus een belangrijke rol spelen. Voorbeelden daarvan zijn meetkunde en de relativiteitstheorie.

Met behulp van de groepentheorie is ook te verklaren dat een *Rubic cube*, als je die uit elkaar haalt en een hoekstuk verdraait, dat die dan niet altijd meer te maken is; en dat een puzzel zoals die in figuur 4 staat niet op volgorde te leggen is. In al deze gevallen speelt symmetrie een belangrijke rol.

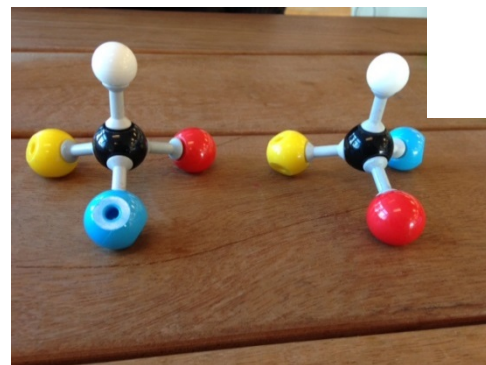


Figuur 4 Schuifpuzzel waarbij de 14 en 15 zijn omgedraaid

Bij de bouw van moleculen is groepentheorie ook een zeer belangrijk hulpmiddel (Atkins, 1990). Atkins noemt de groepentheorie '*a systematic summary of common sense about the symmetry of objects*'. Met de

groepentheorie kun je moleculen goed klassificeren, en met deze klassificatie kun je eigenschappen makkelijker benoemen zonder ingewikkelde berekeningen. Aan de hand van de symmetrie kun je bijvoorbeeld bepalen of een molecuul een dipoolmolecuul is of niet, en of het chiraal is of niet (zie figuur 5). Ook geeft de symmetrie informatie over de intensiteit van overgangen die verantwoordelijk zijn voor de kleur van stoffen. Meer over symmetrie bij moleculen kun je vinden op <http://symmetry.otterbein.edu/tutorial/index.html>

Met het concept van de groepen, dus door de symmetrie, kunnen problemen simpeler worden gemaakt, en zijn oplossingen minder willekeurig. Als iets voor de ene helft van bijvoorbeeld een vergelijking geldt, en er is sprake van lijnsymmetrie, dan geldt het ook voor de andere helft. Dat maakt dan dat je in de beschrijving maar voor de helft van de vergelijkingen verder hoeft te gaan. En als de ene groep op de andere groep lijkt dan gelden er allemaal gelijke regels. Dit gegeven, isomorfie, komt later nog uitgebreid terug (zie bladzijde 7).



Figuur 5 Chirale moleculen. Dat wil zeggen dat deze twee moleculen elkaars spiegelbeeld zijn; hoe je ze ook draait je krijgt nooit twee identieke moleculen. De stoffen zijn dan optische isomeren.

Een symmetriegroep kun je ook zien als een algebraïsche structuur waar zodanig aan gerekend kan worden dat er algemene wetmatigheden boven komen drijven. Hierdoor leer je meer over de onderlinge samenhang van de verschillende symmetrieën op verschillende plaatsen in de wetenschap (<http://www.staff.science.uu.nl/~ban00101/talks/oratie.pdf>). Een officiële introductie in de groepentheorie volgt hieronder.

De theorie van 'groepen'

De uitleg van wat een groep is, is goed ingewikkeld en erg abstract. Eerst moet er de nodige theorie worden uitgelegd. Dit wordt gedaan aan de hand van twee verzamelingen die je op de middelbare school wel bent tegengekomen. Daarna volgt een voorbeeld van een groep waarbij de symmetrieën zoals rotatie en spiegeling zoals hierboven besproken in terugkomen.

Het eerste wat je nodig hebt om een groep te definiëren is een **verzameling**. Voorbeelden van verzamelingen zijn 'alle natuurlijke getallen' of 'een aantal translaties' of 'rotaties'.

Er zijn twee voorbeelden van verzamelingen die je wel kent:

1. alle gehele getallen ($\mathbb{Z}$),
2. alle rationale getallen (dus de gehele getallen + de breuken) maar nul er niet bij ($\mathbb{Q} - \{0\}$)

Vervolgens heb je een **regel** nodig die twee elementen uit de verzameling kan combineren tot een nieuw element dat weer in de verzameling ligt. Deze regel wordt vaak 'vermenigvuldiging' genoemd maar kan net zo goed een optelling als een vermenigvuldiging zijn. Vaak wordt de regel duidelijk uit het verhaal maar niet genoteerd in de berekeningen.

In ons voorbeeld kun je bij de verzamelingen de volgende regels hebben

1. optellen voor de verzameling gehele getallen: bijvoorbeeld $2+3=5$, 5 is weer een geheel getal dat in de verzameling ligt, zo zullen alle getallen die in $\mathbb{Z}$ liggen en die je op gaat tellen weer in $\mathbb{Z}$ liggen
2. vermenigvuldiging van de verzameling rationale getallen: bijvoorbeeld $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ en dat is een getal dat weer in $\mathbb{Q} - \{0\}$ ligt.

Dus er is nu een verzameling en een regel. Maar wat maakt het nu een groep? Daarvoor is er nog een definitie nodig: een groep is een verzameling G tezamen met een regel, een vermenigvuldiging, op G die voldoet aan de volgende drie axioma's:

- (a) De vermenigvuldiging is **associatief**, dat wil zeggen $(xy)z = x(yz)$ voor drie elementen van G (met deze notatie wordt in voorbeeld 1 met $(xy)z$ bedoeld $(x+y)+z = x+(y+z)$, en in voorbeeld 2 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$)
- (b) Er is een element e in G , het '**eenheidselement**', zodat $xe = x = ex$ voor iedere x in G .
- (c) Ieder element van G heeft een **inverse** x^{-1} die ook weer tot G behoort, zodanig dat $x^{-1}x = e = xx^{-1}$

Om te spreken van een groep moet aan alle drie de axioma's worden voldaan. Dus je hebt een verzameling nodig, een regel, en de drie axioma's moeten gelden.

Hoe werkt dit nu bij de twee voorbeelden? Nog even ter herinnering, de regel 'vermenigvuldiging' uit de definitie kan een vermenigvuldiging zijn maar het kan ook een optelling zijn of een hele andere bewerking:

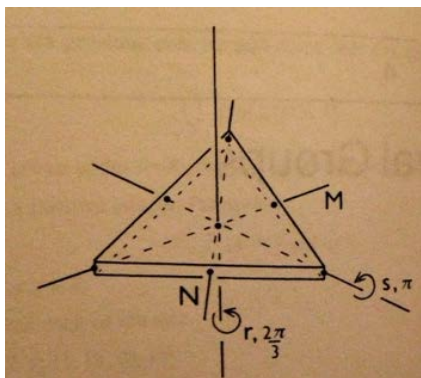
1. Bij het optellen van de gehele getallen zorgt de regel (optellen) ervoor dat er weer een nieuw getal komt, dat weer bij de gehele getallen hoort. Gelden de axioma's voor deze verzameling met deze regel?
 - a. $(2+3)+5 = 2+(3+5)$ dus het optellen bij de gehele getallen is associatief, het antwoord is in beide gevallen 10.
 - b. is er bij optellen van de gehele getallen een element waarvoor geldt $xe=x=ex$? Dus waarvoor geldt $x+e=x=e+x$? Dit is er, namelijk 0: je krijgt $3+0=3=0+3$. Dus 0 is het eenheidselement.
 - c. Ieder gehele getal x heeft een inverse, namelijk $-x$, dat ook weer tot $\mathbb{Z}$ behoort, en inderdaad zodanig dat $x^{-1}x=e=xx^{-1}$, want $-5+5=0=5+-5$

Dus de verzameling 'gehele getallen' is een groep onder de regel 'optellen'. Is het ook een groep onder de regel 'vermenigvuldiging'? Vermenigvuldiging is associatief, dus het eerste axioma geldt. Er is een eenheidselement namelijk 1, en want $3 \cdot 1 = 3 = 1 \cdot 3$, dus het tweede axioma geldt ook. Maar het gaat mis bij de inverse. Om te voldoen aan $x^{-1}x=e=xx^{-1}$ krijg je $x^{-1} \cdot x = 1$, dus x^{-1} is een breuk, en dat is geen geheel getal. Dus de gehele getallen onder de vermenigvuldiging zijn geen groep!

2. Bij het vermenigvuldigen van de rationale getallen gelden de axioma's ook. Er is echter wel een getal dat hierbij roet in het eten gooit, namelijk 0. Dit getal hoort niet thuis in deze groep, vandaar dat deze verzameling $\mathbb{Q} - \{0\}$ is.
 - a. $\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{6}{56}$ dus het vermenigvuldigen bij de rationale getallen is associatief
 - b. 1 is het eenheidselement e , hiervoor geldt $xe = x = ex$ bijvoorbeeld $\frac{2}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7} = 1 \cdot \frac{2}{7}$.
 - c. Ieder rationaal getal x heeft een inverse voor deze vermenigvuldiging, namelijk $\frac{1}{x}$.
Hiervoor geldt dat dat $x^{-1}x = e = xx^{-1}$, bijvoorbeeld $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$.

Dus de verzameling 'rationale getallen behalve 0' is een groep onder de regel 'vermenigvuldiging'. Nul zelf hoort er niet bij, het kan niet het identiteitselement zijn want alles keer nul wordt nul, en bij het berekenen van de inverse gaat het fout omdat je niet kunt delen door nul.

Voor alle groepen geldt dus een verzameling, een regel en de volgende axioma's : 1) associativiteit, 2) het eenheidselement is uniek en 3) ieder element heeft een inverse die ook weer tot de verzameling behoort.



Figuur 6 De rotatie symmetrieën van een driehoekige plaat

De D_3 groep

Het concept 'groepen' maakt gebruik van 'symmetrieën', dat is in de voorbeelden hiervoor bij de getallen gedaan maar je kunt het inzichtelijker maken door te kijken naar de symmetriegroepen van een meetkundig figuur, waarbij een groep dan de verzameling van alle symmetrieën van de figuur is. Dit gegeven wordt hierna toegepast op een eenvoudig meetkundig figuur; een dunne platte driehoek (zie figuur 6). Dit is de D_3 groep (D van *dihedral*, alle dunne platte veelhoeken, 3 omdat het een veelhoek is met 3 hoekpunten). Eerst worden een verzameling en een regel gedefinieerd:

- de **verzameling** bestaat uit de 6 rotatie symmetrieën van een driehoekige plaat (e, r, r^2, s, rs, r^2s) (e is het eenheidselement en is het op zijn plaats houden van de driehoek, r is de rotatie om het midden van de driehoek, zie figuur 6; s is de kanteling van de driehoek, zie figuur 6).
- de **regel** is het na elkaar uitvoeren van de rotatie symmetrieën van deze driehoekige plaat
- Bij de rotatie symmetrieën is e het eenheidselement. Dit kun je krijgen door r^3 te doen, dit betekent 3 keer achter elkaar r , of door s^2 te doen, dit betekent twee keer achter elkaar s . De inverse zit in de groep want $r^{-1}=r^2$ en $s^{-1}=s$.
- Bij sommige groepen is de volgorde van de bewerkingen niet belangrijk. Bijvoorbeeld bij de bovengenoemde groepen is $2+5$ gelijk aan $5+2$. En $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$. We zeggen dan dat een bewerking **commutatief** is, en de groep is dan **abels**. Bij de D_3 groep is de volgorde van de bewerking wel belangrijk, $sr \neq rs$, dus deze groep is niet abels. **Let op de volgorde; de afspraak binnen groepentheorie is dat sr betekent s na r , dus dat je eerst r doet en dan s .**
- Je kunt een vermenigvuldigingstabel opstellen van D_3 met daarin alle 36 mogelijke producten (zie tabel 2). Ieder element van een groep komt een keer voor in iedere rij en iedere kolom. Hierbij is de regel (oftewel de vermenigvuldiging); het na elkaar uitvoeren van de ene handeling na de ander.
- Het lijkt alsof niet alle mogelijkheden zijn opgeschreven; waar zijn bijvoorbeeld sr en sr^2 ? Het blijkt dat $sr=r^2s$ en $sr^2=rs$. Je kunt dit nagaan door de rotaties en spiegelingen in figuur 6 te doorlopen of door de volgende algebraïsche stappen:

$$sr=sr^3r=sr^2rr=(sr^2)rr=(rs)rr=rsrr=rsr^2=r(sr^2)=r(rs)=rrs=r^2s \text{ en}$$

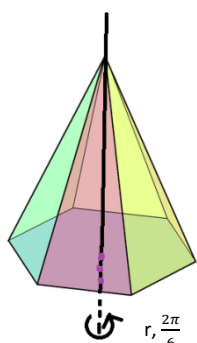
$$sr^2=s(rr)=(sr)r=(r^2s)r=(r^2s)r=r^2(sr)=r^2(r^2s)=r^4s=r^3(rs)=e(rs)=rs.$$

	e	r	r^2	s	rs	r^2s
e	e	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	e	rs	r^2s	s
r^2	r^2	e	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	e	r^2	r
rs	rs	s	r^2s	r	e	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	e

Tabel 2 Vermenigvuldigingstabel van de D_3 groep

Isomorf

De groepentheorie is een hele theorie met veel termen en definities. Een belangrijke definitie die later terugkomt is het begrip 'isomorf'. De verzameling van gehele getallen met de regel 'optellen' is een hele andere vorm groep dan de D_3 groep. Je kunt dit bijvoorbeeld al zien aan het aantal elementen, bij de D_3 groep zijn dat er maar 6, bij de verzameling gehele getallen zijn dat er veel meer. Tussen deze groepen zijn dus niet veel verbanden te leggen. Maar er zijn groepen die isomorf zijn. Dat wil zeggen dat de volgende definitie geldt: *Als G en H twee verschillende groepen zijn, dan noemen we ze isomorf als er een bijectieve functie f gaat van G naar H zodanig dat voor alle $a, b \in G$ geldt: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.* In andere woorden, ieder element uit G gaat naar een ander element uit H . Wat kun je nu met zo'n definitie? Stel dat je de groep G goed snapt, dan kun je alle algemeenheden die je uit groep G kent, en die bij isomorfie de structuur behouden, gebruiken om groep H beter te doorgronden.



Figuur 7 De rotatie symmetrieën van een zesvlakige piramide.

Bij groepen die isomorf zijn moeten het aantal elementen van de verzameling gelijk zijn, maar er moeten meer zaken gelijk zijn. Als we bijvoorbeeld de symmetrieën van de D_3 groep (e, r, r^2, s, rs, r^2s) vergelijken met de symmetrieën van een regelmatige zesvlakige piramide (e, r, r^2, r^3, r^4 en r^5 , zie figuur 7) dan zijn het in beide gevallen zes elementen. Dus het aantal elementen is gelijk. Maar er zijn ook verschillen:

1. de D_3 groep heeft twee rotatie assen. De piramide heeft maar één rotatieas, een rotatie van $\pi/3$ rond de as moet je zes keer uitvoeren voordat de piramide weer terug komt bij zichzelf. Bij het herhaald uitvoeren van zo'n rotatie krijg je altijd alle andere symmetrieën. Dit is niet het geval bij de D_3 groep, daar is er niet een rotatie waar als je die herhaalt je alle andere rotaties krijgt.
2. de volgorde waarin je twee rotaties bij de piramide uitvoert geven dezelfde uitkomst; dus bijvoorbeeld als je r^2 doet en daarna r dan krijg je r^3 , wat hetzelfde is als r en daarna r^2 . De piramide groep is dus commutatief of abels, dit is niet het geval bij de D_3 groep.
3. bij de piramide kun je maar op een manier een rotatie achter elkaar uitvoeren (r) voordat je weer terugkomt bij de begin situatie, bij de D_3 groep kan dat op twee manieren (r en s).

Het is dus duidelijk dat D_3 niet isomorf is met de piramidegroep. Een groep die wel isomorf is met de piramidegroep is de groep $\mathbb{Z}$ modulo 6. Deze $\mathbb{Z}$ modulo 6 groep bestaat uit de volgende elementen; 0, 1, 2, 3, 4, 5. Modulo rekenen krijg je niet op de middelbare school maar ken je wel, namelijk bij het klok kijken. Als het 8 uur 's avonds is, dus 20:00, en je moet 10 uur werken, dan zeg je niet het is $20+10=30$ uur maar dan zeg je het is $20+10-24$ uur dus dan is het 6 uur 's morgens. De modulus is bij het klok kijken 24. Voor $\mathbb{Z}$ modulo 6 geldt dus dat je 0 hebt, 1, 2, 3, 4, 5 en als je daar nog 1 bij optelt krijg je 6, dat 0 wordt. Net als 23:00 en je telt er een uur bij op, dan wordt het 24:00 oftewel 00:00.

Je hebt de volgende vermenigvuldigingstabellen (zie tabel 3):

	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5
e	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	e
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	e	r
r^3	r^3	r^4	r^5	e	r	r^2
r^4	r^4	r^5	e	r	r^2	r^3
r^5	r^5	e	r	r^2	r^3	r^4

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabel 3 De vermenigvuldigingstabel van de piramide groep (links) en van de groep $\mathbb{Z}$ modulo 6 (rechts).

Als je goed naar de tabellen kijkt zie je een opvallende gelijkenis, alleen de labels zijn anders maar verder komen de elementen op dezelfde manier terug. Je kunt zien dat $e \rightarrow 0, r \rightarrow 1, r^2 \rightarrow 2$ etc. In de groepentheorie zijn deze twee groepen isomorf, en er zijn dan regels die voor beide groepen gelijk zijn. Bijvoorbeeld de twee groepen hebben hetzelfde aantal elementen. In dit geval was dat het uitgangspunt, maar stel dat je weet dat groepen isomorf zijn, dan weet je dus ook dat ze hetzelfde aantal elementen hebben. Verder geldt er dat, als groepen isomorf zijn, beide groepen wel of niet abels moeten zijn. En twee isomorfe groepen hebben gelijke ondergroepen, dit begrip komt later terug.

De Euclidische groep.

Er zijn nu vijf groepen behandeld; optellen met de gehele getallen, vermenigvuldigen met $\mathbb{Q} - \{0\}$, de D_3 groep, de piramide groep en de groep $\mathbb{Z}$ modulo 6. Je merkt al wel dat je kunt praten over twee groepen die isomorf zijn (de piramide groep en de modulo groep) terwijl de elementen (respectievelijk de rotaties of de getallen 0 tot en met 5) heel verschillend zijn.

Een andere belangrijke groep, waarvan de behangpatronen groep een ondergroep is, is de Euclidische groep oftewel E_2 groep. Het getal 2 staat voor de dimensie waar je naar kijkt. Omdat behangpatronen per definitie in het platte vlak zijn wordt er alleen gekeken naar de Euclidische groep in de twee dimensies, vandaar E_2 . Deze groep wordt gevormd door alle isometrieën van het vlak. Isometrieën zijn functies (of bewerkingen) die de afstand bewaren. Rotaties, spiegelingen en translaties zijn voorbeelden van dergelijke isometrieën. Dus de Euclidische groep is de groep van alle afstand-bewarende transformaties. Je kunt bewijzen dat het een groep is. Bijvoorbeeld als je twee keer een isometrie na elkaar uitvoert krijg je weer een isometrie. Verder gelden de drie axioma's:

- het na elkaar uitvoeren van isometrieën is associatief $(xy)z = x(yz)$
- er is een element e in E_2 , het 'eenheidselement', zodat $xe = x = ex$ voor iedere x in E_2 . Het eenheidselement is de isometrie I , het op zichzelf afbeelden.
- Ieder element van E_2 heeft een inverse x^{-1} die ook weer tot E_2 behoort; je kunt de isometrieën altijd terugdraaien.

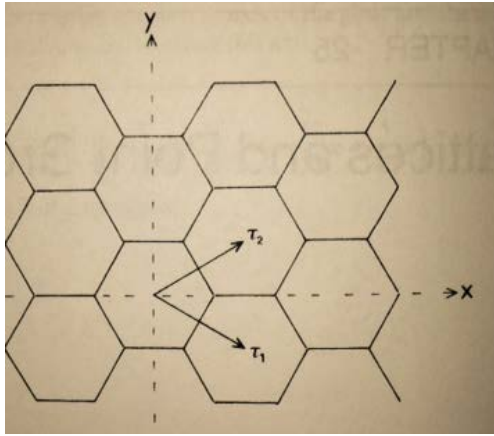
E_2 kun je onderverdelen in verschillende ondergroepen. Een **ondergroep** van een groep is een deelverzameling van groep die zelf ook weer een groep vormt, onder dezelfde regel als de groep. Ten eerste kan E_2 worden onderverdeeld in twee grote ondergroepen T en O . T is de groep van alle translaties. O is de groep van alle orthogonale transformaties (orthogonaal betekent dat de assen loodrecht op elkaar staan, een orthogonale transformatie is dus een transformatie waarbij de assen in de nieuwe situatie ook weer loodrecht op elkaar staan). Deze orthogonale transformaties bestaan uit rotaties rond de oorsprong en spiegelingen in een lijn door de oorsprong. Dit zijn dus afbeeldingen waarbij niet alleen de lengte niet verandert (het zijn isometrieën), maar ook de hoek verandert niet. T en O zijn twee ondergroepen die de hele verzameling omvatten; in de taal van groepen geldt dan dat $E_2 = TO$ en de doorsnede van T en O is het eenheidselement (oftewel $T \cap O = \{e\}$).

De behangpatroongroep

De **behangpatroongroep** G is een andere ondergroep van de E_2 groep. Hierbij bestaat de **translatieondergroep** H uit twee onafhankelijke translaties. De orthogonale ondergroep bestaat uit

een rotatie rond een punt, de **puntgroep I**. Bij de behangpatroongroep geldt dat deze puntgroep eindig is. Dat wil zeggen dat het aantal mogelijke rotaties niet oneindig is maar een beperkt aantal omvat.

De symmetrie van een behangpatroon is dus een groep, een ondergroep van de E_2 groep. De elementen van de groep zijn de isometrieën van het vlak die het patroon weer op zichzelf afbeelden.



Figuur 8 Een vlak van regelmatige zeshoeken

Hieronder volgt de uitleg bij een simpel patroon, een herhalend patroon van regelmatige zeshoeken dat een heel vlak vult (zie figuur 8). Dit patroon heeft een bepaalde hoeveelheid symmetrie, er is een aantal translaties, rotaties en spiegelingen zodat je hetzelfde patroon houdt. In dit geval kun alle beweging beschrijven met twee translaties, τ_1 en τ_2 , en een rotatie over $\frac{\pi}{3}$ (60°). Deze symmetrieën vormen een groep, de verzameling bestaat uit τ_1, τ_2 en $r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6 = e$.

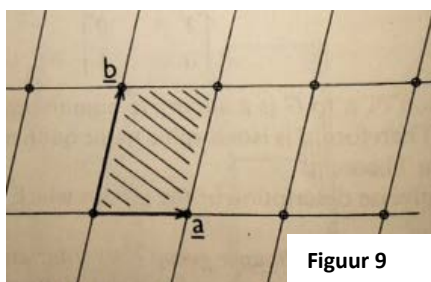
De behangpatroongroepen zijn dus twee dimensionale symmetrie groepen. In theorie kan bij de behangpatronen groepen echte symmetrie alleen bestaan als een patroon zich oneindig herhaalt. In de werkelijkheid is er natuurlijk altijd een rand of een einde; dit wordt niet meegenomen in de symmetriegroep. Ook zijn kleine imperfecties toegestaan.

De behangpatroongroepen zijn dus isometrieën van zichzelf herhalende patronen in het platte vlak, patronen die als je een bepaalde translatie en of rotatie toepast weer zichzelf worden. In de taal van de groepentheorie wordt het als volgt omschreven: de behangpatroongroep is de ondergroep G van de Euclidische groep E_2 . Voor G geldt dat de verzameling bestaat uit de isometrieën (translaties en rotaties) van het vlak die een gegeven patroon naar zichzelf zenden. De regel is het achter elkaar uitvoeren van translaties en of rotaties.

Roosters

Bij de indeling van de behangpatroongroepen wordt eerst gekeken naar het rooster van een patroon. Voor dat rooster maak je gebruik van de twee richtingen waarlangs de translaties plaatsvinden. In het voorbeeld van het hexagon kun je de translaties die je kunt maken aangeven met twee pijlen, zie figuur 8. Van deze pijlen kun je een soort rooster maken waarmee je de translaties eenduidig kunt noteren. Voor deze roosters kijk je niet meer naar het patroon (het hexagon), maar kijk je naar de pijlen waarlangs de translatie plaatsvinden (zie figuur 9).

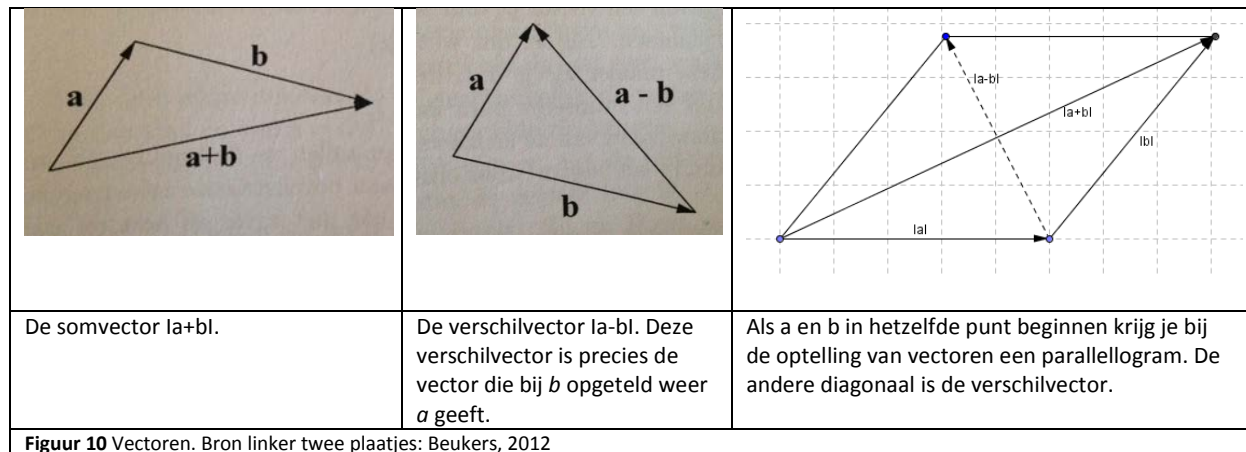
Het rooster wordt gedefinieerd aan de hand van de twee pijlen, oftewel vectoren, waarlangs de translaties plaatsvinden. Alle mogelijke translaties noem je de verzameling L , en dat is het rooster dat wordt opgespannen door a en b (zie figuur 10). Dat wil zeggen dat L bestaat uit alle lineaire combinaties $ma+nb$ met m en n gehele getallen. De verzameling L bestaat dus uit twee onafhankelijke vectoren omdat H bestaat uit twee onafhankelijke translaties. De



Figuur 9

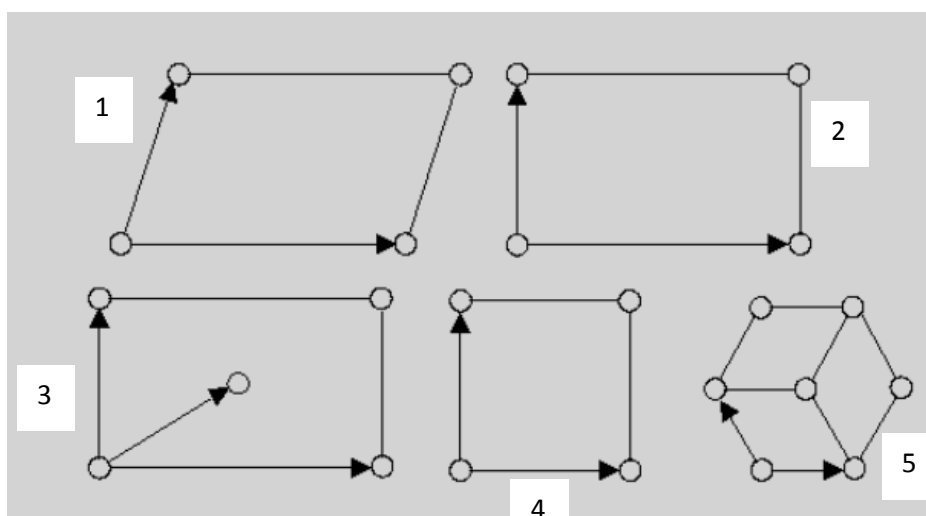
verzameling L is dus in theorie oneindig groot, omdat je het behangpatroon oneindig kunt herhalen, maar in de praktijk wordt het door de randen van het behang beperkt.

Het gearceerde stuk in figuur 9 is de eenheidscel, deze cel karakteriseert het rooster en dus de translaties. Nu volgen twee belangrijke eigenschappen van L : je definieert a door een vector te kiezen met een minimale lengte $|a|$ in L , en een tweede vector met een minimale lengte b in L . Vervolgens noem je de kleinste a (oftewel $|a| \leq |b|$). Beide lengtes moeten zo klein mogelijk zijn, en b maakt een bepaalde hoek met a . Verder heb je nog de volgende definitie nodig: $|a-b| \leq |a+b|$. Hierbij maak je gebruik van de somvector en de verschilvector (zie figuur 10)



Uit de definities ($|a| \leq |b|$ en $|a-b| \leq |a+b|$) volgt dat er vijf mogelijke roosters zijn (zie figuur 11, en voor een uitgebreidere beschrijving <http://www.iphogendijk.nl/projects/behangpatronen2010.pdf>):

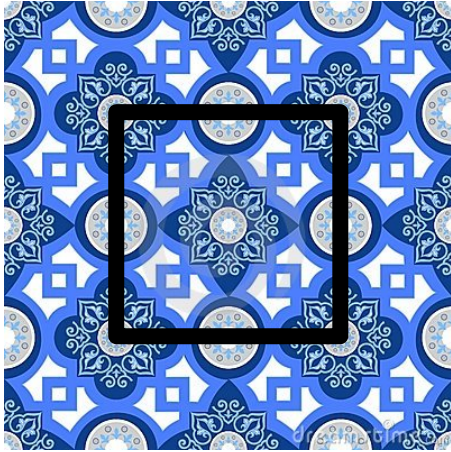
1. Een parallellogramvorm (oftewel obliek) met $|a| < |b| < |a-b| < |a+b|$
2. Rechthoekig $|a| < |b| < |a-b| = |a+b|$ (diagonalen aan elkaar gelijk)
3. Een gecentreerde rechthoek $|a| < |b| = |a-b| < |a+b|$
4. Vierkant $|a| = |b| < |a-b| = |a+b|$ (lengtes en diagonalen aan elkaar gelijk)
5. Hexagonaal $|a| = |b| = |a-b| < |a+b|$



Figuur 11 De 5 verschillende roosters, bron: <http://www.emis.de/monographs/jablan/chap13.htm>

In het geval van het hexagon (figuur 8) zijn a en b even lang, de hoek tussen a en b is $\frac{\pi}{3}$ (60°). Hier is dus sprake van een hexagonaal rooster (optie '5'). Ook het behangpatroon uit figuur 1 heeft een hexagonaal rooster.

Een voorbeeld van een ander rooster zie je in figuur 12.



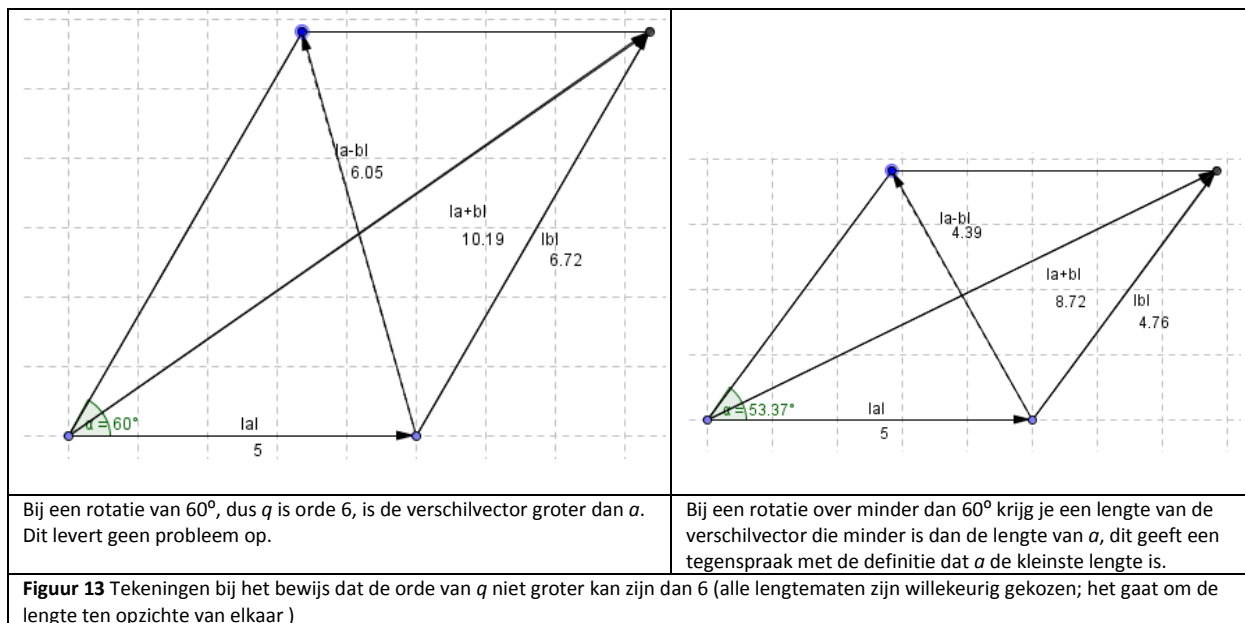
Figuur 12. Behangpatroon van www.dreamstime.com. Het aangegeven rooster (de dikke lijn) is een vierkant, dus optie '4'.

17 behangpatronen

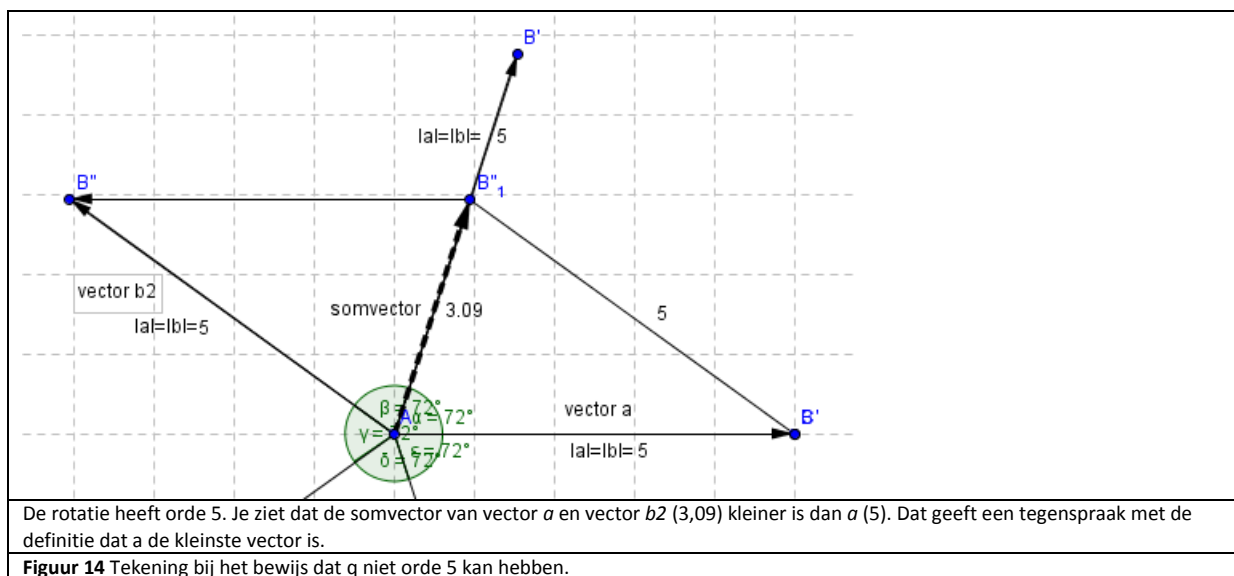
Aan de hand van de specifieke eigenschappen van vectoren blijkt dus dat er maar vijf mogelijke roosters zijn. Met deze definitie van de roosters is de translatie van de behangpatronen groep nu beschreven: de translatieondergroep H van de behangpatroongroep bestaat uit twee translaties a en b , die door het rooster zijn vastgelegd.

Vervolgens wordt er bij een gegeven rooster L gekeken welke orthogonale transformaties (dus rotaties en spiegelingen) het rooster L onaantast laten, oftewel bewaren. Hierbij ga je uit van een behangpatroongroep, die werkt op een rooster L . Je weet al dat de puntgroep I van deze behangpatroongroep een ondergroep van deze groep moet zijn. In de definitie van de behangpatroongroep was ook al aangegeven dat de puntgroep eindig was; dit betekent dat er maar een beperkt aantal rotaties mogelijk zijn. Het bewijs voor het feit dat de puntgroep eindig is kun je weer geven met de definities van het rooster L .

Stel dat we een rotatie hebben met orde q , dat wil zeggen dat je een figuur q keer kunt roteren voordat je helemaal rond bent gegaan. Dan is de hoek waarom je draait dus gelijk aan $\frac{2\pi}{q}$. Je moet uitgaan van een minimale lengte a (zie definitie rooster). Stel nu dat q groter is dan 6, en dat de hoek waarom je draait dus kleiner is dan 60° , dan krijg je een verschilvector die kleiner is dan a (zie figuur 13), en dat is in tegenspraak met de keuze van a (je was namelijk begonnen met de definitie dat a de minimale translatieafstand was, en de verschilvector is ook een vector, en die mag niet kleiner zijn). Dus je houdt nu alleen nog orde 1 (eenheidselement), 2, 3, 4, 5 en 6 over.



Nu blijkt dat ook orde 5 niet mogelijk is; stel $q=5$, dus de hoek waarom je draait gelijk is aan 72° . Dan is de somvector van vector b_2 en vector a gelijk aan 3,09 (zie figuur 14). Dit is kleiner dan 5, waardoor weer een tegenspraak volgt (want je had a per definitie als kleinste vector gekozen).



Je weet nu dus dat een translatiegroep van de behangpatroongroep uit 5 roosters bestaat. Je weet ook dat een puntgroep alleen orde 1, 2, 3, 4 en 6 kan hebben; de puntgroep wordt dus gegenereerd door een rotatie met een hoek van respectievelijk 0 , π (180°), $2\pi/3$ (120°), $\pi/2$ (90°) of $\pi/3$ (60°) en eventueel een spiegeling.

Met behulp van de meetkunde en groepen zijn nog een aantal beperkingen te geven waarmee je uiteindelijk op de 17 groepen komt die in de inleiding werden genoemd. Bijvoorbeeld: als een patroon een 4-voudig rotatiecentrum bevat (dus orde 4, of met een hoek van 90°) heeft het geen 3-voudige en 6-voudige (120° of 60°) centra. Dit volgt uit het gegeven dat we te maken hebben met groepen. Omdat de verzameling isometrieën van een behangpatroon een groep vormt geldt dat elke

combinatie van isometrieën weer een isometrie moet zijn. En dit is niet het geval als er sprake is van een rotatie over 60° en een vierkant rooster (niet alle veelvouden van 60 zijn deelbaar door 90).

Het bewijs van het feit dat er maar 17 behangpatroongroepen zijn werd officieel gegeven in 1891, door de kristallograaf E.S. Fedorov. Dan is het toch bijzonder om je te realiseren dat deze 17 verschillende behangpatronen bijvoorbeeld voorkomen in het Alhambra (Heijden, 2015), een enorm paleis dat gebouwd werd in het midden van de dertiende eeuw.

De 17 groepen staan samengevat in het overzicht van tabel 4. Daarbij is uitgegaan van de volgende definities: De behangpatroongroep G is een ondergroep van de Euclidische groep E_2 . G is opgebouwd uit een translatie ondergroep H , een puntgroep J en rooster L . De vectoren a en b zijn de vectoren die het rooster opspannen. Je kunt aannemen dat a langs de positieve x-as ligt en b in het eerste kwadrant. De rotatie wordt genoteerd door A_θ , een antiklokswijze rotatie van θ rond de oorsprong voorstelt. B_ϕ is een spiegeling in een lijn door de oorsprong die helt met een hoek van $\phi/2$ met de positieve x-as. I is de identiteit, dus stuurt een afbeelding naar zichzelf. $-I$ is een puntspiegeling, oftewel een rotatie om 180° .

Voor het kort noteren van de 17 groepen in tabel 4 wordt verder gebruik gemaakt van onderstaande notaties:

p staat voor primitief rooster, hierbij is het rooster opgebouwd uit primitieve cellen (dit zijn kopieën van het basis parallelogram, waar geen rooster punten in het midden liggen, dus obliëk, rechthoekig, vierkant en hexagonaal).

c staat voor gecentreerd rooster, hier heb je een niet-primitieve cel samen met zijn centrum als het basis bouwblok.

m staat voor spiegel (*mirror*)

g staat voor glij spiegeling

1 staat voor de eenheids transformatie

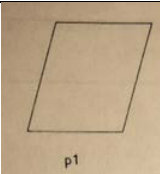
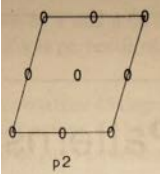
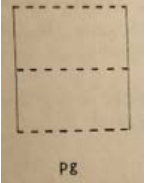
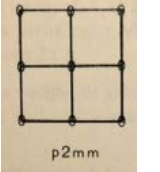
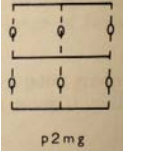
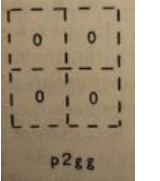
2 staat voor een rotatie met orde 2, dit is 180° oftewel een halve draai

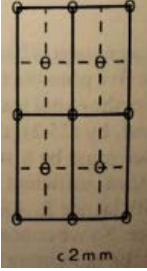
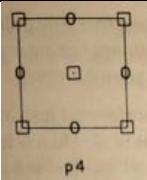
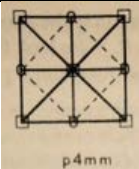
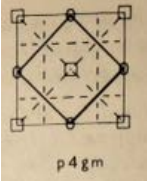
3, 4, 6 staat voor rotatie met orde 3 (120°), 4 (90°) of 6 (60°)

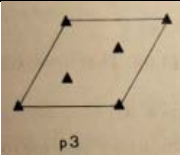
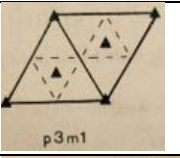
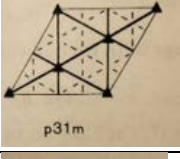
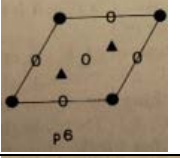
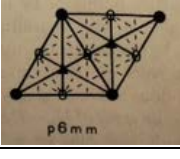
Op de afbeeldingen in de tabel staan de centra van rotatie en de posities van de spiegelingen en glij lijnen relatief tot het basis parallelogram. De symbolen geven aan wat de orde is van de rotatie en om welk punt. Er is orde 2 is (O), orde drie (▲), orde vier (□) of orde zes (●). Dikke lijnen zijn spiegellijnen en de gebroken lijnen zijn glijlijnen.

Bij deze notatie wordt gebruik gemaakt van afspraken die gemaakt zijn door de International Union of Crystallography (zie ook <http://www.iucr.org/>) in 1952. Er zijn ook andere manieren van notatie, zie bijvoorbeeld <http://dare.uva.nl/cgi/arno/show.cgi?fid=199978>. Voor het determineren van de behangpatronen kun je gebruik maken van verschillende stroomdiagrammen, zoals bijvoorbeeld aangegeven in <https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/SymIslam1.pdf>.

Tabel 4 Korte omschrijving van de 17 behangpatroongroepen (gegevens uit Armstrong, 1988).

Rooster	Code	Translaties	Puntgroep
Parallelogram	De enige twee orthogonale transformatie die L bewaren zijn het eenheidselement en indien mogelijk de rotatie over 180° rond de oorsprong. De puntgroep van deze twee groepen is dus een ondergroep van $\{\pm I\}$		
	p1	Het patroon omvat alleen twee translaties	J omvat alleen het eenheidselement I , deze groep is de simpelste van alle behangpatronen, met de minste symmetrie
	p2	Het patroon omvat alleen twee translaties	Het eenheidselement en een rotatie over 180° , dus J bestaat uit $\{\pm I\}$. Deze puntgroep noem je $\mathbb{Z}_2$.
Rechthoek	Er zijn nu 4 orthogonale transformaties mogelijk die het rooster L intact laten; het eenheidselement, een halve draai om O , spiegeling om de x-as en een spiegeling om de y-as. De puntgroep van G is een ondergroep van $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$.		
	pm	G omvat een spiegeling in een horizontale spiegel	J is $\{I, B_0\}$, puntgroep $\mathbb{Z}_2$
	pg	Geen spiegeling in G . Er is wel sprake van een glijspiegeling langs een horizontale lijn. Je kunt bewijzen dat de lengte van de glijbeweging een oneven meervoud van $\frac{1}{2}a$ moet zijn.	De puntgroep bestaat uit twee van de groep $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$, de puntgroep is dus nog steeds $\mathbb{Z}_2$
	p2mm	G omvat een spiegeling met een horizontale en een verticale spiegel.	Dit is puntgroep $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en bestaat uit alle vier de acties $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$,
	p2mg	Hier is er sprake van een spiegeling in een horizontale spiegel en een verticale glij spiegeling.	De puntgroep is $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ook hier kun je weer bewijzen met de groepentheorie dat de translatie bij de glijbeweging een oneven meervoud van $\frac{1}{2}b$ moet zijn.
	p2gg	Deze groep omvat alleen twee glijspiegelingen, geen spiegelingen.	De puntgroep is $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Gecentreerde rechthoek	De orthogonale transformaties die L bewaren zijn dezelfde als bij de rechthoek. Dus moet de puntgroep weer een ondergroep zijn van $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Er komen nu twee nieuwe groepen bij.		
	cm	Deze groep bestaat uit of een spiegeling in een horizontale spiegel of een glij spiegeling langs een horizontale lijn.	De puntgroep van deze groep is $\{I, B_0\}$, dus puntgroep $\mathbb{Z}_2$. (Als je $\{I, B_\pi\}$ als puntgroep neemt dan krijg je een groep die isomorph is met cm, dat zou dan dus geen andere groep zijn)
	c2mm	Deze groep omvat een horizontale en een verticale spiegeling.	De puntgroep van deze groep is $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$, dus net als bij p2mm, p2mg en p2gg is de puntgroep $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Vierkant	Het rooster van deze groep is een vierkant. Dan bestaat de groep van orthogonale transformaties die L behouden uit rotaties met order 4 (dus over 90°) en verschillende spiegelingen. De puntgroep J is een ondergroep van $\{\pm I, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\frac{3\pi}{2}}, B_0, B_{\frac{\pi}{2}}, B_\pi, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$. De meeste behangpatroongroepen die gemaakt kunnen worden hebben we hiervoor al gezien. Alleen de volgende 3 zijn nog nieuw:		
	p4		De puntgroep bestaat uit rotaties over 90° , dus J bestaat uit $\{\pm I, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\frac{3\pi}{2}}\}$ dus puntgroep $\mathbb{Z}_4$
	p4mm	Hier is sprake van een horizontale en verticale spiegeling	J bestaat uit $\{\pm I, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\frac{3\pi}{2}}, B_0, B_{\frac{\pi}{2}}, B_\pi, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$ dus puntgroep D_4
	p4gm	In deze groep is er sprake van spiegeling, in spiegels die hellen met een hoek van 45° , gecombineerd met glij spiegeling.	De puntgroep J omvat $\{\pm I, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\frac{3\pi}{2}}, B_0, B_{\frac{\pi}{2}}, B_\pi, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$ dus ook hier puntgroep D_4

Hexagonaal	Het rooster van G is hexagonaal. Dan bestaat de groep van orthogonale transformations die L behouden uit rotaties met orde 3 of 6 (dus over 60° en of 120°) en verschillende spiegelingen. De puntgroep J is een ondergroep van $\{\pm I, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{3\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{5\pi}{3}}, B_0, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{4\pi}{3}}, B_{\frac{5\pi}{3}}\}$. Er zijn nu nog 5 nieuwe behangpatroongroepen, allemaal met rotaties met orde 3 of 6.		
	p3	Hier zijn geen spiegelingen of glij spiegelingen.	Je hebt hier alleen een rotatie met orde 3. J wordt dus voortgebracht door $A_{\frac{2\pi}{3}}$
	p3m1	Er is hier sprake van symmetrie, de kortste diagonaal is de spiegel, en rotatie met orde 3.	J bestaat uit $\{\pm I, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, B_0, B_{\frac{\pi}{3}}\}$ dus puntgroep D_3
	p31m	Hier is eveneens sprake van symmetrie maar dan in de langste diagonaal de spiegel waardoor meer spiegelingen mogelijk zijn.	De puntgroep bestaat uit $\{I, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{5\pi}{3}}\}$ dus puntgroep D_3
	p6	Hier zijn geen spiegelingen of glij spiegelingen.	J bestaat uit $\{\pm I, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{3\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{5\pi}{3}}\}$, dit is puntgroep $\mathbb{Z}_6$
	p6mm	In deze groep kun je door spiegeling en rotatie met orde 6 alle symmetrieën krijgen.	J bestaat uit $\{\pm I, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{3\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{5\pi}{3}}, B_0, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{4\pi}{3}}, B_{\frac{5\pi}{3}}\}$. Dit is puntgroep D_6

Tabel 5 Puntgroepen	
G	J
p1	Triviaal
p2	$\mathbb{Z}_2$
Pm	$\mathbb{Z}_2$
Pg	$\mathbb{Z}_2$
p2mm	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
p2mg	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
p2gg	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
Cm	$\mathbb{Z}_2$
c2mm	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
p4	$\mathbb{Z}_4$
p4mm	D_4
p4gm	D_4
p3	$\mathbb{Z}_3$
p3m1	D_3
p31m	D_3
p6	$\mathbb{Z}_6$
p6mm	D_6

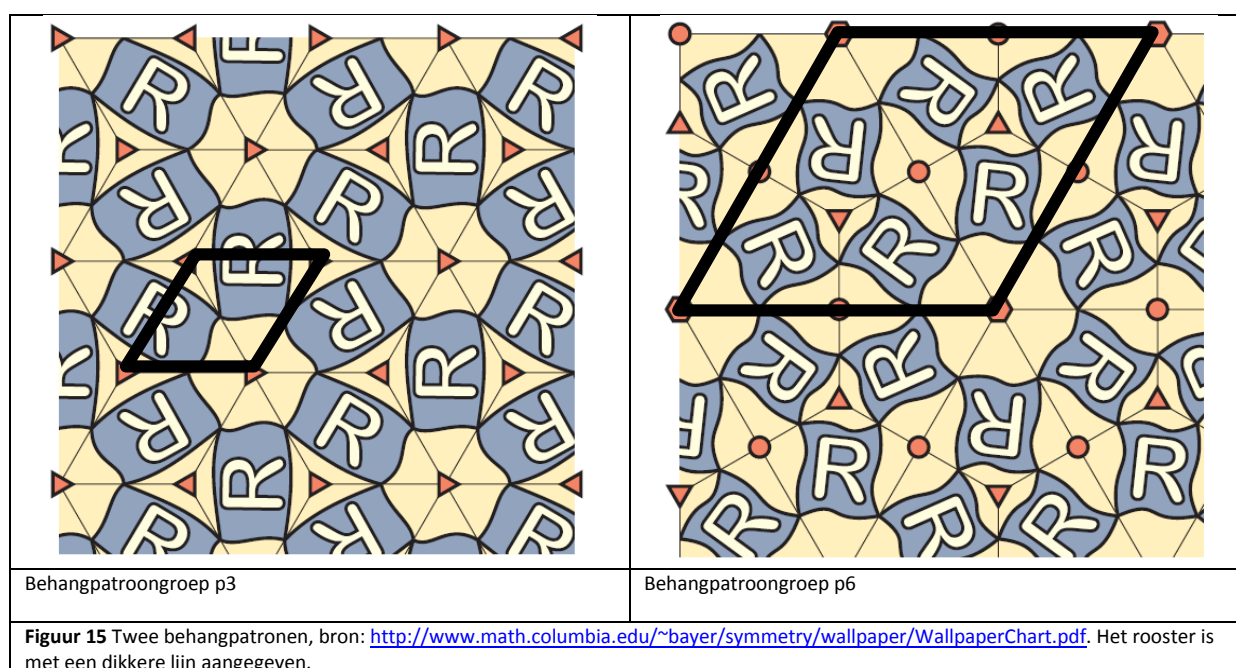
Om te bewijzen dat deze 17 behangpatroongroepen echt verschillend zijn maak je gebruik van het begrip isomorfie (zie bladzijde 7 en 8). Groepen zijn echt verschillend als ze niet isomorf zijn. Met behulp van de groepentheorie is aan de tonen dat een isomorfie tussen behangpatroongroepen een translatie naar een translatie brengt, een rotatie naar een rotatie, een spiegeling naar een spiegeling en een glij spiegeling naar een glij spiegeling. Hiermee kun je vervolgens aantonen dat als twee behangpatroongroepen isomorf zijn, dan moeten hun puntgroepen ook isomorf zijn. Als twee puntgroepen niet isomorf zijn, dan zijn de behangpatroongroepen dat zeker ook niet.

Dus om te bewijzen dat twee groepen niet gelijk zijn kun je eerst checken of de puntgroepen niet isomorf zijn. Van de 17 behangpatroongroepen zijn de puntgroepen bekend (zie tabel 4 en 5). Als de puntgroepen niet hetzelfde zijn dan zijn deze behangpatroongroepen in ieder geval niet isomorf.

Nu moet je alleen nog aantonen van de groepen die dezelfde puntgroep hebben dat ze niet isomorf zijn. Bijvoorbeeld $p2$, pm , pg en cm hebben allemaal puntgroep $\mathbb{Z}_2$. Maar alleen $p2$ heeft rotaties dus die kan niet isomorf zijn aan een van de anderen. pg heeft als enige geen reflectie, dus ook die kan niet isomorf zijn aan een van de anderen. In het geval van pm is een glij beweging in pm een reflectie gevolgd door een translatie, welke beiden behoren tot pm . cm daarentegen heeft een glijbeweging wiens onderdelen niet in cm liggen. Daarom zijn pm en cm ook niet isomorf. Op eenzelfde manier kun je te werk gaan bij de andere groepen waarvan de puntgroepen wel gelijk zijn.

Conclusie

De groepentheorie is een krachtig middel gebleken, om samen met symmetrie, gebruik van vectoren en meetkunde, aan te tonen dat er 17 behangpatroongroepen zijn. Voor de symmetrische figuren uit dit artikel geldt dat figuur 8 behangpatroon $p6mm$ heeft en figuur 12 behangpatroon $p4mm$. In figuur 15 zijn nog twee voorbeelden gegeven van behangpatronen, en tot welke groep ze behoren.



Dankwoord

Ik wil ten eerste mijn twee leerlingen Emma Lucas en Max Bosman (6V, schooljaar 2014-2015) hartelijk bedanken voor het vele malen doorlezen van mijn teksten! Pas als zij het helemaal kunnen volgen is het goed genoeg. En dat was bij de eerste versies nog helemaal niet het geval. Ook G.M. van Hoeve-Brouwer en C. den Besten dank ik zeer voor het doornemen van de tekst, het opbouwende commentaar en de (chemische) uitleg. Tenslotte J.W. van de Leur van de Universiteit Utrecht, hartelijk bedankt voor de uitdaging en de begeleiding.

bronnen:

1. Armstrong, 1988, *Groups and Symmetry*
2. Atkins, P.W., 1990, *Physical Chemistry*, Oxford University Press
3. Beukers, F., 2012. *Lineaire Algebra A*, WISB121, Dictaat Departement Wiskunde Universiteit Utrecht
4. Daems, Jeanine en Smeets, Ionica, 2011, *Ik was altijd heel slecht in wiskunde*. Uitgeverij Nieuwezijds.
5. Reichard et al, 2012, *Getal en ruimte 1vwo deel 2 Hoofdstuk 7*, Educatieve Partners Nederland
6. Heijden, Margriet van der, 2015. *Vormen en Getallen, een dag voor het Alhambra*. Een column in 'De kleine wetenschap, NRC weekend bijlage', bladzijde W12.
7. <http://dare.uva.nl/cgi/arno/show.cgi?fid=199978>
8. <http://www.math.columbia.edu/~bayer/symmetry/wallpaper/WallpaperChart.pdf>
9. <http://mathforum.org/sum95/suzanne/symsusan.html>
10. <http://nl.wikipedia.org/wiki/Isomorfisme>
11. <http://www.emis.de/monographs/jablan/chap13.htm>
12. <http://www.jphogendijk.nl/projects/behangpatronen2010.pdf>
13. <http://www.staff.science.uu.nl/~ban00101/talks/oratie.pdf>
14. <http://www.willemvandervegt.nl/algebra/def-stel-h5.html>
15. <http://www.win.tue.nl/~hansc/symmetrie/h4.html>
16. Yanofsky, Noson S., 2014, *Wat je brein te boven gaat*, Uitgeverij Atlas Contact.