

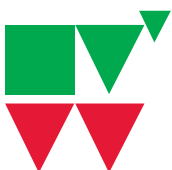
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEERAAR

DENKEN OVER WISKUNDE, ONDERWIJS EN ICT
UITDAGENDE SUDOKU-VARIATIES
TIEN JAAR OPLEIDINGSCOMPETITIE
EEN ERVARING MET LESSON STUDY
EEN INTRODUCTIE IN GROEPEN
TEGENVOETER

NR.7



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 90 | JUNI 2015

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 90 NR 7

IN DIT NUMMER

DENKEN OVER WISKUNDE, ONDERWIJS EN ICT

PAUL DRIJVERS

4

WIS EN WAARACHTIG

11

GETUIGEN

DANNY BECKERS

12

KLEINTJE DIDACTIEK

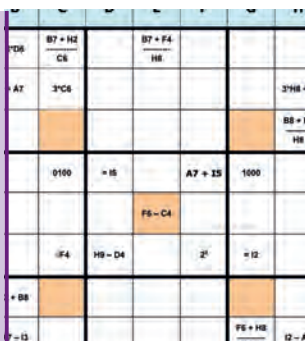
LONNEKE BOELS

13

UITDAGENDE
SUDOKU-VARIATIES

FOLKERT VAN DER MEULEN BOSMA

14



TIEN JAAR OPLEIDINGSCOMPETITIE

DÉDÉ DE HAAN

15

HET FIZIER GERICHT OP...

MIEKE ABELS

18

VERSCHEENEN

EN PAGINA'S: 23, 27, 31, 39

19

EEN ERVARING MET LESSON STUDY

JOS ALKEMADE

SUI LIN GOEI

20

UITDAGENDE PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

24

SPELLETJES IN DE
KLAS

IRENE OLDENBURGER

MARJANNE KLOM

28



EEN INTRODUCTIE IN GROEPEN

MARLOES KLOOSTERBOER-VAN HOEVE

EMMA LUCAS

MAX BOSMAN

29

VANUIT DE OUDE DOOS

TON LECLUSE

32

TEGENVOETER

ROLAND MEIJERINK

35



De coverafbeelding is van Rinus Roelofs:
Een patroon waarbij geweven is met
gedraaide ringen.
Website www.rinusroelofs.nl

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

BOEKBESPREKING

GER LIMPENS

37

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

40

VERENIGINGSNIEUWS

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2015

HET LERARENREGISTER

VISITE, VISITE, MET VEEL HOGE PIETEN



41

RECREATIE

47

SERVICEPAGINA

50

Kort vooraf

Als dit laatste nummer – van een bijzondere jaargang – bij u op de mat valt, is het tijd om weer een schooljaar af te sluiten. Na de diploma-uitreiking, de eindtoetsen en dan echt de laatste vergadering... bent u vast toe aan een welverdiende vakantie. Voor u ligt een flink gevuld exemplaar met voor elk wat wils; we hopen dat het genoeg biedt om straks goed geïnformeerd en geïnspireerd aan een nieuw schooljaar te beginnen.

Bij het eind van het schooljaar wordt vaak afscheid genomen van leerlingen, maar ook van collega's. Ook onze redactie ontkomt niet aan dit laatste. Mijn steunpilaren bij de hoofd- en eindredactie, Birgit van Dalen en Nathalie Kuijpers, stoppen na deze jaargang. Ieder op hun eigen wijze hebben ze de afgelopen jaren veel betekent voor de redactie, en voor mij persoonlijk. Bedankt dames, ik heb veel van jullie geleerd. Ook onze voorzitter, Heiner Wind, gaat ons na zes jaar verlaten. Hij was mede verantwoordelijk voor de verjonging van de redactie, de nieuwe vormgeving en – zeer actueel – de digitalisering van *Euclides*.^[1] Hij heeft op vele fronten een onuitwisbare stempel geplaatst op de toekomst van ons blad. Eindelijk mag hij genieten van de vrijheden die horen bij een pensioenge-rechtigde leeftijd, maar wat zullen we hem missen...

Ik ga nog niet weg bij *Euclides* maar geef wel het hoofdredactie-stokje over aan Tom Goris, ik wens hem veel succes. Ik dank alle auteurs, het bestuur van de NVvW en de redactie voor de fijne samenwerking. En ik bedank u, de lezer; het was me een eer en genoegen om hoofdredacteur te mogen zijn van uw vakblad.

Een goede vakantie gewenst!
Marjanne de Nijs

[1]  vakbladeuclides.nl/archief

DENKEN OVER WISKUNDE, ONDERWIJS EN ICT

Paul Drijvers

ORATIE PAUL DRIJVERS

Op 21 mei jl. aanvaardde Paul Drijvers zijn benoeming tot hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht met een inaugurale rede. Hieronder leest u een ingekorte versie van deze oratie. Daarin wordt ten eerste gepleit voor meer wiskundig denken in de klas. Ten tweede wordt ingegaan op de vraag of ICT daarbij kan helpen. De volledige versie van de oratie, met referenties en uitgebreidere onderbouwing, is online beschikbaar.^[1]

Inleiding

Ergens midden jaren zestig van de vorige eeuw waren we met het gezin op vakantie in Zwitserland. Vanaf de camping waren we met de auto naar een station van een kabelbaan gereden, in een gondel de berg opgegaan, boven wat gewandeld en toen weer met de kabelbaan naar beneden. In de auto terug naar de camping stelde mijn vader van achter het stuur de volgende vraag: 'Tijdens onze afdaling ben ik 17 gondels tegengekomen. Hoeveel van die gondels zijn er in totaal?' Ik moet hier bij vertellen, voor zover u dat nog niet had begrepen, dat mijn vader wiskundeleraar was. Hij heeft in Utrecht college gelopen bij onder andere Freudenthal. Op zijn vraag veren de vijf kinderen op van de achterbank: '34! Nee, 35!' Tot op een gegeven moment de jongste '18' zegt en daarmee de anderen tot zwijgen brengt.

Wat is hier aan de hand? De antwoorden 34 en 35 verraden een statische blik, zoals schematisch weergegeven in figuur 1: onder in beeld de stijgende gondels, boven de dalers, dus in totaal twee keer zo veel gondels als de 17 die mijn vader zag, al dan niet plus 1. Het juiste antwoord, 18, zie je echter vanuit een dynamisch perspectief: je ziet die kabelbaan draaiend voor je en realiseert je dat je tijdens de afdaling alle andere gondels tegenkomt. Een animatie op een beeldscherm, zoals mijn collega Frans van Galen heeft gemaakt, roept dit beeld onmiddellijk op.^[2]



figuur 1 Statisch beeld van de kabelbaan



Dit voorbeeld gaat over een aspect van wiskundig denken: het vermogen om flexibel heen en weer te schakelen tussen een statisch en een dynamisch perspectief, al naar gelang de situatie en de vraag. Dergelijke blikwisselingen – wiskundige wendbaarheid zoals Martin Kindt het wellicht zou noemen – spelen een grote rol bij het oplossen van problemen en bij het wiskundig denken dat daarbij aan de orde is. De animatie laat zien dat ict-representaties zulke blikwisselingen kunnen oproepen. Hiermee is de toon gezet voor deze inaugurale rede, waarin wiskundig denken en ict-gebruik de belangrijkste onderwerpen zijn.

Wiskundig denken onderwijzen

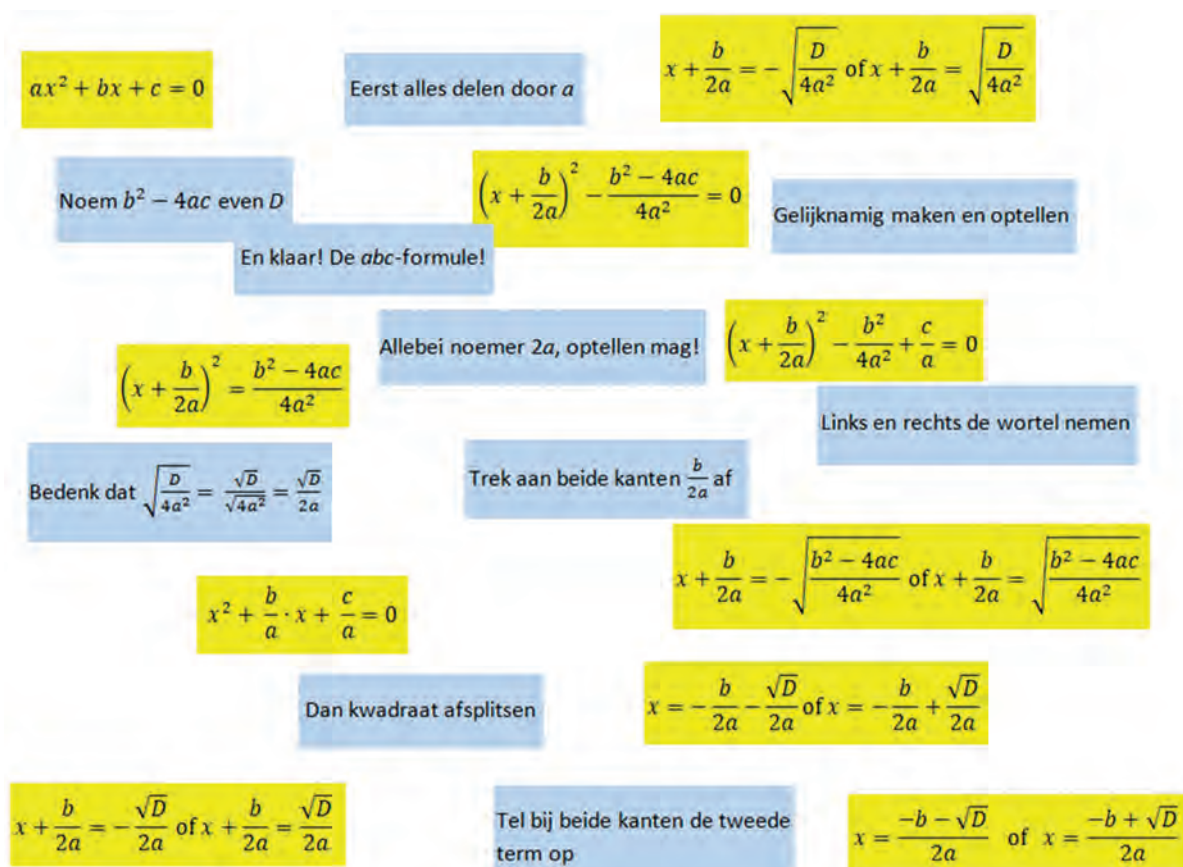
Laat ik maar met de deur in huis vallen: in de wiskundeles moet meer worden nagedacht. Een van de belangrijkste doelen van wiskundeonderwijs is dat leerlingen worden uitgedaagd om hun hersens te gebruiken en daarbij de kracht van de wiskunde in te zetten. Het gaat erom dat leerlingen alert en fris naar problemen kunnen kijken en kritisch kunnen denken en redeneren. Ik ben er stellig van overtuigd dat dit een fundamentele waarde van wiskundeonderwijs kan zijn, niet alleen ten behoeve van een exacte vervolgopleiding of beroepspraktijk, maar ook

in andere praktijken en in het persoonlijke leven. In een recent nummer van *Euclides* is wiskundig denken omschreven als het gebruiken en ontwikkelen van wiskundig gereedschap om een probleem op te lossen.^[3] Kenmerkende wiskundige denkactiviteiten zijn probleemoplossen, modelleren en abstraheren. Maar in het voortgezet onderwijs staat wiskundig denken te weinig centraal. Echte problemen komen nauwelijks aan de orde of worden opgesplitst in kleine deelstappen, modellen worden vaak al weggegeven of betreffen gekunstelde contexten. Aan abstraheren wordt nauwelijks toegekomen. De uitdaging ontbreekt en de spanning is ver te zoeken. Wat valt hieraan te doen en op welke manier kan wiskundig denken worden onderwezen? Het antwoord op deze vraag is tweeledig en ligt voor de hand: ten eerste door leerlingen goede problemen te geven waarin probleemoplossen, modelleren en abstraheren aan de orde komen, en ten tweede door als docent de mogelijkheden van dergelijke problemen in de klas optimaal te benutten. Wat zijn geschikte problemen? Laat ik beginnen met een voorbeeld, binnen het onderzoek 'Wiskundige denkactiviteiten in praktijk' ontwikkeld in samenwerking met docente Irene Vis.^[4] In veel klassen wordt de *abc*-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen niet bewezen. Dat is een ongewenste situatie en er zijn verschillende manieren om dit bewijs toch aan de orde te

laten komen. Bij de formules en omschrijvingen in figuur 2 kan leerlingen bijvoorbeeld worden gevraagd om deze op volgorde te zetten zodat ze een sluitend bewijs vormen. Dat kan met ict-middelen zoals een digitaal schoolbord, maar ook met strookjes papier. Er zijn verschillende varianten, die het mogelijk maken om rekening te houden met de verschillen binnen de klas:

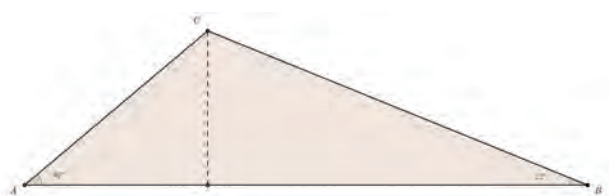
- leerlingen krijgen de formules en omschrijvingen zoals afgebeeld in figuur 2;
- iets eenvoudiger: leerlingen krijgen paren, bestaande uit een formule en de omschrijving van de volgende stap;
- iets moeilijker: leerlingen krijgen alleen de begin- en eindformule, maar alle tien omschrijvingen. De vraag is dan om de omschrijvingen op volgorde tussen de begin- en eindformule te leggen en de tussenliggende stappen zelf uit te voeren;
- nog moeilijker: leerlingen krijgen begin- en eindformule en de vraag om met kwadraat afsplitsen van de ene naar de andere kant te komen. Als ze vastlopen, krijgen ze van de docent de omschrijving van de stap uit figuur 2 die past bij waar ze zijn.

Welke criteria kunnen aan denkactieve opgaven worden gesteld? Met het oog op probleemoplossen is het goed als een opgave een verrassingselement heeft, iets dat de



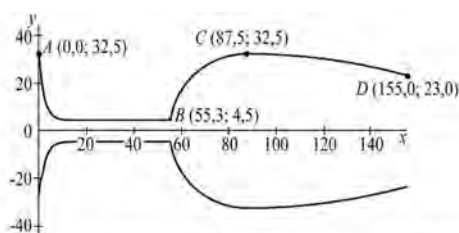
figuur 2 Bouwstenen voor een bewijs van de *abc*-formule voor kwadratische vergelijkingen

leerling niet verwacht en dat de opgave daarmee boeiend maakt. Vanuit het perspectief van modelleren kan een criterium zijn dat de leerling kwalitatief over een model moet nadenken of dat eigenschappen van het type model onderzocht worden. Een criterium met betrekking tot abstraheren kan zijn dat op basis van verschillende situaties een wiskundig concept of methode wordt gevormd. Vanzelfsprekend hoeft een opgave niet aan alle criteria te voldoen om geschikt te zijn. Overigens is er al veel denkactiverend lesmateriaal beschikbaar; zie bijvoorbeeld de opgavenbundel over algebra van Martin Kindt.^[5] Ten tweede is de manier waarop de wiskundedocent in de les aandacht besteedt aan wiskundig denken cruciaal. Dat zit soms in kleine zaken. In een les die ik onlangs bijwoonde, werd een op het eerste gezicht vrij saaie opgave naar de lengte van lijnstuk AB (zie figuur 3)

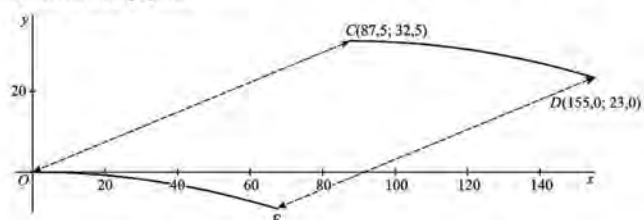


figuur 3 Een gewone vraag naar de lengte van AB die toch nog denkactief wordt

ineens toch nog spannend toen de docente, Mascha Klerx, de leerlingen vertelde dat ze per drietal één gegeven naar keuze zouden krijgen. De vraag welk gegeven nu het meest informatief is, is op zichzelf al interessant. Het feit dat de verschillende drietallen dus over verschillende informatie beschikten, maakte het oplossen spannend en de klassikale nabespreking levendig.



Om CD te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met C als top. Een formule van deze parabool kan worden gevonden door eerst kromme CD te verschuiven zo dat C terechtkomt op $O(0,0)$. In figuur 3 zijn de kromme CD en de beeldkromme OE getekend en is ook de verschuiving weergegeven. Kromme OE is deel van een bergparabool met top O en heeft dus een formule van de vorm $y = a \cdot x^2$, met $a < 0$. Nu kan gebruik gemaakt worden van de translatie die kromme OE afbeeldt op kromme CD . In figuur 3 is ook deze translatie weergegeven.

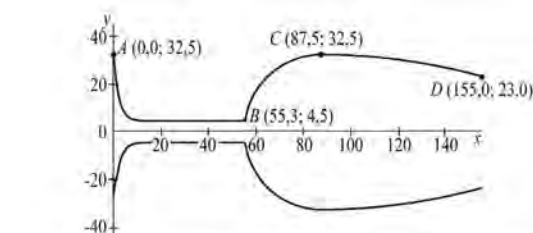


Het is nodig dat docenten beschikken over werkvormen en technieken die denkactiviteiten in de les bevorderen. In het eerdergenoemde onderzoek wordt momenteel een aantal van dergelijke technieken ontwikkeld en geïdentificeerd. Denk bijvoorbeeld aan het hanteren van een nieuwe werkvorm, zoals in de voorbeelden hierboven, maar ook aan het stellen van de juiste vragen aan leerlingen, zoals omkeervragen, vragen naar randgevallen of uitzonderingen, vragen naar wat algemeen is in de situatie of de werkwijze. Zowel in de initiële lerarenopleiding als in professionaliseringsaanbod, waaraan momenteel in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren wordt gewerkt, verdient het verwerven van een dergelijk repertoire aandacht. Vanzelfsprekend zijn een goede kennis van de wiskundige inhoud en een goede feeling voor de bijbehorende didactiek voorwaarden voor een dergelijke uitvoering van denkactief onderwijs.

Wiskundig denken toetsen

Wil wiskundig denken een grotere plaats krijgen in het wiskundeonderwijs, dan zal dit ook zichtbaar moeten worden in de toetsen, die immers hun schaduw vooruit werpen op het onderwijs. Enige ervaring hiermee is opgedaan in de examens voor de pilotscholen, die voorop liepen bij de invoering van de nieuwe 2015-curricula voor havo en vwo. Laten we een voorbeeld bekijken.

In figuur 4 staat een deel van een opgave uit het centraal examen vwo wiskunde B 2012 over een wijnklas. Links staat de reguliere opgave. Vraag 4, waarin wordt gevraagd naar een kwadratische formule om het deel CD van het glas te modelleren, kent in deze reguliere variant een uitgebreide inleiding waarin een aanpak wordt gesuggereerd. De pilotvariant rechts koerst, na dezelfde afbeelding, vrijwel zonder toelichting recht op



Om CD te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met C als top.

5p 4 Stel een formule op voor kromme CD .

figuur 4 Een opgave uit het centraal examen vwo wiskunde B 2012: links regulier en rechts pilot

de vraag af en doet daarmee een groter beroep op de denkactiviteit van de leerling en reduceert tegelijkertijd ook het leeswerk. De p-waarde, het gemiddelde percentage behaalde punten, verschilde vrij veel: 51,8 voor de reguliere leerlingen ($N = 15683$) tegen 39,8 voor de pilotleerlingen ($N = 243$). Het hopelijk denkactiverende wiskundeonderwijs dat op de pilotscholen is gegeven, weegt kennelijk niet op tegen deze drastische inkorting. Uit een inventarisatie van Van Streun blijkt dat de pilotexamens bij de nieuwe wiskundecurricula slechts in beperkte mate beroep doen op wiskundig denken.^[6] Gelet op de richtinggevende werking die van de centrale examens uitgaat, verdient het aanbeveling om bij de examenconstructie wat meer durf te tonen op dit gebied. Als we echt werk willen maken van denkactief wiskundeonderwijs, geeft de aanpassing van de opgave in figuur 4 ondanks de matige resultaten de weg aan die we verder moeten bewandelen. Het toetsen van wiskundig denkvermogen is niet eenvoudig, maar wel voorwaarde voor een daadwerkelijke plaats voor deze vaardigheid in doorlopende leerlijnen.

ICT in het wiskundeonderwijs

ICT is niet meer uit ons leven weg te denken. Bewust en vaak ook onbewust maken we gebruik van allerlei recente technologieën. De vraag rijst dus of en op welke manier de inzet van ICT kan bijdragen aan leren, aan het leren van wiskunde, en gelet op het voorafgaande in het bijzonder aan het wiskundig denken van leerlingen. Daarover gaat het tweede deel van deze oratie. Laten we eerst eens terugkijken op de snelle ontwikkeling van ICT voor wiskundeonderwijs gedurende de laatste decennia. Oorspronkelijk, zo in de jaren '80 en '90 van de vorige eeuw, zagen we vooral specifieke, *dedicated* ict-tools opkomen. Denk aan computeralgebra voor het manipuleren van formules, aan educatieve programmeertalen zoals *Logo*, aan spreadsheetprogramma's voor het maken van tabellen en grafieken en aan software voor dynamische meetkunde en voor het verwerken van statistische gegevens.

Vervolgens vervaagt geleidelijk de scheiding tussen deze verschillende typen toepassingen. De grafische rekenmachine integreert bijvoorbeeld mogelijkheden voor grafieken, tabellen en statistiek. Computeralgebrasystemen hebben grafische mogelijkheden. Het meetkundeprogramma *Geogebra* is uitgebreid met een module voor computeralgebra.

Tevens zien we een verschuiving van software die lokaal geïnstalleerd moet worden, met alle praktische bezwaren van dien, naar online applicaties die altijd en overal toegankelijk zijn. Denk bijvoorbeeld aan de animatie van de kabelbaan aan het begin van deze oratie. In projecten

als *Wisweb* en *Rekenweb* zijn bij het Freudenthal Instituut grote aantallen interactieve applets ontwikkeld, die op hun beurt ook weer zijn geïntegreerd in de Digitale WiskundeOmgeving. Zo ontstaan brede leeromgevingen waarin inhoud wordt aangeboden, maar die ook een leerlingvolgsysteem en een auteursomgeving bieden. Deze volgsystemen bieden mogelijkheden voor *learning analytics*: het op grond van data van leerlingen en analytische leerlingmodellen voorspellen van leerprocessen en het adviseren van leerlingen. Bovendien is de grens met toetsomgevingen steeds moeilijker te trekken. Binnen scholen verandert de infrastructuur, zijn digitale schoolborden gangbaar en maken laptops, tablets en smartphones, verbonden via draadloze netwerken, hun entree. Ook buiten school zien we online oefenomgevingen die door grote aantallen leerlingen worden gebruikt, en zogeheten *massive open online courses* (MOOCs). Deze online onderwijsmogelijkheden roepen de vraag op hoe ze vruchtbaar met traditioneel onderwijs kunnen worden gecombineerd in *blended learning* of *flipping the classroom* leerarrangementen.

Optimisme

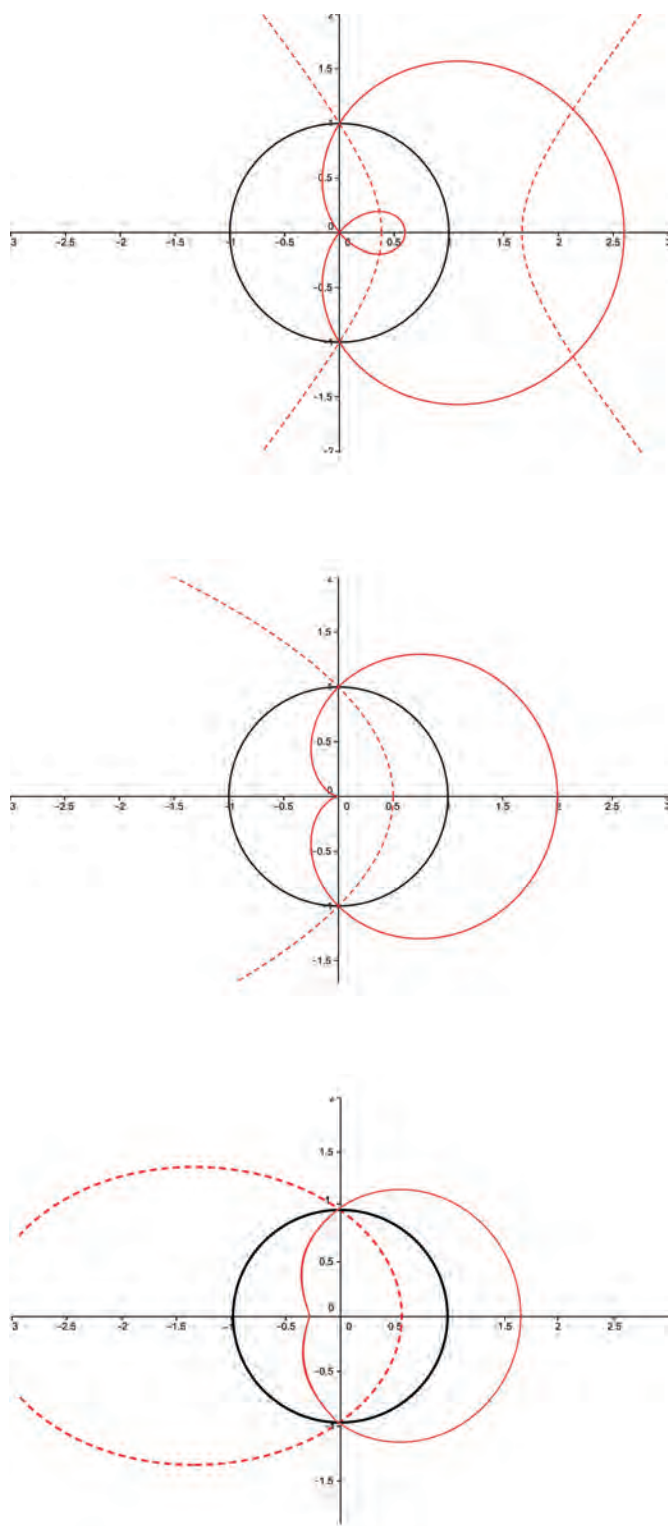
Indertijd geloofden velen dat ICT een hefboom zou zijn die het wiskundeonderwijs ingrijpend zou veranderen. Wiskundig denken zou (weer) centraal komen te staan door simulaties en exploraties binnen ict-omgevingen; interactief en leerlinggestuurd onderwijs zou eindelijk werkelijkheid kunnen worden. In figuur 5 wordt bijvoorbeeld onderzocht wat er gebeurt met de bekende kegelsneden ellips, parabool en hyperbool onder inversie. De inversie is de afbeelding die punten 'spiegelt in de eenheidscirkel'. Nauwkeuriger gezegd: het beeld van een punt ligt op de halve rechte vanuit de oorsprong door het origineel en dan op een afstand die het omgekeerde is van de originele afstand. We zien in figuur 5 in het midden de cardioïde of hartkromme verschijnen als inversie van de parabool! In het algemeen krijgen we zo

de slaklijnen van Pascal als inversies. Dit vermoeden laat zich met algebra elegant bewijzen, zeker als de poolver-

gelijking van de vorm $R = 1 + a \cdot \cos(\theta)$ wordt gebruikt. Het is dit type voorbeelden dat laat zien hoe 'spelen' met ICT kan uitnodigen tot wiskundig denken, bewijzen en conceptvorming; activiteiten zoals deze vormen de basis voor het hierboven genoemde optimisme.

Inmiddels lijkt het aanvankelijke optimisme plaats te maken voor realisme. ICT wordt tot op heden vooral gebruikt als gereedschap om bijvoorbeeld vergelijkingen op te lossen, of als oefenomgeving voor procedurele vaardigheden; de begripsvorming en het wiskundig denken die men in het verleden voor ogen had, staan minder

'INMIDDELS LIJKT HET AANVANKELIJKE OPTIMISME
PLAATS TE MAKEN VOOR REALISME.'



figuur 5 Slaklijnen als inversies van kegelsneden

centraal. Ook de invoering van de grafische rekenmachine in Nederland in de jaren '90 ging gepaard met hoge verwachtingen^[7]; momenteel staat het gebruik van deze machine bij het centraal examen havo/vwo echter ter discussie en wordt de GR vooral gebruikt als gereedschap voor het bepalen van snijpunten van grafieken en kansen bij verschillende kansverdelingen.

Wat maakt of ICT werkt in de klas?

Als we dus een realistischer standpunt innemen over ICT in de wiskundeles, wat maakt dan dat het wel of niet werkt? Een eerste bepalende factor is hoe goed het bij een opgave benodigde wiskundige denken aansluit bij de mogelijkheden en onmogelijkheden van de ICT; de tweede factor is in hoeverre de docent in staat is deze match in de les uit te buiten. Laten we weer een voorbeeld bekijken.

In figuur 6 is afgebeeld hoe een leerling het applet *Vergelijkingen met bordjes* gebruikt om een vergelijking stap voor stap op te lossen volgens de zogeheten bordjesmethode.^[8] Om te beginnen selecteert de leerling met de muis een expressie binnen de vergelijking. Deze expressie verschijnt op de volgende regel, gevolgd door het = teken (zie scherm 1). Vervolgens typt de leerling de waarde van de expressie in, waardoor een nieuwe, eenvoudigere vergelijking ontstaat. Na een druk op de ENTER toets verschijnt een vinkje om aan te geven dat de waarde correct is (scherm 2). Dit proces herhaalt zich tot een vergelijking van de vorm $x = \dots$ ontstaat, waarna het applet aangeeft dat de vergelijking is opgelost.

De resultaten van het onderzoek van Jupri, Drijvers en Van den Heuvel-Panhuizen^[9] suggereren dat deze aanpak werkt, in de zin dat leerlingen ervan leren om vergelijkingen op te lossen. Uit de didactiek van de algebra is bekend dat er twee zaken lastig zijn voor leerlingen in de toepassing van de bordjesmethode. Ten eerste moet de leerling in staat zijn om een goede expressie te selecteren. Dat vraagt om wat Arcavi^[10] *symbol sense* noemt, het vermogen om binnen een complexer geheel geschikte deelexpressies te herkennen. Vervolgens is de vraag welke waarde de gekozen deelexpressie heeft, een kwestie van globale substitutie.^[11] Met elk van deze twee denkstappen correspondeert een techniek binnen het applet, namelijk het *highlighten* van een expressie, respectievelijk het toekennen van een waarde daaraan. Er is dus een nauw verband tussen denken en doen, tussen verstandig kijken naar de vergelijking en met de hand de muis bewegen, tussen inzicht in de wiskunde die aan de orde is en techniek om het applet te gebruiken. De kennis uit de didactiek van de algebra rond *symbol sense* en globale substitutie hebben richting gegeven aan het ontwerp, waardoor dit samenspel van inzicht en techniek als het ware in het applet is 'ingebakken'.

Algemeen gesproken is er bij het gebruik van ICT bij wiskunde sprake van een subtiel samenspel, een wisselwerking tussen enerzijds de technieken die je toepast en waartoe de ICT uitnodigt, en anderzijds de wiskundige kennis, het wiskundig denken van waaruit de leerling aan dit gebruik sturing geeft. De mens-machine interactie hangt sterk samen met de wiskundige inzichten van de leerling en daarin ligt ook juist de pedagogische potentie van het medium. Een criterium voor wat werkt met ICT in de wiskundeles is dan ook dat de handelingen die de

leerling met de ICT uitvoert sporen met de wiskundige begrippen en methoden die de basis van deze handelingen vormen.

In dit proces is de rol van de docent van belang: als de docent zich goed bewust is van de mogelijkheden en beperkingen van de ICT en van de samenhang tussen de ict-technieken en de beoogde wiskundige inzichten, dan kan hij dit proces op de juiste manier begeleiden. Waar docenten bij ict-gebruik nog wel eens een stapje terug doen in de veronderstelling dat de ICT de sturing van het leren overneemt, is het juist van groot belang dat een docent de vinger aan de pols houdt. Het gaat het erom dat de docent middelen inzet (werkvormen, leerarrangementen) die het simultaan leren van techniek en inzicht bevorderen.

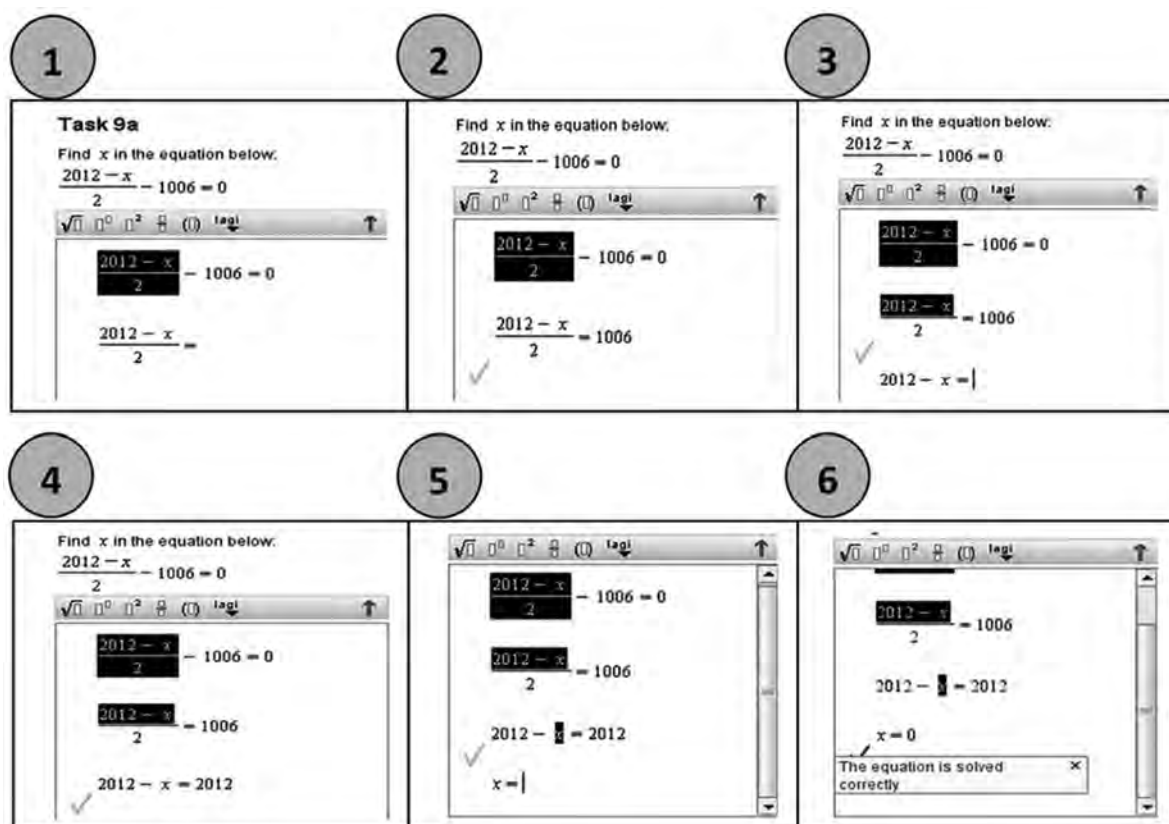
Samengevat zien we dat ICT werkt in de wiskundeles als ten eerste het beoogde wiskundige denken nauw samenhangt met de technische mogelijkheden en onmogelijkheden van de ICT. Het benutten van deze samenhang in ontwerp, gebruik en onderzoek vraagt om een vakinhoudelijke, vakdidactische en technische analyse. Ten tweede is van belang in hoeverre de docent in staat is het leerproces rond het ict-gebruik te orkestreren. Ik zie het als de taak van het Freudenthal Instituut, en als die van mijzelf, om de waarde van ICT in het wiskundeonder-

wijs vanuit vakinhoudelijk en vakdidactisch perspectief te onderzoeken en te benutten.

Tot slot

In deze rede heb ik er allereerst voor gepleit om wiskundig denken centraal te stellen in het wiskundeonderwijs. Het is de kern van de wiskunde en de belangrijkste waarde van wiskundeonderwijs voor leerlingen. Er moet meer worden nagedacht in de wiskundeles! Vervolgens ben ik ingegaan op de rol van ICT in het wiskundeonderwijs. Niet alle bevlogen en hooggespannen verwachtingen zijn tot dusver werkelijkheid geworden. We moeten onder ogen zien dat ICT geen wondermiddel is en dat het benutten van de potentie ervan vraagt om diepe doordinking van de specifieke vakdidactische achtergronden van de leerling-machine-interactie, het type activiteiten dat aan de orde is en de manier waarop dit in de klas kan worden vormgegeven. Als dat gebeurt, kan ICT ook voor het bevorderen van wiskundig denken een uitstekend hulpmiddel zijn.

In de realisatie van beide punten, wiskundig denken en ict-gebruik, spelen wiskundeleraars een belangrijke rol. Daarbij wordt veel gevraagd van hun vakinhoudelijke en vakdidactische kennis. Daarom is zowel de initiële lerarenopleiding als het professionaliseringsaanbod cruciaal. ICT kan hierbij niet alleen als onderwerp van



figuur 6 Een vergelijking oplossen met de bordjesmethode in de DWO^[9]

scholing functioneren; het kan tevens een vehikel zijn om de opleiding op een eigentijdse en interactieve manier vorm te geven. Van de landelijke samenwerking, die bij het opzetten van een dergelijke virtuele opleiding gewenst is, kan een kwaliteitsimpuls uitgaan. Een en ander brengt mij op de agenda van mijn leerstoel voor de komende jaren. Een eerste punt op deze agenda is het verder uitwerken van het idee van wiskundig denken in zowel theoretische als praktische zin. Het spreekt hierbij vanzelf dat docenten, lerarenopleiders en onderzoekers de handen ineen moeten slaan om een inbedding in de praktijk en in de opleiding te combineren met een onderzoeksmatige onderbouwing. Dat kan op een generiek niveau gebeuren, maar dient ook te worden gespecificeerd voor verschillende deelgebieden.

Een tweede onderwerp is het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs. Er moeten wegen worden gevonden om de mogelijkheden van ICT beter te benutten, we moeten beter weten wat werkt en waarom. Ook hier gaat het weer om zowel theoretische kennis als om *good practices*, die in interactie tussen wetenschap en praktijk tot stand zullen moeten komen. Dit betreft niet alleen de praktijk van het voortgezet onderwijs, maar ook die van het hoger onderwijs. Ook daar is er behoefte aan domeinspecifieke uitwerking, want het is niet vanzelfsprekend dat ICT in het statistiekonderwijs van de UU op basis van dezelfde principes wordt ingericht als het meetkundeonderwijs in het vo met software voor dynamische meetkunde. Specifiek voor de lerarenopleiding streef ik naar een verdere uitbouw van *blended modules* vakdidactiek wiskunde, die in samenwerking met de verschillende opleidingen in Nederland en wellicht ook daarbuiten tot stand kunnen komen. Daarnaast zal digitale toetsing een punt van aandacht zijn, waarin de samenwerking tussen de UU en Cito verder gestalte kan krijgen.

Ten derde nog een punt van algemenere aard. Zoals blijkt uit een recent verschenen rapport voor Platform Wiskunde Nederland staat het wiskundig-didactisch onderzoek in Nederland er niet goed voor.^[12] Wat het niet beter maakt, is dat de sfeer in de wiskunde- en wiskundeonderwijs community in dit kleine land zich soms meer kenmerkt door animositeit dan door synergie, wat ons imago en onze zaak naar de buitenwereld toe geen goed doet. Mijn ambitie is dan ook dat mijn leerstoel fungeert als centraal knooppunt van kennis, samenwerking en uitwisseling op het gebied van vakdidactiek wiskunde, als bindend element dat bruggen slaat tussen de verschillende gremia die de zaak van goed wiskundeonderwijs aan het hart gaan. We zijn te klein om vele eilandjes in stand te houden en ik zal dan ook zoeken naar vormen van landelijke samenwerking voor de bundeling en disseminatie van wiskundig-didactisch onderzoek.

Noten

- [1] Zie www.uu.nl/medewerkers/phmdrijvers, onder publicaties.
- [2] Zie www.uu.nl/medewerkers/phmdrijvers
- [3] Drijvers, P. (2015). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides*, 90(5), 4-8.
- [4] Mogelijk gemaakt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek, Projectnummer 405-14-502
- [5] Kindt, M. (2004). *Positive Algebra. A collection of productive exercises*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [6] Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO.
- [7] Drijvers, P. (2000). Studenten met een grafische rekenmachine: wat kunnen we van ze verwachten? *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(4), 399-405.
- [8] Het applet is ontworpen door Peter Boon en te vinden op www.fisme.uu.nl/dwo
- [9] Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Student difficulties in solving equations from an operational and a structural perspective. *Mathematics Education*, 9(1), 39-55.
- [10] Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35. <http://flm.educ.ualberta.ca/index.php?do=extras&lang=en>
- [11] Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 10(2), 29-33.
- [12] Verhoef, N., Drijvers, P., Bakker, A., & Konings, T. (2014). *Tussen wal en schip: wiskundig-didactisch onderwijsonderzoek in Nederland*. Rapport Onderwijsonderzoekscommissie. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.

Over de auteur

Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en toetsdeskundige bij het Cito. E-mailadres: p.drijvers@uu.nl

Abelprijs voor John Nash

In 1994 kreeg hij de Nobelprijs voor de economie voor zijn werk aan de speltheorie. Iets dat u wellicht wist dankzij de film *A Beautiful Mind*. Dit jaar krijgt [de recent verongelukte – red.] John Nash de Abelprijs, samen met de Canadees Louis Nirenberg. In de jaren vijftig werkten zij samen aan partiële differentiaalvergelijkingen. Het bekroonde werk heeft relaties tot de wiskunde van de kromming van ruimte en tijd. Verschillende wiskundige weergaven daarvan komen in feite op hetzelfde neer, aldus het werk van Nash en Nirenberg. Enkele jaren geleden merkte Nash op niet te weten 'dat dit een onopgelost probleem was' en zich niet te realiseren dat het een moeilijk probleem was. Bron: *de Volkskrant*

Dekker wil meer aandacht voor slimme leerling

Waarschijnlijk is het voor u geen nieuws: slimme leerlingen vervelen zich vaak in de les. Staatssecretaris Sander Dekker wil daar via bijscholing van docenten verandering in brengen. De getalenteerde en hoogbe-gaafde leerlingen moeten in de les meer uitgedaagd worden en niet, zoals nu wel gebeurt, met extra aandacht na de lessen. De inspectie merkt dat er wel veel aandacht is voor wiskunde, maar de extraatjes zijn vrijblijvend: de leerlingen bepalen zelf of ze meedoen. Van extra aandacht in de les komt nog weinig terecht, de normale lesstof blijft verplicht en die is voor de slimme leerling nu juist saai, aldus de inspectie. Bron: www.primaonderwijs.nl

Nederlands meisjesteam zestiende op Europese Wiskunde Olympiade

Op de vierde *European Girls' Mathematical Olympiad* heeft het Nederlandse team een gedeelde zestiende plaats behaald. De wedstrijd vond plaats van 14 tot 20 april in de Wit-Russische hoofdstad Minsk. Op elk van de twee wedstrijddagen kregen de meisjes drie pittige wiskundeopgaven voorgeschoteld, waarvoor ze op beide dagen vier en een half uur de tijd kregen. Voor elke opgave konden maximaal zeven punten worden behaald. De resultaten van het Nederlands team:

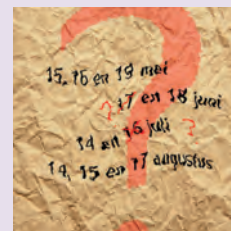
- Eva van Ammers – 10 punten
(6 vwo Spinoza Lyceum Amsterdam, 17 jaar)
- Elisa Sängers – 9 punten
(6 vwo Het Baarnsch Lyceum, 17 jaar)
- Kirsten Peeters – 4 punten
(5 vwo RSG Pantarijn Wageningen, 16 jaar)
- Christel van Diepen – 2 punten
(3e klas Stedelijk Gymnasium Nijmegen, 14 jaar)

Eva en Elise wisten allebei een van de opgaven op te lossen en kregen een eervolle vermelding, maar kwamen helaas net te kort voor een bronzen medaille. Hiervoor waren 11 punten nodig...

Het Nederlands team werd begeleid door Birgit van Dalen (Universiteit Leiden en Aloysius College Den Haag) en Milan Lopuhaä (Radboud Universiteit Nijmegen). Bron: wiskundeolympiade.nl

Wanneer is Cheryl jarig?

Een opgave uit de Wiskunde Olympiade in Singapore heeft de afgelopen maanden de gemoederen flink bezig gehouden.



Cheryl heeft twee nieuwe vrienden, Albert en Bernard. Ze zijn benieuwd naar haar verjaardag. 'Dat zeg ik jullie niet zomaar', zegt Cheryl, 'maar ik zal jullie een hint geven'. Ze schrijft tien data op: 15, 16 en 19 mei, 17 en 18 juni, 14 en 16 juli en 14, 15 en 17 augustus. Vervolgens fluistert ze in Albert's oor alleen de goede maand, en in Bernard's oor alleen de goede dag. Dan zegt Albert: 'Ik weet het niet, maar ik weet dat Bernard het ook niet weet.' Vervolgens reageert Bernard: 'Eerst wist ik het ook niet, maar nu weet ik het wel'. En dan zegt Albert meteen: 'Dan weet ik het nu ook'.

En u? Weet u het nu ook?

Margriet van der Heijden schreef er over in de wetenschapsbijlage van het NRC van 18 en 19 april j.l. Het dagelijkse TV-programma *De Wereld Draait Door* besteedde er ook aandacht aan. In dit programma loste de 17-jarige Dirk van Bree, leerling van het Twickel College in Hengelo, het probleem op. Bron: *rtvooost*

Rosenmøller: Maatwerkdiploma

Voorzitter Paul Rosenmøller van de VO-raad heeft voorgesteld om een 'maatwerkdiploma' in te voeren in het voortgezet onderwijs. Hij noemt het niet meer van deze tijd dat leerlingen een diploma halen op het niveau van de vakken waar ze het slechtst in zijn. Op een aantal scholen wordt al een pilot gedaan waarbij leerlingen sommige vakken op een hoger niveau kunnen volgen. VVD-kamerlid Karin Straus is nieuwsgierig naar de ervaringen van die scholen, het CDA is voorstander van maatwerk in het onderwijs zolang dat in opwaartse richting gebeurt. Wel wijst het CDA erop dat maatwerk voor kleine scholen met niet alle onderwijsniveaus een probleem kan zijn. D'66 denkt dat dit probleem kan worden opgelost met online cursussen en roept ouders op zich in de discussie te mengen. SP en PVV willen de mening van de middelbare scholen weten, voordat een en ander in wetten verankerd wordt. Bron: www.primaonderwijs.nl

ONDERWIJS IN DE UITHOEKEN VAN HET ROMEINSE RIJK

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



Afbeeldingen of filmmateriaal van realistische onderwijssituaties zijn zeldzaam. Bestaande afbeeldingen zijn meestal weinig representatief voor wat er daadwerkelijk in een klas gebeurde. Alledaagse afbeeldingen doorstaan sowieso minder goed de tand des tijds, maar het onderwijs leent zich ook niet erg voor het maken van alledaagse afbeeldingen. Wie voor een van de schoolmeester-schilderijen van Jan Steen staat, dient zich vooral te realiseren dat de betreffende afbeelding vooroordelen rond het beroep van schoolmeester diende te vangen. Voor de tijdgenoten was het een prettig herkenbare collage van allerlei ondeugden, die de opdrachtgever graag uitvergroot van het canvas wilde laten spatten. Meer moderne foto's en filmopnamen van klassensituaties zijn veelal op een wat gunstiger wijze geposeerd: de camera verhoudt zich nu eenmaal slecht tot natuurlijk gedrag en realistische opnamen zullen door de maker als 'te alledaags' al snel worden weggedaan.



Onderwijssituatie ca. 185 na Chr.

Toch zijn afbeeldingen waardevol als bron. Soms ook omdat het de enige afbeelding is die we hebben; het enige dus dat door de mist van de tijd heen in staat is om ons te laten zien wat in de ogen van tijdgenoten in elk geval een herkenbare situatie was. De kunst is dan om te herkennen welke beeldelementen voor mensen in het verleden toevallig, bijzonder of grappig waren, en welke elementen juist het idee versterkten dat het daadwerkelijk om een 'gewone' onderwijssituatie ging. Wie zich die beperkte zeggingskracht realiseert, kijkt met andere ogen naar een bijzonder tafereel uit vervlogen tijden.

Op de afbeelding die op deze pagina prijkt, ziet u een fries, afkomstig van een Romeinse villa van rond 185 na Christus. De villa in kwestie stond in de omgeving van Trier – een stad die haar Romeinse geschiedenis verraaft door de aanwezigheid van een ontzagwekkende Romeinse stadspoort. Afbeeldingen van onderwijssituaties van zo lang geleden zijn zo zeldzaam dat het een bijna mystieke ervaring is om er oog in oog mee te staan.

Op deze fries is, in steen uitgebeiteld, een onderwijs-scene van bijna tweeduizend jaar geleden uitgebeeld. Een leermeester zit met twee leerlingen in zetels; een derde leerling voegt zich bij hen. De binnenkomende leerling brengt een groet uit. In zijn linkerhand heeft hij iets dat verdacht veel lijkt op een schooltas. Die 'tas' betreft een houten kistje met schoolspullen, zoals die tot in de negentiende eeuw wel werden gebruikt als relatief goedkope variant van de soepele leren variant die later in zwang kwam – en sinds enkele generaties zo wordt verafschuwd. De zittende leerlingen hebben beide een papyrusrol in de hand. Of ze die van de docent hebben gekregen of dat ze die zelf in eigendom hadden is niet helder, maar papyrus was kostbaar, dus het gaat om zeer gefortuneerde leerlingen – die zich ofwel een rijke docent konden veroorloven, of die zelf papyrusrollen in hun bezit hadden. Die papyrus was niet voor hun eigen aantekeningen: daarop stond een tekst van een beroemde filosoof getranscribeerd die zij eventueel in de kantlijn van annotatie voorzagen, zoals dat werd gedictieerd door de docent.

Of deze leerlingen in de omgeving van Trier wiskunde onderwezen kregen, is natuurlijk de vraag. Eén van de zaken die in elk geval op het programma stonden was het gebruik van de abacus. Dat was relatief eenvoudige kennis, die kon worden gekoppeld aan de Romeinse en de Griekse wijze van cijfers noteren. De Griekse taal was ook onderdeel van de lessen. Of de leerlingen zo ver van Rome vandaan ook kennismaakten met de meer verheven kennis van de meetkunde valt te betwijfelen, maar in elk

geval behoorde een aantal van de Griekse filosofen en de Romeinse retorici tot de standaardstof van de Romeinse elite. Die filosofen konden Euclides of Archimedes zijn, maar waarschijnlijker werd hier Plato of de geschiedenis en politiek van Rome behandeld. In deze verre uithoeken van het rijk was weinig behoefte aan verfijnde filosofie. Het zou natuurlijk kunnen dat juist de astrologie of de constructie van verdedigingswerken – indertijd uitermate belangrijke onderdelen van de wiskunde – onderwerp van studie waren.

Overigens was onderwijs uitsluitend voorbehouden aan de elite. De meeste mensen kregen in het geheel geen onderwijs. Of deze onderwijzer een thuisonderwijzer was die gedurende langere tijd drie broers onder zijn hoede had, of dat het een rondreizende meester was die zich hier ontfermt over drie klanten die hem voor een specifiek stuk kennis betaalden: dat valt niet uit de afbeelding op te maken. Wel zien we dat er geen sprake is van een 'klas' in onze betekenis van het woord, laat staan van een school. Wellicht heeft het onderwijs plaats in het huis van de onderwijzer, maar duidelijk is dat de leerlingen in gelijkwaardige zetels plaats nemen, en de onderwijzer dus nauwelijks boven hen staat – er is een klein opstapje aan de voet van zijn zetel waarneembaar. De docent is *primus inter pares*.

Rest de vraag wat een dergelijke afbeelding op een fries deed. We weten niet wie er in de betreffende villa heeft gewoond, maar dat zal geen docent zijn geweest. Wel iemand die, blijkens de afbeelding, iets aan zijn onderwijs heeft gehad of daar plezierige herinneringen aan beleefde. Wellicht was zijn vader onderwijzer, of is hij zelf als onderwijzer begonnen en heeft hij door deelname aan de juiste veldtochten zich een kapitaaltje kunnen verwerven waarmee hij de villa kon laten bouwen. Of was hij toch een gefortuneerde wijnkoopman, die zich in de nieuwe wijngebieden aan de Moezel had gevestigd in de hoop hier zijn oude dagen te slijten? De vogels en bloemen rond dit tafereel bieden weinig aanknopingspunten, dus wie zal het zeggen. Hoe weinig representatief de afbeelding ook is: het is een van de weinige afbeeldingen die getuigen van onderwijs uit die tijd en daarmee alleen al bijzonder.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

KLEINTJE DIDACTIEK

GEBRUIK ICT IN DE WISKUNDELES

De grafische rekenmachine (GR) kan zijn nut hebben in de wiskundeles, maar heeft dat in veel wiskundemethoden niet. Bij ICT wordt vaak onderscheid gemaakt tussen 'leren om ermee te werken' (*learn to use*) en 'gebruiken om ermee te leren' (*use to learn*).^[1] Veel frustratie van docenten over de knoppencursus van de GR heeft te maken met de nadruk op het leren werken met de GR in plaats van het leren dankzij de GR. Door het stellen van vragen waarbij de GR een hulpmiddel is in het beantwoorden van die vragen, kan het leren via de GR worden bevorderd. Voorbeelden van dergelijke vragen (tevens wiskundige denkactiviteiten!) voor beter begrip over formules en functies zijn:

- hoeveel toppen heeft de grafiek van $y = 6x^3 - 2x + 5$?
- wat gebeurt er met de toppen als de formule $y = 6x^3 + 2x + 5$ is?
- hoeveel toppen heeft de grafiek van een vierde, vijfde, zesde, zevendegraads formule?
- is er een verband tussen de hoogste macht in een

formule en het (maximale) aantal toppen in de grafiek?

- wat is het verschil in grafiek van een machtsverband en een exponentieel verband? Hoe komt dat?
- plot een grafiek op het bord. Welke formule kan hierbij horen? Waarom? Kunnen we de formule opstellen? Hoe?
- wat is het effect van het variëren van de a (of b of c) in $y = ax^2 + bx + c$?
- idem voor een lineaire formule?
- hoe kun je de a en b vinden in/met je tabel op de GR bij $y = ax + b$ (met a en b natuurlijke getallen)?
- hoe kun je b en g vinden in/met je tabel op de GR bij $N = b \cdot g^t$?

Met dank aan Kenneth Ruthven (professor educatie Universiteit van Cambridge) die tijdens de docenten-lezing van het Nederlands Mathematische Congres op 16 april 2014 in Delft dit onderwerp besprak en mij zo inspireerde.

Lonneke Boels

[1] cTWO (2007). *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs. Zie www.ctwo.nl

UITDAGENDE SUDOKU-VARIATIES

Folkert van der Meulen Bosma

9 BIJ 9 CALCULODOKU

Folkert van der Meulen Bosma bedenkt, ontwerpt en produceert met de hand ontworpen educatieve sudoku-varianten. Dit zijn standaard sudoku's waarin hij rekenkundige bewerkingen verwerkt die, in combinatie met de logica, tot de unieke oplossing van deze puzzels moeten leiden. Hierbij vindt u van zijn hand een *CalculoDoku*, wellicht een leuke uitdaging voor de zomervakantie.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		$3 \cdot D6$	$\frac{B7 + H2}{C6}$		$\frac{B7 + F4}{H8}$				
2		$= A7$	$3 \cdot C6$					$3 \cdot H8 + 2$	$6!/5!$
3								$\frac{B8 + F4}{H8}$	$4!/F6$
4			0100	$= I5$		$A7 + I5$	1000		
5	$\frac{A7 + H2}{2 \cdot B9}$				$F6 - C4$				$1000 - 0011$
6			$\sqrt{F4}$	$H9 - D4$		2^3	$= I2$		
7	$2 \cdot \sqrt{(F6/2)}$	$I2 + B8$							
8	$F4 - I2$	$A7 - I3$					$\frac{F6 + H8}{F4 - B7}$	$I2 - A7$	
9					$F6 - G8$		$\frac{E9 + F6 - A7}{E9}$	$\frac{F4 \cdot H8}{E9}$	

© 2015 www.sudoku-variations.com

Als je deze *CalculoDoku* volledig hebt ingevuld, moeten elke rij, elke kolom en elk blok van drie bij drie velden de cijfers 1 tot en met 9 precies eenmaal bevatten. Deze uitdagende *CalculoDoku*-variantie bevat bovendien één extra groep van negen samenhangende velden, die de cijfers 1 tot en met 9 ook precies eenmaal moeten bevatten. Voordat je deze unieke oplossing van deze uitdagende *CalculoDoku*-variantie logisch kunt afleiden, moet je eerst de 29 cijfers berekenen die in de velden met een wiskundige formule staan. Deze formules bevatten naast de gewone rekenkundige bewerkingen ook binaire getallen en faculteiten waarmee gerekend moet worden.

Zonder deze extra groep heeft deze *CalculoDoku*, met de berekende 29 cijfers, 64 verschillende oplossingen. Door regelmatig gebruik te maken van de eigenschap van deze extra groep kan je de unieke oplossing van deze *CalculoDoku* logisch afleiden.

Ga voor meer uitdagende educatieve sudoku-varianties naar www.sudoku-variations.com.

De oplossing van deze *CalculoDoku* is te vinden op



vakbladeuclides.nl/907vdmleulenbosma

TIEN JAAR OPLEIDINGSCOMPETITIE

Dédé de Haan

WISKUNDE A-LYMPIADE

Al tien jaar wordt de voorronde van de Wiskunde A-lympiade^[1] ook georganiseerd voor de eerstejaars voltijdstudenten op de tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde. Het winnende team mag naar de Nationale Wiskunde Dagen! Dédé de Haan beschrijft hoe deze wedstrijd de afgelopen tien jaren georganiseerd is, wat voor plek de wedstrijd heeft op de verschillende opleidingen en hoe de studenten de NWD ervaren.

Aanleiding en organisatie

In cursusjaar 2004-2005 besloot Tom Goris, op dat moment voorzitter van de Commissie Wiskunde A-lympiade en tevens werkzaam als lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht, om, als experiment, de eerstejaarsstudenten van de voltijdsopleiding buiten mededinging mee te laten doen aan de Wiskunde A-lympiade. Hij was hier zo enthousiast over dat direct datzelfde jaar besloten werd op een conferentie van de Samenwerkende Lerarenopleidingen Wiskunde (de SLW) dat de lerarenopleiders deze wedstrijd voortaan jaarlijks zouden organiseren voor teams van eerstejaarsstudenten van de tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde. De lerarenopleiders vonden dat het oplossen van de open problemen van de Wiskunde A-lympiade een beroep doet op vaardigheden die niet alleen leerlingen, maar ook docenten wiskunde moeten ontwikkelen: representeren, modelleren, redeneren, communiceren...

Zo gezegd, zo gedaan.

Vanaf schooljaar 2005-2006 wordt jaarlijks vanuit het Freudenthal Instituut (FI) een aankondiging van de wedstrijd en het nakijkmodel naar de acht tweedegraads lerarenopleidingen gestuurd:

- iedere lerarenopleiding bepaalt zelf hoe de wedstrijd georganiseerd wordt en welk werkstuk het beste van de opleiding is;
- het beste werkstuk wordt naar het FI gestuurd;

- het FI zorgt dat alle inzenders de beschikking krijgen over alle werkstukken;
- de docenten van de lerarenopleidingen leggen de werkstukken van alle andere opleidingen op volgorde (ze nemen het werkstuk van hun eigen opleiding niet mee in die volgorde);
- dit lijstje wordt opgestuurd naar het FI;
- op het FI worden de lijstjes gecombineerd en wordt de winnaar bepaald.

In de eerste jaren ging het toesturen van de werkstukken nog fysiek, tegenwoordig gaat dat allemaal digitaal. Ook was in die eerste jaren de prijs een beker en certificaten met juryrapporten voor het winnende team. Vanaf de derde keer, schooljaar 2007-2008, is de prijs deelname aan de Nationale Wiskunde Dagen, en tijdens de NWD krijgt het team een juryrapport uitgereikt. In de tabel ziet u een overzichtje van deelname en winnaars gedurende de afgelopen tien schooljaren:

Vaste plek in de opleiding

Zoals u in de tabel kunt zien, doet niet iedere opleiding ieder jaar mee. De wedstrijd heeft niet binnen alle lerarenopleidingen wiskunde een vaste plek. Bij de opleidingen waar in het eerste half jaar een vakdidactisch vak gegeven wordt waarbij de bundel *Probleemoplossen en wiskunde*^[2] gebruikt wordt, is de deelname aan de wedstrijd een vast onderdeel. Alleen aan de Hogeschool

	2005-2006	2006-2007	2007-2008	2008-2009	2009-2010	2010-2011	2011-2012	2012-2013	2013-2014	2014-2015
Sittard	2	2	3	2	7	1	1	2	2	4.5
Leeuwarden	5	1	2	3	4	2	4	5	1	1
Amsterdam	4	5	6.5	1	3	4	6	6	3.5	2
Utrecht	7	6	4.5	4	2	3	2	4	5	
Nijmegen	3	7	1	5	1	6	7			
Tilburg	1	3	8	6	8	5	5	1		3
Rotterdam	6	4	4.5		5		3	7	3.5	4.5
Zwolle		8	6.5		6			3		

tabel Uitslagen Opleidingscompetitie door de jaren heen

van Amsterdam en Hogeschool Windesheim in Zwolle is deelname aan de Wiskunde A-lympiade geen onderdeel van een module, en aan de Hogeschool Utrecht sinds de laatste curriculumwijziging een paar jaar geleden ook niet meer. Toch doet de Hogeschool van Amsterdam al tien jaar mee omdat deelname aan de wedstrijd daar wel verplicht is! In Zwolle is dat niet zo; daar wordt in het eerste halfjaar van de opleiding tot leraar wiskunde nog niets aan vakdidactiek gedaan, en is het ieder jaar weer de vraag of het organiseren van de wedstrijd er qua werkdruk bij kan voor de docenten. Soms wordt dat door de opleiding geregeld: bij Fontys Sittard bijvoorbeeld krijgt de betrokken docent voor het op volgorde leggen van de werkstukken, en aanwezigheid op de wedstrijddag zelf, tien uren extra op de taakbelasting. Tegenwoordig wordt natuurlijk ook de vraag gesteld: hoe verantwoorden we deelname aan de Wiskunde A-lympiade vanuit de Kennisbasis Docent Wiskunde?^[3] De vaardigheden die bij de Wiskunde A-lympiade getoetst worden, worden letterlijk genoemd in Domein 0: *Wiskundige Vakcompetenties van de Kennisbasis Docent Wiskunde-Bachelor*. Domein 0 is te zien als een uitbreiding van Domein A: *Vaardigheden* van de examenprogramma's wiskunde voor havo en vwo. Bijna alle categorieën die in Domein 0 genoemd worden, komen aan bod bij de Wiskunde A-lympiade: denken en redeneren,

argumenteren, communiceren, modelleren, probleem formuleren en oplossen, representatie, etc. Dit is precies waarom in studiejaar 2005-2006 gestart werd met de opleidingsvariant van de wedstrijd!

Vorbereiding op de wedstrijd

De studenten worden over het algemeen niet inhoudelijk voorbereid op de wedstrijd: alleen in Sittard en in Nijmegen wordt aandacht besteed aan ofwel een vorige opdracht, ofwel aan de probleemoplosfasen van Polya, met de bedoeling die toe te passen bij het oplossen van de Wiskunde A-lympiade-opdracht.

Het beoordelen van de werkstukken

Je kunt je natuurlijk voorstellen dat op een lerarenopleiding de studenten niet alleen de opdracht van de Wiskunde A-lympiade zelf maken, maar dat ze tevens betrokken worden bij het beoordelen van de werkstukken. Zover gaat het bij de meeste opleidingen niet – over het algemeen wordt de beoordeling van de werkstukken van de opleiding zelf gedaan door de docent(en), en soms worden bij de beoordeling van de werkstukken van de andere opleidingen tevens de studenten betrokken (in Utrecht en Sittard bijvoorbeeld). In Nijmegen besluiten de studenten zelf welk werkstuk het beste is om ingezonden te worden om mee te dingen naar de eerste prijs.



APS Rekenen en Exact

Ook in het schooljaar 2015-2016 organiseert APS Rekenen en Exact diverse cursussen en studiedagen, o.a.:

Cursus Rekendidactiek
start 14 september 2015

Cursus Zwakke rekenaars vooruithelpen
start 16 september 2015

Cursus Omgaan differentiëren in de rekenles vo en mbo
start 8 oktober 2015

Studiemiddag Startende rekendocent
15 oktober 2015

Studiemiddag Examentraining rekenen vo/mbo
8 december 2015

Terug van weggeweest:
Wiskunde conferentie vmbo en havo/vwo onderbouw
28 januari 2016

Informatie

APS-Academie
030 28 56 722
academie@aps.nl
www.aps.nl



Na afloop van de wedstrijd

Zeker als een team gewonnen heeft, wordt het team, in ieder geval binnen de faculteit van de hogeschool, in het zonnetje gezet via het intranet, of het interne blad van de faculteit. Het winnende team uit Leeuwarden heeft dit jaar daarnaast nog het regionale dagblad gehaald, en een plaatselijke krant. Het team van de Hogeschool van Amsterdam heeft van de opleiding zelf filmbonnen gekregen, omdat ze de tweede plaats gehaald hadden dit jaar.

Het winnende team gaat naar de NWD!

De meeste studenten hebben nog nooit van de NWD gehoord, en hebben geen idee van wat die prijs inhoudt. Het team dat dit jaar gewonnen had, bestond uit vier studenten van de tweedegraads lerarenopleiding van de NHL Hogeschool te Leeuwarden, zie foto. Ze waren om te beginnen erg onder de indruk van het feit dat ze een weekend verzorgd in een hotel mochten doorbrengen: dat was sowieso al goed. Verder hadden ze nog geen idee van wat hen te wachten stond – maar ze lieten zich door het programma leiden, en hebben een erg leuk weekend gehad!



foto Simon Vos, Bart Hollink, Ward van der Meiden en Roelof Koning met juryrapport

Ze hebben nog niet het idee dat ze er nu al iets aan hebben, maar ze vonden bepaalde onderwerpen zeker erg interessant, en soms lastig (bijvoorbeeld de wiskunde achter de bitcoin). Veel 'winnende teams' doen mee aan de wiskundequiz, die 's avonds georganiseerd wordt; één keer is één van de teamleden zelfs in de prijzen gevallen! De teams zijn tot nu toe altijd blij verrast geweest door alles wat er bij zo'n NWD-weekend georganiseerd wordt – hoewel het altijd zo zal blijven dat hun docenten de prijs meer waarderen dan zichzelf.

Tijdens de NWD ontvangt het winnende team het juryrapport

De opdracht van dit jaar ging over het weer: van een bepaalde periode in september/oktober 2014 waren *screenshots* gemaakt van de weersvoorspellingen van vier verschillende websites; ook waren de echte weersgegevens uit die periode beschikbaar gesteld. De opdracht was om op grond van die gegevens een advies te geven aan de organisatie van een werkweek: welke weersvoorspeller is het betrouwbaarst? Hoe kun je ze het beste vergelijken? Uit het juryrapport:

De studenten van NHL Hogeschool uit Leeuwarden hebben deze Opleidingscompetitie gewonnen omdat hun werkstuk uitblonk in de helderheid van de berekeningen, de verantwoording en correctheid van de gemaakte keuzes en de leesbaarheid van het verslag. Het team heeft als enige van de deelnemende teams een manier gevonden om de verschillende grootheden met elkaar te vergelijken en heeft dat uitvoerig toegelicht in een bij het verslag behorend Excelbestand. Tot slot zijn er duidelijke conclusies getrokken in een uitgebreid en creatief advies.

Vooruitblik

De Opleidingscompetitie wordt ook komend studiejaar weer georganiseerd. Omdat wiskundige denkactiviteiten in het voortgezet onderwijs een belangrijke rol krijgen, wordt het accent hierop aan de lerarenopleidingen ook groter, en deelname aan de Opleidingscompetitie doet een beroep op wiskundig denken. Daarnaast wordt sinds een aantal jaren de Onderbouw Wiskunde Dag voor teams van leerlingen uit 3 havo-vwo georganiseerd – deze wedstrijd lijkt qua vorm erg op de Wiskunde A-lympiade – en de wedstrijd wordt georganiseerd voor leerlingen aan wie de studenten op termijn gaan lesgeven. Om allerlei redenen is het dus belangrijk dat de studenten aan de tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde actief bezig zijn met opdrachten als die van de Wiskunde A-lympiade.

Met dank aan

De collega's van de tweedegraadslerarenopleidingen wiskunde die al jaren op hun opleiding de Wiskunde A-lympiade Opleidingscompetitie verzorgen, en die mij voorzien hebben van informatie over hoe ze dat daar regelen.

Noten

- [1] de wedstrijd waarin je met een team van Wiskunde A-leerlingen uit 5 havo/5-6 vwo binnen een dag een open probleem moet oplossen waarbij een beroep wordt gedaan op het wiskundig denken, zie www.fisme.uu.nl/alympiade
- [2] *Probleemoplossen en wiskunde* is één van de bundels die door de lerarenopleiders wiskunde zelf geschreven zijn voor de tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde. Alle bundels worden uitgegeven door het APS en zijn te vinden op www.aps.nl
- [3] vanaf studiejaar 2013-2014 zijn de landelijke kennis-toetsen verplicht voor pabo-studenten en studenten aan de tweedegraadslerarenopleidingen. Zie voor meer informatie www.10voordeleraar.nl

Over de auteur

Dédé de Haan organiseert vanuit het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht de Wiskunde A-lympiade Opleidingscompetitie. Daarnaast is zij werkzaam als lerarenopleider wiskunde aan de NHL Hogeschool te Leeuwarden. E-mailadres: d.dehaan@uu.nl

HET FIZIER GERICHT OP...

BREUKENMODULES

Mieke Abels

In Flzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering schrijft Mieke Abels over een nieuwe breukenmodule in de Digitale Wiskunde Omgeving.



Over het rekenen met breuken en over de kloof tussen basisonderwijs en voortgezet onderwijs zijn al veel artikelen geschreven. Zo was in het artikel *Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo* in 2010 te lezen:

Aan het eind van groep 8 is de leerlijn breuken nog niet afgerond: er wordt niet van de leerlingen verwacht dat ze het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met breuken op een formeel niveau uitvoeren. Het rekenen met onbenoemde of kale getallen wordt volgens de kerndoelen niet nagestreefd op de basisschool, maar wordt overgelaten aan het voortgezet onderwijs waar de leerlijn daarnaast doorgezet moet worden naar de algebraïsche vaardigheden.^[1]

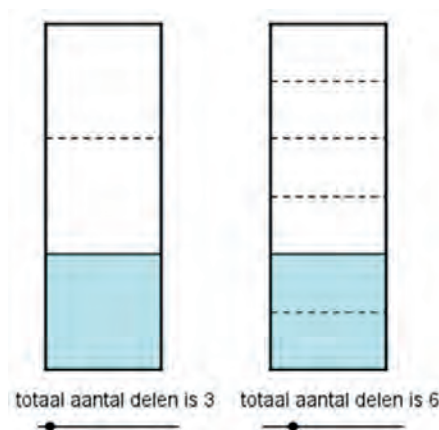
Deze overgang verloopt vaak niet soepel: zo komen de benoemde breuken van de basisschool bijna niet meer terug in het voortgezet onderwijs en is het breukrekenen hier vanaf het begin een heel stuk formeler. Bovendien zien leerlingen de modellen waarmee ze kennis hebben gemaakt in het basisonderwijs, namelijk een getallenlijn, een strook en de verhoudingstabel, niet of nauwelijks terug bij het rekenen met breuken in de brugklas.

Lessenserie Breuken

Een mogelijkheid voor een soepeler voortgang van de leerlijn in de brugklas wordt geboden door de lessenserie *Breuken* in de Digitale Wiskunde Omgeving, een online leeromgeving met lesactiviteiten waarin uitleg, vragen en applets gecombineerd worden.^[2] De modules in deze lessenserie zijn ontworpen door Mieke Abels en zijn allemaal voorzien van een handleiding in de DWO. Bij het ontwerp van deze modules is uitgegaan van het idee dat een voortzetting van het gebruik van modellen niet alleen de ontwikkeling van een beter breukbegrip bij de leerlingen stimuleert, maar ook ondersteuning biedt bij het opereren met breuken en bij de stap naar een formeel niveau.

De eerste module, *Breuken basis*, is voor alle leerlingen die nog geen goed breukbegrip hebben ontwikkeld. Er is bewust voor gekozen om grotendeels te werken met benoemde breuken, omdat de leerlingen dat gewend

zijn in het basisonderwijs. De leerlingen zoeken gelijkwaardige breuken met behulp van stroken, zie figuur 1. Omdat de stroken interactief zijn, kunnen de leerlingen ook ontdekken waarom $\frac{1}{3}$ strook, $\frac{2}{6}$ strook, $\frac{3}{9}$ strook, enzovoort voor dezelfde hoeveelheid staan. De regel 'teller en noemer mag je met hetzelfde getal vermenigvuldigen' kunnen ze zelf ontdekken: wanneer je de strook (het geheel) in twee keer zo veel stukjes verdeelt, wordt het deel ook twee keer zo veel. Hiermee wordt het begrip ontwikkeld voor een breuk als verhoudingsgetal. Dit verhoudingsaspect van breuken maakt dat de strook en de verhoudingstabel eigenlijk onmisbaar zijn in een leerlijn breuken.



figuur 1

De tweede module, *Breuken + en -*, is meer ontworpen voor havo/vwo-leerlingen. De verschillende modellen, zoals een strook (maatbeker) en een getallenlijn, die in *Breuken basis* zijn ontwikkeld, worden ook nu gebruikt om het breukbegrip en het rekenen en redeneren met breuken te ondersteunen. Voor het aftrekken van gemengde breuken biedt aanvankelijk de getallenlijn ondersteuning, zie figuur 2. Daarna wordt een alternatieve strategie aangeboden: de gemengde breuk(en) als één breuk



figuur 2

schrijven. Aan het einde van deze module zetten de leerlingen een eerste stap naar algebra: het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen, zie figuur 3.

$$\frac{10 + 10}{10 + 10 + 10} \quad \frac{99 + 99}{99 + 99 + 99} \quad \frac{g + g}{g + g + g} \quad \frac{2 \cdot 25}{3 \cdot 25} \quad \frac{2 \cdot g}{5 \cdot g}$$

figuur 3

Om te zorgen voor een goede variatie in de oefenopdrachten is gebruikgemaakt van de ideeën van Truus Dekker en Martin Kindt: *Wat doen we (niet) met breuken* en *Productief oefenen met breuken*.^[3,4]

Vervolg

De volgende twee modules zijn *Breuken vermenigvuldigen* en *Breuken delen* en zijn vanaf volgende maand beschikbaar. Deze modules zijn ook geschikt om leerlingen in hogere leerjaren een 'tweede kans' te geven. De modules zijn te vinden in de map Lessenseries op www.dwo.nl. Mocht u ermee aan de slag gaan in de klas, dan zouden we het heel leuk vinden om een keer langs te komen en feedback te krijgen. Neem in dat geval graag contact op.

Noten

- [1] Bruin-Muurling, G., Gravemeijer, K., & van Eijck, M. (2010). Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo. *NAW*, 5/11(1).
- [2] Boon, P., & Tacoma, S. (2014). Het Flzier gericht op de Digitale Wiskunde Omgeving. *Euclides*, 90(3).
- [3] Dekker, T., & Kindt, M. (2006). Wat doen we (niet) met breuken? *Nieuwe Wiskrant*, 26(2).
- [4] Dekker, T., & Kindt, M. (2010). Productief oefenen met breuken. *Nieuwe Wiskrant*, 29(3).

Over de auteur

Mieke Abels is jarenlang docent wiskunde geweest in het vo. Nu is ze al weer geruime tijd werkzaam aan de Universiteit van Utrecht (Freudenthal Instituut). Ze is betrokken bij verschillende ontwikkel- en onderzoeksprojecten voor rekenen/wiskunde in het po en vo. E-mailadres: M.J.ABELS@uu.nl

VERSCHENEN

SANGAKU'S



Ondertitel: Schoonheid van de meetkunde zonder woorden

Auteurs: Hans van Lint en Jeanne Breeman

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015), Zebrareeks deel 42

ISBN: 978-90-5041-145-5

Prijs: € 10,00 (68 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Enkele eeuwen geleden hingen in Japan op tempels fraai geschilderde tekeningen, meestal zonder teksten erbij. Mogelijkerwijs waren het offers aan de Goden, maar ook kan de bedoeling geweest zijn mensen uit te dagen om de boodschappen, die in de tekeningen verborgen waren, te achterhalen. In dit Zebraboekje worden verschillende meetkundige stellingen voor de lezer kort herhaald en telkens voorzien van sangaku's die met de besproken theorie zijn op te lossen. Ook zijn stellingen die niet meer onderwezen worden, zoals de bissectricestelling, de stellingen van Menelaos en Appolonius en de theorie over spiegelingen en rotaties te voorschijn gehaald en met duidelijke sangaku's voorzien van toepassingsmogelijkheden. Veel van de sangaku's in dit boekje hebben ook esthetische waarde.

EEN ERVARING MET LESSON STUDY

Jos Alkemade
Sui Lin Goei

SCHATTEN EN SCHATTEND REKENEN

In het kader van docentprofessionalisering is vanaf het schooljaar 2014 een schoolbreed *Lesson Study*-traject geïmplementeerd op het Van der Meij College (VMC) in Alkmaar. De auteurs van dit stuk doen verslag.



figuur 1

Het VMC is een zogeheten TOP-vmbo, met alleen derde en vierde klassen. Tijdens een *Lesson Study*-cyclus ontwerpt een samenwerkend team van docenten een les, één van de docenten geeft de les, de anderen observeren. De les wordt daarna geëvalueerd en aangepast. Een van de deelnemende docententeams was het leerteam wiskunde. In dit artikel richten we ons op de les over schatten en schattend rekenen. De bedoeling was aandacht te besteden aan activerende werkvormen en differentiatie.

Lesson Study

In de uitvoering van een *Lesson Study*-cyclus zijn er veel keuzes te maken. Bij het VMC is veel aandacht besteed aan individuele onderwijsbehoeften van leerlingen op basis van het model voor *Lesson Study* van Goei.^[1,2] In de voorbereidingsbijeenkomst wordt in het team docenten eerst overeengekomen wat het thema van de te ontwerpen les en de te verbeteren didactische vaardigheid zijn. De leerlingen van de specifieke klas worden door de docenten verdeeld in een groep leerlingen die profiteert van klassikale instructie, een groep leerlingen die iets extra's (zoals extra uitleg) nodig heeft, en een groep leerlingen die veel extra's of individuele intensieve instructie nodig heeft. Zo ontstaan er in de meeste gevallen drie groepen leerlingen met differentiële onderwijsbehoeften. Vervolgens is uit elke groep één leerling gekozen als representant van de groep. Deze *caseleerlingen* zijn tijdens de les geobserveerd en na de les individueel geïnterviewd.^[3] Het team bestond uit drie wiskundedocenten en één natuurkundedocent. Het project werd begeleid door een expert op

het gebied van onderwijsbehoeften en *Lesson Study*. De lessen die in het kader van het project zijn ontworpen, gegeven en geanalyseerd heten *lablessen* ('lab' staat voor laboratorium). Naar aanleiding van de behoefte van de docenten in het wiskundeteam om wiskunde op een concrete en activerende manier aan te bieden, is het onderwerp schattend rekenen gekozen voor een van de lablessen. Alle gebruikte opdrachtkaarten kunt u terug vinden op vakbladeuclides.nl/907alkemade.

Schatten en schattend rekenen

Schatten en schattend rekenen zijn twee aan elkaar gerelateerde, maar zeker ook verschillende, onderwerpen. Deze onderwerpen hebben een duidelijke plaats in de exameneenheden WI/K/5 en WI/K/6 van de eindtermen voor de (vmbo)examens.^[4] Bij het schatten gaat het er primair om de getalswaarde van bepaalde grootheden globaal te duiden. Het gaat daarbij niet om de precieze waarde, maar een waarde die volstaat in de specifieke context. Hierbij is het gebruik van *referentiematen* essentieel. Voorbeelden van referentiematen: je loopt ongeveer 5 km/h, een auto is ongeveer 4,5 meter lang, een pak melk van 1 liter weegt 1 kg.^[5] Met behulp van deze referentiematen kun je dan een schatting maken van gerelateerde grootheden. Bijvoorbeeld: als je een afstand van 1 kilometer lopend aflegt, dan doe je daar ongeveer 12 minuten over. Een flatgebouw van 10 verdiepingen is ongeveer 30 meter hoog. Aan deze voorbeelden is te zien dat er ook gerekend moet worden. En, omdat je geïnteresseerd bent in een indicatie (de afstand is niet precies 1 kilometer, je loopt niet precies 5 km/h), is *schattend rekenen* van belang. Onder schattend rekenen kunnen we verstaan: een zinvolle schatting maken van de uitkomst van een rekensom. Daarvoor is het 'nodig dat men over een zekere mate van gecijferdheid beschikt.'^[6] Het maatschappelijke belang hiervan wordt mooi verwoord door Hoogland: 'Gecijferdheid is de combinatie van kennis, vaardigheden en persoonlijke kwaliteiten die een individu nodig heeft om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om ons heen.'^[7]

Voorbereiding

Belangrijk bij *Lesson Study* is dat het team de les in detail voorbereidt. Het team heeft dan ook een bijeen-

komt gepland om de les te ontwerpen, waarbij ook een vakexpert aanwezig was om eventueel vakdidactische en -inhoudelijke input en feedback te geven. Het enthousiasme van de docenten was duidelijk: er werden veel ideeën gespuid voor praktische opdrachten: de leerlingen zouden in kleine groepjes (van zo'n drie leerlingen) de school ingaan en zelfs naar buiten met allerlei opdrachten waar geschat en schattend gerekend moest worden. Er zijn uiteindelijk acht opdrachten ontworpen, variërend in moeilijkheidsgraad en hoeveelheid werk. Deze variatie bood handvatten voor differentiatie. Zo had een van de groepjes leerlingen 'veel aandacht nodig'. Dit groepje heeft, deels begeleid, één opdracht gedaan en is zeer geconcentreerd bezig geweest. Een ander groepje heeft bijna alle acht opdrachten uitgevoerd.

De lables

John van Berkel had een doos suikerklontjes meegebracht voor de startopdracht. De leerlingen moesten schatten hoeveel klontjes in de doos zaten. In het begin was het vooral gokken en één leerling dacht te zien dat het aantal gewoon op de doos genoemd stond (handig!). Gestuurd door John werd er al snel echt geschat. Hoe groot is het klontje eigenlijk? En hoeveel kunnen er in de lengte? En in de breedte? Hoeveel kunnen er dus op de bodem? En hoeveel lagen kunnen boven elkaar? Hoeveel klontjes zijn dat dan bij elkaar? Natuurlijk kwamen de leerlingen tot verschillende getallen en wilden ze weten hoeveel klontjes er nou echt in zaten. De schattingen liepen behoorlijk uiteen, maar vaak zaten ze toch dicht bij het werkelijke aantal. Na deze inleiding werd de klas in groepjes van drie ingedeeld. Elk groepje kreeg een opdracht mee. Als een groepje klaar was, werd de uitwerking bij John ingeleverd, die een nieuwe opdracht meegaf. Al gauw was elk groepje serieus aan het werk.

Bij één van de opdrachten kreeg het groepje acht gewichten mee, gemaakt van stukjes pvc-pijp (figuur 1). Deze moesten dan op volgorde van licht naar zwaar worden gezet. Het groepje dat deze opdracht meekreeg ging in de hal aan tafel zitten (toch anders dan in het klaslokaal!) en is gedurende de hele les geconcentreerd bezig geweest met het op volgorde zetten. Een andere opdracht was om de hoogte van het schoolgebouw te schatten en daarvoor moesten ze natuurlijk naar buiten. Maar, ja, het miezerde die dag wat, dus dat ging echt niet gebeuren! Toch viel de opdracht in goede aarde. Binnen in de hal kon je tot het dak kijken, dus er kon toch geschat worden. Een aantal groepjes heeft deze opdracht uitgevoerd en bij de nabespreking was er een leuke competitie gaande wie nu het dichtst bij de echte hoogte zat. Een van de 'slechtste' leerlingen had de hoogte van 10 meter het beste geschat!

Nadat de leerlingen twintig minuten buiten het lokaal met de opdrachten bezig waren geweest, kwamen ze terug voor de nabespreking. John begon met de opdracht met de gewichten. Met een weegschaal woog hij elk

❖ Kerktoren (buiten)

- Hoe ver is de kerktoren in de stad hier vandaan?
- Hoe lang zal je moeten lopen voor je er bent?



figuur 2

van de buisjes en zette ze op volgorde. Het groepje had bijna alles goed geschat. Boeiend was dat de leerlingen de echte gewichten wilden weten, terwijl dat voor de opdracht niet belangrijk was. Deze drang om 'het' antwoord te willen weten, was ook bij andere opdrachten aanwezig, zoals bij de opdracht *Kerktoren* (figuur 2). Bij de nabespreking wilden de leerlingen wel heel graag weten hoe ver dat dan was. John wist het ook niet, hij zocht dat natuurlijk voor de volgende les op! Zelfs leerlingen die als 'lastig' bekend stonden, waren actief bezig geweest.

Reflectie

De algemene indruk was dat de les erg leuk was en heel goed was verlopen; ook was er ruimte voor verbetering. Hoewel de les tot in detail was voorbereid, gebeurden er soms dingen die niet voorzien waren. Zo ging een van de opdrachten over de lift: hoeveel leerlingen passen er in en hoeveel volwassenen, en wat is de inhoud. Maar ja, het was niet de bedoeling dat het groepje steeds met de lift op en neer ging, wat natuurlijk wel gebeurde.

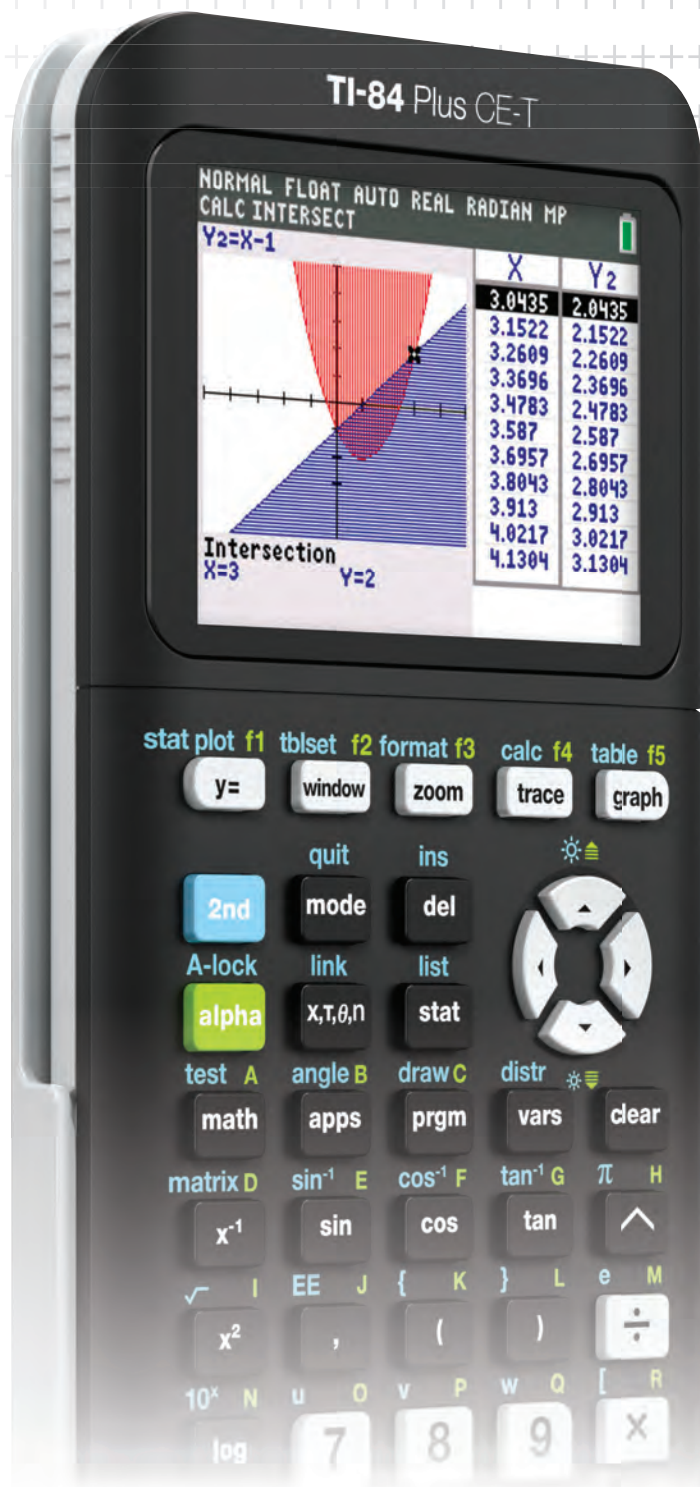
De leerlingen hebben de opdrachten uitgewerkt op papier. Het was boeiend en leerzaam deze uitwerkingen te bekijken. Er werden bijvoorbeeld nogal wat foutjes gemaakt met eenheden. En ook al ging de les hier niet specifiek om, het is natuurlijk belangrijk juiste eenheden te benoemen. De uitwerkingen kunnen mooi als aanknopingspunt dienen om dit lastige onderwerp aan de orde te stellen.

Conclusie

De opdrachten zelf verschilden in niveau én de groepjes konden naar hun eigen behoefte de tijd nemen voor de opdrachten. Zodoende is er deze les in hoge mate gedifferentieerd. Natuurlijk leende het onderwerp zich er ook voor. Vaak is een docent al tevreden als de leerlingen 'goed gewerkt' hebben. Dat hebben ze in deze les zeker! De wiskundeles wordt door veel leerlingen als saai ervaren. Dat was deze les zeker niet! De leerlingen zijn samen intensief en actief bezig geweest. Uiteindelijk is het natuurlijk de bedoeling dat leerlingen er ook echt

DE NIEUWE TI-84 PLUS CE-T

LICHT, SLANK EN GEMAKKELIJKE EXAMENSTAND



**Doe mee win een
TI-84 Plus CE-T!**

Deze maand is de laatste maand dat u kunt meedoen aan de wiskundewedstrijd.

Ga naar de prijsvraag op

education.ti.com/nl/wineen84CET

- Oplaadbare batterij en lader meegeleverd; lagere kosten* en beter voor milieu
- Examenstand / geheugenblokkering (verplicht tijdens CE 2016)
- Volledige functionaliteit van de TI-84 Plus (Silver Edition)
- Kleurenscherm met backlight en hoge resolutie (240 x 320 pixels)

* Je hoeft geen batterijen meer te kopen.

Dat maakt de TI-84 Plus CE-T ongeveer even duur als de TI-84 plus met zwart-wit scherm!

**Docentenaanbieding
€69,-
(inclusief TI-SmartView™ sw)**

Profiteer nu van de docentenaanbieding.

Ga naar www.education.ti.com/nederland en

download het aanbiedingsformulier (onder het kopje service).



van leren. Dat is moeilijk te meten, maar aan een aantal belangrijke voorwaarden voor effectief leren was zeker voldaan. En voldaan was ook het team na de les: de opdrachten worden bewaard en zeker vaker gebruikt.

Noten en referenties

- [1] Bruggink, M., Goei, S.L., & Koot, H. (2013). Characteristics of Teacher-Identified Students with Special Educational Needs in Dutch Mainstream Primary Education. *Educational Research*, 55, 361-375. doi: 10.1080/00131881.2013.844938.
- [2] Goei, S.L. (2013). *Lesson Study as a Professional Tool to strengthen Teachers' Competencies in Designing Educational Activities for Differential (Additional) Educational Support Needs*. Invited plenary for the WALS 2013 conference, september 2013, Gothenburg, Sweden.
- [3] Dudley, P. (2012). Lesson Study development in England: from school networks to national policy. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), 85-100.
- [4] College voor Examens vwo, havo, vmbo. (2010). *Wiskunde vmbo; Syllabus BB, KB en GT centraal examen 2012*. Geraadpleegd op 10 januari 2014.
- [5] Prins, C. (2011-2012). 'Ik had ze nog niet geteld', het belang van schattend rekenen. *Volgens Bartjens*, 31(4), 26-27.
- [6] Wikiteam rekenwiskunde-onderwijs. (2011). Schatten. Geraadpleegd op 8 april 2014 van *Wiki rekenwiskundeonderwijs*. [www.fisme.science.uu.nl/wiki/index.php/Schatten_\(Algemeen\)](http://www.fisme.science.uu.nl/wiki/index.php/Schatten_(Algemeen))
- [7] Hoogland, K. (2013). Gecijferdheid. Geraadpleegd op 1 april 2014 van *Wikipedia, de vrije encyclopedie*. <http://nl.wikipedia.org/wiki/Gecijferdheid>

www.examenblad.nl/9336000/1/j9whinitagymgn_m7mvi0s-gg8bampk_n11vga6k854m5p9/vikzof5zcwxu/f=/bestand.pdf

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004) *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematical Teaching and Learning*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc, New Jersey.



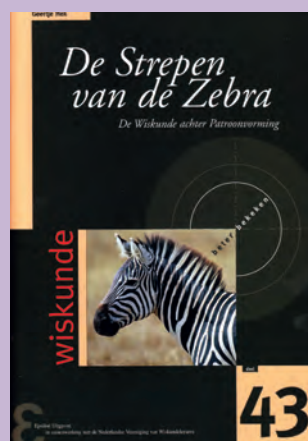
vakbladeuclides.nl/907alkemade

Over de auteurs

Jos Alkemade is hogeschooldocent wiskunde bij de lerarenopleiding Wiskunde van Hogeschool Windesheim te Zwolle. E-mailadres: jah.alkemade@windesheim.nl. John van Berkel, Abderrahim Hadda en Joke de Pender zijn docent wiskunde aan het Van der Meij College in Alkmaar. Henk van der Kamp is docent natuurkunde aan het Van der Meij College in Alkmaar. Sui Lin Goei is lector bij het FPP-Onderwijscentrum van de Vrije Universiteit te Amsterdam en tevens lector bij het Kenniscentrum Educatie van Hogeschool Windesheim te Zwolle.

VERSCHENEN

DE STREPEN VAN DE ZEBRA



Ondertitel: De wiskunde achter patroonvorming

Auteur: Geertje Hek

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015), Zebrareeks deel 43

ISBN: 978-90-5041-146-2

Prijs: € 10,00 (60 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

In deze Zebra maak je kennis met de wiskunde achter patroonvorming. Het boekje gaat in op allerlei soorten patronen, maar het icoon van de Zebrareeks, de zebra zelf, speelt met zijn strepen de hoofdrol. In de voetsporen van de Brit Alan Turing behandelt dit boekje de wiskundige theorie die verklaart hoe patronen als strepen en vlekken zouden kunnen ontstaan op de vacht van dieren. Aan de hand van talrijke opgaven maak je kennis met differentiaalvergelijkingen en de rol die ze spelen bij patroonvorming. Er wordt niet alleen aandacht besteed aan de wiskunde zelf, maar ook aan het modelleren van chemische reacties en diffusie, de processen die volgens Turing bepalend zijn voor het ontstaan van de patronen.

LIJNENSPEL

Soms komen leerlingen zelf met wiskundige denkactiviteiten. Natuurlijk trekken we dan tijd uit om samen met zo'n leerling formules op te stellen. Jacques Jansen vertelt hoe hij en een collega bezig gehouden werden met lijnen en cirkels en wat kunst daar mee te maken heeft.



figuur 1 *Wall Drawing No. 256*, Sol LeWitt

In figuur 1 ziet u *Wall Drawing No. 256*, een muurtekening van de Amerikaanse kunstenaar Sol LeWitt (1928–2007). Het bevindt zich in het Van Abbemuseum in Eindhoven. Op het bordje naast de muurtekening wordt vermeld: grafiet, krijt, latex op wand. Ik ervaar het als een ouderwets schoolbord met heel veel krijtlijnen. Sol LeWitt propageerde conceptuele kunst. Hierbij is kunst een concept in plaats van een materieel object. In de wiskunde zijn punten en rechte lijnen in wezen ook abstracte begrippen. In hetzelfde museum is ook kunst met cirkels te vinden, van de Amerikaanse kunstenaar Dan Flavin (1933–1996), zie figuur 2.



figuur 2 *TL-buizen* van Dan Flavin

Geïnspireerd door onder andere deze werken uit de collectie zijn de leerlingen van het Strabrecht College uit Geldrop en het Montessori College Eindhoven zelf een beeldend onderzoek gestart. Leerling Semme Donkers maakte vervolgens zelf een prachtig lijnenkunstwerk, zie figuur 3.

Wiskundig zijn er talloze manieren om lijnen en cirkels te onderzoeken. Zo kwam Thomas, een leerling van een

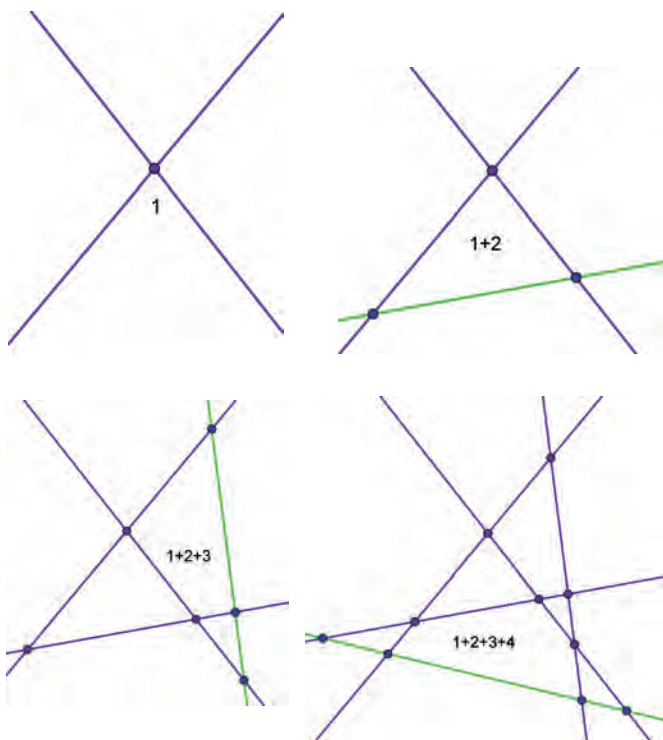
collega, met de volgende vraag: 'Hoeveel snijpunten hebben 100 cirkels en 100 lijnen maximaal?' Het is een interessant vraagstuk vanwege de diverse oplossingsstrategieën. Hoe zou u het aanpakken? Probeer het eens, voor u verder leest.



figuur 3 *Werk van leerling Semme Donkers*

Snijpunten van lijnen als wiskundige denkactiviteit

Wiskundige denkactiviteiten kunnen overal, bij wiskunde A, B, C of D. Maar bij wiskunde D heb je de luxe dat je zelf ruimte kunt creëren. Je kunt kiezen voor korte of lange projectjes. Het is een uitdaging om wat korte projectjes te verzamelen of te bedenken. Maar vaak komen leerlingen zelf al met puzzels en open problemen. Heerlijk toch om daar op in te gaan. Zo ook is dit probleem over lijnen en cirkels bij uitstek geschikt als wiskundige denkactiviteit. Laten we beginnen met een aanname: lijnen vallen niet samen en zijn echt allemaal verschillend. We kunnen natuurlijk systematisch te werk gaan. We tekenen twee snijdende lijnen. En dat geeft één snijpunt. We tekenen er een derde lijn bij. Dat geeft drie snijpunten. We ontdekken al snel een patroon, zie figuur 4. Weten we het aantal snijpunten bij 99 lijnen, dan komen er bij de honderdste lijn $100 - 1$ snijpunten bij. We moeten dus de getallen 1 tot en met 99 bij elkaar optellen. Nu hangt het vervolg er vanaf in welk leerjaar u dit probleem heeft aangekaart. In het derde of vierde leerjaar stimuleert u wellicht de leerlingen tot het optellen van 49 optellingen met 100 steeds als uitkomst. $(1 + 99) + (2 + 98) + \dots + (49 + 51)$. Dat geeft 4900. We moeten dan wel single 50 er nog bij optellen. Einduitkomst is dan 4950. Wiskunde D-leerlingen maken misschien gebruik van de som bij



figuur 4 Snijdende lijnen

een rij met een lineair verband: $S_{99} = \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot (1 + 99) = 4950$. Het zelf opstellen van een formule kan ook, samen met wiskunde D-leerlingen. Hiervoor maken we eerst een tabel aan de hand van onze schetsjes.

Aantal lijnen n	2	3	4	5	6
Aantal snijpunten	1	3	6	10	15
Verskil		2	3	4	5
Verskil der verschillen			1	1	1

Gezien de constante tweede verschilrij is er vermoedelijk een kwadratisch verband tussen het aantal lijnen n en

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=2
u(n)=n*(n-1)/2+n-1
u(nMin)=1
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=

```

n	$u(n)$
100	4950
101	5050
102	5151
103	5253
104	5356
105	5460
106	5565

Press + for ΔTbl

figuur 5 Recursieve formule in grafische rekenmachine

het aantal snijpunten A_n . We beginnen met de algemene formule: $A_n(n) = an^2 + bn + c$. Als er geen lijnen zijn, dan geen snijpunten: $c = 0$. Met gebruikmaking van de tabel komen we tot twee vergelijkingen met twee onbekenden.

$$\begin{cases} 1 = 4a + 2b \\ 3 = 9a + 3b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 4a + 2b \\ 1 = 3a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 4a + 2(1 - 3a) \\ b = 1 - 3a \end{cases}$$

Dat leidt tot $a = \frac{1}{2}$ en $b = -\frac{1}{2}$. Dat geeft: $A_n(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$. Met behulp van deze formule vinden we: honderd lijnen hebben maximaal 4950 snijpunten. Voor leerlingen die bekend zijn met recursie, is er nog een aanpak mogelijk, met behulp van de grafische rekenmachine. De recursie wordt gegeven door $A_n(n) = A_n(n-1) + n - 1$ en startwaarde 1. In figuur 5 ziet u de uitkomst, gegeven door de rekenmachine.

MEDEDELING

NATIONALE WISKUNDE DAGEN



Op vrijdag 5 en zaterdag 6 februari 2016 worden de tweeëntwintigste Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout. Als wiskundeleraar moet je van tijd tot tijd nieuwe ideeën op kunnen doen en creatief en actief met je vak bezig zijn. Dat kan door te luisteren naar een goed verhaal, door actief mee te doen in werkgroepen en door met collega's van gedachten te wisselen. De NWD biedt die gelegenheid en is bedoeld voor alle wiskundeleraars die les geven aan leerlingen van 12 tot 18 jaar van ieder schooltype. Kosten per persoon: € 405,00 bij overnachting op een tweepersoonskamer en € 440,00 bij overnachting op een eenpersoonskamer.

In de week van 7 september wordt de programmapolder naar de scholen gestuurd. De inschrijving gaat open in de week van 24 september. Meer informatie over de NWD kunt u vinden op www.uu.nl/onderzoek/freudenthal-instituut/nationale-wiskunde-dagen.

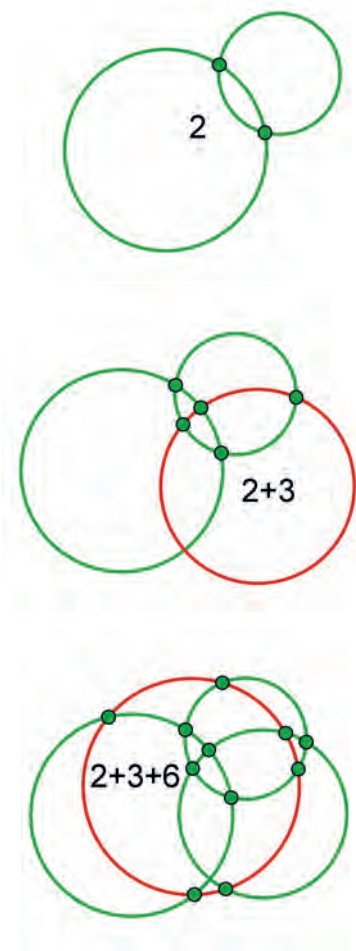
Inlichtingen:

Saskia Klaasing, telefoon 030 253 98 18 of e-mail: nwd@fi.uu.nl

En nu de cirkels

Nu gaan we de cirkels erbij halen. We maken weer een aantal schetsjes, zie figuur 6.

Aantal cirkels n	2	3	4	5	6
Aantal snijpunten	2	6	12	20	30
Verschil		4	6	8	10
Verschil der verschillen			2	2	2

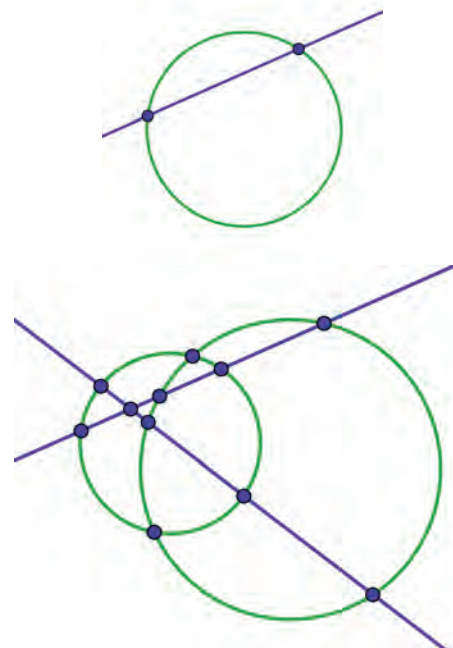


figuur 6 Snijdende cirkels

Het valt al snel op dat bij cirkels het aantal snijpunten vergeleken met de lijnen wordt verdubbeld: $A_c(n) = 2(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n) = n^2 - n$. Honderd cirkels hebben dus maximaal 9900 snijpunten.

Maar nu hebben we ook het aantal snijpunten tussen de cirkels en de lijnen nodig. Eerst maar weer eens een paar eenvoudige schetsjes, zie figuur 7. Elke lijn snijdt elke cirkel twee keer, dus bij n lijnen en n cirkels ontstaan er nog $2n \cdot n$ snijpunten. Voor het totaal aantal snijpunten in een figuur met n cirkels en n lijnen vinden we nu:

$A_c(n) = n^2 - n + 2n \cdot n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = 3,5n^2 - 1,5n$. We krijgen dan: 100 cirkels en 100 lijnen hebben maximaal 34850 snijpunten.

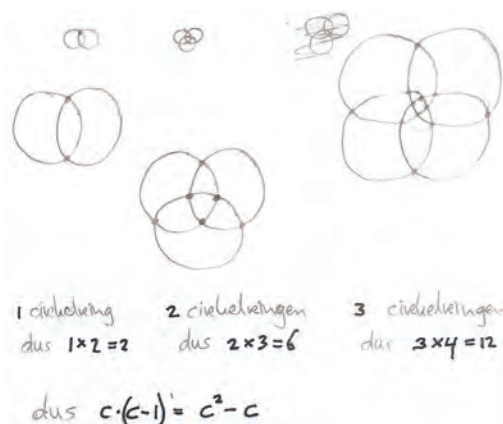


figuur 7 Snijdende cirkels en lijnen

Hoe ging leerling Thomas te werk?

Thomas ging voor zichzelf de volgende vraag beantwoorden: 'Hoeveel snijpunten hebben l lijnen en c cirkels maximaal?' Eerst pakt Thomas het cirkelonderzoek aan. Zie figuur 8. Merkwaardig genoeg vindt hij het aantal snijpunten van l lijnen op een heel andere manier, namelijk met een tabel en een tweedegraads formule met nog te vinden variabelen. Thomas vindt: $s(l) = \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}l$. Hij merkt vervolgens op dat een lijn iedere cirkel maximaal twee keer snijdt, dus bij c cirkels en l lijnen $2 \cdot c \cdot l$ snijpunten.

Totaal aantal snijpunten van c cirkels en l lijnen: $t(c,l) = c^2 - c + \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}l + 2 \cdot c \cdot l$. Dus ook voor 85 cirkels en 38 lijnen kan je zo het aantal snijpunten berekenen – mocht je dat willen natuurlijk.



figuur 8 Het onderzoek van Thomas

Wat wilde Sol LeWitt en wat kunt u doen?

Op de site van het Van Abbemuseum zien we dat een volgende beschrijving ten grondslag ligt aan *Wall drawing No. 256*: 'Een zes-inch (15cm) raster bedekt een zwarte wand. 10 witte lijnen vanuit het midden van de vier zijden, en 10 lijnen vanuit elke hoek naar willekeurige punten op het rooster. (De lengte van de lijnen en hun plaatsing worden bepaald door de tekenaar.) Witte lijnen, rooster in zwart potlood, zwarte muur.' Zie ook figuur 9. LeWitt heeft met deze tekst een concept geleverd. De uitvoering ervan wordt overgelaten aan een assistent en is niet permanent. Zoals de Duitse auteur Hermann Hesse (1877-1962) propageerde in zijn boek *Narziss en Goldmund*, een verhaal over de confrontatie tussen de intellectuele asceet Narziss en de artistieke gevoelsmens Goldmund, laten we kunst en wetenschap nader tot elkaar komen. We kunnen ons dus bijvoorbeeld afvragen: 'Hoeveel snijpunten zouden we maximaal op die zwarte wand kunnen krijgen?'



figuur 9 Deel van de wand (No. 256) met zichtbare roosterlijnen

In plaats van 10 lijnen uit elk genoemd punt kunt u zich eerst beperken tot de situatie van één lijn uit die genoemde punten. Wat is dan het minimaal en maximaal aantal snijpunten? En dan gaat u misschien iets doen met dat rooster. De afmetingen zijn 31 bij 24 roostereenheden. Een eenheid is dus 6 inch (15 cm). Wij vernemen uw uitkomsten graag.

Bronnen

Hermann Hesse, *Narziss en Goldmund*, Uitgeverij Atlas Van Abbemuseum Eindhoven: www.vanabbemuseum.nl

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

VERSCHENEN

MET PASSER, LINIAAL EN NEUSISLAT



Auteurs: Ad Meskens en Paul Tytgat
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015),
Zebrareeks deel 41
ISBN: 978-90-5041-144-8
Prijs: € 10,00 (68 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

In dit boekje verkennen we twee problemen, de verdubbeling van de kubus en de driedeling van de hoek, waarvoor men sinds de Oude Grieken naar een constructie met enkel passer en ongemarkeerde liniaal heeft gezocht. Het blijkt dat deze problemen niet met passer-en-liniaalconstructies op te lossen zijn. Ze zijn dat wel als we één extra hulpmiddel toelaten: de neusislat. Het gebruik hiervan ontsluit een deel van de wiskunde dat we met *GeoGebra* dynamisch kunnen verkennen. In het tweede deel van het boekje tonen we aan waarom een passer-en-liniaalconstructie voor deze problemen niet mogelijk is en ook waarom je op die manier geen zevenhoek kan construeren. Eeuwenoude meetkunde krijgt een ander, moderner kleedje aangemeten.

SPELLETJES IN DE KLAS

DOMINO EN BINGO

Irene Oldenburger
Marjanne Klom

Op de vraag: 'Mevrouw, gaan we vandaag iets leuks doen?' hebben Irene Oldenburger en Marjanne Klom wel een antwoord. Hieronder twee voorbeelden waarbij effectief geleerd wordt op een manier die de leerlingen aanspreekt.



Logaritmeldomino van Irene

In atheneum 5 is er in de laatste les voor de toets over logaritmen tijd om vragen te stellen over het hoofdstuk. Daarna volgt nog even een herhaling van de vaardigheden. De leerlingen weten hoe ze logaritmen en vergelijkingen met logaritmen exact op moeten lossen. Het is de bedoeling dat ze deze vaardigheden herhalen en er meer snelheid in krijgen. Daarom heb ik een logaritmeldomino gemaakt. Deze versie bestaat uit tien kaartjes, zodat het in ruim een kwartier gespeeld kan worden. Het materiaal vindt u op vakbladeuclides.nl/907logaritme. De leerlingen werken in groepjes van 3 à 4. Ter motivatie kunnen de leerlingen paaseitjes winnen. De groep die als eerste vijf kaartjes goed gelegd heeft, krijgt een paasei. Daarnaast verdient elke groep die het volledig heeft afgerond een paasei.

De leerlingen gaan enthousiast aan de slag. Sommige groepjes verdelen de kaartjes en gaan individueel aan de slag. Andere groepjes gaan met elkaar in discussie en proberen via logisch redeneren tot een oplossing te komen. De meeste groepen komen tot een goede oplossing. Eén groepje komt tot de ontdekking dat ze nog onvoldoende kennis hebben. Bij een andere groep mislukt de samenwerking; ze kunnen het niet eens worden over de aanpak en vertrouwen elkaars berekeningen niet. De stimulans van een paasei werkt goed. Het gestelde doel is voor bijna iedereen haalbaar, wat leidt tot een leuke succeservaring. Bij de toets worden in vergelijking met vorig jaar minder fouten gemaakt op de vaardigheden. Domino heb ik ook in een andere variant gemaakt en ingezet in de rekenklassen 5 havo/6 vwo. Deze variant gaat over het metrieke stelsel. Dit spel bestaat uit meer kaartjes en wordt door de leerlingen als vrij pittig ervaren. Hiermee kun je zeker een half uur tot drie kwartier vullen. Zie ook vakbladeuclides.nl/907metriekstelsel.

Goniobingo van Marjanne

Voor mij is bingo een ideaal spel om leerlingen basale vaardigheden te laten oefenen. Bijvoorbeeld: breuken in klas 1, haakjes wegwerken in klas 2, goniometrie in klas 3, exacte waarden in de eenheidscirkel voor klas 4 vwo wiskunde B, rekenregels voor machten en logaritmen in klas 5 vwo en algebraïsche vaardigheden in klas 6 vwo. De opzet is altijd hetzelfde. Ik maak een PowerPoint met 25 vragen en geef van tevoren de 25 antwoorden. Die antwoorden zet iedereen lukraak op een leeg bingoblad, zodat elke leerling zijn eigen werkblad heeft. Dan toon ik de PowerPoint, en bij elke vraag bedenkt de leerling wat het antwoord is en streept dat van zijn blad weg. Bij vijf op een rij, horizontaal, verticaal of diagonaal mag er heel hard bingo (of gonio) geroepen worden.

	G	O	N	I	O
G					
O					
N					
I					
O					

Op vakbladeuclides.nl/907gonio vindt u het materiaal voor goniometrie in klas 3. Het lukte om alle vragen in een lesuur van 50 minuten te stellen en leerlingen waren erg enthousiast omdat ze eens 'iets anders' deden. Zelf had ik ze nog nooit zo hard zien werken en ook achteraf wilden ze bij 'missers' precies weten waarom het fout ging, dus voor mij was het een duidelijk geval van *win-win*.



vakbladeuclides.nl/907logaritme
vakbladeuclides.nl/907metriekstelsel
vakbladeuclides.nl/907gonio

Over de auteurs

Irene Oldenburger is docent wiskunde aan de CSG De Lage Waard te Papendrecht. E-mailadres: i.m.oldenburger-heeringa@delagewaard.nl. Marjanne Klom (voorheen De Nijs) is docent wiskunde aan het Lyceum Ypenburg te Den Haag en hoofdredacteur van *Euclides*. E-mailadres: marjanne.klom@gmail.com

EEN INTRODUCTIE IN GROEPEN

VOOR MIDDELBARE SCHOLIEREN

Marloes Kloosterboer-
van Hoeve
Emma Lucas
Max Bosman

Marloes Kloosterboer verdiepte zich voor haar opleiding in behanggroepen en schreef daar materiaal over. Met de hulp van twee leerlingen uit 6 vwo zorgde ze dat het begrijpelijk werd voor scholieren. In dit artikel beschrijft ze haar ervaring. Het materiaal is terug te vinden op onze website.

Als je als aardwetenschapper een wiskundebevoegdheid gaat halen, moet je allerlei deficiënties wegwerken. De laatste deficiëntie die ik nog had, was het vak Groepen. Ik mocht óf het vak volgen en tentamen doen óf ik mocht een artikel schrijven. Ik heb voor dat laatste gekozen omdat ik het liefst zo veel mogelijk zelfstandig werk. De opdracht was: schrijf een artikel voor leerlingen van de middelbare school over een onderwerp uit het boek *Groups and Symmetry* van M.A. Armstrong. Ik heb gekozen voor het onderwerp Behangpatronen, waarvan ik dacht dat 6 vwo-leerlingen het leuk zouden vinden. Ik had het boek van Armstrong in elk detail doorgenomen en er een samenvatting van gemaakt en vanuit die samenvatting begon ik te schrijven.

Het eerste wat je nodig hebt om een groep te definiëren, is een **verzameling**. Voorbeelden van verzamelingen zijn 'alle natuurlijke getallen' of 'een aantal translaties' of 'rotaties'. Er zijn twee voorbeelden van verzamelingen die je wel kent:

1. alle gehele getallen ($\mathbb{Z}$);
2. alle rationale getallen (dus de gehele getallen + de breuken), maar nul er niet bij ($\mathbb{Q} - \{0\}$).

Vervolgens heb je een **regel** nodig die tweetallen uit de verzameling kan combineren tot een nieuw element dat weer in de verzameling ligt. Deze regel wordt vaak 'vermenigvuldiging' genoemd, maar kan net zo goed een optelling als een vermenigvuldiging zijn. Vaak wordt de regel duidelijk uit het verhaal, maar niet genoteerd in de berekeningen. In ons voorbeeld kun je bij de verzamelingen de volgende regels hebben:

1. optellen voor de verzameling gehele getallen: bijvoorbeeld $2 + 3 = 5$ en 5 is weer een geheel getal dat in de verzameling ligt; zo zal de uitkomst, als je twee getallen in $\mathbb{Z}$ optelt, altijd weer in $\mathbb{Z}$ liggen;
2. vermenigvuldiging van de verzameling rationale

getallen: bijvoorbeeld $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ en dat is

een getal dat weer in $\mathbb{Q} - \{0\}$ ligt.

Dus er is nu een verzameling en een regel. Maar wat maakt het nu een groep? Daarvoor is er nog een definitie nodig: een groep is een verzameling G tezamen met een

regel, een vermenigvuldiging, op G , die voldoet aan de volgende drie axioma's:

- a. de vermenigvuldiging is **associatief**, dat wil zeggen $(xy)z = x(yz)$ voor drie elementen van G (met deze notatie wordt in voorbeeld 1 met $(xy)z$ bedoeld $(x + y) + z = x + (y + z)$, en in voorbeeld 2 $(xy)z = x(yz)$;
- b. er is een element e in G , het '**eenheidselement**', zodat $xe = x = ex$ voor iedere x in G ;
- c. ieder element van G heeft een **inverse** x^{-1} die ook weer tot G behoort, zodanig dat $x^{-1}x = e = xx^{-1}$.

Om te spreken van een groep, moet aan alle drie de axioma's worden voldaan. Dus je hebt een verzameling nodig, een regel, en de drie axioma's moeten gelden.

Nadat ik deze theorie had opgeschreven, kwam ik op het idee om twee leerlingen uit 6 vwo mee te laten lezen. Uiteindelijk moest het een artikel worden voor middelbare scholieren, en wie kan dan beter beoordelen of het goed is? Ik gaf dit jaar geen wiskunde aan een 6 vwo-klas, maar wel Onderzoeken en Ontwerpen (vak van het Technasium^[1]) en ik heb daar de vraag wie er mee zou willen lezen in de groep gegooit. Twee leerlingen, Emma en Max, wilden dit wel doen. Dus ik heb bovenstaande tekst aan ze voorgelegd en ging zelf verder met schrijven vanuit deze theorie. Max is een leerling die ook meedoet aan het U-Talentprogramma^[2] en daar extra lessen volgt. Hij was daardoor al in contact gekomen met het concept Groepen en wist dus al een beetje wat het inhield. Emma had er nog nooit eerder van gehoord. Toen ik mijn stuk de eerste keer terugkreeg, begreep Max het begin wel, maar hij vroeg zich af waar het heen ging. Emma had geen idee wat ze zich erbij voor moest stellen en waar het allemaal voor diende. Ik heb het toen nog een aantal keer aangepast en verbeterd, maar het bleef onduidelijk. Ik was al wel verder gegaan om van de theorie van de groepen naar symmetrie te gaan, en om dan via de Euclidische groepen naar de behangpatronengroepen te gaan, maar beide leerlingen gaven aan al in het begin of in ieder geval halverwege het artikel te stranden. En voor Emma was het nog altijd veel te abstract en ze begreep de kern van de zaak niet. Ze stelde vragen als 'Wat doe je ermee?', 'Hoe kun je hieraan rekenen?', 'Hoe gebruik je het bij de wiskundeles?', en 'Is het eigenlijk een soort

bewijzen?’ Het was voor haar belangrijk dat een nieuw begrip zo gedefinieerd wordt dat er geen vragen meer over zijn. Alleen dan zou ze het kunnen aannemen en door kunnen gaan. In een vakantie heb ik toen besloten het hele verhaal om te draaien en het geheel op te bouwen vanuit de kennis en leefwereld van de leerlingen.



figuur 1 Een fragment van een stuk bloemetjes-behang



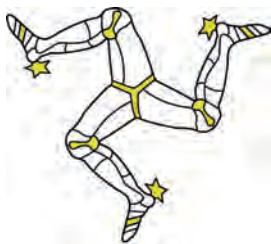
figuur 2 Een muur van de Taj Mahal

Als je een keer 's nachts niet kunt slapen en je tuurt naar het behang, bedenk je dan eens wat een variatie je hebt in behangpatronen. Je hebt bloemetjes, zie figuur 1, bellen, driehoeken, alle kleuren en patronen. En als je een keer op vakantie bent en je loopt door een oud paleis of door het Alhambra of de Taj Mahal, dan zie je hoe ook daar in de betegelde muren enorm veel variaties zijn in vormen, kleuren en patronen (zie figuur 2). Er lijken oneindig veel variaties te zijn, maar wiskundigen hebben ontdekt dat er maar zeventien groepen zijn waarbinnen alle patronen passen. Daarover gaat dit artikel. Het eerste dat opvalt bij figuur 1 en 2 is dat er sprake is van symmetrie, je kunt een lijn trekken door het patroon en in deze lijn wordt het patroon gespiegeld. Ook kun je een punt kiezen waaromheen je kunt roteren zodat het patroon weer terugkomt. Met het begrip symmetrie heb je al kennism gemaakt. In de eerste klas begin je met twee soorten symmetrie: lijnsymmetrie en draaisymmetrie. Bij lijnsymmetrie is er sprake van spiegelen, je kunt een figuur zodanig dubbelvouwen dat de ene helft precies op de andere helft past (zie figuur 3). Bij draaisymmetrie kun je een figuur zo draaien (over een hoek $< 360^\circ$) dat hij weer op zichzelf past (zie figuur 4).

Om het begrip Groepen nog concreter te maken ben ik de geschiedenis ingedoken. Waarom is het concept zo belangrijk, wanneer is het voor het eerst gebruikt en waar kom je het nu allemaal tegen?



figuur 3 Lijnsymmetrie in een hartje



figuur 4 Draaisymmetrie in het symbool van het eiland Man

Groepen

Dit concept van Groepen ben je op de middelbare school nog niet tegengekomen. Het is ook een relatief modern begrip, het is pas sinds 1832 een onderwerp van studie. Het is een begrip dat kijkt naar de symmetrieën van allerlei wiskundige structuren, dus niet alleen naar de symmetrieën van behangpatronen in een plat vlak. De groepentheorie is ontwikkeld in een zoektocht naar de vraag of er voor elke polynomiale vergelijking een formule te vinden is die de oplossingen geeft.

Al snel werd duidelijk dat dit concept van symmetrieën niet alleen in het geval van polynomiale vergelijkingen gebruikt kon worden, maar dat het concept van symmetrieën op vele andere gebieden van de wiskunde en de natuurwetenschappen gebruikt kan worden. Voorbeelden daarvan zijn meetkunde, relativiteitstheorie en de bouw van moleculen. Met behulp van de groepentheorie is ook te verklaren dat een *Rubik's cube*, als je die uit elkaar haalt en een hoekstuk verdraait, niet meer te maken is; en dat een puzzel zoals die in figuur 5 staat niet op volgorde te leggen is. In al deze gevallen speelt symmetrie een belangrijke rol.



figuur 5 Schuifpuzzel waarbij de 14 en 15 zijn omgedraaid

Voor het schrijven van dit stuk heb ik dankbaar gebruik gemaakt van twee scheikundecollega's, en mijn boeken die ik voor *History of mathematics* had gebruikt. Na deze introductie met context en geschiedenis plaatste ik pas de tekst met de theorie over groepen, de tekst waar ik in dit artikel mee begonnen ben. Met dit begin konden de leerlingen veel beter uit de voeten, en konden we weer verder gaan. De leerlingen gaven steeds opmerkingen, bijvoorbeeld foutjes die ze gevonden hadden of dingen die ze nog onduidelijk vonden. Het was ook leerzaam om te merken hoe we allemaal snel teruggrijpen op wat we kennen. Zo zei één van de leerlingen: 'Misschien iets bij biologie, dat je een indeling maakt in groepen. Maar daar zijn we niet begonnen met definities als associatief en ondergroepen. Het is echt een heel ander concept dan wat ik gewend ben. Bijvoorbeeld de definitie van de behangpatronengroep als onderdeel van de Euclidische groep. Bij bijvoorbeeld wiskunde heb je een groot onderwerp, zoals calculus, met daarbij dan twee grote onderwerpen, differentiëren en integreren. Deze twee onderwerpen staan dan naast elkaar, onder het hoofdonderwerp. Bij de

Euclidische groep heb je twee ondergroepen T en O . Ik kan dan de vergelijking maken met $T =$ differentiëren en $O =$ integreren, waarbij differentiëren en integreren los van elkaar staan. Maar dan krijg je nu opeens de behangpatronengroep, waarbij je iets uit T hebt en iets uit O , en dan heb je opeens een nieuwe groep. Misschien kun je het meer vergelijken met het argumentatieschema bij Nederlands, met nevenschikkend en onderschikkend. Het is in ieder geval echt iets nieuws!

Voor mijn studie was het natuurlijk geweldig om twee van zulke kritische meelezers te hebben! Ik heb daarvan enorm veel geleerd, en raad dit iedereen aan. Voor de leerlingen was het ook bijzonder leerzaam, niet alleen omdat ze nu meer hebben geleerd over een heel nieuw onderwerp van de wiskunde, maar ook omdat ze zien hoe een artikel geschreven wordt. Dat ze geleerd hebben hoe een artikel zich ontwikkelt, hoe je vanuit een ander oogpunt naar je eigen creatie kunt kijken en hoe belangrijk het is om een context en een helicopterview mee te nemen in een artikel. Daarbij was het leuk om te merken dat rollen werden omgedraaid: Als de leerlingen het artikel gelezen hadden en hun ervaringen met mij wilde bespreken, dan gingen we daarvoor zitten en waren zij de experts.

Noten

- [1] Zie www.technasium.nl
- [2] Zie www.uu.nl/onderwijs/u-talent



vakbladeuclides.nl/907kloosterboer

Over de auteur

Marloes Kloosterboer-van Hoeve was onderzoeker aardwetenschappen aan de Universiteit Utrecht, en is sinds 2007 docent aan het Goois Lyceum in Bussum, eerst als docent aardrijkskunde, later ook Onderzoeken en Ontwerpen en wiskunde. Ze is nu bijna klaar met het behalen van haar eerstegraadsbevoegdheid aan de UU. Max Bosman en Emma Lucas zijn leerlingen uit 6 vwo. Max gaat volgend jaar geneeskunde studeren, Emma gaat volgend jaar op hoog niveau hockeyen en studeren in Amerika. E-mailadres Marloes: mkloosterboer@gsf.nl

VERSCHENEN

EEN PASSIE VOOR SYMMETRIE



Auteur: Jan van de Craats

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2014), deel 78

ISBN: 978-90-5041-143-1

Prijs: € 20,00 (106 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Symmetrie en symmetrische patronen zijn te vinden in schalen en bakers, kopjes en schotels, tafels en stoelen, kledjes en tapijten, gordijnen en behangpatronen. In tegelvloeren, maar ook in vignetten van benzinemerken en wioldoppen van auto's. En in de karakteristieke lijnenpatronen op een voetbal, een volleybal, een basketbal of een tennisbal. In dit boek kijkt Jan van de Craats met wiskundige ogen naar symmetrie. Hij laat zien dat er verschillende soorten rozetpatronen, strookpatronen en tegelpatronen zijn. En dat er symmetrie kan zijn in driedimensionale voorwerpen en bolpatronen. Hij legt symmetriestructuren bloot en leert je om symmetrie te herkennen en te determineren. Alles aan de hand van eenvoudige recepten, geïllustreerd met prachtige foto's en duidelijke tekeningen. Na dit boek kijk je nooit meer op dezelfde manier naar symmetrische voorwerpen en patronen. Dit is een wiskundeboek zonder formules, vergelijkingen of bewijzen. Er is geen wiskundige voorkennis voor nodig, alleen maar nieuwsgierigheid en een actieve, onderzoekende geest!

UITDAGING

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A^o 1946

Deze keer twee opgaven uit 1946 die mooi passen in het nieuwe vwo-programma. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1

In driehoek ABC is $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ en $AB = 10$. Op de zijde AB ligt tussen A en B punt D , waarvoor de afstanden tot zijden AC en BC zich verhouden als $(1 + \sqrt{3}) : 1$. Bereken (exact) CD .

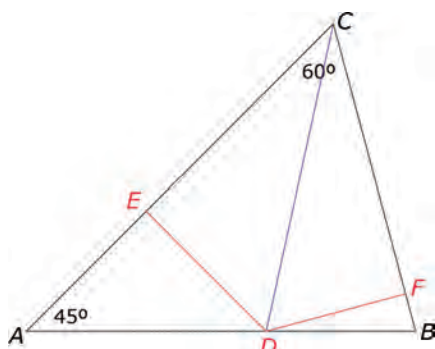
En een eenvoudige tweede opdracht, prima niveau voor in de klas:

Opgave 2

Door het punt $A(4;0)$ trekt men een veranderlijke lijn, die de y -as in B snijdt. Bepaal de vergelijking, aard en ligging van de meetkundige plaats van het snijpunt van de middelloodlijn van AB met de lijn door B evenwijdig met de x -as getrokken.

Lukt het u verder? En een extra vraag achteraf: Hoe heeft de maker van de eerste opgave deze gecomponeerd?

Uitwerking opgave 1, een werkschets



figuur 1

Stappenplan exact:

1. bereken BC (sinusregel in driehoek ABC);
2. bereken AC (cosinusregel in driehoek ABC);
3. Descartes' aanpak: stel bijvoorbeeld $AD = x$, en druk DE en DF uit in x ;
4. gebruik de gegeven verhouding om x uit te rekenen;
5. bereken CD (cosinusregel in driehoek ADC).

Of slimmer (?):

1. bereken BC (sinusregel in driehoek ABC);
2. bereken AC (cosinusregel in driehoek ABC);
3. Descartes' aanpak: stel $DF = x$, dan is $DE = (1 + \sqrt{3})x$ en $AD = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})x$;
4. bereken tussendoor $\sin(75^\circ)$, bijvoorbeeld met somformule met $\sin(45^\circ + 30^\circ)$, en druk BD uit in x ;
5. gebruik $AD + BD = 10$ en bereken x ;
6. bereken CD (cosinusregel in driehoek ADC).

Stappenplan algebraïsch:

Benader $\sin(75^\circ)$ op een rekenmachine en volg verder het tweede stappenplan hierboven. In de volgende uitwerking van het eerste stappenplan blijft genoeg voor u, lezer, over om de tussenberekeningen zelf te doen!

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin 60^\circ} \text{ geeft } BC = \frac{10}{3} \sqrt{6}$$

$$10^2 = AC^2 + \left(\frac{10}{3} \sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot AC \cdot \frac{10}{3} \sqrt{6} \cdot \cos 60^\circ \text{ geeft}$$

$$3 \cdot AC^2 - 10\sqrt{6} \cdot AC - 100 = 0, \text{ met als positieve}$$

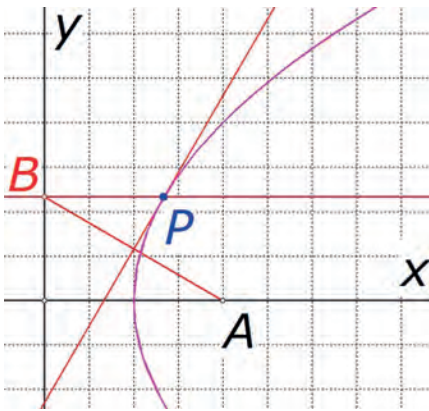
$$\text{wortel } AC = \frac{5\sqrt{6} + 15\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{3} \right)$$

$$DE = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \text{ en met de gegeven verhouding:}$$

$$DF = \frac{DE}{1 + \sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

Teken nu CG loodrecht op AB (zie figuur 2), dan is (in

$$\text{driehoek } AGC) \text{ dus } CG = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3} + 15}{3}$$



figuur 4

Dit is een parabool met de x -as als as en het punt $(2;0)$ als top. Het is in de klas aardig deze meetkundige plaats te demonstreren met een dynamisch meetkundeprogramma. Met *Geocadabra* maakte ik figuur 4. Hierin herken je meteen de richtlijn (y -as) en het brandpunt (A) van de parabool, en dat hier gewoon de standaardconstructie van een parabool is toegepast: vanuit een (bewegend) punt B op de richtlijn wordt de loodlijn op deze richtlijn gesneden met de middelloodlijn van AB . Dit snijpunt P ligt op de parabool. Gelijk een idee voor u, om eens een scheve richtlijn te kiezen en de paraboolformule uit te rekenen voor een parabool met een scheve as? Ook geschikt voor in de klas?

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

MEDEDELING

AANKONDIGING SYMPOSIUM WGRWO



400 jaar Meetkundeonderwijs

Het eenentwintigste symposium van de Werkgroep Geschiedenis van het Reken-WiskundeOnderwijs, de WGRWO, zal plaatsvinden op **19 september 2015**, onder de titel *400 jaar Meetkundeonderwijs*.

Programma:

- 9.30-10.15 Inloop en koffie
- 10.15-10.30 Welkom en mededelingen
- 10.30-11.15 Henk Hietbrink: *De Meetkunde op de Duitse Mathematique*
Op deze 'ingenieursschool', een voor Europa unieke instelling die vanaf 1600 aan de Leidse Universiteit was verbonden, werd wiskunde, gericht op toepassingen, onderwezen in de landstaal. Wat hield het meetkundeonderwijs daar in?
- 11.15-12.00 Harm Jan Smid: *De eeuw van het meetkundeonderwijs*
De negentiende eeuw kan met recht omschreven worden als de eeuw van het meetkundeonderwijs. Er verschenen nieuwe vakken, van vormleer tot beschrijvende meetkunde, oude takken van meetkunde kregen een nieuwe vorm en meetkunde werd een vak voor iedereen. Hoe verliep dat proces en wat zat erachter?
- 12.00-13.30 Lunchpauze
- 13.30-14.15 Marco Tompitak: *Les extrêmes se touchent: Reindersma versus Schogt*
W. Reindersma publiceerde in 1912 een *Nieuw Leerboek der Vlakke Meetkunde*, op geheel empirische basis. J.H. Schogt publiceerde in 1929 een leerboek der vlakke meetkunde op zuiver axiomatische basis. Het contrast tussen beide boeken was groot en leidde tot heftige discussies.
- 14.15-14.45 Theepauze
- 14.45-15.30 Andre van den Berg en Agnes Verweij: *De vlakke meetkunde in de eerste editie van 'Moderne Wiskunde'*
In de eerste schoolboeken na 1968, zoals *Moderne Wiskunde*, zat nog heel wat meetkunde, zij het op een andere manier dan daarvoor. Wat hield die meetkunde precies in, wat wilde men daarmee bereiken en waarom is er toch zo weinig van terechtgekomen?

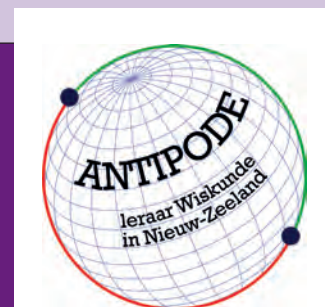
Het symposium vindt plaats in cursus- en vergadercentrum Domstad, Koningsbergerstraat 9, 3531 AJ te Utrecht. Kosten voor NVvW- en NVORWO-leden € 25,00, anders € 30,00. Inschrijven kan via de NVvW-website: www.nvww.nl/21418

TEGENVOETER

EEN DAG IN HET LEVEN VAN...

Roland Meijerink

Kia ora! Mijn naam is Roland Meijerink, ik ben 33 jaar en sinds eind januari docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek ga ik u regelmatig op de hoogte houden van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.



De vorige keer vertelde ik al dat de ervaringen hier positief zijn, maar de leercurve steil. Daarbij gaat het natuurlijk om de taal (al valt dat best mee, aangezien de voertaal op veel Nederlandse universiteiten ook Engels is) en de inhoud van het curriculum (waarover de volgende keer meer), maar ook de cultuur van het land plus de school, en heel veel praktische zaken. In deze aflevering vertel ik graag wat over het dagelijkse reilen en zeilen op school. Disclaimer: $N = 1$, dus niet alle zaken zijn noodzakelijkerwijs typisch voor Nieuw-Zeeland.

Het schooljaar loopt hier van eind januari tot begin december en bestaat uit vier periodes (*terms*) van ongeveer tien weken, steeds gescheiden door twee weken vakantie. Op mijn school duurt de schooldag van vijf over half 9 tot klokslag 3 uur. De dag bestaat uit vijf lesuren (*periods*), die variëren in lengte van 50 tot 65 minuten, en twee pauzes van 25 tot 40 minuten. Daarnaast is er op drie dagen een mentorles (*form time*) van zo'n twintig

minuten. Ook is er ruimte in het rooster voor drie bijeenkomsten (*assemblies*). Daarin spreekt de rector (*principal*) of de conrector van de betreffende jaarlaag (*dean*) de leerlingen toe, worden certificaten uitgereikt voor bijzondere academische, sportieve of culturele prestaties, worden mededelingen gedaan, enzovoort.

'GELUKKIG IS MEN BEZIG MET DE ONTWIKKELING VAN EEN TELEFOON-APP'

Elke ochtend begint met een bijeenkomst van een kwartiertje met alle collega's (*staff meeting*), waarin de rector en de drie andere directieleden (*deputy principals*) mededelingen doen en eventuele bijzonderheden voor die dag doornemen. Daarnaast kunnen collega's wat vragen of zeggen, bijvoorbeeld over het verloop en de uitslag van culturele of sportieve schoolactiviteiten. Dat klinkt misschien wat formeel of zelfs saai, maar in de praktijk is het leuk om te horen welke leerlingen je later op de dag een complimentje kunt geven. Omdat veel verhalen gepaard gaan met een grapje of een anekdote wordt er ook vaak gelachen. Bovendien is het goed voor de gezamenlijke spirit en scheelt het gewoon een hoop e-mails en miscommunicatie. Na afloop van de bijeenkomst neem je een A4'tje mee waarop mededelingen staan van docenten aan leerlingen, over activiteiten als sporttrainingen en muziekrepertories. Deze mededelingen worden aan het begin van de eerste les in de klas voorgelezen. Dat laatste vind ik persoonlijk een beetje ouderwets, maar gelukkig is men bezig met de ontwikkeling van een telefoon-app die het huidige systeem overbodig zou kunnen maken.

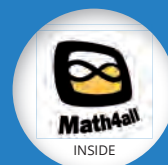
Wilt u een berichtje sturen? Dat kan naar rmeijerink@karamu.school.nz.

Tijd voor een nieuwe
wiskundemethode:

Math Plus



Ga naar www.mathplus.nl voor het gratis
beoordelingspakket of een demonstratie op school.



MALMBERG

BOEKBESPREKING

GENIETEN VAN GETALLEN

Ger Limpens



Ondertitel: Hoe getallen het leven weerspiegelen en het leven getallen

Auteur: Alex Bellos

Uitgever: VBK Media (Kosmos Uitgevers) Utrecht/Antwerpen (2014)

ISBN: 978 90 215 4963 7 (304 pagina's; paperback)

ISBN: 978 90 215 5646-8 (e-book)

Prijs: € 14,99

Inleiding

Om het maar meteen gemeld te hebben: er zijn een prettige en een vervelende mededeling te doen in het kader van deze recensie. De goede is dat ik het merendeel van dit boek met veel plezier gelezen heb. En daar zal ik verderop meer over zeggen. De vervelende is dat ik eigenlijk van mening ben dat de Nederlandse uitgever van dit boek Alex Bellos geen plezier gedaan heeft met het op deze wijze uitgeven van het boek. Ik kan me namelijk niet voorstellen dat Bellos zelf, die als wiskundige afgestudeerd is, zo slecht zijn wiskundige taal beheerst als naar voren lijkt te komen in deze uitgave. Het kan bijna niet anders dan dat het hier en daar belabberde taalgebruik een gevolg is van de vertaling. Laat ik enkele triviale voorbeelden geven: 'irrationale' getallen heten hier op diverse plekken 'irrationele' getallen. En daar waar uit de context blijkt dat er duidelijk sprake is van een focus op 'getallen' worden de betreffende objecten met de term 'cijfers' aangeduid. Lijnen die volgens de verhaallijn elkaar 'snijden', heten hier 'kruisende' lijnen. 'De' coördinaat wordt op zeker moment 'het' coördinaat, 'stambreuken' heten in dit boek 'eenheidsbreuken'. En ook echte fouten komen aan de orde: daar waar de definities van de goniometrische verhoudingen sinus en

cosinus gegeven worden (duidelijk mag zijn dat het boek ook geschreven is voor beginners/amateurs), wordt de sinus van een zekere hoek gedefinieerd als de verhouding die gemelijk bekend staat als de cosinus van die hoek en omgekeerd. Natuurlijk kun je dat allemaal onder 'klein bier' wegzetten, gejeremieer van een pietje precies. Maar dat is het niet: zoals al aangegeven is dit boek ook geschreven voor de liefhebber die (nog) niet al te zeer is ingevoerd in de discipline. En dan pakt onzorgvuldig of zelfs fout formuleren in mijn beleving desastreus uit: als je als lezer de auteur moet corrigeren, dan doe je dat niet snel als je niet al te zeer bekend bent met de materie. Ik vind dus dat de uitgever hier een enorme kans gemist heeft en ik ben bereid de uitgever voor een eventuele heruitgave (waarop ik hoop, daarover later meer) de helpende hand toe te steken: als hij zich bij mij vervoegt, kan hij (om niet) mijn op diverse pagina's met potlood geannoteerde exemplaar krijgen zodat die (ongetwijfeld niet uitputtende) annotaties gebruikt kunnen worden om de totstandkoming van die verbeterde heruitgave te vergemakkelijken.

Tien hoofdstukken

En nu terug naar het boek zelf: Alex Bellos is, behalve wiskundige, ook journalist en dat is goed te merken. Hij weet hoe hij een lopend verhaal schrijft en dat doet hij, behoudens mijn gezeur op de vierkante centimeter van hierboven, dan ook. Ik had al genoten van zijn vorige boek *Getallen ontraadseld* (overigens bij dezelfde uitgeverij verschenen en gelukkig in een prima vertaling) en ik verheugde me dan ook op lezing van zijn nieuwste. Elk van de tien hoofdstukken is gewijd aan een wiskundig concept en hij weet elk van deze concepten op te hangen aan mensen (niet altijd wiskundigen en al helemaal niet altijd wiskundigen van naam) die door hem gerelateerd worden aan het onderhavige concept. De concepten die de revue passeren, zijn *getallen en de gevoelens die (sommige) mensen voor bepaalde getallen koesteren, numerieke patronen, driehoeksverhoudingen* (dat had u al begrepen na mijn gemopper over de foute goniometrische definities, nietwaar?), *kegelsneden, rotaties – in de breedste zin van het woord, exponentiële groei* (de auteur of de vertalers noemen dit meestal 'proportionele' groei, toch niet de meest voor de hand liggende aanduiding in het Nederlandse taalgebied, dunkt me), *negatieve getallen en van alles eromheen, calculus* (een begrip waarbij de vertalers zich dan weer de kanteekening permitteren dat hiervoor in het Nederlands meestal de term 'analyse' gebruikt wordt, terwijl we hier in mijn

beleving langzamerhand toch wel vertrouwd zijn met die Angelsaksische benaming), *logisch redeneren* en *cellulaire automaten*. Dat laatste hoofdstuk is een wat vreemde eend in de bijt voor mijn gevoel en focust zich sterk op *Game of Life*, niet zozeer een *game* als wel een door John Conway rond 1975 bedacht tweedimensionaal universum dat bepaald wordt door een viertal regels/wetten. Maar ook hier slaagt Bellos erin zijn fascinatie voor het betreffende wiskundige concept enthousiast voor het voetlicht te brengen. Dat doet hij in de eerdere hoofdstukken eveneens en voortdurend. Die geestdrift weet hij op de lezer, althans in ieder geval op mij, over te brengen.

Alle bovengenoemde concepten worden steeds vanaf nul opgebouwd, dus er wordt nogal wat uitgelegd dat voor de wat meer wiskundig onderlegde lezer helder (of misschien zelfs heel erg triviaal) is, maar toch ook bij de basale uitleg worden vaak anekdotes of invalshoeken gehanteerd die voor mij nieuw en verrassend waren.

MEDEDELING



VAKANTIECURSUS: 'DIT IS TRIVIAAL'

Voor leraren exacte vakken aan havo, vwo of hbo, voor leerlingen en voor andere belangstellenden organiseert het Platform Wiskunde Nederland (PWN) in 2015 een vakantiecursus met als thema: 'Dit is triviaal'.

Het programma van de negenenzestigste vakantiecursus is echter allerm minst triviaal. Het zal dit jaar voor een deel bestaan uit voordrachten die min of meer direct met het vwo-programma te maken hebben, en voor een deel uit soms verrassend eenvoudige inkijkjes in de meer geavanceerde wiskunde, die de ene keer laten zien dat een ogenschijnlijk lastige stelling in feite triviaal is, en de andere keer iets tonen dat triviaal lijkt, maar het helemaal niet is.

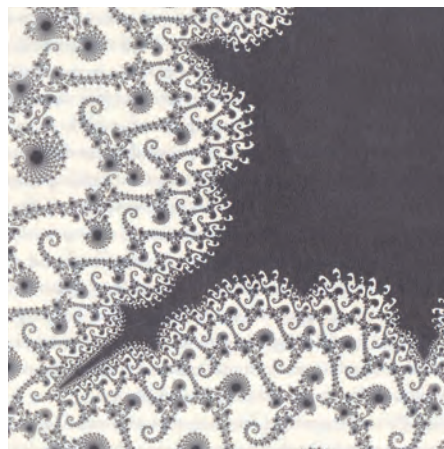
Aan bod komen de volgende onderwerpen:

- *Priemtweelingen en het 'polymath'-concept* (Frits Beukers)
- *Proofs from the BOOK*; voordracht over discrete meetkunde (Aart Blokhuis)
- *Niet-trivialiteit van computerberekening van trivialiteiten als 'een som van positieve getallen is positief'* (Jan Brandts)
- *p-adische getallen* (Peter Stevenhagen)
- *Krommen pletten*. Kegelsneden in de Gouden Eeuw (Fokko Jan Dijksterhuis)
- *Intuïtie, Inzicht en Bewijs* (Aad Goddijn)
- *Practicum over complexiteit en algoritmen voor 'triviale problemen'* (Benne de Weger).

De cursus wordt gegeven in:

- Amsterdam: op vrijdag 21 en zaterdag 22 augustus 2015 bij het CWI;
- Eindhoven: op vrijdag 28 en zaterdag 29 augustus op de TUE.

Via www.platformwiskunde.nl/home_vakantiecursus_wiskunde.htm kunt u meer informatie opvragen of u aanmelden voor de cursus.



figuur 1

Een voorbeeld

Laat ik ter illustratie hoofdstuk 7, het hoofdstuk over negatieve getallen, in het kort beschrijven. Bellos begint met duidelijk te maken dat we het historisch gezien lang zonder negatieve getallen hebben moeten stellen en niet zonder reden: het tellen c.q. meten met een negatief getal wringt al snel. Ook een enkele manier waarop men negatieve getallen via een omweg toch deel liet uitmaken van het rekensysteem passeert de revue. Pas toen John Wallis in de zeventiende eeuw het concept van de getallenlijn presenteerde, kwam er schot in de zaak en werd het idee van negatieve getallen – door het concept 'getal = hoeveelheid' te vervangen door het idee van 'getal = positie op de getallenlijn' – breed geaccepteerd. Vervolgens maakt Bellos de overstap naar bewerkingen met negatieve getallen en laat hij zien dat men door die negatieve getallen toe te voegen ook meteen tegen het uitbreiden van de rekenstructuur aanliep, waarbij hij ruimte biedt aan redeneringen rond 'min maal min is plus'. Hij maakt daarna een uitstapje naar de algebra waar de negatieve getallen al eerder als onvermijdelijk opdoken. Hierbij laat hij de lezer stuiten op een ander probleem: het oplossen van kwadratische vergelijkingen die niet oplosbaar zijn binnen de reële getallenverzameling. De vierkantswortels van negatieve getallen dienen zich dus aan. Bespiegelingen rond imaginaire en complexe getallen liggen om de hoek en komen dus ook voorbij. Zo ook een passage gewijd aan $e^{i\pi} + 1 = 0$, de identiteit danwel de formule van Euler (volgens velen de mooiste formule ooit) inclusief iets dat in de buurt komt van een bewijs van deze formule. En wat er zich bij de uitbreiding met de negatieve getallen ooit had voorgedaan, dat deed zich nog veel heftiger voor bij de uitbreiding

met de imaginaire getallen, zo houdt Bellos ons voor: hoe moet je die nieuwe getallen voorstellen? Het complexe vlak bleek, zo weten we nu, een heel fraaie visualisatie en gaf ook de mogelijkheid om helder in beeld te brengen hoe om te gaan met de basisbewerkingen toegepast op complexe getallen. Na de formule van Euler nog eens voorbij te laten komen, maakt Bellos de oversteek naar de *quaternionen*, en passant refererend aan Hamiltons mathematisch vandalisme op een Dublinse brugwand... We vervolgen het hoofdstuk met een verdere uitbreiding van het getallensysteem, zijnde de *octonionen*, maar hier blijft Bellos niet lang bij stilstaan. Op basis van een excursie via iteratieve processen komen we, gebruikmakend van onze kennis over de wijze waarop complexe getallen met elkaar vermenigvuldigd worden en de visualisatie daarvan in het complexe vlak, op de Mandelbrotverzameling, het schoolvoorbeeld van een fractal. Die Mandelbrotverzameling wordt voorzien van enkele fraaie afbeeldingen, ontstaan door inzoomen op een deel van de Mandelbrotfractal, *Seahorse Valley* (zie figuur 1) geheten, en bespiegelingen over andere wonderlijke deelfiguren die hierin terug te vinden zijn. Het hoofdstuk besluit met enkele gedachten over de vraag of er zoiets als een driedimensionale Mandelbrotverzameling is. Dat blijkt inderdaad het geval te zijn: dat object heeft een naam gekregen, de *Mandelbulb*. Kortom, een veelheid aan allerlei meer of minder bekende wiskundige aspecten, en bijzonder boeiend en meestentijds helder verwoord.

Tot besluit

Al met al hoop ik dat het betreffende boek zich zal mogen gaan verheugen in een grote lezersschaar. Het lijkt me dat velen van ons, op de een of andere wijze zelf ongetwijfeld gefascineerd door wiskunde, hier genoeg aan kunnen beleven. Niet alleen de hernieuwde kennis-making met allerlei bekende mathematische concepten, ook de verpakking ervan middels de anekdotiek en de menselijke kapstokken die bij de introductie van die concepten gebruikt is, kan in mijn beleving voor veel genoeg zorgen bij nogal wat lezers van dit blad. Bovendien kan ik me heel goed voorstellen dat veel wiskundedocenten inspiratie voor hun lessen weten te putten uit de hierboven gememoreerde anekdotes en ook dat lijkt me alleen maar een meerwaarde. Dat alles gesteld hebbende, lijkt me wel dat de uitgever in de naaste toekomst voor een verbeterde versie van dit boek zorg dient te dragen. Niet dat het voorliggende onleesbaar zou zijn, het mag duidelijk zijn dat de versie van nu mij in ieder geval voor zich heeft weten te winnen. Maar Bellos verdient beter.

Over de recensent

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij het Cito.
E-mailadres: ger.limpens@gmail.com

VERSCHENEN

WEG VAN HET CIJFEREN



Ondertitel: Rekenmethodes vanaf 1800 tot heden

Auteur: Adri Treffers

Uitgave in het kader van het Freudenthalproject,
Focusgebied *Education for Learning Societies*,
Universiteit Utrecht (2015)

ISBN: 978-90-9028-793-5

Prijs: € 30,00 (256 pagina's; paperback)

Bestellingen via uitgeverij Reni Casoli:
reni.casoli@gmail.com

Van de achterkaft

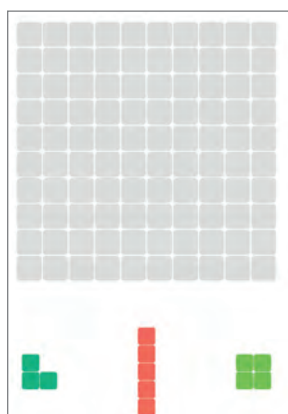
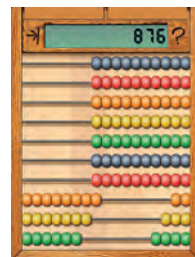
De titel 'Weg van het cijferen' kan als 'gek op' en als 'met minder nadruk op' worden verstaan. Achter deze tweedeling steekt het algemene onderscheid tussen werktuigelijk versus inzichtelijk rekenen, internationaal aangeduid als de procedurele en de conceptuele richtingen in het rekenonderwijs – een onderscheid dat voor de meeste methodes overigens niet zo scherp valt te maken omdat vele leergangen vaak elementen van beide bevatten. De geschiedenis van de rekenboeken laat zien dat de hoge waardering van het cijferen in bepaalde perioden welhaast gemeengoed was. Sommige methodes besteedden toen niet minder dan 400 lessen, ofwel twee volledige schooljaren, aan het leren cijferen. De terughoudende stellingname ten opzichte van het cijferen kon men echter al bij Pestalozzi en zijn volgelingen aantreffen en bij tal van vermaarde rekendidactici en wiskundigen, plus in een aantal methodes uit de 19e en 20e eeuw. In alle gevallen wensen de bestrijders van het overmatige cijferen meer aandacht voor flexibel (hoofd) rekenen op basis van inzicht in getallen, getalrelaties en toepasbaarheid. De historisch-didactische analyse heeft betrekking op de rekenboeken die vanaf 1800 werden uitgegeven, zij het eerst uitsluitend voor de hoogste klassen van de basisschool. De didactische reis eindigt in 'het heden' tussen 2010 en 2015 toen de eerste versie van de euro-methodes op de meeste basisscholen historie werden. De speurtocht levert een schat aan didactische inzichten op die ook voor het huidige rekenonderwijs nog van grote betekenis zijn.

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

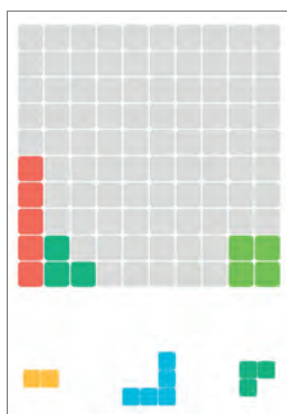
Lonneke Boels

1010!

Voor de zomervakantie, zoals gebruikelijk, een verslavend spelletje dat Lonneke Boels voor u vond in de app store.



figuur 1 Startscreen



figuur 2 Eerste drie zetten

Het spel 1010! bestaat uit een eenvoudig spelbord van 10x10 vakjes. Onderin het scherm staan drie vlakke figuren, zie figuur 1. De bedoeling is om deze zo efficiënt mogelijk op het spelbord te plaatsen (door met je vinger te slepen naar de gewenste plek), zie figuur 2. Zodra een rij of kolom gevuld is met gekleurde vierkantjes, wordt deze rij of kolom weggehaald, zie bijvoorbeeld onderste rij in figuur 3. Elk geplaatst vierkantje levert een punt op. Wie alleen bezig is met efficiënt vlakvullen, loopt al snel vast. In figuur 3 kan de horizontale 'vier' nog worden geplaatst, maar niet zodanig dat er een rij of kolom verdwijnt. Hierdoor kan de verticale 'vier' nergens worden geplaatst. Dan eindigt het spel. Het weghalen



figuur 3 Bijna einde spel

van een rij of kolom levert tien extra punten op. Het weghalen van twee rijen of kolommen levert dertig extra punten op. Drie kolommen of rijen weghalen levert zestig punten op. De kleuren doen er niet toe. Er is geen tijds-limiet.

Pluspunten

- het is een echt spel;
- vlakvullen en meetkunde is ook wiskunde;
- ondertussen wordt er ook geteld en met zeer eenvoudige getallen gerekend (optellen onder de tien);
- eenvoudige bediening;
- er zit een nachtstand op (minder licht 's avonds door zwart speelbord zodat je er minder wakker van blijft);
- voor € 1,99 koop je een versie die vrij is van advertenties;
- wie gaat voor zo'n efficiënt mogelijke vlakvulling, komt vaker in de problemen omdat grote vlakken (zoals een 3x3 vlak) niet meer passen.

Minpunten

- bovenin het scherm zijn steeds advertenties zichtbaar;
- de gratis versie geeft elke keer een advertentie op het moment dat het spel afgelopen is;
- *in-app* aankopen (naast advertentievrij, ook *life-refill* voor € 0,99);
- delen via Facebook en zo je score vergelijken met vrienden wordt aangemoedigd. Dat is slim gebruik (misbruik?) van groepsdruk.

Geschikt voor: basisschool, vmbo, havo en vwo.

Eendoordeel: aanschaffen

Kosten: gratis (met advertenties) of € 1,99 (advertentievrij)

Getest op: iPad met iOS7. Ook te koop voor Android, Amazon.

Meer informatie: www.1010ga.me

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2015

Kees Garst



Verenigingsnieuws

Tweede uitnodiging

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2015 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 7 november 2015**.

Aanvang: 10:00 uur

Sluiting: 16:00 uur

Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal

Themagedeelte van de studiedag

Voor de verandering...

Voor of tegen verandering in wiskundeonderwijs maakt, in ieder geval voor onder- en bovenbouw-docenten havo/vwo, nu niet echt meer uit. In november bent u in de vierde klas ook druk bezig de nieuwe examenprogramma's te onderwijzen. Bent u gelukkig met de wiskundemethode die u en uw leerlingen moet ondersteunen om naar een vernieuwd examen toe te werken? Lijkt het u leuk om samen met collega's daarover te praten in november? Wilt u graag informatie van docenten die al langer bezig zijn met de implementatie van de nieuwe programma's? Dat kan uiteraard.

Maar er is meer waar u aan kunt denken bij 'Voor de verandering'. Gewoon eens iets anders doen met een les (of meer) om uw leerlingen echt mee te krijgen in diverse aspecten van wiskunde. Bent u, voor de verandering, wel eens bezig met

- een leuke les(senserie) opzetten en doorwerken met uw leerlingen die het sommetjes-maken-uit-het-boek ontstijgt?
- eens buiten de deur gaan kijken met uw leerlingen (denk aan wiskundewandeling, Nemo, Boerhaave, ...)?
- een inspirerende persoon uit het bedrijfsleven in de les uitnodigen om uw leerlingen te laten ervaren dat wiskunde in veel beroepen echt nodig en nuttig is?
- meedoen aan een van de vele wiskunde-uitdagingen die er zijn: Wiskunde Onderbouwdag, Wiskunde B-dag, Wiskunde A-lympiade, Wiskunde Olympiade, Nijmeegse wiskundewedstrijd, Kangoeroe, ...?
- denken en praten over nieuwe, beter passende wiskundeprogramma's voor vmbo. Vmbo lijkt een 'stiefkindje' bij OCW en andere instanties. Schande, toch? Er wordt, ook vanuit het bestuur van de NVvW, nagedacht over vernieuwde programma's voor vmbo wiskunde. Wilt u meedenken daarover? Welkom!
- samenwerken met docenten van andere vakken: hoe gebruiken collega's van andere vakken technieken en concepten van de wiskunde? Kan dat beter worden afgestemd? Hoe organiseren collega's dat?
- denken over zelf een workshop verzorgen op de studiedag omdat u een leuk idee hebt voor inspirerende lessen wiskunde, in plaats van alleen maar een workshop te volgen?

Op de studiedag willen wij graag ruimte bieden aan beide aspecten van 'Voor de verandering'. Wij zijn voor continue verandering, in de betekenis van 'Blijf alert op de huidige en toekomstige situatie in wiskunde-onderwijsland en hoe u daarop kunt en wilt inspelen'. En ook: wij willen graag inspirerende workshops van bevlogen collega's.

Wij nodigen u uit om een voorstel voor een workshop in te dienen. Om een en ander goed georganiseerd te krijgen voor begin september, willen we graag uiterlijk 31 juli uw reactie. Stuur uw voorstel naar Lidy Wesker-Elzinga (e-mailadres: L.j.b.wesker-elzinga@hva.nl) of Henk van der Kooij (e-mailadres: h.vanderkooij@uu.nl).





Agenda

10:00 – 11:00 Jaarvergadering

1. Opening door de voorzitter, de heer S. Garst
2. Jaarrede van de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2014
4. Jaarverslagen 2014/2015 NVvW en *Euclides* (zie een volgend nummer van *Euclides*)
5. Jaarrekening en balans 2014/2015, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6. Bestuursverkiezing.
De bestuursleden Henk Rozenhart, Henk van der Kooij, Ab van der Roest en Christiaan Boudri treden af en stellen zich niet herkiesbaar. Gert de Kleuver en Lidy Wesker-Elzinga zijn aftredend en stellen zich herkiesbaar.
Het bestuur nodigt leden van harte uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (e-mailadres: secretaris@nvww.nl) Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7. Rondvraag
8. Sluiting van de jaarvergadering.

Programma Studiedag

- | | |
|---------------|---------------------------|
| 11:00 – 11:15 | Inleiding op de studiedag |
| 11:15 – 12:00 | Plenaire lezing |
| 12:00 – 12:15 | Koffie/thee |
| 12:15 – 13:15 | Workshopronde 1 |
| 13:15 – 14:00 | Lunchpauze, marktbezoek |
| 14:00 – 15:00 | Workshopronde 2 |
| 15:00 – 15:15 | Koffie/thee |
| 15:15 – 16:00 | Plenaire voordracht |
| 16:00 – 16:10 | Afsluiting. |

Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 7 november NVvW–dag

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op 7 november 2015. Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex (e-mailadres: m.lambriex@nvww.nl).

HET LERARENREGISTER

Peter van Wijk
Heleen van der Ree

PROJECT VAKINHOUDELIJKE NASCHOLING

Nieuwe programma's in de eindexamens voor havo en vwo betekenen nieuwe boeken, nieuwe stof of oude stof weer ophalen. Maar misschien ook wel nieuwe didactiek, nieuwe werkvormen. Een mooie reden om een nascholing te volgen.

Er moest echter geconstateerd worden dat er op het gebied van vaknascholing niet veel aanbod was. Met niet aflatende energie en inzet heeft de oude cTWO-commissie bij het ministerie gepleit voor subsidie om die vakinhoudelijke nascholing op te zetten. En dat is gelukt! In het najaar van 2014 heeft de NVvW subsidie toegekend gekregen van OCW om in kalenderjaar 2015 vakinhoudelijke nascholing op de kaart te zetten. De achterliggende gedachte hierbij is dat veel scholen wel investeren in algemene pedagogisch-didactische scholing ('meesterschap'), en daar is ook aanbod voor, maar lang niet altijd in vakspecifieke scholing ('vakmanschap').

Uit het onderzoek *Wat is de ideale leraar?*, een studie naar vakkennis, interventie en persoon van ITS (Radboud Universiteit Nijmegen) uit 2008 in opdracht van OCW staat dat Amerikaans onderzoek uitwijst dat gedegen vakkennis van docenten een positieve invloed heeft op de prestaties van leerlingen. Hiermee wordt de noodzaak van permanent aanwezige vaknascholing die met enige regelmaat door alle docenten gevolgd moet kunnen worden, onderschreven.

Het project *Vakinhoudelijke Nascholing* draait nu op volle toeren.

Er zijn twee perspectieven in dit project te onderscheiden. Het langetermijnperspectief richt zich op een doorlopend en actueel nascholingsaanbod in de context van de professionaliseringseisen die

het lerarenregister stelt. Het tweede en urgente perspectief betreft een concrete start van de nascholing, die nú actueel is door de veranderingen in de examenprogramma's wiskunde havo/vwo vanaf klas 4 in 2015.

'GAAT DE STOF VERDER DAN ALLEEN DE EINDEXAMENEISEN?'

Stand van zaken op dit moment

Alle universiteiten en hogescholen zijn uitgenodigd om een voorstel voor vakinhoudelijke nascholing in het kader van dit project in te dienen. Hierop is door veel universiteiten en hogescholen gereageerd. Begin januari 2015 zijn hierover gesprekken gevoerd en uiteindelijk zijn er vier voorstellen geselecteerd. De criteria hierbij waren:

- een overdraagbare cursus, waarbij al het ontwikkelde materiaal, inclusief gebruikershandleiding, beschikbaar wordt gesteld voor andere lerarenopleiders en nascholingsinstituten;
- een cursus die gegeven wordt in het voorjaar van 2015;
- de verzekering dat men een of meerdere pilot-docenten betreft bij het ontwikkelen van het materiaal voor de cursus;
- het afnemen van een door ons ontwikkelde enquête aan het einde van de cursus;
- inbreng bij het schrijven van het spoorboekje;
- de ontwikkelde cursus voorleggen aan een klankbordgroep van wiskundedocenten.

De vier geselecteerde projecten omvatten de nieuwe onderdelen van de vernieuwde programma's: statistiek (wiskunde A/C), wiskunde C (met name gericht op de nieuwe onderwerpen vorm en ruimte en logisch redeneren), analytische meetkunde (wiskunde B) en wiskundige denkactiviteiten. De afstemming van vraag en aanbod blijft gedurende het gehele project een belangrijk punt van aandacht. Er is dan ook bewust gekozen om pilotdocenten – docenten die reeds ervaring hebben met de nieuwe programma's – bij het ontwikkelen van de cursussen te betrekken om zoveel mogelijk gebruik te kunnen maken van de ervaringen van deze docenten, die al een aantal jaren met de nieuwe programma's gewerkt hebben. Daarnaast is er een klankbordgroep van wiskundedocenten ingesteld, die kritisch kijkt naar de aangeboden cursussen en vragen stelt als: sluit deze cursus aan bij de behoefte van de wiskundedocent? Is het een praktische cursus, heb ik er wat aan voor mijn lessen? Is het doel duidelijk? Gaat de stof verder dan alleen de eindexameneisen?

Maar wiskunde is natuurlijk niet het enige vak waar behoefte is aan nascholing. Daarom heeft de subsidieverstrekker uitdrukkelijk gevraagd om een 'spoorboekje' te maken dat voor de opschaling naar andere vakken kan zorgen. Er zullen hiervoor onder andere gesprekken met de VO-raad en met leden van het Platform Vakverenigingen Voortgezet Onderwijs (Platform VVVO) gehouden worden. Ook andere overkoepelende organisaties zullen in dit stadium betrokken worden, om er zeker van te zijn dat het model breed inzetbaar is. Onderwerpen die in het spoorboekje zeker aan de orde zullen komen, zijn: lerarenregister, vakmanschap van de docent, kritische succesfactoren, strategisch personeelsbeleid, afstemming vraag en aanbod, organisatie en inhoud van een cursus, overdraagbaar maken van de cursus. Ondertussen hebben wij te maken met een nieuw programma dat in augustus van start gaat. Over het actuele aanbod van cursussen houden we u op de hoogte via de website van de NVvW en via de nieuwsbrief.





VISITE, VISITE, MET VEEL HOGE PIETEN

Joke Verbeek

Het was aangekondigd als een feestje, en een mooi feestje was het! De bijna 300 deelnemers die zaterdag 18 april naar theater Klein Gooiland in Hilversum waren gekomen om het negentigjarig jubileum van de NVvW te vieren, genoten zichtbaar van elkaar, de lezingen, de taartjes, lunch en diner, de wiskundewandeling en van alles wat er al zo meer te beleven viel. En niemand ging met lege handen naar huis: voor ieder was er het Lustrumboek en – klein maar zeer gewaardeerd – een usb-stick met daarop 90 jaargangen *Euclides*. Een heuglijke dag dus, en 'nu op naar de eeuw'.

Nadat de absenten – sneller dan in *Magister* – waren genoteerd, opende (dag)voorzitter Swier Garst de bijeenkomst. 'Iedereen telt op een verjaardag,' verkondigde hij, 'maar sommigen tellen net een beetje meer.' Hij doelde op de vele aanwezige prominente leden en oud-leden, als Wim Kuipers, Jan Maassen, Hans van Lint, Martin Kindt, Marian Kollenveld en de delegatie Vlaamse collega's, die met consumeerbare presentjes de jarige vereniging kwamen feliciteren. Daarmee is de dag ook voor een groot deel gekarakteriseerd: veel gezelligheid, een luchtig programma en veel lekkers voor de inwendige mens.

Drie identieke pakken

De ochtendlezing werd verzorgd door oud SER-voorzitter Alexander Rinnooy Kan. Hij haalde herinneringen op aan zijn wiskundeleraar, L.F.M. de Haan, die 'er geen enkele behoefte aan had om aardig gevonden te worden, slechts één pak bezat, danwel drie identieke pakken, met een krijtje op het bord een perfectie cirkel kon maken en meer vertelde dan nodig was.'

Rinnooy Kan ging verder in op de rol van De Vereniging en de rol van de wiskundeleraar. Belangrijk is de vraag *Hoe goed is onderwijs?* met als deelvraag *Hoe goed zijn de leraren?* Uit de Pisametingen onder vijftienjarigen blijkt dat Nederland hoog scoort op de wiskunderanglijst. Alleen Korea, Japan en Finland presteren beter. De vraag blijft natuurlijk wel hoe je nog beter kunt worden, al schuilt daar ook een gevaar in. De Nederlandse jeugd is – ook weer volgens metingen – de gelukkigste van de wereld, terwijl de Japanse jeugd het ongelukkigst is. Rinnooy Kan verloochent zijn wiskunde-achtergrond geenszins: 'Het belang van wiskunde is evident. Zelfs abstracte theoretische wiskunde blijkt soms jaren later bruikbaar en toepasbaar.' 'Wiskunde is een intellectuele training waar je in alle omstandigheden iets aan hebt.' 'Wiskunde is de koningin der wetenschappen en de leraar is de ambassadeur.'

In de ogen van Rinnooy Kan verbeter je het onderwijs door de leraar te verbeteren en daarin zou de Vereniging een belangrijke rol kunnen spelen. Hij zette uiteen welke stappen daarvoor in zijn ogen gezet zouden kunnen worden, waarvan een loonsverhoging voor docenten alle aanwezigen waarschijnlijk als muziek in de oren klonk. Onlangs deed hij opnieuw eindexamen wiskunde op het Zandvlietcollege. De stress sloeg toe toen hij de grafische rekenmachine zag, een voor hem onbekend apparaat. Na een spoedcursus van 30 seconden slaagde hij met een 8,5.

Animath

Een belangrijke plaats was ingeruimd voor *Animath*, de filmwedstrijd waarbij leerlingen een wiskundig onderwerp met de stop-motiontechniek moesten uitbeelden. Niet zonder reden: de door leerlingen gemaakte filmpjes waren erg leuk. Of het nou een driehoek was, een cirkel of het modulo-rekenen, zonder uitzondering was er sprake van een originele kijk op het onderwerp. Van de 25 inzendingen van hoge kwaliteit waren de tien besten uitgekozen om vertoond te worden. De zaal kreeg in de ochtend een warming-up, waarmee ieder werd gemotiveerd in de lunchpauze alle andere genomineerde filmpjes te gaan bekijken en een stem uit te brengen. De tweehonderd uitgebrachte stemmen resulteerden uiteindelijk in de publieksprijs. Een vakjury had in drie categorieën prijzen toegekend, en 's middags stonden alle genomineerden op het podium te luisteren naar het juryrapport, in spanning over wat voor hen het resultaat zou zijn.

Pauzeprogramma

Anders dan bij de Verenigingsdag in november waren er in de middagpauze geen kraampjes om te bezoeken, maar dat betekende niet dat je hoefde te vervelen. Er was een tentoonstelling van historische rekenattributen, de *Animath*-filmpjes draaiden op veel grote televisieschermen en in tweetallen kon deelgenomen worden aan een wiskundewandeling door het theater. Over de antwoorden op de vragen daarvan werd aan menig tafeltje druk gediscussieerd, want er viel een prijs te winnen voor het tweetal met de meeste goede antwoorden. Maar de belangrijkste bezigheid bleek toch het bijpraten met oude bekenden.

Levend verleden

Van een voorloper van de NVvW, de Wimecos, was Pieter Gerlof Tiddens voorzitter van 1925 tot 1937. Hij kan daarom misschien wel gezien worden als eerste voorzitter van onze vereniging. Groot was dan ook het applaus toen hij zijn opwachting maakte. De oude baas bleek zijn verhaal nog goed te kunnen doen. Hij zette zich af tegen 'nieuwewetsigheden' als wiskunde A, meisjes op de HBS, ja, zelfs tegen het lidmaatschap van docenten aan zo'n HBS A. En het erelidmaatschap na je pensionering was ook een devaluatie, zo vond hij, dus ook zijn eigen erelidmaatschap was hem een doorn in het oog. Controversiële standpunten, waar in de zaal misschien anders over gedacht werd, maar met veel verve gebracht. Al met al een geslaagde act van – naar eigen zeggen – de kleinzoon van Tiddens, want de oude Tiddens zelf is natuurlijk al lang overleden.

En verder

Er was de quiz *Eén tegen allen* met categorieën van min of meer wiskundige aard, de overhandiging van het eerste exemplaar van het boek *Zestig jaar hart voor onderwijs* door Harm Jan Smit aan Joop Dormolen, een door Henk van der Kooi voorgelezen lezing van de zieke man van Ortec en de uitleg bij een drietal *geocaches* die ter gelegenheid van het jubileum zijn uitgezet. De dag werd afgesloten met een lied van Marjolein Kool op de wijs van Lenny Kuhr's *Visite*, gezongen door alle bestuursleden. En als allerlaatste nog tijd voor een drankje en een uitstekend verzorgd lopend buffet. De organisatie kan terugkijken op een geslaagd jubileumfeest. Dat belooft veel goeds voor het honderd-jarig bestaan straks, waarbij dan de lege stoelen van het theater ook bezet moeten zijn.

Reacties

Beste Kees

Ik had al het genoegen om Swier te danken voor de uitnodiging voor het 90-jaar jubileum. Wil je ook het bestuur mijn dank overbrengen voor de uitnodiging en vooral voor de warme hartelijkheid die ik heb gekregen? Voor mij was het een dag om met trots op terug te zien.

Beste groeten, Joop Dormolen, Israël

Het leek wel een reünie! Hoeveel mensen heb ik begroet, gezoend en gesproken? Heel veel!
Jeanne van Lint-Breeman

Vier stellingen, die niet vragen om een bewijs:

- Wat een leuke quiz van Marianne Lambriex;
- Wiskundedocenten kunnen niet zingen zonder bezielende leiding van Marjolein Kool;
- Er waren meer gepensioneerden dan Rinnooy Kan lief is;
- Het was één grote reünie van oude bekenden.

Groetjes, Lambrecht Spijkerboer

Een opmerkelijke gebeurtenis: toen ik bij het station wachtte op de bus, zag ik Martin Kindt, ook uit de trein gestapt en op de fiets op weg naar huis. Hij herkende mij in eerste instantie niet, maar zag, waarschijnlijk aan het enorme boeket dat ik bij me had, dat ik ook van het jubileumfeest kwam. Toen hij wat beter keek, herkende hij me en keerde zijn fiets om me te vertellen dat die dag de leukste ooit van de NVvW was. Zo'n leuke dag had hij in het kader van de vereniging nog niet eerder meegemaakt! Mooi compliment, niet?

Groeten,
Ebrina Smallegang



Er was veel tijd, aandacht, toewijding en energie gestoken in deze dag, en dat was te merken. Misschien een wat hogere gemiddelde leeftijd dan op de jaarvergadering, maar dat laat heel goed de langjarige relatie zien die veel mensen met de vereniging hebben aangegaan en dat is ook van grote waarde.

Dank jullie wel. Ik was heel trots op jullie.

Marian Kollenveld

Deze dag heb ik letterlijk vanuit een ander perspectief kunnen zien dan veel van de enthousiaste deelnemers...

Steeds weer zag je in de ogen van de feestgangers een blik van 'wat zou er nu weer komen'. Het aantal enthousiaste bedankjes was enorm. Daarbij komt het organisatiecomité veel lof toe!!!!!!!

Swier Garst

Enkele reacties bij het uitdelen van de wiskundewandeling: 'Prachtig boekje', 'Een wiskundewandeling in een gebouw, dat kan dus ook.'

Reactie op de jubelquiz: 'Leuke vorm om op die manier allerlei NVvW-wetenswaardigheden over te brengen', 'Ook nog een idee opgedaan voor een leuke lesactiviteit.'

Kees Garst

Is de NVvW een vereniging of een familie? Die vraag speelt me na zaterdag meermalen door mijn hoofd. Ik ben een familieman en gezien hoe eenieder met elkaar omging, leek het een familiereunie.

Ab van der Roest

Uit mijn dagboek: Swier Garst – de nieuwe voorzitter – praat het programma geestig aan elkaar. De lezing van Alexander Rinnooy Kan is fantastisch. De boodschap is: zorg voor goede leraren en bijscholing. Pak dat aan vanuit de vereniging. Ik zeg dat al meer dan 40 jaar. Kon ik het maar onder de aandacht brengen zoals hij dat doet. Het was een prachtige dag.

Hartelijke groet, Ed de Moor

Fantastisch, een lang gekoesterde wens gaat in vervulling: alle jaargangen van *Euclides* staan nu in gedigitaliseerde vorm tot ieders beschikking! Mijn grote dank aan Dick Klingens, Danny Beckers en Heiner Wind.

Marja Bos

Nu eens niet een werkdag met vakinhoudelijke lezingen en workshops, maar een fraai, luchtig programma op een toplocatie! Voor mezelf was het vooral het treffen van al die collega's, die je al jaren tegenkomt op bijvoorbeeld de jaarvergadering. Iedereen in een feeststemming, allemaal bijpraten, je komt in mijn geval gewoon niet aan andere dingen toe. De mooie wiskundewandeling door het gebouw en de tentoonstelling van oud materiaal, helaas, maar wie er tijd voor vond, zag ik her en der zoeken en rekenen.

Ton Lecluse

Ik heb enkele *one- c.q. two-liners...* van mezelf en anderen.

DK: 'De gebakjes: Is de NVvW om op te eten?'

DK: 'Je leert de NVvW kennen met een stickie.'

DK: 'Oud, met een stokje? Nee, op een stickie.'

Rinnooy Kan: 'Wiskundigen op straat. Je herkent elkaar!'

Rinnooy Kan: 'Noodzakelijk maar niet voldoende: Goede leraar dan goed onderwijs!'

Rinnooy Kan: 'Het register ister.'

Maarten van der Burg (filmmaker): 'Ik was veel te docenterig.'

Dick Klingens

PUZZEL 90-7

BIJNA BIJ DE KONIJNEN AF

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

We bekijken verzamelingen van positieve gehele getallen. We noemen hier zo'n verzameling getallen 'niet driehoekig' als er geen drietal getallen in die verzameling bestaat die de lengtes van de zijden van een driehoek kunnen zijn. Een 'niet scherphoekige' verzameling bevat geen drietallen die de zijden van scherphoekige driehoeken kunnen vormen, dus rechthoekig of stomp is dan wel toegestaan. Met driehoeken bedoelen we echte driehoeken met oppervlak > 0 . We zoeken nu niet-dalende rijen waarvan voor elke n de eerste n elementen een niet driehoekige of niet scherphoekige verzameling vormen. Die rij noemen we minimaal en niet driehoekig (of niet scherphoekig) als voor elke n het n -de element zo klein mogelijk is. Zo'n minimale rij begint dus met 1.



figuur 1 Met toestemming overgenomen van de site van www.dierenklinieckastricum.nl

Opgave 1

- Bepaal de eerste 13 getallen van een minimale, niet driehoekige rij, of een voorschrift om die te bepalen. Een originele definitie van een bekende rij? (zie figuur 1)
- Idem, maar nu voor een minimale, niet scherphoekige rij. Hoeveel drietallen bevat deze die rechthoekige driehoeken vormen? (De vraag is of er nog meer zijn, wie weet het?)
- In zo'n niet scherphoekige, minimale rij benaderen drie opeenvolgende getallen n , $n + 1$ en $n + 2$ de verhoudingen van de zijden van een zekere driehoek. Wat is die limiet als $n \rightarrow \infty$? Een bewijs zou mooi zijn, maar hoeft niet.

Een te bewijzen stelling uit het trainingsmateriaal voor de IMO luidt:

Bij elke keuze van 16 verschillende gehele positieve getallen ≤ 100 zijn er altijd twee paren (zeg a, b en c, d) te vinden waarvoor geldt: $a - b = c - d = v$.

Er is een bewijs uit het ongerijmde: Stel er bestaan 16 getallen zonder zulke paren. Kijk nu naar alle paren uit die 16 getallen en de bijbehorende verschillen. Vergelijk dat met het aantal mogelijke verschillen tussen getallen 1 t/m 100. We kunnen dan laten zien dat er verschillen v tussen twee getallen moeten zijn die meer dan 1 keer voorkomen. We kunnen dan bedenken dat zo'n verschil v alleen twee keer kan voorkomen door aanwezigheid van waarden a, b, c met $b - a = c - b = v$. Dus symmetrische drietallen met in het midden b . De volgende vraag is: Zijn er voldoende waarden van zulke middengetallen mogelijk? En wat als dat niet het geval is?

Opgave 2

- Bepaal een zo lang mogelijke rij van oplopende positieve gehele getallen ≤ 100 , waarbinnen geen viertal a, b, c, d voorkomt met $a - b = c - d$. Dat zullen er dus minder dan 16 zijn.
- Bewijs netjes de bovengenoemde stelling.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. Inzendingen moeten uiterlijk op 25 augustus 2015 binnen zijn.

REKENKUNDIGE RIJEN MET SPIEGELINGEN

De puzzel ging over 'rekenkundige' rijen met verschil v , waarbij af en toe het verwachte getal wordt vervangen door zijn spiegelbeeld (=spiegeling), waarna de 'rekenkundige' rij weer verder gaat vanaf dat gespiegelde getal. Door de spiegelingen handig te kiezen kunnen we dan zorgen dat de rij eindigt in een cykel. Er waren 15 inzendingen.

Opgave 1 – Bepaal een rij met startgetal 1 en $v = 4$ die eindigt in een cykel.

Een kortste rij waarmee dat lukt is: 1, 5, 9, 13, 17, 12, 16, 2, 6, 1, 5, 9, 13, ... De rode vetgedrukte getallen zijn spiegelingen. Dus een cykel van lengte 9. Korter kan niet omdat de waarde modulo 9 van de termen niet verandert door het spiegelen. De waarde van de termen van de rij modulo 9 is dus gelijk aan de waarde van de termen modulo 9 in een gewone rekenkundige rij met $v = 4$ en startgetal 1, beide periodiek met periode lengte 9. We vroegen overigens niet naar de kortste rij of cykel, dus ook allerlei andere oplossingen zijn mogelijk.

Opgave 2 – Zoek een startgetal zodat een rij met $v = 10$ gaat cyclen.

Ook hier zijn er oplossingen met een cykel van lengte 9, nu met slechts 1 spiegeling. Met startgetal 1011 (of een kleiner getal dat op 1 eindigt) wordt dat: 1011, 1021, 1031, 1041, 1051, 1061, 1071, 1081, 1091, 1011, ...

Voor opgaven 3 en 4 moest u rijen bepalen met zo min mogelijk spiegelingen, zo kort mogelijke cyclen en zo klein mogelijke grootste getallen. In die volgorde.

Opgave 3 – Bepaal zo een rij met $v = 14$ met een cykel: a. met een zelfgekozen startgetal; b. met startgetal is 0.

- Een 'beste' rij is 1071, ..., 1687, 1071, ... Dit bevat slechts één spiegeling, en de cykel bevat 45 = 5×9 getallen. Maximumgetal is 1687.
- Nu is de 'beste' rij: 0, 14, 28, ..., 2072, ..., 2688, 2072, ... Weer één spiegeling en een cykel van 45 getallen met maximumgetal 2688.

Tot nu toe was het mogelijk om oplossingen te vinden met wat geduld en intuïtie. In opgave 4 werd de eis gesteld dat er maar één keer gespiegeld mag worden, en u moest de oplossing vinden door berekening.

Opgave 4 – Bepaal een rij met $v = 61$ met een cykel: a. met een zelfgekozen startgetal; b. met startgetal is 0.

- Laat p het eerste getal van de cykel zijn en q het getal dat door omdraaiing weer p oplevert. Dan moet $q > p$ en $61 \mid (q - p)$, of $q - p \equiv 0 \pmod{61}$. Dat lukt niet als q minder dan vier cijfers heeft, maar met vier cijfers krijgen we:

$$q = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$$

$$p = a + 10 \cdot b + 100 \cdot c + 1000 \cdot d$$

$$q - p = 999 \cdot (a - d) + 90 \cdot (b - c).$$
 We willen: $q - p \equiv 0 \pmod{61}$. We zoeken dus: $999(a - d) + 90(b - c) \equiv 0 \pmod{61}$, te vereenvoudigen tot $111(a - d) + 10(b - c) \equiv 0 \pmod{61} \equiv 50(a - d) + 10(b - c) \equiv 0 \pmod{61}$, te vereenvoudigen tot $5(a - d) + (b - c) \equiv 0 \pmod{61}$.
 $a > d$ en hoe kleiner $a - d$ hoe korter de cykel ($a = d$ en dus $b = c$ geeft een palindroomgetal $abba$ en dat geeft geen cykel). De enige oplossing is: $a - d = 1$ en $b - c = -5$. Daarmee ligt de lengte van de cykel is 9 vast. Een zo klein mogelijk om te keren getal (en dus een zo klein mogelijk grootste getal) krijgen we met $a = 1$ en $b = 0$, dus begin van de cykel 501 en te spiegelen getal 1050.
 De rij wordt: 501, ..., 989, 501, ... Lengte cykel is 9 met maximum 989. Enkele inzenders (K. Vugs, L. Pos, J. Guichelaar en G. Bouwhuis) gebruikten bij hun berekening machten van 10. Dat gaf juiste oplossingen met simpele berekeningen, maar zeker niet optimaal volgens onze eisen. De eenvoudigste is dan $10^{60} \equiv 1 \pmod{61}$. Dat geeft de rij 1, ..., $10^{60} - 61$, 1.

- b. We kunnen de rij van opgave 4a met startgetal $501 \equiv 13 \pmod{61}$ ook starten met 13, maar we willen startgetal is 0. Ook moet nog steeds gelden: $q - p \equiv 0 \pmod{61}$ en dat lukt als we de waarden van $a - d$ en $b - c$ niet veranderen. We mogen dus een aantal keer $1001 \equiv 25 \pmod{61}$ en/of een aantal keer $110 \equiv 49 \pmod{61}$ bij het startgetal 13 optellen. We proberen dat zodanig te doen dat het startgetal $0 \pmod{61}$ wordt en uiteraard a, b, c en d niet groter worden dan 9. We zoeken dus: $13 + x \cdot 25 + y \cdot 49 \equiv 0 \pmod{61}$. Dit blijkt helaas geen oplossing te hebben. Opgave 4b lukt dus niet met vier cijfers. Vijf of zes cijfers leveren wel oplossingen, met bij zes cijfers zelfs een kortere cykel dan bij vijf. De beste oplossing met vijf cijfers, die door de meeste inzenders werd gevonden was: 0, ..., 27633, ..., 33611, **27633**, met een cykellengte van 99. Met zes cijfers vinden we echter een cykel met lengte 90. Hier een verkorte uitwerking voor een zescijferig getal $abcdef$. Analoog aan het vorige krijgen we dan weer voor $q - p \equiv 0 \pmod{61}$: $99999(a - f) + 9990(b - e) + 900(c - d) \equiv 0 \pmod{61}$, te vereenvoudigen tot $3(a - f) + 4(b - e) + 13(c - d) \equiv 0 \pmod{61}$. Met $a - f$ zo klein mogelijk, dan $b - e$ minimaal en vinden we: $a - f = 0$, $b - e = 1$ en $c - d = -5$. $a = f = 0$ kan natuurlijk niet, dan hebben we vier cijfers. Dus de kleinste p en q krijgen we met $a = f = 1$: $q = 110501$ en $p = 105011$, met $q - p = 5490 = 90 \times 61$. Het startgetal $p = 105011 \equiv 30 \pmod{61}$. Nu weer voor startgetal is 0. Los op: $30 + x \cdot 100001 + y \cdot 10010 + z \cdot 1100 \equiv 30 + x \cdot 22 + y \cdot 6 + z \cdot 2 \equiv 0 \pmod{61}$. Dit lukt met $30 + 2 \cdot 22 + 7 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 122 \equiv 0 \pmod{61}$. Dat geeft ons: $p = 105011 + 200002 + 70070 + 3300 = 378383$. De rij wordt dan: 0, 61, 122, ..., 378383, ..., 383812, **378383**, ..., met cykellengte 90, slechts gevonden door H. Bakker.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 90-5 is:

Naam	Punten
J. Remijn	201
R. Stolwijk	187
J. Guichelaar	170
K. van der Straaten	164
J. Verbakel	128
F. Göbel	123
G. Bouwhuis	116
H. Klein	103
K. Vugs	100
H. Bakker	79

De ladderprijs is gewonnen door Jos Remijn. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!



COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Annelien Jonkman
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzenden bijdragen

Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvw.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075

E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur

E-mail: vakbladeuclides@nvw.nl

2015

vr/za
21/8
22/8

AMSTERDAM

Vakantiecursus wiskunde, zie www.platformwiskunde.nl
Organisatie Platform Wiskunde Nederland, zie ook pag. 38

vr/za
28/8
29/8

EINDHOVEN

Vakantiecursus wiskunde, zie www.platformwiskunde.nl
Organisatie Platform Wiskunde Nederland, zie ook pag. 38

do
17/9

Jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

vr
18/9

EINDHOVEN

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

za
19/9

UTRECHT

Symposium WGRWO
Organisatie NVvW, zie ook pagina 34

za
7/11

VEENENDAAL

Jaarvergadering/Studiedag
Organisatie NVvW, zie ook pagina 41

vr
13/11

EINDHOVEN

Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

2016

18/1
28/1

LANDELIJK

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do
28/1

UTRECHT

Wiskunde conferentie vmbo en havo/vwo onderbouw
Organisatie APS in samenwerking met NVvW en SLO

vr/za
5/2
6/2

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut, zie ook pagina 26

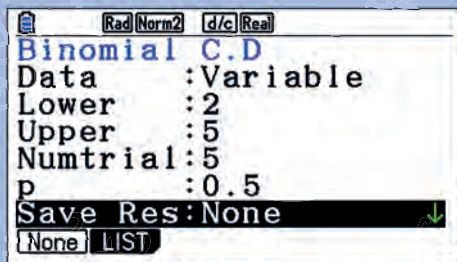
Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvw.nl/euclricht.html

JAARGANG 91

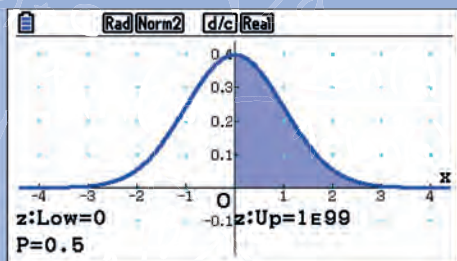
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	8 september 2015	22 juni 2015
2	3 november 2015	31 augustus 2015
3	17 december 2015	19 oktober 2015
4	2 februari 2016	23 november 2015
5	22 maart 2016	11 januari 2016
6	10 mei 2016	7 maart 2016
7	28 juni 2016	2 mei 2016

Tien redenen om voor de CASIO fx-CG20 te kiezen...

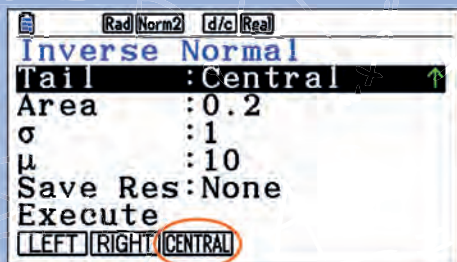
3. Kansrekening en statistiek:



Binomiale verdeling met onder- en bovengrens.



De fx-CG20 geeft exact 0,5 als antwoord.



Extra functie: keuze grenzen middendeel bepalen.



In de CASIO fx-CG20 Leerlingentest werden topmerken grafische rekenmachines met elkaar vergeleken. De leerlingen waren er snel uit: de CASIO fx-CG20 is uniek in prestaties en daarmee superieur. In deze en in de volgende uitgaven van Euclides publiceren wij de 10 voordelen die het meest genoemd werden in de CASIO fx-CG20 Leerlingentest. Kijk, vergelijk en oordeel zelf.



De CASIO fx-CG20 is CvTE goedgekeurd voor het centraal examen 2016 en daarna.

Uw leerlingen kiezen voor de CASIO fx-CG20

Méer informatie of workshop aanvragen? Bel +31 (0)20 545 10 70 – e-mail: educatie@casio.nl – www.casio-educatie.nl

MODERNE WISKUNDE

geeft de leerling inzicht!

Vraag
nu een
beoordelings-
exemplaar
aan!



 Noordhoff Uitgevers

Nieuw voor schooljaar 2015-2016:
Leerwerkboeken bij vmbo-basis!

Ga voor meer informatie naar
www.modernewiskunde.noordhoff.nl

Moderne Wiskunde is al ruim 40 jaar een toonaangevende en beproefde wiskundemethode waarin inzicht, structuur en vernieuwing centraal staan.

Moderne Wiskunde:

- een methode voor elk niveau;
- biedt inzicht in wiskunde;
- sterk verbeterd digitaal lesmateriaal;
- veel toetsopgaven en RTTI-toetsen;
- voor de leerling een digitale oefentoets;
- voldoet volledig aan de tussendoelen en het examenprogramma;
- garandeert een doorlopende leerlijn.

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent