

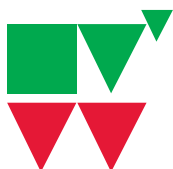
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

KERNASPECTEN VAN WISKUNDIG DENKEN
IN MEMORIAM PAULUS GERDES (1952 - 2014)
BREUKEN OP DE HELLING
RUIMTESONDES, ROETVEEG-PIET EN RIMPELS
DE REKENTOETS HALEN IN HET VMBO?
BOEKBESPREKING

NR.5



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 90 | MAART 2015

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 90 NR 5

IN DIT NUMMER

KERNASPECTEN VAN WISKUNDIG DENKEN

PAUL DRIJVERS

4

KLEINTJE DIDACTIEK

LONNEKE BOELS

8

IN MEMORIAM PAULUS GERDES (1952 - 2014)

PAULINE VOS

9

WIS EN WAARACHTIG

10

BREUKEN OP DE HELLING

MARTIN KINDT

11



RUIMTESONDES, ROETVEEG-PIET EN RIMPELS

BIRGIT VAN DALEN

16

PROCESHULP BIJ SAMENWERKEND WISKUNDE LEREN

RIJKJE DEKKER

18

GETUIGEN

DANNY BECKERS

22



HET FIZIER GERICHT OP...

VINCENT JONKER

MONICA WIJERS

24

UITDAGENDE PROBLEMEN

JACQUES JANSEN

26

DE REKENTOETS HALEN IN HET VMBO?

FRANK VAN MERWIJK

ANITA LEK

29

VASTGEROEST

AB VAN DER ROEST

32

VANUIT DE OUDE DOOS

TON LECLUSE

33



De coverafbeelding is van Rinus Roelofs: Een rond spiraalvormig oppervlak voorzien van gaten, deze structuur bestaat uit een doorlopend vlak. Website www.rinusroelofs.nl

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

En nu heb ik het te vaak gehoord... Echt te vaak! In korte gesprekjes op de Verenigingsdag, maar ook tijdens de Nationale Wiskundedagen en ook gewoon veilig op mijn eigen school. Of in het wild, als ik toevallig een collega tegenover me heb in de trein. We keuvelen gezellig over de leerlingen en het vak, en opeens is daar die tekst: 'Ik ben maar een vmbo-docent.' Mocht u een vmbo-kanjer zijn die zich totaal niet herkent in het voorgaande, mooi! Dan bent u hierbij ons rolmodel. We nodigen u graag uit om te schrijven over uw lessen en ervaringen. Want u zal, meer dan in het havo en vwo, een beroep moeten doen op uw pedagogische en didactische vaardigheden. Om praktisch ingestelde leerlingen te motiveren, is het een uitdaging om uw onderwijs aansprekend te maken door het te koppelen aan een betekenisvolle praktijksituatie. Wij willen graag weten hoe u die lastige klus toch elke keer weer klaart.

We hopen dat ons blad voor alle collega's genoeg informatie en inspiratie geeft. Daar is ook in dit nummer weer hard aan gewerkt. Paul Drijvers benoemt de kernactiviteiten bij wiskundig denken met concrete voorbeelden. Martin Kindt koppelt het breukrekenen aan het begrip helling. Over het voorbereiden van vmbo-leerlingen op de 2F-toets geven Frank van Merwijk en Anita Lek informatie. En wilt u aan de slag met groepjes in de klas? Rijkje Dekker beschrijft een procesmodel waarbij leerlingen elkaar op een hoger niveau kunnen brengen. En dan natuurlijk nog voor ieder wat wils in de vaste rubrieken. De redactie wenst u allen veel leesplezier.

Marjanne de Nijs

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

LONNEKE BOELS

35

KLEINE DIDACTIEK

MARJAN BOTKE

36

BOEKBESPREKING

JACQUES JANSEN

37

VERENIGINGSNIEUWS

DE NIEUWE BESTUURSLEDEN
STELLEN ZICH VOOR



40

RECREATIE

43

SERVICEPAGINA

46

Over wiskundig denken wordt de laatste tijd veel gesproken. Maar waarom is dit het geval? En wat wordt ermee bedoeld, wat is de kern van wiskundig denken zoals dat in het wiskundeonderwijs aan de orde zou kunnen komen? Paul Drijvers ziet wiskundig denken als probleemoplossen, modelleren en abstraheren, en licht deze kernaspecten met voorbeelden toe.

Inleiding

Wiskundige denkactiviteiten (WDA) staan momenteel sterk in de belangstelling. Al in 2007 heeft de vernieuwingscommissie cTWO in haar visiedocument een aantal centrale denkactiviteiten in het wiskundeonderwijs benoemd: modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen.^[1] Ook in de concept-examenprogramma's 2015 havo/vwo van cTWO^[2] spelen deze wiskundige denkactiviteiten een belangrijke rol. Deze zijn inmiddels uitgewerkt in syllabi voor de eindexamens 2017 (havo) en 2018 (vwo) en in pilot-examens.

In de wiskundelessen in het voortgezet onderwijs wordt veel aandacht besteed aan procedurele vaardigheid. Onder invloed van factoren als het studiehuis en het zelfstandig werken lijkt het alsof er voornamelijk gewerkt wordt aan opgaven uit het boek, waarin de uitdaging en de obstakels zijn verdwenen. Dat terwijl niet het routinematig uitvoeren van procedures en algoritmen – hoe belangrijk ook – de kern vormt van wat je leerlingen in de wiskundeles wilt leren, maar het inzicht in waarom deze procedures werken en in de onderliggende betekenis. Dit was de aanleiding voor cTWO om een lans te breken voor denkactiever wiskundeonderwijs.

Inmiddels heeft dit tot tal van activiteiten geleid. Denk aan de werkgroepen over WDA op de studiedag van de NVvW, aan de nascholing rond dit onderwerp, aan de nieuwe edities van de methoden waarin WDA een plaats hebben, aan het praktijkonderzoek van het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO), en aan de breed verspreide publicaties van Van Streun.^[3] Gelet op de belangstelling lijkt het idee docenten aan te spreken.

Tegelijkertijd is veel nog onduidelijk. Het lijstje denkactiviteiten van cTWO is indrukwekkend, maar niet zo toegankelijk of concreet. Het geeft niet duidelijk aan wat wiskundig denken wel of niet is en biedt evenmin handvatten om het in de klas vorm te geven. Kennelijk zijn we nog op zoek naar een geschikte invulling. Als vervolg op een eerder artikel over WDA^[4] doe ik hieronder een poging om het begrip wiskundig denken, zoals beoogd in WDA, te vatten in een drietal kernaspecten. Het vertalen

van dit kader naar handvatten voor de praktijk is een volgende stap, die hier nog niet aan de orde komt.

Wiskundig denken

Op verschillende plaatsen wordt betoogd dat wiskundig denken het belangrijkste doel is van het wiskundeonderwijs. Zo schreef Pólya: *'First and foremost, it [wiskundeonderwijs, PD] should teach those young people to THINK.'*^[5] In het voorwoord van zijn boek *How to solve it* stelt hij dat docenten een uitgelezen kans hebben om de nieuwsgierigheid van hun leerlingen te prikkelen en hen daarmee een gevoel voor onafhankelijk denken te geven.^[6] Van Streun ziet als doelen van wiskundeonderwijs *weten dat, weten hoe, weten waarom* en *weten over weten*.^[7] In het *weten hoe* en het *weten waarom* staat het wiskundig denken centraal, dat uitstijgt boven het uitvoeren van routinetaken en de ontwikkeling betreft van betekenisvol inzicht. Ook buiten de wereld van het wiskundeonderwijs staan kritisch en analytisch denken centraal, bijvoorbeeld in publicaties over hogere orde denkvaardigheden, onderzoekend leren^[8] en vaardigheden voor de 21e eeuw^[9]; zaken die juist in wiskundeonderwijs aan de orde zouden kunnen en moeten komen. Natuurlijk is de kracht van de wiskunde dat bepaalde problemen met een vast algoritme kunnen worden opgelost. De herhaalde uitvoering van zo'n algoritme is echter niet zo interessant; veel wezenlijker is het denken over zulke methodes en daarop zou dan ook de nadruk moeten liggen. Los van vervolgopleiding of toekomstig beroep kan de waarde van het wiskundeonderwijs voor elke leerling liggen in het leren denken, analyseren, probleemoplossen en redeneren. Dergelijke vaardigheden komen in het hele leven van pas!

Wat is nu wiskundig denken? Onder wiskundig denken versta ik: *Bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.*

Laat ik een paar woorden hiervan nader toelichten:

— *hoe*

Met 'hoe' wordt bedoeld de keuze van de gereedschappen die je gaat gebruiken, in welke volgorde je dat doet en onder welke voorwaarden ze zinvol gebruikt kunnen worden;

- *wiskundig gereedschap*
De term ‘wiskundig gereedschap’ moet breed worden opgevat: het kan heel specifiek en concreet zijn, zoals de *abc*-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen, maar ook theoretisch (logisch redeneren, bewijzen), of algemeen van karakter (het ontwikkelen van strategieën);
- *gebruiken*
Met ‘gebruiken’ wordt niet zozeer bedoeld het toepassen van een bestaande, kant-en-klare methode, maar ook het ontwikkelen ervan, of het op maat maken van een bestaande methode voor een specifiek doel;
- *probleem*
Een probleem is niet zomaar een opgave, maar een vraag waarvoor de leerling nog geen kant-en-klare oplosmethode ter beschikking heeft. Het gaat dus om een niet-standaardopgave van binnen of buiten de school, binnen of buiten de wiskunde, die de leerling (nog) niet routinematig kan oplossen.

Uitgaande van deze werkdefinitie wil ik me beperken tot drie kernaspecten van wiskundig denken: probleemoplossen, modelleren en abstraheren, zie figuur 1. Niet dat de andere door cTWO genoemde activiteiten niet van belang zijn, maar die zie ik toch meer als ondersteunend. Voor ik de drie hoekpunten van de driehoek nader uitwerk nog twee opmerkingen. Ten eerste: wat voor een leerling een probleem is, dus wat niet standaard is voor hem of haar, hangt af van voorkennis en ervaring. Wiskundig denken is dus relatief: wat voor de ene leerling uitdagend en nieuw is, is voor de andere routinematige reproductie. De kunst zal zijn om in een les problemen voor te leggen die op het juiste moment het juiste niveau van uitdaging bieden. Ten tweede hoor ik wel eens opvattingen over WDA die ik zou willen bestrijden. In kader 1 staat op een rij wat wiskundig denken naar mijn idee *niet* is.

Probleemoplossen

Bij wiskunde gaat het uiteindelijk om het oplossen van problemen, die voor de leerling niet standaard zijn.



figuur 1 Drie centrale ‘hoekpunten’ van wiskundig denken

Daarvoor moet hij probleemoplossende vaardigheden ontwikkelen. Bijvoorbeeld een probleemaanpak bedenken, een meerstapsstrategie uitvoeren zonder de draad kwijt te raken, of weten hoe je zaken die je al kunt of weet in een nieuwe situatie creatief kunt inzetten.^[6, 7, 10] Het gaat ook om het ontwikkelen van manieren om aan een nieuw probleem te beginnen: een schets maken, iets afleiden uit de gegevens, of juist terugredeneren vanuit de gewenste uitkomst. Het interessante is dat wiskunde een vakgebied is waarin je aan probleemoplossen uitstekend aandacht kunt besteden, terwijl het ook buiten de wiskunde van grote waarde is. In kader 2 staat een voorbeeldopgave over een lijn die een parabool snijdt en een daaraan evenwijdige raaklijn. De reden om dit als een probleem te beschouwen, is dat weliswaar bekende kennis aan de orde is, maar dat de (vervolg)vragen niet standaard zijn en een beroep doen op het ontwerpen van een strategie, op overzicht en op creativiteit. Om het algemene geval aan te pakken, moet je ook de durf hebben om stevig met parameters te gaan rekenen.

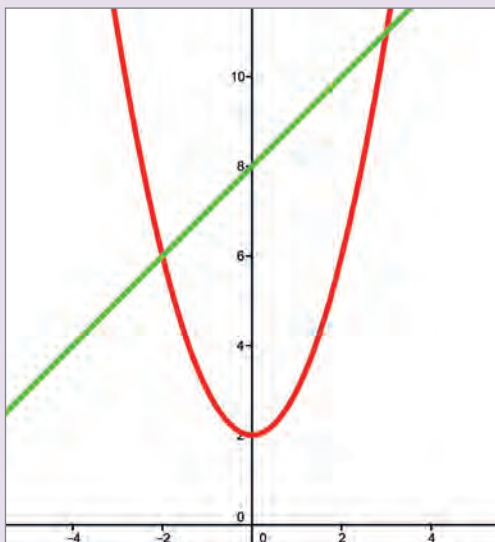
Kader 1

Wat wiskundig denken *niet* is:

- wiskundig denken is niet iets nieuws in het wiskundeonderwijs. Sinds jaar en dag staat wiskundig denken centraal in de praktijk van veel wiskundedocenten. Toch is het goed om het belang hiervan expliciet voor het voetlicht te brengen;
- een WDA is geen opgave op papier. Wiskundig denken speelt zich af in het hoofd van de leerling; wel nodigen sommige opgaven er meer toe uit dan andere;
- wiskundig denken is niet per se moeilijk en ingewikkeld. Als het maar prikkelend, fris en scherp is, aangepast aan de doelgroep;
- wiskundig denken is niet alleen voor goede leerlingen. Natuurlijk is het niveau van wiskundig denken afhankelijk van de doelgroep en de onderwijssetting, maar in principe kun je met elke leerling naar wiskundige denken streven en daar gericht aan werken;
- wiskundig denken is niet alleen voor de Tweede Fase. Het verdient aandacht in leerlijnen vanaf de onderbouw; door het ontbreken van examendruk is de onderbouw bij uitstek geschikt om hier een begin mee te maken;
- WDA is niet altijd groot en hoeft niet veel lestijd of veel voorbereidingstijd te kosten. Natuurlijk kun je aandacht aan wiskundig denken besteden in grote opdrachten die veel tijd vragen, maar misschien nog belangrijker is om kleine kansen in de reguliere lespraktijk te benutten door hiervoor een attent oog te ontwikkelen en bijvoorbeeld goede vragen te stellen.

Kader 2: Parabolen raken

Gegeven zijn een parabool met vergelijking $y = x^2 + 2$ (rood in figuur 2) en een lijn met vergelijking $y = x + 8$ (groen). De lijn en de parabool snijden elkaar in twee punten. De eerste vraag is in welk punt van de parabool de raaklijn evenwijdig is aan de snijlijn. Na enig rekenwerk blijkt dit het geval te zijn in het punt met x -coördinaat gelijk aan $\frac{1}{2}$. Dit is juist het gemiddelde van de x -coördinaten van de twee snijpunten van de oorspronkelijke lijn met de parabool, namelijk $x = -2$ en $x = 3$. Is dit nu toeval? Wat gebeurt er als we de parabool met een andere lijn snijden en dan de daaraan evenwijdige raaklijn zoeken? Of als we zelfs een andere parabool als uitgangspunt nemen? Wat betekent het voor een grafiek als deze ‘middenraak-eigenschap’ voor elke snijlijn geldt, kan het dan ook iets anders zijn dan een parabool?



figuur 2 Doordenken over snijlijnen en evenwijdige raaklijnen

Een dergelijke opgave kwam jaren geleden aan de orde in een les wiskunde B in 5 vwo op het Liemers College in Zevenaar. Enerzijds gaat het om elementaire functies en methoden: het differentiëren van een kwadratische functie is werkelijk routine voor deze leerlingen. Anderzijds heeft de vraagstelling toch iets origineels: met name de vervolgvragen geven aanleiding tot wiskundig denken, waarbij parameters nodig zijn. Deze opgave doet dus een beroep op probleemoplossen, omdat het een voor de leerlingen nieuwe situatie is waarin bestaande kennis inventief moet worden ingezet. Daarnaast is abstraheren aan de orde, omdat je je beweegt in de betekenisvolle ‘wiskundige wereld’ van parabolen en lijnen zonder een referentie naar een concrete situatie; in feite moet deze wiskundige wereld voor de leerling concreet worden, wil over dit probleem goed kunnen worden nagedacht.

Modelleren

Het tweede hoekpunt van de driehoek rond wiskundig denken is het modelleren. Dat gaat over de relatie tussen wiskunde en problemen uit de wereld om ons heen, over de manier waarop dergelijke problemen kunnen worden aangepakt met wiskundige middelen met als doel bijvoorbeeld het voorspellen van een verschijnsel of het optimaliseren van een proces. cTWO omschrijft modelleren als het vertalen van realistische problemen in wiskundige vorm. Een probleem wordt dus geformuleerd in wiskundige termen, bijvoorbeeld door het opstellen van formules en vergelijkingen, of het maken van een meetkundige figuur. In de praktijk gaat het vaak om (stelsels) differentiaalvergelijkingen, maar dat is voor het VO in het algemeen een brug te ver. Vaak wordt bij modelleren ook gedacht aan het doorlopen van een cyclus van vertalen naar wiskunde – wiskundig probleem oplossen – terugvertalen naar oorspronkelijk probleem.^[11, 12]

Het lastige met modelleren is dat het moeilijk is en ook tijdrovend kan zijn. Grote modelleerproblemen, zoals bijvoorbeeld die van de OnderbouwWiskundedag, wiskunde A-lympiade en de wiskunde-B dag, zijn in de reguliere onderwijs- en toetspraktijk lastig frequent te organiseren. Maar ook door middel van kleine en eenvoudige problemen kan in de les aandacht aan modelleren worden besteed. Kader 3 bevat een voorbeeldopgave, waarin eerst een formule moet worden opgesteld voor de oppervlakte van het vooraanzicht van een ‘huisje’. Dit staat tussen aanhalingstekens om aan te geven dat het natuurlijk duidelijk geen realistisch huis is. Vervolgens gaan we de ruimte in en wordt de opgave iets realistischer. Verder is ervoor gekozen om niet met vervolgvragen op deze formules door te gaan. Zo wordt vermeden dat het model moet worden gegeven, zoals bijvoorbeeld bij examenopgaven vaak het geval is.

'WISKUNDIG DENKEN IS DE KERN EN DE KRACHT VAN WISKUNDE'

Abstraheren

Het derde kernaspect van wiskundig denken is abstraheren. Bij abstraheren gaat het erom dat de leerling uit concrete probleemsituaties overeenkomsten en verschillen destilleert, die vervolgens leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten met eigenschappen en relaties. Geleidelijk aan verschuift het accent zo van het oplossen van de concrete problemen naar het inzicht in en redeneren met de wiskundige begrippen die daarin een rol spelen en waarbij de leerling zich wat kan voorstellen. Zo wordt een hoger niveau van wiskundige objecten concreet en betekenisvol. Al in 1995 stelde de Vakontwikkelgroep Wiskunde dat het bij abstraheren gaat om de wiskundige

theorie of methode, los van de werkelijkheid, die geanalyseerd kan worden met wiskundige wetmatigheden.^[13] Niets nieuws onder de zon dus, en abstraheren is natuurlijk ook weer een van de krachtige aspecten van de wiskunde: je gaat op een hoger niveau redeneren over zaken en verbanden op een manier die nog steeds iets voor je betekent.

In het voorbeeld in kader 2 over de lijnen die een parabool snijden dan wel raken, zijn de lijnen en de parabool wiskundige objecten waarmee de leerlingen vertrouwd zijn en die voor hen betekenis hebben, die werkelijkheid geworden zijn zonder dat ze op dit moment refereren aan een direct waarneembare, realistische situatie. Binnen deze wereld van wiskundige objecten kan de leerling redeneren, proberen, en rekenen. Het abstracte is concreet geworden: de leerlingen zien in wat het rekenen met de algebraïsche expressies betekent.

Tot slot

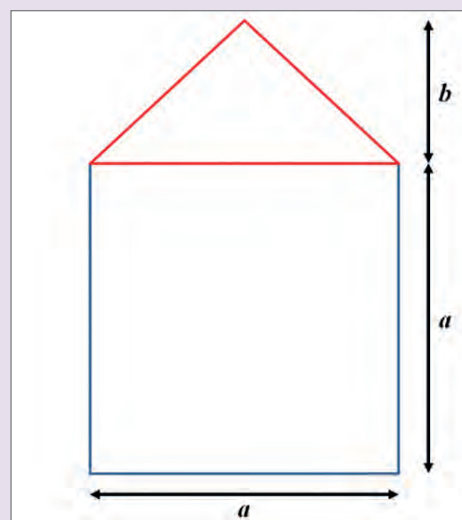
Wiskundig denken is de kern en de kracht van wiskunde en vormt tevens een belangrijke beoogde opbrengst van wiskundeonderwijs. Als drie kernaspecten van wiskundig denken heb ik hierboven probleemoplossen, modelleren en abstraheren onderscheiden. Vanzelfsprekend is daarmee het laatste woord niet gezegd. Niet alleen valt elk van de drie nog nader uit te werken, ook zijn ze soms met elkaar verweven en moeilijk van elkaar te onderscheiden.

Bovendien is nog niet meteen duidelijk hoe deze driedeling helpt om wiskundig denken in de les en in de toetsing vorm te geven. Ook dat vraagt nog om een nadere uitwerking, waaraan op verschillende plaatsen wel wordt gewerkt en die wellicht onderwerp is van een vervolgartikel. Maar één suggestie wil ik vast doen. Als u een opgave bekijkt of een les of werkvorm voor uw leerlingen voorbereidt, dan kunt u zich afvragen: is er sprake van probleemoplossen, is er sprake van modelleren, en is er sprake van abstraheren? Als het antwoord op deze vragen voor de betreffende groep leerlingen 'nee' is, dan is de kans groot dat er nauwelijks beroep op wiskundig denken wordt gedaan. Als het antwoord op een of meer van deze vragen 'ja' is, dan is de vraag waar dat probleemoplossen, modelleren en/of abstraheren nu precies in zit en op welke manier u als docent dit aspect het best voor het voetlicht kunt brengen. Als u zich deze kern bewust bent, zal dat helpen om tijdens de les de kansen te benutten die zich voordoen om wiskundig denken met succes aan de orde te stellen.

Dankwoord

Dit artikel is een eerste resultaat van het onderzoek 'Wiskundige denkactiviteiten in praktijk', dat mogelijk is gemaakt door NRO.^[14] De auteur dankt verschillende collega's, onder wie Anne van Streun en Bert Zwaneveld, voor hun constructieve commentaren op een eerdere versie van dit artikel.

Kader 3: Oppervlakte van een 'huis'



figuur 3 Vooraanzicht van een 'huisje'

- Het vooraanzicht van het 'huisje' in figuur 3 bestaat uit een vierkant met zijde a en een driehoek met hoogte b . Hoe kun je de oppervlakte van dit vooraanzicht uitrekenen als je weet hoe groot a en b zijn?
- Nu in de driedimensionale ruimte. Stel je hebt een 'huis' in de vorm van een kubus met ribbe a met daarop een piramidevormig dak met hoogte b . Druk de totale buitenoppervlakte ervan uit in a en b .

Vraag a is redelijk standaard in 3 havo/vwo. Wel is misschien verrassend dat meteen met variabelen wordt gewerkt. Het voordeel hiervan is dat de leerling zich realiseert dat het om de methode gaat, om het type verband en niet om de numerieke uitkomst op zichzelf. Vanuit het oogpunt van modelleren is een beperking dat de keuze van de variabelen, een belangrijke stap in het modellerproces, hier al voor de leerling is gemaakt.

In onderdeel b gaat het modelleren iets verder. Je zult moeten nadenken over de oppervlakte van de driehoekige vlakdelen van het dak. Als we het probleem iets realistischer maken en denken aan bijvoorbeeld isolatiedoeleinden, kan een schatting van de buitenoppervlakte van belang zijn. Maar daarbij speelt natuurlijk ook een rol hoe groot ramen en deuren zijn. En is het wel realistisch om aan te nemen dat de hoogte van het huis tot het dak gelijk is aan de breedte? Kortom, er liggen openingen naar denkactiverende vervolgvragen.

Noten en referenties

- [1] *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO. www.fi.uu.nl/ctwo
- [2] *Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: cTWO. www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf
- [3] Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO. www.slo.nl/organisatie/recentepublicaties/00140/
- [4] Drijvers, P. (2011). Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 31(2), 38-41. www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/312/312december_drijvers.pdf
- [5] Pólya, G. (1963). On learning, teaching, and learning teaching. *The American Mathematical Monthly*, 70(6), 605-619.
- [6] Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- [7] Van Streun, A. (2001). *Het denken bevorderen*. Oratie. Groningen: RuG. <http://irs.ub.rug.nl/ppn/235192082>
- [8] Doorman, M., van der Kooij, H., & Mooldijk, A. (2012). Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs* 31(4), 9-1. www.fisme.uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_doorman-vanderkooij-mooldijk.pdf
- [9] Voogt, J., & Pareja Roblin, N. (2010). *21st century skills. Discussienota*. Enschede: Universiteit Twente. www.kennisnet.nl/uploads/tx_kncontentelements/21st_century_skills_Discussienota-Universiteit_Twente.pdf
- [10] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- [11] Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met... modelleren? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 31(4), 34-37. www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_drijvers.pdf
- [12] Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren, van werkelijkheid naar wiskunde en weer terug. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek Wiskundendidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon.
- [13] Vakontwikkelgroep Wiskunde (1995). *Advies examenprogramma havo/vwo wiskunde*. Enschede: SLO
- [14] Projectnummer 405-14-502
Van Streun, A., & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek Wiskundendidactiek* (pp. 339-368). Amsterdam: Epsilon.

Over de auteur

Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: p.drijvers@uu.nl

KLEINTJE DIDACTIEK

ONBEGREPEN STATISTIEK

Komend schooljaar start het nieuwe examenprogramma *Kansrekening en Statistiek* voor havo en vwo. Veel leerlingen (en volwassenen) hebben intuïtief een verkeerd beeld van statistiek. Een voorbeeld is de kans om de staatsloterij of postcodeloterij te winnen. Daarom dit voorbeeld: Neem het telefoonboek van Amsterdam. Kies hieruit een willekeurig telefoonnummer. Hoe groot acht je de kans dat je een bekende treft?

Een veelgehoorde reactie van leerlingen is: 'Maar ik ken helemaal niemand in Amsterdam, dus die kans

is nul.' Toch is dat niet helemaal waar. Misschien is er wel toevallig iemand op bezoek bij iemand in Amsterdam en neemt die iemand de telefoon even op. Of een kennis blijkt in Amsterdam te werken of is er net naartoe verhuisd. De kans dat je de loterij wint, is in elk geval nog veel kleiner. Toch zijn er wel mensen die de loterij winnen. En dat maakt statistiek ook zo verraderlijk. Waar in de wiskunde één tegenvoorbeeld voldoende is om je veronderstelling onderuit te halen, zegt in de statistiek één tegenvoorbeeld helemaal niets. We hebben als mensen bovendien de neiging om dat ene voorbeeld van die buurman die een BMW en geld won veel beter te onthouden dan al die andere keren dat we zelf geld verloren.

Lonneke Boels

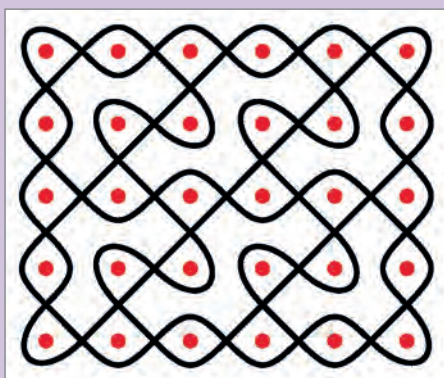


IN MEMORIAM

PAULUS GERDES
(1952 - 2014)

Pauline Vos

Op 11 november 2014 is Paulus Gerdes op 62-jarige leeftijd in Johannesburg (Zuid Afrika) overleden. Gerdes is internationaal bekend als een van de leidende figuren in de *ethnomathematica*. De *ethnomathematica* is de studie van het wiskundig denken en doen in andere culturen dan de westerse. Gerdes heeft in de afgelopen decennia veel impulsen aan de ethnomathematica gegeven en er mede toe bijgedragen dat het internationaal een respectabele 'tak van sport' is geworden. Gerdes was van geboorte Nederlander. Hij studeerde in Nijmegen wiskunde en antropologie. In 1977 verhuisde hij naar Mozambique om er bij te dragen aan het opbouwen van een socialistische maatschappij. Gerdes is vooral bekend van zijn werk op het snijvlak van wiskunde en antropologie. Hij analyseerde bijvoorbeeld de patronen in het vlechtwerk van manden, hoeden en tassen in zijn boek *Sipatsi*, hetgeen 'gevlochten tassen' betekent in het Tsonga. Gerdes beschreef hoe de mandenmaaksters de zeven mogelijke symmetriën in de patronen verwerkten. In Angola interviewde hij de mensen, die in het zand stippen-en-lijn-patronen tekenden, de zogenaamde *Sona* designs. Dit zijn gesloten krommen met een zekere symmetrie, waarvan in elk ingesloten gebied een stip staat, zie figuur 1. Gerdes analyseerde de permutaties en transformaties en gebruikte daarbij lineaire algebra en groepentheorie. Gerdes was een intellectueel, een gepassioneerd wiskundige én overtuigd marxist. Voor hem was de *ethnomathematica* een alternatief paradigma voor de dominante wiskunde zoals die aan westerse scholen en universiteiten onderwezen en beoefend werd. Hij beschouwde een scheiding tussen de wiskundige praktijk (het doen) en de theorie (het denken) als reductionistisch. Hij promoveerde in 1986 in Dresden (toenma-



figuur 1

lige DDR) op een proefschrift getiteld *Zum erwachenden geometrischen Denken; gesellschaftliche Tätigkeit und die mögliche Herkunft einiger früher geometrischer Begriffe und Relationen, unter besonderer Berücksichtigung der Mathematik der Entwicklungsländer*. In 1995 schreef hij een Habilitation (een soort tweede proefschrift, een verschijnsel in de Duitse academische traditie), ditmaal aan de Universiteit Wuppertal (Duitsland) over de *Sona* designs. Vanaf de jaren negentig heeft hij talloze boeken, boekjes en artikelen over de *ethnomathematica* geschreven. Zijn lijst publicaties op Google-Scholar telt honderden artikelen en boeken. Daaronder ook curieuze titels die van Gerdes' marxisme getuigen: *The Philosophic-Mathematical Manuscripts of Karl Marx on Differential Calculus*. Van meer recente datum zijn de puzzelboekjes, waarin hij zijn analyse van patronen uit verschillende culturen vertaalde naar puzzels, die aansporen tot een wiskundige manier van denken en doen. Diverse boeken van Gerdes zijn ook in het Nederlands beschikbaar, zie www.lulu.com/spotlight/pgerdes.

Gerdes was internationaal een veelgevraagd en boeiend spreker, waarbij zijn onderwerpen zich altijd leenden voor rijke illustraties. Zijn lijst presentaties reikt van Brazilië tot Noorwegen. Gerdes heeft een belangrijke bijdrage geleverd op verschillende gebieden. Hij gaf mensen in ontwikkelingslanden een reden om trots te zijn op hun 'ethnische' objecten, omdat zijn onderzoek uitwees dat ze niet alleen 'mooi' waren, maar er ook complexe wiskunde in verweven was. Gerdes zag de *ethnomathematica* als een basis voor curriculumontwerp voor niet-westerse landen, maar het is hem niet gelukt om het Mozambikaanse onderwijs op basis van de *ethnomathematica* te hervormen (men bleef de voorkeur geven aan traditionele schoolboeken). Toch heeft zijn werk ook invloed gehad op het onderwijs, bijvoorbeeld doordat hij wiskundeleraars in verschillende landen heeft geïnspireerd om lesmateriaal te ontwerpen met *ethnomathematische* thema's. En hij droeg bij aan de filosofische discussie over de vraag wát 'wiskunde doen' is: is het wat je op school en aan de universiteit leert en doet, of is een mat met een sterrenpatroon weven of een ingewikkeld patroon breien ook 'wiskunde doen'? Om die vraag te beantwoorden, kunt u bijvoorbeeld een van Gerdes' puzzelboekjes aan de leerlingen geven, of hen vragen 3 x 4 stippen te tekenen en het aantal verschillende *Sona* designs te bepalen. U kunt dan zien of ze 'wiskunde doen'.

Met veel dank aan Wim Neeleman (Maputo) en Jan Draisma (Nampula) voor aanvullingen en verbeteringen.

Over de auteur

Pauline Vos was wiskundeleraar en lerarenopleider, werkte twee jaar in Mozambique en is tegenwoordig hoogleraar Mathematics Education aan de Universiteit van Agder (Noorwegen).
E-mailadres: fpvos@hotmail.com

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar wisenwaarachtig@nvvw.nl.

Boos

Shinichi Mochizuki, wiskundige aan de universiteit van Kyoto, is boos. Hij heeft, naar eigen zeggen, een sluitend bewijs voor het abc-vermoeden gepubliceerd. Het bewijs, 500 pagina's lang, staat sinds twee jaar online. Tot nu toe heeft geen enkele wiskundige zich uitgelaten over de correctheid van het bewijs. Niemand heeft zich, aldus Mochizuki, voldoende willen verdiepen in de bijzondere methoden die tot het bewijs hebben geleid. Een uitdaging voor u? Bron: *De Volkskrant*

Wiskunde en muziek

Musicologe Anja Volk onderzoekt wat een liedje aantrekkelijk en dansbaar maakt. Ze gebruikt informatica om dit gegeven te onderzoeken. 'We hebben miljoenen nummers in een database en proberen de structuur in cijfers te vatten. Door kleine aanpassingen in de muziek te maken, bekijken we welke factoren muziek dansbaar maken en welke emoties ze oproept. Computeronderzoek dwingt je aspecten van muziek te verduidelijken. Dat leert ons meer over de manier waarop muziek werkt.' Op de vraag 'Wat maakt muziek aangenaam?' antwoordt Anja: 'Het is een spel van verwachtingen en verrassingen. Goede muziek bevat veel herhaling, maar weet toch te verrassen. Dat kan in het ritme of in de toonhoogte zitten, maar ook in een accent.' Verliest de muziek niet haar magie door haar als een wiskundige formule te behandelen? 'Nee, muziek grijpt me nog steeds aan en neemt me mee. Het maken en beluisteren van muziek roept vragen op voor onderzoek, wat mijn beleving juist verrijkt.' Bron: *De Volkskrant*

Hersenverandering



Kinderen stoppen met tellen op hun handen door specifieke veranderingen in de hersenen, zo blijkt uit nieuw onderzoek. Veranderingen in de *hippocampus* – een hersendeel dat het geheugen aanstuurt – zorgen ervoor dat kinderen sommen steeds

makkelijker uit het hoofd kunnen berekenen, in plaats van door op hun handen te tellen. De ontwikkeling van het menselijke rekenvermogen op jonge leeftijd kan daarmee voor het eerst worden onderbouwd aan de hand van veranderingen in het brein. Dat melden Amerikaanse onderzoekers in het wetenschappelijk tijdschrift *Nature*. De onderzoekers maakten hersenscans van kinderen (7-9 jaar), adolescenten (14-17 jaar) en volwassenen terwijl ze simpele rekensommen oplosten. Alle proefpersonen werden twee keer getest met een tussenpoos van een jaar. De kinderen gebruikten naarmate ze ouder werden

steeds minder hun handen bij de berekeningen. Deze ontwikkeling verliep gelijktijdig met veranderingen in de hippocampus. Bepaalde delen van dit hersengebied die in actie komen bij tellen, werden minder sterk geactiveerd op latere leeftijd. Verder bleken er bij de kinderen steeds meer hersenverbindingen te ontstaan tussen de hippocampus en de *neocortex*, een hersendeel dat een belangrijke rol speelt bij het wegschrijven van informatie naar het langetermijngeheugen. De veranderingen kunnen mogelijk verklaren waarom kinderen naarmate ze ouder worden, sommen steeds vaker uit hun hoofd berekenen en niet hardop hoeven te tellen. Bron: *Nu.nl*

Ontwikkeling vmbo

Sinds de introductie van het vmbo, alweer vijftien jaar geleden, zijn de beroepsgerichte vakken nauwelijks aangepast. En dat terwijl het vervolgonderwijs en het bedrijfsleven zich wel hebben ontwikkeld. Staatssecretaris Dekker trekt daarom 5,5 miljoen euro uit om het vmbo te vernieuwen: 'Praktijkvakken gaan beter aansluiten op de regionale arbeidsmarkt en leerlingen krijgen meer ruimte vakken te kiezen die hun interesses en talenten prikkelen en uitdagen. Het vmbo krijgt zo het nieuwe elan dat het verdient.' Het geld is bedoeld om docenten bij te scholen die de vernieuwde beroepsgerichte vakken gaan geven. Bron: www.primaonderwijs.nl/vo

Minder zwakke scholen

Het aantal zwakke en zeer zwakke scholen in het voortgezet onderwijs en speciaal onderwijs is afgelopen schooljaar opnieuw gedaald. In het voortgezet onderwijs voldeed 92,7% van de scholen op 1 september 2014 aan de minimumeisen, in het voortgezet speciaal onderwijs 95,3%. Een jaar eerder waren deze percentages 89,9 en 91. Volgens de Onderwijsinspectie is een school zwak of zeer zwak als er onvoldoende onderwijsresultaten gerealiseerd worden, bijvoorbeeld omdat er te veel kinderen blijven zitten of zakken. Daarnaast spelen voldoende kwaliteit op belangrijke onderdelen van het onderwijsleerproces, of de leerstof goed doorlopen wordt en of de docenten voldoende bekwaam zijn een rol. Op www.onderwijsinspectie.nl/actueel/publicaties/Overzicht+zeer+zwakke+scholen.html is een overzicht van alle zwakke scholen te vinden. Bron: www.primaonderwijs.nl/vo

BREUKEN OP DE HELLING (1)

Martin Kindt

In het basisonderwijs worden concrete modellen gebruikt om breuken grijpbaar te maken. Voor het automatiseren van rekenregels is minder aandacht. In de wiskunde van met name het havo/vwo speelt het opereren met breuken of breukvormen een rol. Misschien is het een idee om het opfrissen en uitbouwen van breukrekenen te combineren met het begrip helling.

Vergeetboek

‘Hoeveel is één derde plus vier zesden plus een half?’ Philip Freriks stelde de vraag afgelopen zomer tijdens de televisiequiz *De slimste mens*. Geen van de drie kandidaten wist het goede antwoord. Natuurlijk, het was hoofdrekenen tegen de klok. Maar kandidaat nummer drie had toch voldoende tijd om bijvoorbeeld te beseffen dat $\frac{4}{6}$ ingevuld kan worden voor $\frac{2}{3}$? Pierre Van Hiele schreef zo’n 40 jaar geleden:^[1]

‘Iedereen weet dat het met het rekenen in de basisschool niet erg goed gaat. Het optellen van ongelijknamige breuken kost veel moeite. Het vermenigvuldigen en delen van breuken wordt als een kunstje aangeleerd en het is verbijsterend hoe snel de kunstjes weer vergeten worden.’

Dat was in de tijd toen er nog uitvoerig geëxerceerd werd met breuken. Of een meer begripsmatige aanpak zoals die nu in veel basisscholenmethoden gehanteerd wordt, het vergeten tegengaat, weet ik niet. Wel weet ik dat als je de vraag van Philip stelt aan leerlingen uit groep 8 met een IQ vergelijkbaar aan dat van de drie slimste-mens-kandidaten, je wel een goed antwoord kunt verwachten. Doe je dat een jaar later, dan is de kans op een goede reactie flink kleiner. Dat was vroeger zo – ik herinner me hoe menig gymnasiast in het brugjaar vergeten was hoe je $\frac{1}{2}$ met $\frac{1}{3}$ moest vermenigvuldigen – en dat zal nog zo zijn.

In het havo/vwo-onderwijs spelen breuken een belangrijke rol: bij algebra, bij kansrekening en soms bij meetkunde. Wijlen Leen Streefland promoveerde in 1988 op het proefschrift *Realistisch Breukenonderwijs* en een van zijn stellingen luidde: ‘het rekenen met breuken volgens formele regels hoort niet thuis op de basisschool, maar in de wiskunde van het vo’. Daar ben ik het hartgrondig mee eens. De consequentie is dan wel dat er in het havo/vwo veel moet gebeuren aan rekenen met breuken en breukvormen. Maar hoe pak je dat aan?

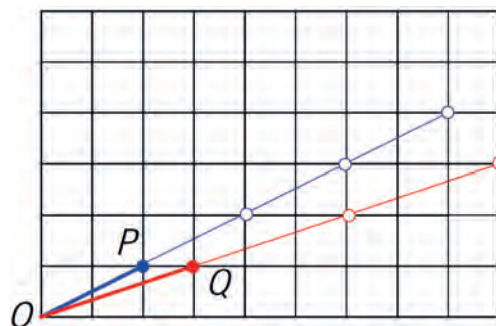
Hellingen in een rooster

Kort geleden werd ik herinnerd aan een jaren-zeventigpakketje van het toenmalige IOWO (de vroege voorloper van het Freudenthal Instituut) bestemd voor het brugjaar van wat toen nog het lager beroepsonderwijs

heette. De titel was *Procenten* en het had een remedial karakter. De auteur, Ger Jansen, was op het idee gekomen om hellingspercentages als instap te kiezen en dat bleek een prima vondst. Daaraan denkend kreeg de inval dat je het ophalen van breuken in het vo ook mooi aan hellingen zou kunnen koppelen.

Het terrein is een rooster van vierkantjes, op papier, computerscherm of op een ouderwets spijkerbord. Het rooster denk ik mij naar links en onder begrensd met als grenspunt de oorsprong O . Vanuit O kunnen de andere roosterpunten worden bereikt via schuin oplopende rechte lijnen. De roosterpunten kun je voorzien van geheeltallige coördinaten, maar dat hoeft niet meteen.

In het plaatje is duidelijk te zien dat lijn OP wat steiler



figuur 1

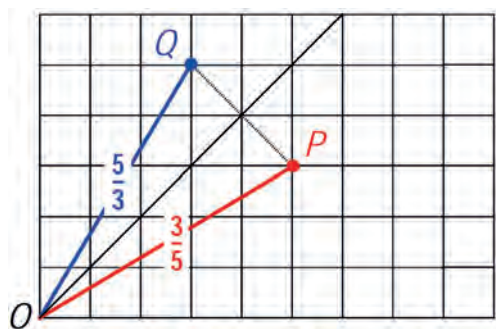
is dan lijn OQ . Die steilheid laat zich uitdrukken met een breuk: verticale stijging gedeeld door horizontale voortgang, of op zijn Amerikaans: *rise over run*. In de schoolboeken heette dit vroeger deftig *richtingscoëfficiënt* (soms minder deftig *rico*) maar tegenwoordig is het *hellingsgetal*. In navolging van het engelse *slope* zal ik hier de korte term *helling* gebruiken.

De hellingen van OP en OQ in het plaatje zijn dan respectievelijk $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$. Als die lijnen worden verlengd, kom je steeds nieuwe roosterpunten tegen. Maar de helling verandert natuurlijk niet. Dit illustreert:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots \text{ en } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$$

In de tijd van de *New Math* werd gezegd: een breuk is een ‘equivalentieklasse van paren gehele getallen’. Via de voorstelling met rechte lijnen uit O hoeven we daar niet moeilijk over te doen, je ziet het voor je!

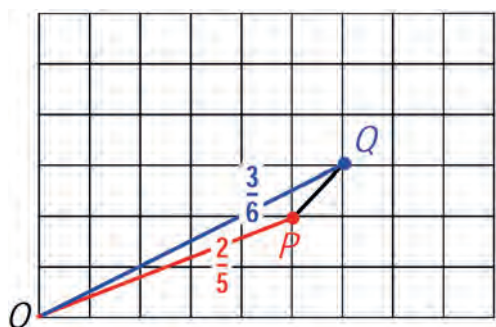
Wat je ook ziet is dat het omkeren van een breuk overeenkomt met het spiegelen van een lijn ten opzichte van de roosterdiagonaal uit O . De diagonaal (helling 1) is zo de scheidslijn tussen de hellingen > 1 en < 1 .



figuur 2

Hellingen (van lijnen uit O en in het eerste kwadrant) hebben wel een ondergrens (0), maar geen eindige bovengrens; dit kan aanleiding zijn voor een spannend klassengesprek.

Dat vermenigvuldiging van teller en noemer van een breuk met eenzelfde natuurlijk getal de helling niet doet veranderen, is al opgemerkt. Maar wat is het effect als je bij teller en noemer eenzelfde getal optelt?



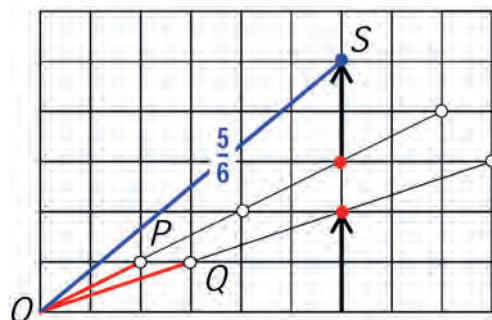
figuur 3

In de figuur is te zien wat er gebeurt als je bij teller en noemer 1 optelt. Is de breuk waar je van uitging kleiner dan 1, dan wordt de helling groter. Is de uitgangsbreuk groter dan 1, dan wordt de helling minder steil. Je kan dit eindeloos herhalen, startend met bijvoorbeeld $\frac{2}{5}$ en er ontstaat een opklimmende rij van breuken onder 1: $\frac{2}{5} < \frac{3}{6} < \frac{4}{7} < \frac{5}{8} < \dots$

Start je met een breuk > 1 , dan komt er vanzelf een afdalende rij. Daarbij kun je ook denken aan 'omdraaien is spiegelen in de roosterdiagonaal'. Als een leerling (bij algebra bijvoorbeeld) in de fout gaat door bij (van) teller en noemer hetzelfde getal op te tellen (af te trekken), dan zetten we daar als leraar een dikke rode streep door. Maar is het dan vanuit didactisch/pedagogisch perspectief niet veel beter om na te gaan wat zo'n foutieve operatie wél doet? Het hellingmodel is hierbij blijkbaar heel illustratief.

Optellen en vermenigvuldigen van breuken

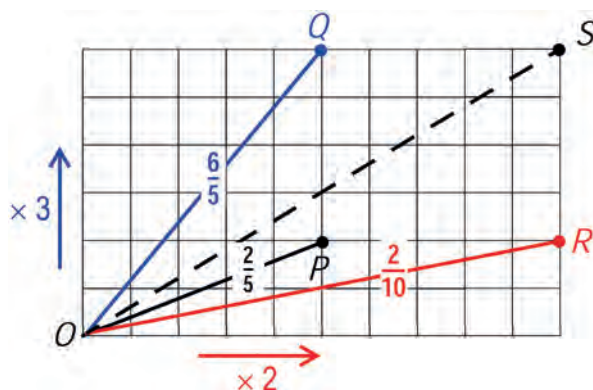
Door op lijnen met verschillende helling roosterpunten te zoeken die op eenzelfde verticaal liggen, kun je de *som van twee hellingen* bepalen, zie de volgende figuur. Helling $OS = \text{helling } OP + \text{helling } OQ$, ofwel $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Dit optellen van hellingen anticipeert op het 'superponeren' van grafieken, en als ik nog veel verder vooruitkijk, op de somregel voor het differentiëren, waarbij in feite *locale hellingen* van krommen worden opgeteld.



figuur 4

Je kunt ook afspreken wat je bedoelt met bijvoorbeeld drie keer zo steil (drie keer zoveel *rise* bij gelijke *run*) of zeg een half keer zo steil (gelijke *rise* bij 2 keer zoveel *run*). Dat geeft dan bijvoorbeeld (zie figuur): $3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ en $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10} (= \frac{1}{5})$.

Meetkundig komt dit respectievelijk neer op een oprekking in verticale en horizontale richting. Ook hier is er weer sprake van een vooruitlopen op operaties met grafieken zoals die later veelvuldig voorkomen.



figuur 5

Vermenigvuldigen van een helling met $\frac{3}{2}$ kan worden gezien als combinatie van een verticaal oprekken met factor 3 en een horizontaal oprekken met factor 2. In ons voorbeeld: $\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{2 \times 5} = \frac{6}{10} (= \frac{3}{5})$. De uitkomst is de helling van OS .

Intermezzo: een oude formule

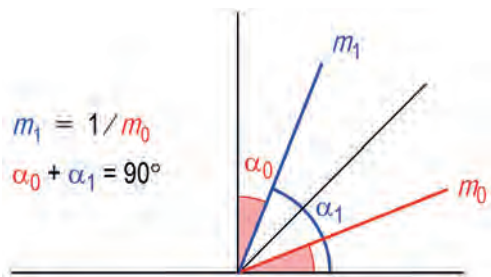
Nota bene: optellen of verveelvoudigen van hellingen rijmt niet met dezelfde operaties op de bijpassende hellingshoeken! Zo is de som van de hellingshoeken bij de hellingen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ juist gelijk aan 45° , maar $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1$. Dit volgt uit een mooie formule-uit-de-oude-doos.

Als m de helling is die hoort bij de som van de hellingshoeken

van lijnen met helling m_0 en m_1 , dan: $m = \frac{m_0 + m_1}{1 - m_0 m_1}$.

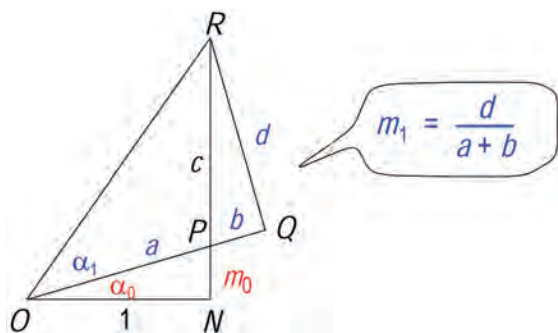
Toegepast op $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ komt er: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$. Een goede

oefening in breukrekenen, zeker. Maar wie kent die formule nog? Zou ik die formule (bijvoorbeeld in 3 of 4 vwo) van stal durven halen? Daar is toch pittige gonio voor nodig, somformules voor sin, cos en tan en dat gaat toch veel te ver...? Of kan het ook anders? Van Pólya heb ik de attitude meegekregen dat je bij een nieuwe formule eerst kunt kijken naar uiterlijke kenmerken en randgevallen. Zo'n uiterlijk kenmerk is hier de symmetrie in m_0 en m_1 en dat stemt uiteraard tevreden. De randgevallen vind je bij het nul worden van teller of noemer. Als m_0 en m_1 tegengesteld zijn (in een derde klas zijn de leerlingen allang vertrouwd met negatieve hellingen) zijn de bijbehorende hellingshoeken samen 180° (of als met gerichte hoeken wordt gewerkt 0°) en dat betekent hoe dan ook $m = 0$. Dit stemt overeen met de formule. Het tweede randgeval krijg ik als $m_0 m_1 = 1$, dus als de hellingen elkaars omgekeerde zijn en de lijnen elkaars spiegelbeeld in de roosterdiagonaal zijn.



figuur 6

De som van de hellingshoeken α_0 en α_1 is in dit geval 90° . En ja, dat correspondeert met het nul worden van de noemer in de formule! Nu een afleiding van de formule zonder gonio.



figuur 7

De gelijkvormigheid van de rechthoekige driehoeken ONP en RQP leidt naar evenredigheidstabel:

c	b	$d = m_1(a + b)$
a	m_0	1

figuur 8

Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$(1) ab = m_0 c$$

$$(2) c = ad = am_1(a + b)$$

Ik wil nu c uitdrukken in alleen m_0 en m_1 om dan de helling ($= c + m_0$) bij $\alpha_0 + \alpha_1$ te vinden. Er geldt: $c = am_1(a + b) = a^2 m_1 + ab m_1$. Rekening houdend (Pythagoras) met

$$a^2 = 1 + m_0^2 \text{ en ook met } ab = m_0 c \text{ komt er}$$

$$c = (1 + m_0^2) m_1 + m_0 c m_1. \text{ Hieruit volgt: } c = \frac{m_1(1 + m_0^2)}{1 - m_0 m_1}.$$

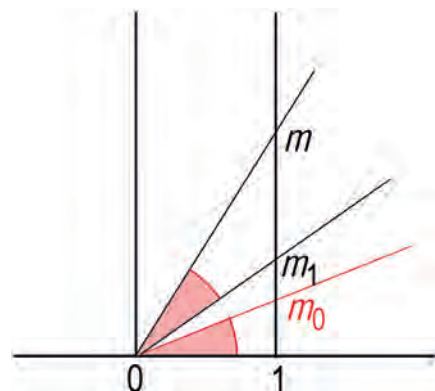
De bij α_0 en α_1 passende helling h is dus gelijk aan

$$m_0 + \frac{m_1(1 + m_0^2)}{1 - m_0 m_1} = \frac{m_0 + m_1}{1 - m_0 m_1}.$$

Een bewijs steunend op elementaire middelen, maar niet wat je noemt 'een eitje'. Je zou de leerling er via een serie subvraagjes doorheen kunnen loodsen – een niet ongewone aanpak in onze schoolboeken – maar daar zou ik niet voor kiezen. Een klassengesprek met een hardop denkende, vragende en uitdagende leraar lijkt me een stuk beter. Misschien zou ik liever eerst naar het verschil van twee hoeken kijken, de figuur is hetzelfde, maar het idee wat natuurlijker en dan via de substitutie $m_1 \rightarrow -m_1$ bij de somformule uitkomen.

Achtergrond

Mijn sympathie voor de formule heeft vooral te maken met mijn fascinatie voor projectieve meetkunde. De structuur van de formule – gebroken lineair in elk van de twee variabelen m_0 en m_1 – is namelijk op voorhand duidelijk als je aan centrale projectie en het behoud van dubbelverhoudingen denkt. Voor de liefhebber zal ik dat hier nader toelichten. Beschouw m_0 en α_0 als vast en m_1 en α_1 als variabel. Het vergroten van de hellingshoek van een lijn door O met α_0 komt neer op het draaien van de waaier van lijnen door O over hoek α_0 .



figuur 9

De lijnenwaaier O snijdt de lijn $x = 1$ in een puntenreeks. De rotatie van de waaier correspondeert met een transformatie van die puntenreeks, ofwel met een reële functie $m_1 \rightarrow f(m_1)$. Omdat de rotatie dubbelverhoudingen van 'vierstralen' invariant laat, doet f dit met (geordende)

puntenviertallen en dat betekent: $f(m_1) = \frac{Am_1 + B}{Cm_1 + D}$ voor zekere reële A, B, C en D .

Nu weet ik bij voorbaat dat de teller van de gebroken vorm nul is voor $m_1 = -m_0$ en dat de noemer nul is voor $m_1 = 1/m_0$. Daaruit volgt direct $B = Am_0$ en $C = -Dm_0$.

Kortom: $f(m_1) = \frac{Am_1 + Am_0}{-Dm_0m_1 + D} = \frac{A}{D} \cdot \frac{m_0 + m_1}{1 - m_0m_1}$.

Uit $f(0) = m_0$ volgt dan $A = D$ en de formule is een feit.

Kruislings vermenigvuldigen

In de afgelopen herfstvakantie kregen mijn vrouw en ik een viertal kleinkinderen te logeren. Magali, inmiddels in 3 gymnasium, had voor de aardigheid haar wiskundeboek^[2] meegenomen. 'Volgende week repetitie, opa, ik heb er nog niks aan gedaan, zullen we samen even kijken?' Het hoofdstuk heet *Gelijkvormigheid*. Alle ingrediënten voor mijn eerste bewijs van de helling-bij-hoekensomformule zijn hier terug te vinden. Evenredigheidstabel,

kruisproducten, gelijkvormige driehoeken, Pythagoras, hellinggetal en -hoek. Maar voor het verband tussen de laatste twee wordt een black box gebruikt, de toetsen $\tan$ en $\tan^{-1}$ op het rekenmachientje. 'Dan moet je die hoek vermenigvuldigen met $\tan$...', aldus Magali. Het lijkt wel een kookboek met recepten; zó moet je dat doen, nadenken hoeft niet. Is dit wiskunde? Nee toch! Maar goed (dus eigenlijk niet goed), het hoofdstuk start met kruislings vermenigvuldigen. Via een paar twee-bij-twee-evenredigheidstabelletjes wordt geconstateerd dat de kruisproducten gelijk zijn en pats, dan direct algemeen, een tabel met a, b, c en d . Zonder een spoor van afleiding of bewijs. Die evenredigheidstabel is niet zo gek, maar waarom niet een met veel vakjes waarin dan een heleboel kruisproducten kunnen worden vergeleken? Dat leidt tot een vermoeden en vervolgens kan de evenredighedsconstante ingezet worden om te snappen waarom dat klopt. Een generalisatie is dan al aardig dichtbij, en er kan worden geformaliseerd:

$$\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline b & d \end{array} \begin{array}{l} \swarrow \times k \\ \searrow \times k \end{array} \quad \begin{array}{l} ad = a(kc) = ack \\ bc = (ka)c = ack \end{array}$$

figuur 10



APS Rekenen en Exact

Maatwerk trainingen, coaching en studiemiddagen rekenen/wiskunde.

Rekendidactiek, omgaan met verschillen in de rekenles, zwakke rekenaars, nieuwe examenprogramma's wiskunde.

Afspraak maken voor een maatwerkgesprek

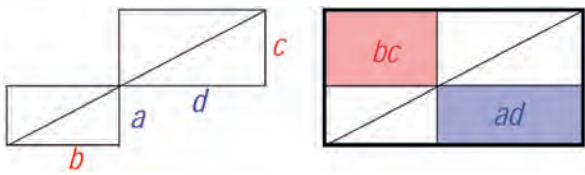
030 28 56 600
secretariaat@aps.nl

Informatie

APS
030 28 56 600
secretariaat@aps.nl
www.aps.nl



Zo moeilijk kan dat niet zijn. Maar voor Magali had ik een ander bewijs in petto:

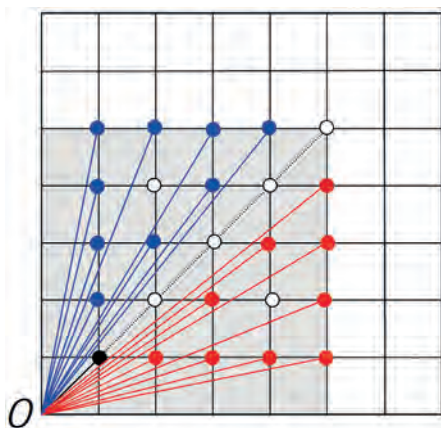


figuur 11

Gelijke breuken, gelijke hellingen. De diagonalen van de rechthoekjes in het linkerplaatje liggen in elkaars verlengde. Even inlijsten en zien dat de diagonaal drie rechthoeken in gelijke delen verdeelt, zodat voor de rode en de blauwe rechthoek dezelfde oppervlakte overblijft. Aanschouwelijker kan het niet: *quotiënten* als hellingen, *producten* als oppervlakten. Heeft u nu ook een visioen over differentiëren en integreren?

Zichtbaar is onvereenvoudigbaar

Terug naar de brugklas. Op alle roosterpunten kunnen identieke paaltjes (als spijkers op een spijkerbord) worden gedacht. Welke paaltjes zijn te zien met één oog vanuit de oorsprong? Als ik langs de lijn met helling $\frac{1}{2}$ kijk is alleen het punt (2,1) te zien. De andere punten (4,2), (6,3), ... worden aan het zicht onttrokken. Al gauw is het helder dat de vanuit O zichtbare punten corresponderen met paren onderling ondeelbare coördinaten ofwel met *onvereenvoudigbare breuken*. In de figuur zijn de zichtbare punten getekend binnen een vierkant met zijde 5 (en niet op de assen).



figuur 12

Een opdracht kan nu zijn om de bijpassende breuken die kleiner zijn dan 1 op te schrijven in opklimmende grootte. Het resultaat is: $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Dit is een rijtje dat in de getaltheorie bekend staat als een Farey-reeks. Die reeks heeft twee bijzonderheden.

De eerste is dat het verschil tussen elke twee burens een stambreuk (breuk met teller 1) is).

Bijvoorbeeld: $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ en $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$.

De tweede is dat als je de tellers en de noemers van twee breuken met een gemeenschappelijke buur optelt, je een breuk krijgt die gelijkwaardig is met de tussenbuur. Bijvoorbeeld: $\frac{1+2}{4+5} = \frac{1}{3}$ en $\frac{3+3}{5+4} = \frac{2}{3}$. Dit kan gemakkelijk voor alle voorkomende gevallen worden gecheckt, oefenen met een direct doel! Het geldt trouwens algemeen: als je van twee (positieve) breuken zowel de tellers als de noemers bij elkaar optelt, dan krijg je een zogenaamde 'tussenbreuk'. Kijk naar de hellingen:



figuur 13

Het simultaan optellen van tellers en noemers komt overeen met de bekende vectoroptelling. En dat dit een tussenbreuk oplevert, bevreedt dan niet. Startend met $0 = \frac{0}{1}$ en $1 = \frac{1}{1}$ kunnen via deze operatie stap voor stap alle breuken tussen 0 en 1 worden voortgebracht. Maar dat bewaar ik voor het vervolg op dit artikel.

Noten

- [1] Van Hiele, P. M. (1973). *Begrip en Inzicht*. Muuses.
- [2] *Getal en Ruimte*, deel 3 vwo, laatste editie.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar; ook na zijn pensioen is hij nog medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

RUIMTESONDES, ROETVEEG-PIET EN RIMPELS

Birgit van Dalen

OPGAVEN UIT HET BARTJENS REKENDICTEE 2014

Op vrijdag 21 november vond de finale van het tiende Bartjens rekendictee plaats in Zwolle. Birgit van Dalen was aanwezig en neemt u in dit artikel mee langs enkele opgaven, die zo in de klas te gebruiken zijn.

Voor de finale van het Bartjens rekendictee hadden zich zo'n 150 mensen verzameld op Hogeschool Windesheim in Zwolle: scholieren uit 3 havo/vwo, pabo-studenten, basisschoolleerkrachten en een flink aantal deelnemers die door de internetvoorronde waren gekomen. Was u er niet bij? Niet getreurd, want u kunt een kleine versie in uw eigen klaslokaal organiseren. De opgaven (en antwoorden) zijn beschikbaar op internet.^[1] Met rekenen enerzijds en denkactiviteiten anderzijds als de speerpunten van dit moment, zijn de Bartjens-opgaven perfect oefenmateriaal.

Opgave 2

Ruimtesonde Philae heeft op twee plekken foto's gemaakt van de komeet 67P. Op de tweede plek werden twee keer zo veel foto's gemaakt als op de eerste. Op de eerste plek is 66% van de gemaakte foto's bruikbaar. Op de tweede plek is 84% van de gemaakte foto's bruikbaar. Hoeveel procent van alle door Philae gemaakte foto's is bruikbaar?

Een leuke rekenopgave om een keer de laatste tien minuten van de les mee te vullen. Leerlingen zullen zich wellicht afvragen of ze niet een gegeven missen: hoeveel foto's er in totaal gemaakt zijn. Maar dat maakt natuurlijk niet uit, omdat steeds over percentages van gemaakte foto's gesproken wordt. We kunnen zelfs de vrijheid nemen om zelf een geschikt aantal te kiezen: bijvoor-

beeld 100 foto's op de eerste plek en dan dus 200 foto's op de tweede plek. Dit geeft $66 + 2 \times 84$ foto's, van de in totaal 300. Een prima voorbeeld van een opgave waar geen rekenmachine aan te pas hoeft te komen, want het percentage komt netjes geheel uit: 78%.

Opgave 4: Stroopwafel-Piet kan in zijn eentje 500 pepernoten in een uur bakken, terwijl Roetveeg-Piet daar drie kwartier over doet. Sinterklaas wil 525 pepernoten hebben en zet daarvoor beide Pieten tegelijkertijd aan het werk. Hoeveel minuten zijn ze bezig om 525 pepernoten te bakken?

Deze opgave is bij uitstek geschikt als denkactiviteit. Hoe je dit uit moet rekenen, is niet direct duidelijk. Je zou kunnen uitrekenen hoeveel pepernoten Roetveeg-Piet in een uur kan bakken (of is het wellicht handiger om juist het aantal van Stroopwafel-Piet om te rekenen naar drie kwartier?) maar wat heb je aan die informatie? Tijd om een iets makkelijker voorbeeld te bekijken (vaak een goede strategie bij denkactiviteiten): als de ene Piet 100 pepernoten in een uur bakt en de andere ook, dan bakken ze samen 100 pepernoten in een half uur. En als de ene 100 pepernoten in een uur bakt en de andere 200, dan bakken ze samen in een uur 300 pepernoten, dus bijvoorbeeld 100 in 20 minuten. Het is dus wel nuttig om het aantal pepernoten om te rekenen naar twee keer dezelfde

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

TWEDE RONDE

Op 13 maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op twaalf universiteiten. De opgaven en uitwerkingen zijn inmiddels gepubliceerd op www.wiskundeolympiade.nl. Ongeveer 1000 leerlingen waren uitgenodigd voor de tweede ronde. De leerlingen

deden mee in drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer 40 leerlingen uitgenodigd worden voor de finale in september. Wie deze winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekendgemaakt.



tijdseenheid; daar kun je verder mee. Maar even een schatting maken (altijd handig): het antwoord zal wel een stuk minder dan een uur gaan worden en ook minder dan drie kwartier, dus dat zijn niet heel geschikte tijdseenheden om mee te rekenen. Minuten dan? Maar dan moet je 500 gaan delen door 60; ook niet heel geslaagd. Iets als 6 minuten zou makkelijker zijn: dan bakt Stroopwafel-Piet 50 pepernoten. Helaas kun je 45 weer niet makkelijk door 6 delen. Gewoon blijven proberen levert uiteindelijk wel de handige eenheid op: 9 minuten. Dat is makkelijk vanuit de 45 te krijgen en ook makkelijk vanuit die 6 minuten die we al hadden.

Als de strategie eenmaal duidelijk is, is het verder even nauwkeurig rekenen. En vergeet niet om het antwoord even te checken aan de hand van de schatting die we al hadden; nog een goede tip om ook aan uw leerlingen mee te geven. Hopelijk komen zij en u dan uit op het juiste antwoord: 27 minuten.

Opgave 8: Renée Zellweger laat iedere 10 dagen een rimpel wegsputten. Na precies 40 dagen is die rimpel echter helemaal terug. Hoeveel rimpels zijn er 205 dagen nadat ze hiermee begonnen is, nog min of meer onzichtbaar?

Leuke test: leg deze opgave aan een klas voor en kijk hoeveel leerlingen er direct druk beginnen te rekenen en hoeveel er eerst gaan nadenken. Die laatste groep is waarschijnlijk het snelste klaar. Het is helemaal niet nodig om 205 te gaan delen door 40 of zelfs maar door 10. Als je er even over nadenkt, blijkt die 205 helemaal niet relevant (behalve dan dat hij groter is dan 40, dat wel). De enige rimpels die nog onzichtbaar zijn, zijn degene die minder dan 40 dagen geleden weggespoten zijn. Dus 5, 15, 25 of 35 dagen geleden. In totaal vier rimpels dus.

Dit zijn zomaar drie opgaven uit de finale van het Bartjens rekendictee, maar de andere elf opgaven zijn zeker ook de moeite waard om gewoon een keer tussen-door te doen met uw leerlingen. Of maakt u er een wedstrijd van, een mini-rekendictee in de klas?

Noot

[1] Zie www.bartjensrekendictee.nl

Over de auteur

Birgit van Dalen is adjunct-hoofdredacteur van *Euclides*. Daarnaast is zij docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag en organisator bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade.
E-mailadres: bevandalen@gmail.com

MEDEDELING



EXAMENBESPREKINGEN 2015

Er worden geen regionale examenbesprekingen meer gehouden. U kunt de resultaten van de centrale besprekingen lezen op de website www.nvww.nl:

- voor vwo A, vwo B en vwo C op 16 mei;
- voor vmbo TKG op 22 mei;
- voor havo A en B op 23 mei.

Wilt u meepraten op een of meer van de centrale besprekingen en heeft u dit niet eerder gedaan, neemt u dan uiterlijk 15 april contact op met:

- Conny Gaykema: c.gaykema@online.nl voor vmbo TKG;
- Grada Fokkens: gfokkens@onc.nl voor havo en vwo.

In verband met de beschikbare ruimte is het aantal deelnemers aan de centrale besprekingen aan een maximum gebonden. Via de mail laten we u weten of u mee kunt praten of voorlopig op een reservelijst geplaatst wordt.

Data centrale examenbesprekingen 2015

Vak	CE	Bespreking	Tijd
Vmbo TKG	di 19 mei	do 21 mei	16.00 – 18.00 uur
Havo A	wo 20 mei	vr 22 mei	15.30 – 17.45 uur
Havo B	wo 20 mei	vr 22 mei	18.15 – 20.15 uur
Vwo A/C	wo 13 mei	vr 15 mei	15.30 – 18.00 uur
Vwo B	wo 13 mei	vr 15 mei	13.00 – 15.00 uur

PROCESHULP BIJ SAMENWERKEND WISKUNDE LEREN

Rijkje Dekker

LASTIG MAAR WEL ESSENTIEEL

Leerlingen die effectief samenwerken in groepjes, dat zouden we allemaal graag willen. Rijkje Dekker schrijft in dit artikel over een model waarmee u dit kan verwezenlijken.

Als je als docent je leerlingen van tijd tot tijd samen aan wiskundeopdrachten wilt laten werken en optimaal van elkaars inbreng wilt laten profiteren, dan is het zaak je niet teveel met de inhoud van de discussies tussen je leerlingen te bemoeien, althans gedurende een bepaalde tijd. Als leerlingen weten dat jij ze als docent een tijdje niet zult helpen, richten ze zich veel meer op elkaar. Beter is het om er dan voor te zorgen dat ze ook werkelijk optimaal van elkaars inbreng profiteren. Proceshulp is daarvoor bedoeld. De naam 'proceshulp' is afgeleid van het procesmodel waarin wordt beschreven hoe leerlingen elkaar tot niveauverhoging kunnen brengen. Daarbij is het belangrijk dat ze belangstelling tonen voor elkaars denkwerk en met elkaar daarover in discussie gaan. De activiteiten in de discussie die tot niveauverhoging kunnen leiden, zijn het vertellen of tonen van eigen denkwerk, het uitleggen en het verantwoorden van het eigen denkwerk. Het vertellen of tonen maakt je bewust van je eigen denkwerk en het uitleggen en verantwoorden leidt tot het nadenken over, reflecteren op je eigen denkwerk. Leerlingen kunnen elkaar daartoe aanzetten door naar elkaars werk te vragen, elkaar uitleg te vragen en elkaar kritiek te geven. Kritiek kan ertoe leiden dat degene wiens werk het betreft dieper na gaat denken over het eigen werk en dat probeert te verantwoorden, of moet concluderen dat de eigen ideeën toch niet kloppen en deze moet reconstrueren. Dit kan tot niveauverhoging leiden.

Het procesmodel

Het procesmodel in zijn oorspronkelijke vorm is onder andere gepubliceerd en beschreven in Dekker & Elshout-Mohr.^[1] Hier volstaan we met een tabel waarin de belangrijkste activiteiten uit het procesmodel voor interactie en niveauverhoging weergegeven zijn, zie tabel 1.

De invloed van leerling A op de niveauverhoging van leerling B komt het meest 'natuurlijk' tot stand als A en B aan hetzelfde wiskundeprobleem werken en hun werk verschillend is. Dat prikkelt de onderlinge interactie. Als A en B immers hetzelfde werk hebben, dan stopt de discussie na het tonen. Er is dan geen prikkel tot het vragen van uitleg. Om ervoor te zorgen dat het werk

tussen de leden in een klein groepje verschillend is, kun je als docent ervoor zorgen dat de kleine groepen zo samengesteld zijn dat je die verschillen kunt verwachten. Dus geen kinderen bij elkaar die in wiskundig opzicht erg op elkaar lijken, maar die juist van elkaar verschillen. Hoewel het procesmodel lijkt te suggereren dat het vooral om twee leerlingen gaat, is een groepje van drie beter. Er zullen dan meer verschillen zijn en de rol van kritiek is dan ook meer gewaarborgd. Een groepje van vier kan voor een intensieve discussie weer net iets te groot zijn, maar soms wel nodig om de groepen voldoende heterogeen te maken. De opdrachten waar de leerlingen aan werken, moeten deze verschillen ook uitlokken. Op de criteria voor opdrachten ga ik echter in dit stuk niet in. Daarvoor verwijs ik naar de eerder genoemde publicatie en Palha (2013).^[2] Hier wil ik de rol van de docent die proceshulp geeft verhelderen.

Proceshulp

De docent die proceshulp geeft, let erop dat het proces zoals dat in het procesmodel beschreven wordt, ook daadwerkelijk plaatsvindt. Dat kan de docent van tevoren doen door te zeggen dat hij de leerlingen een tijdje niet zal helpen, maar er wel op let dat ze goed met elkaar overleggen. Dit kan op twee manieren. De docent kan direct aansturen op de kernactiviteiten, dus zeggen dat het belangrijk is je denkwerk aan anderen te tonen en uit te leggen, want dat je door uitleg te geven zelf veel leert. Of indirect door op de regulerende activiteiten aan te sturen, dus aangeven dat je naar elkaars ideeën vraagt en dat je als je het niet snapt om uitleg vraagt. En als je denkt dat het niet klopt, dat je dan kritiek geeft, want daar wordt het werk beter van. Dit alles is proceshulp, omdat dit het proces zoals beschreven in het procesmodel aanstuurt. Tijdens het werk kan de docent de groepjes observeren. Het domineren of afhaken van leerlingen kan geobserveerd worden en dat is een moment om in te grijpen. Dus dan kan de docent een afhaker aanzetten tot meediscussieren, door bijvoorbeeld te zeggen: 'Klopt het wat ze aan het doen zijn? Als jij er anders over denkt, zeg het dan.' De docent stimuleert de afhaker dus om regulerende activiteiten te vervullen. Een al te dominant iemand

kan de docent attenderen op de inbreng van anderen, door bijvoorbeeld te zeggen: 'Vraag je ook naar de ideeën van de anderen? Dat kan heel leerzaam zijn.' De docent stimuleert zo ook de dominante leerling om regulerende activiteiten te vervullen. Tijdens het groepswerk is dus de voornaamste activiteiten van de procesdocent zorgen dat de regulerende activiteiten plaatsvinden, zodat de kernactiviteiten een kans krijgen.

Proceshulp versus inhoudelijke hulp

Dekker en Elshout-Mohr hebben de effectiviteit van proceshulp vergeleken met inhoudelijk hulp aan groepjes (o.a. in [1]). Dat vond plaats bij 5 vwo-leerlingen met wiskunde B. De docent die proceshulp gaf, had niet veel te doen. Behalve zijn rol bij aanvang verduidelijken, heeft hij maar zelden een leerling moeten aanzetten tot meedoen. De discussie in drietallen was heel intensief. De docent die inhoudelijk hulp gaf, had meer te doen. Herhaaldelijk werd hem hulp gevraagd en ook al hield hij deze beperkt tot hints, dan vroegen de leerlingen toch vaak door. De uitkomst was dat proceshulp tot meer niveauverhoging leidde dan inhoudelijke hulp. Pijs (2007)^[3] heeft ook de effectiviteit van proceshulp vergeleken met inhoudelijke hulp. Dat vond plaats bij 4 havo-leerlingen met wiskunde A. Ze werkten in tweetallen met de computer. De docent die proceshulp gaf, had veel te doen. De leerlingen vroegen vaak hulp en de docent gaf telkens aan dat hij die niet gaf, maar dat hij er alle vertrouwen in had dat ze er samen uit zouden komen. En dat lukte ook bij sommige tweetallen. De docent die inhoudelijke hulp gaf, had zijn handen vol. Hij was voortdurend uitleg aan het geven. In beide groepen vond wel niveauverhoging plaats, maar niet erg veel. De opdrachten waren af en toe behoorlijk pittig. Dat is belangrijk voor een goede discussie, maar de wiskundige kennis binnen de tweetallen was kennelijk onvoldoende, vandaar de druk van de leerlingen op de docenten om uitleg te geven. De uitkomst van dit onderzoek was dat proceshulp tot

evenveel niveauverhoging leidde als inhoudelijk hulp en dat is een opvallend resultaat. Meer vakinhoudelijke uitleg door de docent leidt dus niet automatisch tot meer niveauverhoging bij de leerlingen.

Regulerende hulp

Palha heeft in haar onderzoek ook naar de hulp van docenten aan kleine groepen gekeken. Zij deed dat in een setting van *Shift-Problem* lessen. Aansluitend bij de gewone gang van zaken en het gewone leerboek, heeft zij bepaalde delen van de leerstof bewerkt tot opdrachten geschikt voor kleine groepen en gericht op het verdiepen van het inzicht bij de leerlingen. De rol van de docent was wisselend. Ze waren bekend met het proces dat zich binnen de groepjes af zou moeten spelen, maar ze gaven uit zichzelf weinig proceshulp. Als groepjes vast kwamen te zitten, gingen ze vaak zelf regulerende activiteiten naar de leerlingen toe uitvoeren, zoals vragen naar hun denkwerk en naar uitleg van hun denkwerk. Strikt genomen is dit geen proceshulp meer, want de docent richt zich op de inhoud. Maar hij doet zo wel voor wat hij wil dat de leerlingen bij elkaar doen, namelijk het uitvoeren van regulerende activiteiten. Palha noemt dit soort hulp regulerende hulp. Regulerende hulp kwam in haar onderzoek veel meer voor dan proceshulp. Kennelijk is het een minder onnatuurlijke hulp voor de docent. Laten we daarom deze hulp in relatie tot het procesmodel bekijken.

Regulerende hulp en het procesmodel

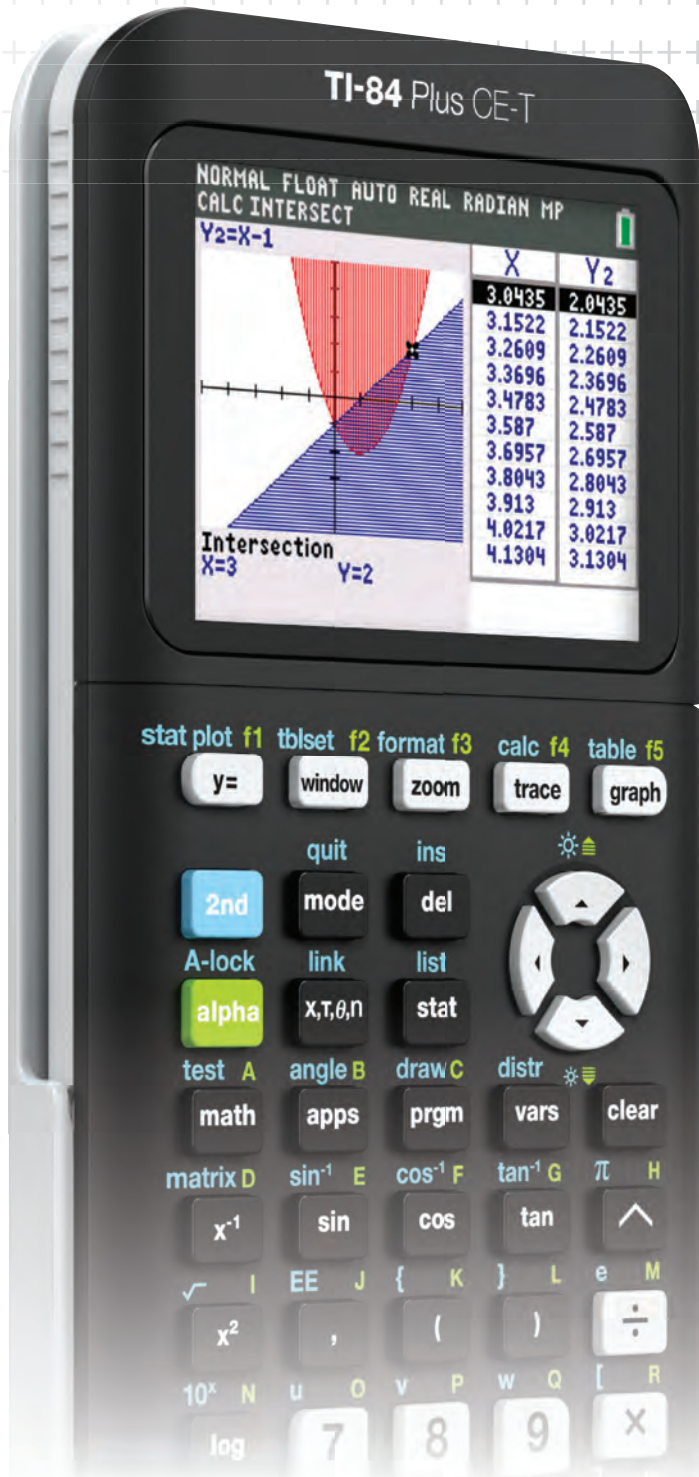
In tabel 1 kunnen we nu A als de docent kiezen. B is een leerling. De mentale en kernactiviteiten die door het vragen van de docent worden opgeroepen, zijn het bewust worden van en tonen van eigen werk en het nadenken over en uitleggen van eigen denkwerk. Dat is prima, ook voor de groepsgenoten in het groepje. Maar als de docent vervolgens het denkwerk gaat bekritisieren, mogelijk omdat de leerlingen vragen of het goed is wat ze hebben, leidt dat echter niet tot de kernactiviteit van het verant-

Regulerende activiteiten	Mentale activiteiten	Kernactiviteiten
A vraagt B werk te tonen	B wordt zich bewust van eigen werk	B toont eigen werk
A vraagt B werk uit te leggen	B denkt na over eigen werk	B legt eigen werk uit
A bekritiseert B's werk	B denkt na over A's kritiek	B verantwoordt eigen werk
	B denkt na over verantwoording	
	B bekritiseert eigen werk	B reconstrueert eigen werk

tabel 1

DE NIEUWE TI-84 PLUS CE-T

LICHT, SLANK EN GEMAKKELIJKE EXAMENSTAND



Docentenaanbieding
Voor €69,- machine
plus TI-SmartView
software voor beamer
of digibord

- Oplaadbare batterij en lader meegeleverd; lagere kosten* en beter voor milieu
- Examenstand / geheugenblokkering (verplicht tijdens CE 2016)
- Volledige functionaliteit van de TI-84 Plus (Silver Edition)
- Kleurenscherm met backlight en hoge resolutie (240 x 320 pixels)

* Je hoeft geen batterijen meer te kopen.
Dat maakt de TI-84 Plus CE-T ongeveer even duur als de TI-84 plus met zwart-wit scherm!

Profiteer nu van de docentenaanbieding.

Ga naar www.education.ti.com/nederland en

download het aanbiedingsformulier (onder het kopje service).



woorden. De leerling wordt namelijk niet geprikkeld het eigen werk te verantwoorden, maar ziet de docent als autoriteit, dus kritiek betekent 'ik heb het fout'. Grote kans dat de leerling direct zijn werk gaat reconstrueren, zonder inzicht wat er aan het eigen denkwerk schortte. Dat leidt niet tot niveauverhoging. Regulerende hulp zou dus het beste kunnen stoppen bij het vragen naar en uitleg vragen van het denkwerk van de leerlingen. Wellicht brengt dat ook voldoende ideeën naar boven opdat de groep weer verder kan.

Wat is te doen voor een docent?

Proceshulp is vreemd voor een docent. Als leerlingen vast komen te zitten, wil je ze verder helpen en dan richt je je al gauw op de wiskundige inhoud van het probleem dat ze je voorleggen. Om dan eerst na te gaan of ze elkaars inbreng wel ten volle benut hebben, kan geforceerd overkomen. Maar misschien is dat gewoon wennen voor de docent en de leerlingen. Eigenlijk wil je dat ze alleen in het uiterste geval, dus als ze echt elkaars inbreng ten volle benut hebben, jouw hulp gaan vragen; zaak dus om dat voortdurend duidelijk te maken. Makkelijk is dat niet, wel nodig.

Noten

- [1] Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2007). *Niveauverhoging door samenwerkend leren*. Amsterdam, Vossiuspers UvA. Zie <http://dare.uva.nl/document/359623>.
- [2] Palha, S. (2013). *Shift-problem lessons: Fostering mathematical reasoning in regular classrooms*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.
- [3] Pijls, M. (2007). *Collaborative mathematical investigations with the computer: Learning materials and teacher help*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Over de auteur

Rijkje Dekker is senior onderzoeker van het wiskundeonderwijs aan de Universiteit van Amsterdam/Interfacultaire Lerarenopleidingen. Zij onderzoekt de invloed van interactie tussen leerlingen op het leren van wiskunde. Meer informatie en publicaties zijn te vinden op haar homepage: www.uva.nl/profiel/r.dekker. De publicatie van Dekker en Elshout-Mohr wordt op verzoek toegestuurd. E-mailadres: r.dekker@uva.nl

MEDEDELING



HOE KIJK JE EEN EXAMEN NA?

Dit jaar zijn er weer drie bijeenkomsten waar de examens van havo en vwo centraal staan, en een voor de vmbo-examens. Examens nakijken is een actueel thema vanwege de nieuwe richtlijnen voor havo en vwo van het CvTE. Deze nieuwe richtlijnen zullen zeker ter sprake komen. De bijeenkomst is echter geen podium om deze richtlijnen ter discussie te stellen. We bespreken hoe we ze, net als het correctievoorschrift, moeten toepassen. Aan de hand van oude examenopgaven, gecombineerd met leerlingewerk, bespreken we hoe nagekeken kan worden. Docenten met weinig ervaring en docenten met veel ervaring praten hier samen over. Op deze manier helpen we elkaar de verantwoordelijke klus van het examen nakijken uitvoerbaar te maken. De cursussen voor havo-vwo vinden plaats in Amsterdam, Eindhoven en Veenendaal. Voor het vmbo wordt de cursus alleen in Veenendaal gehouden. De cursussen zijn op donderdag 16 april 2015 van 16.00-18.00 uur. We sluiten af met een eenvoudige maaltijd. Voor leden is deelname gratis. Niet-leden betalen € 20,00. Nadere gegevens volgen op www.nvww.nl. Contactpersoon is Ab van der Roest.

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



Onderwijs en onderzoek profiteerden enorm van de hausse aan financieringsmogelijkheden die de Koude Oorlog met zich meebracht. Regeringen waren zich bewust van de essentiële rol van onderwijs in de vorming van burgers. Dat ging dan zowel om het aanleren van *de* juiste ideeën omtrent burgerschap, als om het selecteren van de beste mensen voor belangrijke posities in het onderzoeksveld. Het eerste diende vooral voor het bewaren of herstellen van de sociale cohesie, gericht tegen de invloed van het communisme. Het tweede was vooral gericht op het bewaren van de technologische voorsprong op de Russen. In het Europa van kort na de bevrijding werden deze doelen voornamelijk met behulp van het Marshallplan uitgevoerd. Die gelden werden vanaf 1948 beheerd door de Organisatie voor Economische Samenwerking in Europa (OESE).

Evenals in de Verenigde Staten waren binnen de OESE de wis- en natuurkundigen duidelijk in beeld. Zowel in het onderzoek naar atoomenergie als in het onderzoek naar rakettechnologie kwam de moderne wis- en natuurkunde van pas. Voor beide waren de nieuwe ontwikkelingen in elektronische rekencapaciteit van belang. Ook daar waren wiskundigen veel bij betrokken. In de academische wiskunde had in de decennia voor de oorlog een toenemende abstractie plaats gevonden. Ringen, lichamen, groepen, tensoren en matrices hadden de plek ingenomen van de negentiende-eeuwse meetkunde met hulplijntjes en noest rekenwerk. Vanuit OESE-kringen had men veelal contact juist met die academici, en zodoende was de vraag al vrij snel of het niet zou lonen om die moderne wiskunde in het voortgezet of lager onderwijs te introduceren. Zowel in de Verenigde Staten als in Europa werd onderzocht hoe de moderne wiskunde in het onderwijs geïntroduceerd kon worden. In 1959 had de OESE te Royaumont een conferentie van wiskundigen bijeengeroepen met als expliciete opdracht om te kijken naar mogelijkheden om de moderne wiskunde in te voeren in het middelbaar onderwijs. Ten opzichte van andere academische disciplines was dit relatief laat, vermoedelijk omdat er binnen de wiskunde juist door het onderwijsveld veel werd geëxperimenteerd met zowel curriculum als vorm.

Tijdens deze conferentie was België vertegenwoordigd door de secretaris-generaal tot hervorming van het secundair onderwijs: dr. J. van Hercke. Die wist een flink deel van de OESE-subsidies naar zich toe te trekken voor het ontwikkelen van een nieuw wiskunde-curriculum met de bijbehorende bijscholingscursussen voor docenten. Eén probleem werd internationaal ervaren: veel docenten hadden de nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde niet gevolgd en dienden dus te worden bijgeschoold. Vanuit de Verenigde Staten was bekend dat juist het bijscholingsprogramma voor docenten belangrijk was, wilde een nieuw curriculum kans van slagen hebben. In goed Vlaams werd dit bijscholingsprogramma onder de naam van 'perfectioneringscursussen' uitgevoerd. Van 25 tot en met 31 augustus 1960 werd de eerste perfectioneringscursus gehouden, georganiseerd te Brussel door het Belgische ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur. Van 1960 tot en met 1963 werden er vier van deze cursussen gegeven. Het idee achter de Belgische



figuur 1
Wiskunde in de 20ste eeuw, deel 1 (1960)
titelblad

perfectioneringscursussen was dat docenten bekend moesten worden gemaakt met de moderne wiskunde. Eerst daarna kon worden nagedacht over of en hoe lessen of een curriculum vorm zouden kunnen krijgen – dat kon in verschillende landen ook anders uitgewerkt worden, was de gedachte. Docenten werden dus getraakteerd op series hoorcolleges over nieuwe onderwerpen. Verzamelingen en structuren waren het thema van alle lezingen, want die werden beschouwd als de belangrijkste bouwstenen van de moderne wiskunde. Zo spraken de Leuvense hoogleraar Alfons Borgers en de Brusselse hoogleraar George Papy uitvoerig over verzamelingenleer; in het tweede en derde jaar zouden Papy en Jean Dieudonné de verzameling-theoretische taal toepassen in de groepentheorie en lineaire algebra. Ook de Utrechtse hoogleraar Van der Blij en de Eindhovense prof. dr. van Albada traden op als sprekers over onderwerpen in de topologie en moderne analyse. Toch waren het niet alleen zuiver theoretische onderwerpen die werden behandeld. Ook de mathematische statistiek kwam aan bod in bijdragen van dr. J. Teghem. In de cursussen zou hij uitvoerig ingaan op Markovprocessen. In het vierde jaar was er een bijdrage over machinale bewijsvoering, vooral gericht op inzicht in de logische methoden die op dat moment gebruikt werden om elektronische machines aan te sturen. De OESE had diep in de buidel getast voor de wiskundigen. Niet alleen werden reis- en verblijfskosten voor alle aanwezigen goeddeels gedekt, tevens werden van alle lezingen teksten geproduceerd die in Duits, Frans en Nederlands werden vertaald en uitgegeven. Voor een klein bedrag, alleen bestemd om de drukkosten te dekken, waren die bundels vervolgens verkrijgbaar bij het secretariaat-generaal. Onder de 21 Nederlandse deelnemers van de eerste cursus waren de wiskundedocenten W.J. Brandenburg

en W.P. Thijssen. Zij waren enthousiast over hetgeen ze hadden gehoord en deden in *Euclides* uitvoerig verslag van hun bevindingen. Blijkbaar vonden ze dat het fraaie Vlaamse woord 'perfectioneringscursus' een Nederlandse vertaling verdiende: de titel van hun twintig pagina's tellende verslag luidde 'Vervolmakingscursussen'. Uitvoerig behandelden zij een aantal van de bijdragen inhoudelijk. Qua sfeertekening moesten de lezers van *Euclides* het indertijd doen met een kort verslag van de slotzitting op woensdag om 14 uur. Daarin had de secretaris-generaal nogmaals het doel van de cursus benadrukt. Vervolgens had één van de Luxemburgse deelnemers de organisatie bedankt met een wiskundige kwinkslag: Hij 'hoopte dat er structuur in de verzameling van aanwezigen zou komen, die zou leiden tot groot succes in het toekomstig onderwijs.' Ook de boeken (syllabi) die uit de perfectioneringscursussen voortkwamen, werden allevier door Piet Vredenduin in *Euclides* besproken. Hij toonde zich een enthousiast voorstander van de cursussen. Hij vond de boeken 'een schat aan wetenswaardigheden' bevatten. Hij besprak de delen korter of langer, met kritische noten, maar steeds weer positief. Wie de publicaties met felgekleurde kaften doorbladert, krijgt al snel een idee van de inhoud van de cursussen. De meeste wiskundedocenten vandaag de dag zullen zich na een bezoek aan de studiedag van de vereniging niet minder 'vervolmaakt' voelen.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl



figuur 2
Wiskunde in de 20ste eeuw, deel 2 (1961)
titelblad



figuur 3
Wiskunde in de 20ste eeuw, deel 3 (1962)
titelblad

HET FIZIER GERICHT OP...

NASCHOLING REKENEN MBO

Vincent Jonker
Monica Wijers

In Flizier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering werpen Vincent Jonker en Monica Wijers een korte blik op de problemen van rekendocenten in het mbo.

Rekenen in het mbo

In 2010 is besloten om een centraal ontwikkeld examen (COE) rekenen, gebaseerd op het referentiekader rekenen^[1], af te nemen in het mbo. Al snel werd duidelijk dat dit een behoorlijk effect zou hebben op het onderwijs in het mbo. Op niveau 4 moet het rekenniveau 3F behaald worden, voor de niveaus 2 en 3 is rekenniveau 2F verplicht gesteld. De afgelopen jaren hebben mbo-instellingen hun rekenonderwijs op de rails gekregen. Er zijn rekendocenten aangesteld, methodes aangeschaft, en men heeft de eerste stappen gezet richting verdere professionalisering van docenten en andere betrokkenen (*remedial*



figuur 1
Een rekenvraagstuk over inhoud. Voorbeeldexamen rekenen 2F (2012).

Hogeschool  van Arnhem en Nijmegen



'De master heeft mijn blik verbreed en ik voel mij beter. Dat heeft een positief effect op de leerlingen.'

Word 1^e-graads docent Wiskunde bij de HAN!

Ontwikkel u op masterniveau tot zelfstandig docent in de bovenbouw havo/vwo en verdiep uw vakspecifieke kennis. Leer vernieuwingen binnen het wiskunde-onderwijs concreet te ontwerpen en in te voeren. Als 2^e-graads docent Wiskunde kunt u in september bij de HAN van start met de Master Leraar Wiskunde. Een master bij de HAN, meer dan een goed plan.

START IN SEPTEMBER 2015

Vraag een adviesgesprek aan:
T (024) 353 06 00
E masters@han.nl

MAAK
GEBRUIK VAN
DE LERAREN-
BEURS!

Programma

- Uitbreiding vakkennis op basis van de landelijke kennisbasis
- Vakdidactische vernieuwingen in het V.O. per 2015
- Praktijkgericht onderzoek
- Masterproject: vernieuwing van leerarrangementen bovenbouw havo/vwo

▶ HAN

www.han.nl/master-leraar-wiskunde

MASTERPROGRAMMA'S

HAN Masteropleidingen zijn door de NVAO-geaccrediteerd

teaching, toetscommissies,...). Om de rekendocenten te ondersteunen, hebben diverse aanbieders nascholingsactiviteiten ontwikkeld, waarbij vakdidactiek centraal staat.

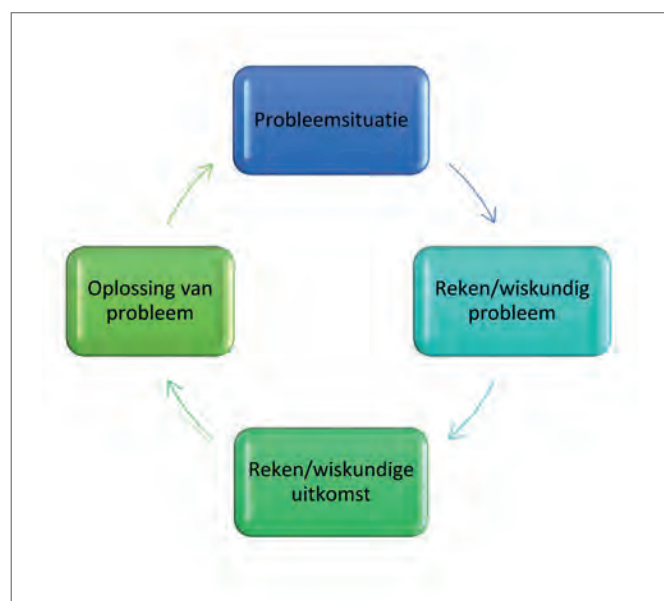
Vakdidactiek in de context van het mbo

Een rekendocent op het mbo heeft vaak geen vooropleiding rekenen of didactiek, en zal zich dit meestal in korte tijd en met de harde leerschool van volle klassen eigen moeten maken. De grootste uitdagingen bij het geven van rekenen in het mbo zitten bij de onderwerpen verhoudingen/procenten en meten (vooral het omrekenen van eenheden) en natuurlijk bij het bieden van goede ondersteuning bij de basisvaardigheden uit het domein getallen. Een ander belangrijk aspect waar studenten en docenten problemen ervaren, is het leren omgaan met contextproblemen waarin het gaat om rekenen in een concrete situatie. Dit type opgaven vormt het grootste aandeel in rekentoetsen en –examens: zo’n 70%. Het is belangrijk voor rekendocenten om zicht te krijgen op hoe dit type vraagstukken is opgebouwd, welke kennis en vaardigheden nodig zijn bij het oplossen en wat dat betekent voor het onderwijzen ervan. Ter illustratie een vraagstuk, zie figuur 1.

De meeste rekendocenten op het mbo zullen geen moeite hebben met bovengenoemd rekenprobleem, hun studenten echter wel. De docenten moeten in staat zijn hier adequaat mee om te gaan. Het feitelijke uitrekenen van de inhoud ($l \times b \times h$) is daarbij slechts één aspect van het genoemde oplossingsproces, zie figuur 2.

Andere zaken die aan bod moeten komen bij het behandelen van een dergelijk probleem zijn bijvoorbeeld:

- de vertaling van de probleemsituatie naar een rekenwiskundig probleem. Herkennen de mbo-studenten dat het hier om een inhoudsberekening gaat? Hebben zij de formule voor de inhoud van een balk paraat?



figuur 2 Stappen in het oplossen van een rekenvraagstuk.

- als je als mbo-student dan weet wat je moet doen, hoe werk je dan toe naar een reken/wiskundige uitkomst? Reken je eerst de lengtematen om naar decimeters en bereken je dan de inhoud in kubieke decimeters en dus in liters? Of bereken je eerst de inhoud met de gegeven afmetingen in meters en reken je daarna de kubieke meters om in liters? Hierbij speelt voor de docenten de vraag: wat doen mijn mbo-studenten? Hoe hebben ze dit geleerd? Waar zitten moeilijkheden of eventueel hiaten in hun kennis?

In nascholingsprogramma's krijgen de rekendocenten onder andere achtergronden bij verschillende aanpakken van dergelijke vraagstukken, ze analyseren werk van hun eigen studenten, ze zoeken en krijgen informatie over de doorlopende leerlijn rekenen en oefenen in uitleggen.^[2] Mocht u op de hoogte willen blijven van ontwikkelingen in het rekenen in het mbo, dan kunt u gratis abonnee worden van de mbo-rekenbrief van de Universiteit Utrecht.^[3]

Noten en verwijzingen

- [1] www.fisme.science.uu.nl/wiki/index.php/Referentiekader_rekenen
- [2] Het FI biedt mbo-reken-nascholing aan via www.opleidingrekenenmbo.nl. Daarnaast is wellicht illustratief te zien dat er landelijk is nagedacht over een raamwerk scholing en nascholing rekendocent op dit vlak.^[4]
- [3] www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/mboreken-tips/
- [4] Van Groenestijn, M., & Jonker, V. (Eds.). (2014). *Raamwerk scholing en nascholing rekendocent vo/mbo. Bouwstenen voor deskundig rekenonderwijs in VO en MBO*. Utrecht: Hogeschool Utrecht/Universiteit Utrecht/ELWleR. www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28256/

Hoogenboezem, M., Jonker, V., Wijers, M., & Munk, F. (2014). Rekenvaardigheden toetsen in een mbo koksopleiding. *Volgens Bartjens*, 34(2), 35-37.

Jonker, V., Wijers, M., Stelwagen, R., & Munk, F. (2014). Een opgeleide rekendocent; Praktijkonderzoek rekenen in het mbo. *Volgens Bartjens*, 33(5).

Keijzer, R. (2014). Rekendocent in vo en mbo – beschouwing naar aanleiding van een studieochtend rond het Raamwerk rekendocent in vo en mbo. *Rekenwiskunde-onderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 33, 83-85.

Over de auteurs

Vincent Jonker en Monica Wijers zijn beide werkzaam aan de Universiteit Utrecht (bij het Freudenthal Instituut en bij het Centrum voor Onderwijs en Leren). Ze zijn betrokken bij diverse ontwikkel- en onderzoeksprojecten voor rekenen/wiskunde in po, vo en mbo.

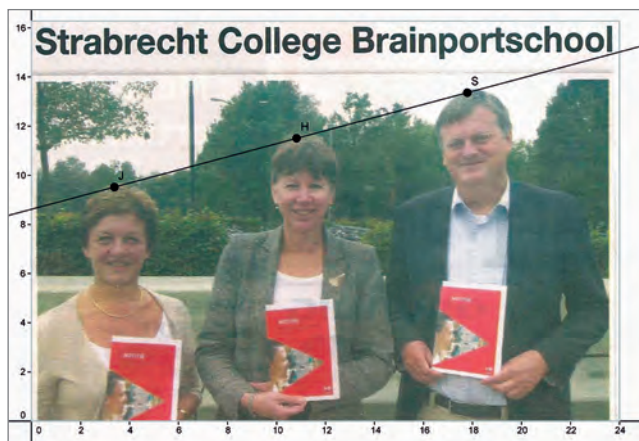
E-mailadressen: v.jonker@uu.nl, m.wijers@uu.nl

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

DE GRAZENDE GEIT

Jacques Jansen daagde drie schoolleiders uit tot het oplossen van een wiskundig probleem. De scholen hebben *problem solving* hoog in het vaandel staan en met hulp van de leerlingen hebben ze het probleem weten te kraken. Hoe kun je deze denkactiviteit aanpakken? En kunt u dat ook in uw klas?



figuur 1 De drie trotse schoolleiders van het Heerbeek College, Jan van Brabant en Strabrecht College, met toegevoegd assenstelsel en rechte lijn

Midden in het dorp waar ik woon, ligt aan een pleintje een café met de illustere naam *In de Gammele Geit*. Met zonnig weer is het daar op het terras goed vertoeven. Als je het terras verlaat, u raadt het al, voelt u zich enigszins... Ik wist echter niet dat er een klassiek wiskunde-probleem bestond met de vergelijkbare naam: *De grazende geit*.

Via het blad *EOS*^[1] kwam ik bij een Vlaamse medewerker, wiskundige Dirk Huylebrouck, die in een radioprogramma de luisteraars op de maandagmorgen opzadelt met een wiskunde-probleem. Een van die problemen, in het Vlaams gesteld, gaat als volgt:

Een geit wordt met een touw vastgemaakt aan een paal die staat op de omtrek van een rondpunt gevuld met gras. Hoe lang moet het touw zijn zodat de geit precies de helft van het gras in de cirkel kan opeten?

Voelt u zich uitgedaagd? Lees even niet verder en probeer dit op te lossen.

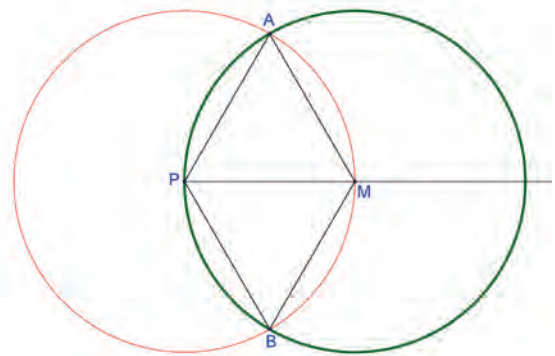
Brainportschool

Op een woensdag in oktober werd in een plaatselijk wekelijks bulletin vermeld dat drie scholen uit de regio

zich Brainportschool mogen noemen. Zij willen op hun scholen het onderwijs nog aantrekkelijker maken en hebben de volgende vijf speerpunten:

- omgevingsgericht onderwijs;
- vergroten van probleemoplossend vermogen (*problem solving*);
- kritisch denken;
- creativiteit;
- samenwerken.

Hoewel figuur 1 anders doet vermoeden, gaat het niet om *rechtlijnig* denken, maar om *problem solving*. Het leek mij aardig om de drie schoolleiders uit te dagen met het hiervoor genoemde probleem, waarbij de vijf speerpunten aan de orde komen. Wij verlangden niet alleen een lengte van het touw op drie decimalen nauwkeurig, maar ook, waar het echt om gaat, een uitwerking waarbij helder en duidelijk de gepropageerde vaardigheden in beeld komen. De locatiedirecteur van het Heerbeek College vroeg al snel of ze hulp troepen in mocht schakelen. Natuurlijk mocht ze dat. Eén van de speerpunten was toch *samenwerking*. De schoolleiders mochten hulp invoeren van hun eigen schoolpersoneel of van hun leerlingen en zij mochten de grafische rekenmachine inzetten. Er werd fanatiek gewerkt.



figuur 2 Twee even grote cirkels; de geit begraast minder dan 50% van de weide

Het probleem nader bekeken in de les

De grazende geit is een lastig probleem. Hoe kun je hier met je leerlingen vat op krijgen? Ten eerste vraagt dit probleem na goed lezen om een duidelijke schets. Modelleren dus. Het rondpunt met gras kan door een cirkel voorgesteld worden. Daarna moet je op het idee komen van een tweede cirkel met een middelpunt op de rand van de grascirkel. Let op, geit en touw worden geabstraheerd tot een punt en een straal van de geitcirkel. Het kan bij de leerlingen discussie opleveren. Prima toch? De vraag is nu: moet je de geitcirkel groter nemen of juist kleiner dan de grascirkel? Met uw leerlingen is het raadzaam om een paar concrete situaties te bekijken om een gevoel te krijgen voor die vijftig procent.

Eerste voorbeeld: twee even grote cirkels

Eerst maar eens de situatie waarin de twee cirkels even groot zijn. Met punt P wordt de plaats van de paal aangegeven. Punt M is het middelpunt van de groene weide. Zie figuur 2. Het is handig om voor de straal van de ronde weide 1 te nemen (verstandige keuzes maken hoort ook bij modelleren). De oppervlakte van de weide is dan π . Punten A en B zijn de snijpunten van beide cirkels.

Merk op dat we aan het plaatje al kunnen zien dat het minder dan 50% zal worden: aangezien de geit niet verder dan punt M komt, bestrijkt hij nooit de helft van de groene cirkel of meer. Desondanks is het instructief om de berekening alvast uit te voeren in een situatie die minder ingewikkeld is dan we straks tegenkomen. Omdat driehoek PAM gelijkzijdig is, geldt dat de oppervlakte van driehoek PAM gelijk is aan

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{1}{4} \sqrt{3}.$$

De overlapping van de

cirkels bestaat uit vier keer een taartpunt van $1/6$ cirkel, waarbij we de twee gelijkzijdige driehoeken elk dubbel tellen. Dus de oppervlakte hiervan is

$$2\left(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

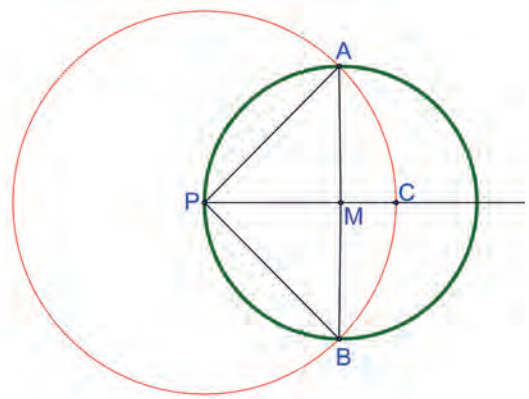
De overlapping

beslaat dus $\frac{\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pi} \cdot 100\% \approx 39,1\%$ van de groene cirkel.

Tweede voorbeeld: punten A , B en M liggen op één rechte lijn.

Nog een concrete situatie: nu leggen we punten A , B en M op een rechte lijn. Punt C is snijpunt van halflijn PM met de geitcirkel, zie figuur 3. (In figuur 2 viel punt C samen met middelpunt M .) Het is duidelijk dat hier meer dan de halve cirkel bereikt wordt door de geit, maar ook hier kan het geen kwaad om het nog even precies uit te rekenen.

Merk op dat geldt: $AP = \sqrt{2}$. De overlapping bestaat nu uit de helft van de groene cirkel plus het cirkelsegment



figuur 3 A , B en M op een rechte lijn; de geit begraast meer dan 50% van de weide

CAB . De oppervlakte van de laatste kunnen we uitrekenen door de taartpunt PAB te nemen en daar de driehoek PAB vanaf te halen. Zo komen we voor de oppervlakte van de overlapping op $\frac{1}{2}\pi + \text{Opp. segment}$

$$CAB = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 - 1 = \pi - 1.$$

Het percentage van de weide dat overlapt met de

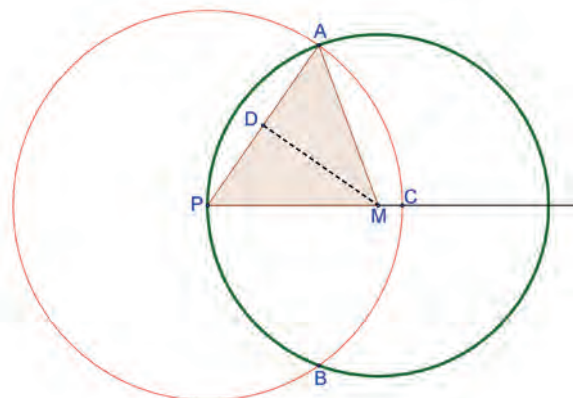
geitcirkel is dus $\frac{\pi - 1}{\pi} \cdot 100\% \approx 68\%$. Conclusie: de lengte

van het touw ligt tussen 1 en $\sqrt{2}$.

Analyse van aanpak van algemene situatie

Nu bekijken we het algemene geval. Na de oriëntatiefase gaan we nu het probleem oplossen volgens de stappen:

- goed lezen;
- tekst omzetten in juiste schets (modelleren);
- letters plaatsen (labelen);
- keuzes maken;
- vergelijking opstellen;
- vergelijking proberen op te lossen;
- terugkoppelen.



figuur 4 De algemene situatie; de geit moet nu precies 50% van de weide gaan begrazen

We weten dankzij de concrete voorbeelden dat punt C rechts komt te liggen van middelpunt M , zie figuur 4. De straal van de grascirkel stellen we weer gelijk aan 1. De straal van de geitcirkel (die willen we berekenen) noemen we r . Het is handig om de oppervlakte van driehoek APM te weten. Voor de hoogtelijn uit top M is het prettig om het midden van lijnstuk AP een naam te geven, punt D dus. Noem verder $\angle PMD = \alpha$ waarbij α in radialen is uitgedrukt. Het is prettiger om met radialen te werken (hier maken we weer een handige keuze). De oppervlakte van de overlapping moet $\frac{1}{2}\pi$ zijn. Vanwege symmetrie bekijken we alleen de overlapping boven lijn PC ; die moet $\frac{1}{4}\pi$ zijn.

Merk op:

- $AP = r$ en $PM = AM = 1$;
- $PD = \frac{1}{2}r = \sin(\alpha)$, dus $r = 2\sin(\alpha)$;
- $MD = \cos(\alpha)$.

We stellen nu de volgende vergelijking op en werken deze verder uit:

Oppervlakte overlapping boven $PC = \frac{1}{4}\pi$.

Opp. cirkelsector PMA + Opp. cirkelsector APC – Opp driehoek $APM = \frac{1}{4}\pi$

$$\frac{2\alpha}{2\pi} \cdot \pi + \frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2}r \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{4}\pi$$

$$\alpha + \frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{2\pi} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (\sin(\alpha))^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{4}\pi$$

$$\alpha + (\pi - 2\alpha) \cdot (\sin(\alpha))^2 - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{4}\pi.$$

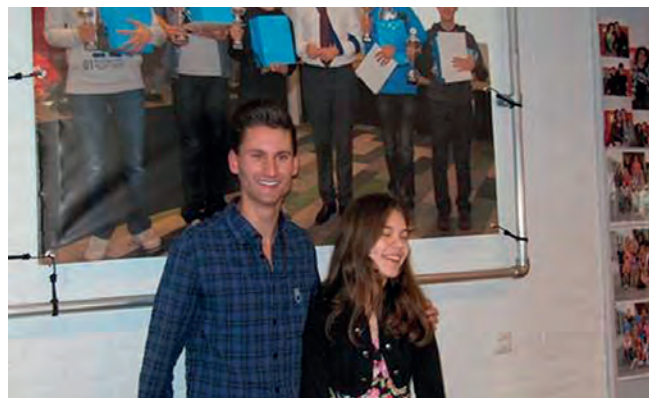
We verkrijgen een transcendente vergelijking. Bij een andere aanpak is het mogelijk om een eenvoudiger vergelijking te krijgen, maar het blijft wel transcendent. Met behulp van de GR kunnen we benaderingen verkrijgen. We vinden: $\alpha = 0,61794846$ en $r = 1,159$. De lengte van het touw is dus 1,159 maal de straal van de ronde weide.

De winnende school

We kregen al snel diverse uitwerkingen binnen, waaronder die van Ietje Hermans, leerling uit 5 vwo van het Heerbeek College in Best, zie figuur 5. Haar uitwerking is te vinden op vakbladeuclides.nl/905jansen2. De aanpak van Ietje is vergelijkbaar met wat wij hierboven hebben gedaan. Interessant is wel dat ze opmerkt dat de benadering verkregen wordt via de Newton-Raphson methode. Bij Ietje is het gebruik van de grafische rekenmachine kennelijk niet meteen een automatisme. Ietje Hermans en het Heerbeek College hebben met deze mooie uitwerking de strijd tussen de scholen gewonnen. Ietje hebben we beloond met twee wiskundeboeken.^[2]

Waar komt het probleem vandaan?

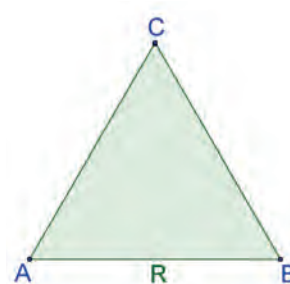
Een variant van *de grazende geit* heeft gestaan in een uitgave van *The American Mathematical Monthly* uit 1894. Tot 1900 was het een gewild probleem.



figuur 5 Ietje Hermans en haar docent, de heer Habraken

A circle containing one acre is cut by another whose center is on the circumference of the given circle, and the area common to both is one-half acre. Find the area of the cutting circle.

Een vereenvoudigd probleem uit 1917 is van Henry Ernest Dudeney (1857-1930), een Engelse schrijver en wiskundige die gespecialiseerd was in puzzels en wiskundige games. Zie figuur 6.



figuur 6 Gegeven is een driehoekig stuk weiland ABC . Driehoek ABC is gelijkzijdig met zijdelengte R . Op een van de hoekpunten is een geit vastgebonden met een touw ter lengte r . Hoe groot moet r zijn opdat de geit de halve oppervlakte van het weiland kan begrazen?

Tot slot

Denkt u het probleem van *de grazende geit* op te kunnen lossen met analytische meetkunde? Wij horen het graag. U kunt op uw beurt uw leerlingen uitdagen met de volgende vraag: Hoe lang moet het touw zijn zodat de geit buiten de ronde weide precies de helft van de oppervlakte van de weide kan begrazen? Met een voldaan gevoel kunt u dan plaatsnemen op het terras van *In de Gammele Geit*.

Noten

- [1] <http://eoswetenschap.eu/magazines/Eos>
- [2] Boeken voor Ietje: Jeanine Daems & Ionica Smeets, *Ik was altijd heel slecht in wiskunde*; Sam Loyd, *More Mathematical Puzzles, Selected and Edited by Martin Gardner*.



vakbladeuclides.nl/905jansen2

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

DE REKENTOETS HALEN IN HET VMBO?

Frank van Merwijk
Anita Lek

ZEKER WETEN!

Frank van Merwijk en Anita Lek geven, vooral voor het vmbo, effectieve tips voor het invullen van de rekenles. Dit doen ze naar aanleiding van hun ervaringen met nascholing in rekenen in het vo en mbo.

Wat is de bedoeling?

Voor een doorsnee rekendocent uit het vo en mbo moeten de Haagse beschouwingen en beslissingen over rekenen en de toets een verwarrende indruk maken. Eerst werd de rekentoets opgenomen in de zak-/slaagregeling. Vervolgens werd besloten dat de rekentoets voorlopig geen deel zou uitmaken van die zak-/slaagregeling, maar vanaf 2015–2016 wél. Onlangs hebben de VO-raad en de Algemene Onderwijsbond (AOB) het standpunt ingenomen dat de rekentoets definitief niet in de zak-/slaagregeling moet worden opgenomen. Daarnaast is er de richtingenstrijd die de rekenexperts tot in de Tweede Kamer met elkaar uitvechten. Realistisch en functioneel tegenover mechanistisch en kaal rekenen.

In juni 2014 is het rapport van de commissie Bosker uitgekomen. Deze commissie ziet onder andere grote taligheid en complexiteit bij de rekenopgaven en geeft het advies om te onderzoeken waarom de cesuur te hoog is voor vmbo-bb en -kb. Daarbij adviseert zij om de cesuur voorlopig niet vast te leggen. Andere aanbevelingen uit het rapport zijn: verbeter de transparantie en openbaarheid van de toetsen, onderzoek de mogelijkheden van een andere toetsvorm en andere scoringsmogelijkheden en bied leerlingen meer mogelijkheden om te slagen voor een referentieniveau en om te slagen voor een hoger referentieniveau.^[1] Staatssecretaris Dekker heeft de conclusies van de commissie overgenomen, maar ook meegedeeld

dat aan de afgesproken maatregelen niet wordt getornd. Al deze ophef leidt af van waar het de minister bij monde van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, ook wel de commissie Meijerink genoemd, om te doen was: een algemene niveauverhoging op het gebied van rekenen, vanaf de basisschool tot en met hun eindonderwijs. Doorlopende leerlijnen van de vier rekendomeinen van basisschool, via vo en vmbo, naar mbo en naar hoger onderwijs zouden een middel zijn om dat doel te bereiken. Uiteindelijk zouden alle betrokken leraren op de hoogte moeten zijn van de nieuwste rekendidactische inzichten: dat zou vervolgens leiden tot effectief rekenonderwijs met liefde en plezier.

De 2F-rekentoets

Scholing op rekendidactiek is hard nodig om de leraren in vo en mbo op de hoogte te brengen van de rekendidactische ontwikkelingen van de laatste twintig jaar, zo leert onze ervaring. Veel docenten grijpen in hun praktijk terug op oude opvattingen over hoofd- en handig rekenen, over cijferen en het gebruik van de rekenmachine. Voor het domein verhoudingen, met daarin opgenomen de breuken, geldt hetzelfde. Zo is aan lang niet iedere vo-docent bekend dat de rekenregels voor vermenigvuldigen en delen van breuken al bijna twintig jaar niet meer in de kerndoelen van het basisonderwijs staan. Veel docenten

De in de Rekentoetswijzer genoemde voorbeelden uitgewerkt met 'handig rekenen'

$268 + 346 \Rightarrow 268 + 300 = 568; 568 + 40 = 608; 608 + 6 = 614$. Een lege getallenlijn erbij tekenen (geleerd op de basisschool) ontlast het werkgeheugen.

$7 \times 168 \Rightarrow 7 \times 100 + 7 \times 60 + 7 \times 8 = 700 + 420 + 56 = 1176$.

$36 \times 67 = 18 \times 134 = 9 \times 268$ (verder: vergelijkbaar met hierboven).
Of: $30 \times 67 + 6 \times 67$

$912 : 16 \Rightarrow 10 \times 16 = 160 \Rightarrow 5 \times 160 (= 50 \times 16) = 800; 5 \times 16 = 80;$
 $912 - 880 = 32$, daar zit nog twee keer 16 in. Samen 57.
Of $456 : 8 = 400 : 8 + 56 : 8 = 50 + 7 = 57$, maar dit vinden ze meestal lastig.

$5 \times 3,7 = 5 \times 3 + 5 \times 0,7$

Contextloze opgaven 2F-voorbeeldtoets (zonder rekenmachine)

1. $39 + 66 + 41 =$
2. $708 - 309 =$
3. $448 : 8 =$
4. $4,05 + 4,05 =$
5. $5,20 - 1,18 =$
6. $\frac{1}{4}$ deel is%
7. $15 \times 26 + 5 \times 26 =$
8. $\frac{3}{4}$ deel is%
9. 40 % van 3,50 ?
10. $4,75 \times 4 =$
11. 2831 op duizendtal afronden
12. $9 - 1,98 =$
13. $0,70 : 10 =$
14. Wat is de waarde van 1 in 5198?

figuur 1

figuur 2

hebben geen kennis van de didactiek van het cijferen, zoals die eind vorige eeuw ontwikkeld is en op de basisschool in de praktijk gebracht is. In dit artikel doen we uitspraken over de ideale rekenles op het vmbo, met de bedoeling de leerling zeker te maken en zelfvertrouwen te geven op het gebied van rekenen. Slagen voor de toets ligt daarna in het verschiet. Er is veel vraag naar de opzet en inrichting van rekenlessen en rekenbegeleiding. Kijkend naar de toetswijzer rekenen op 2F-niveau en de voorbeeldtoetsen van het Cito word je inderdaad al snel wijzer. Het 2F-niveau is vastgelegd voor het vmbo en mbo-1, -2 en -3. In de voorbeeldtoets rekenen 2F 2015 komen twee soorten opgaven voor: de contextopgaven en de contextloze opgaven (kale opgaven). De contextopgaven zijn functioneel, dat wil zeggen ontleend aan het leven van alledag. Daarbij is altijd een rekenmachine op het scherm beschikbaar. Die rekenmachine is overigens niet bij elke opgave nodig. Het is de bedoeling dat de leerling zelf besluit of hij de rekenmachine gaat gebruiken of niet. De contextloze opgaven moeten zonder rekenmachine worden uitgerekend.

Cijferen?

In de Rekentoetswijzer 2F 2015 staat onder andere: 'Niet alle contextloze opgaven zijn per se oplosbaar met een handig rekenstrategie'. De genoemde voorbeelden zijn echter wel oplosbaar met een handige rekenstrategie, zie figuur 1.

Ook uit de kale opgaven van de voorbeeld-rekentoets blijkt dat daarbij cijferen (onder elkaar optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en staartdelen) toch niet echt nodig is: de opgaven zijn stuk voor stuk met een eenvoudige handig rekenprocedure op te lossen, zie figuur 2.

Omdat de leerling bij de contextopgaven altijd een rekenmachine ter beschikking heeft, is cijferen ook bij deze opgaven niet nodig. Hoewel veel rekenmethodes voor het vo aandacht besteden aan cijferprocedures en er op de basisschool ook nog steeds aardig wat tijd aan besteed wordt, kan een rekendocent er voor kiezen daar met het oog op de 2F-toets geen aandacht aan te besteden. Dat scheelt een hoop onderwijstijd en is geheel in overeenstemming met de praktijk van alledag: rekenen met grote getallen doet iedereen op de rekenmachine. Schattend

Rekenlesideeën

Hieronder volgen een achttal rekenlesideeën met vermelding van de meest in het oog lopende kenmerken van goed rekenonderwijs:

- 1 De groep kan als geheel onderzoek doen naar situaties die voor henzelf belangrijk zijn: bijvoorbeeld zakgeld, hoeveel verdien je met een baan, hoeveel geef je waar voor uit? enz. De eerder genoemde onderwerpen kunnen de leerlingen het beste zelf aanreiken. Leerlingen gaan in groepen hun onderzoek uitvoeren. Eerst krijgen ze instructies over hoe je dit onderzoek aanpakt en hoe je de data kunt verwerken (zie figuur 3). Er zijn prachtige digitale middelen beschikbaar om tabellen om te zetten in allerlei soorten grafieken. Zie bijvoorbeeld *grafiektool.nl* of *mijngrafiek.nl*. Tot slot presenteren de leerlingen hun resultaten en interpretatie van het onderzoek.
- 2 Observeer bij een andere les (kookles, aardrijkskundeles) welke rekenonderwerpen aan de orde komen of kunnen komen. Maak eventueel foto's en laat deze zien in de rekenles. Maak er voorbeeldsommen bij. Laat daarna de leerlingen zelf sommen bedenken bij de voorbeelden. Principes: mathematiseren vanuit betekenisvolle realiteit, veel ruimte voor de eigen inbreng van leerlingen, verstrengeling van leerlijnen.
- 3 Doe een onderzoek met de rekenmachine of met hun eigen telefoon. Ruimte voor eigen inbreng van leerlingen, interactie en reflectie.
- 4 Grote getallen fascineren (net als hele kleine getallen overigens). Laat leerlingen zo groot mogelijke getallen maken, begin met 8 maak groter naar rechts of links en spreek het uit, ga zo verder: 82, 382, 3825 enzovoort. Modelleren en formaliseren (hier kan bijvoorbeeld de getallenlijn het model zijn), interactie en reflectie.
- 5 Gebruik de activiteiten van de *Grote Rekendag* voor groep 7 en 8. Dit zijn dikwijls uitdagende activiteiten waarbij leerlingen met elkaar aan de slag gaan. Bijvoorbeeld 'Meten te lijf' of de opdrachten over tijdsverschil bij de *Grote Rekendag* over Tijd. Gratis te downloaden: *DeGroteRekendag.nl*. Alle principes.
- 6 Kies activiteiten uit *Verder met Rekenen*. Een lespakket voor vmbo (bb) met als grootste doel: zelfvertrouwen aankweken en inzicht verwerven.^[3] Alle principes.
- 7 Stel regelmatig een opgave uit de oefentoets centraal (één opgave, niet de hele toets!). Bespreek deze met de leerlingen. Laat hen reageren: Is het begrijpelijk? Zou je deze opgave zelf ook ontwerpen? Hoe kan die opgelost worden? Belangrijk is dat leerlingen fouten mogen maken. Kunnen leerlingen na het oplossen van deze opgave variaties bedenken? Deze kunnen onderling opgelost worden, dat levert veel oefening en herhaling op. Interactie en reflectie.
- 8 Leerlingen maken met elkaar een boekje met rekenregels en -weetjes (rekenboekje). Belangrijk om hierbij foto's en tekeningen te laten maken. Hetzelfde geldt voor posters met belangrijke weetjes en begrippen. Bijvoorbeeld een groep leerlingen maakt een poster over procenten, een andere groep over breuken enzovoort. Modelleren en formaliseren, ruimte voor eigen inbreng van de leerlingen.

rekenen is daarbij van onschatbaar belang. En bij bovenstaande kale opgaven is het dus raadzaam om handig te rekenen. Maar bij leerlingen van vmbo-bb en -bk ontbreekt het helaas vaak aan zelfvertrouwen om dat met succes te doen.

Rekenen met breuken?

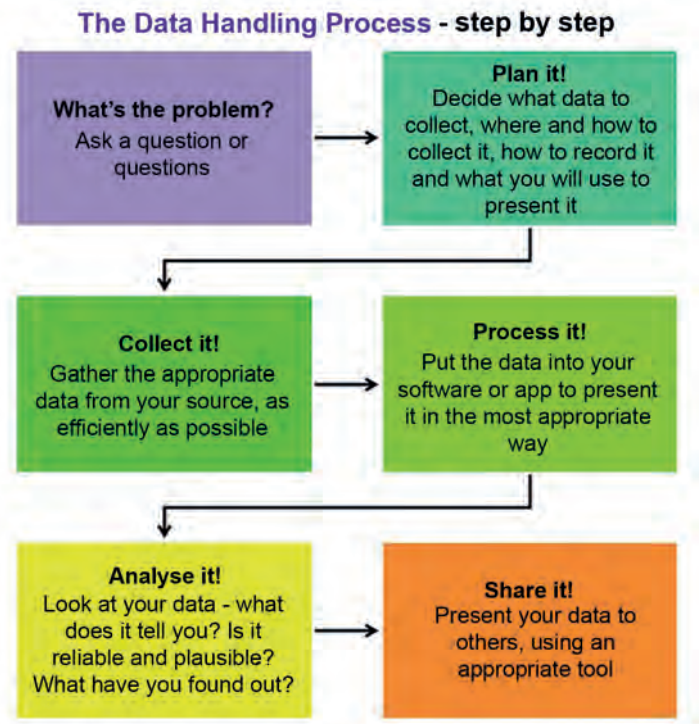
Breuken is naast cijferen ook een onderwerp waar misverstanden over bestaan. In het leven van alledag wordt niet met breuken gerekend. In de contextopgaven van de toets zie je ze daarom nauwelijks terug. Maar ook bij de contextloze opgaven komen ze alleen op heel elementair niveau aan de orde. Oefenen met de vier hoofdbewerkingen bij breuken kan dus ook grotendeels achterwege blijven. Waar moet in de rekenlessen op het vmbo het accent dan wel liggen?

Functioneel rekenen

Functioneel rekenen is het kernwoord bij de contextopgaven. Dit betekent dat het uitgangspunt in het vo dan ook moet zijn dat er functioneel gerekend wordt. Vooral voor leerlingen in het vmbo is het belangrijk, dat zij zekerder worden met rekenen, er ook plezier en gemak bij voelen en dat zij bij rekenen leren vertrouwen op hun 'gezonde verstand'. Succeservaringen zijn daar essentieel bij. Dat is bij veel vmbo-leerlingen niet vanzelfsprekend. Niet alle leerlingen beschikken over de automatismen die nodig zijn ter ondersteuning van het handig en schattend rekenen en het werken met de rekenmachine. Problemen uit de praktijk van alledag kunnen hen daarbij helpen. Dit uitgangspunt en vakdidactische inzicht leiden samen tot een formulering van de ideale rekenles.

De ideale rekenles

Marc van Zanten (2011)^[2] noemt vijf onderwijsleerprincipes van realistisch rekenen-wiskunde: mathematiseren vanuit betekenisvolle realiteit, modelleren en formaliseren, ruimte geven voor eigen inbreng, interactie en reflectie en verstrengeling van leerlijnen. De eerste twee, mathematiseren vanuit betekenisvolle realiteit en modelleren en formaliseren, vormen bij elkaar de drie niveaus. Die worden ook wel aangeduid met informeel, semiformeel en formeel. In het vo worden binnen wiskunde voor deze niveaus vaker de termen concreet, schematisch en abstract gebruikt. Het is belangrijk dat de rekenleraar over een repertoire van voorbeelden op de drie niveaus uit de vier domeinen van rekenen beschikt om deze in de les te kunnen inzetten. Leerlingen komen pas echt vooruit als ze ruimte voor eigen inbreng hebben en met elkaar in interactie kunnen zijn. Ze stimuleren elkaar bij het zoeken naar oplossingen. Terwijl ze met elkaar praten over het probleem en de oplossing, denken ze actief na. Zo komen ze bij zelfbedachte oplossingen op gedachten als: hebben we hier wat aan? zijn we goed bezig? kan het niet beter op een andere manier? klopt dit getal, deze oplossing wel? wat hebben we nu aan dit resultaat? hadden we dit



figuur 3

niet handiger kunnen uitrekenen? enzovoort. Al doende reflecteren ze dus. En het is denkbaar dat ze zo hun zelfvertrouwen ontwikkelen. Verstrengeling van leerlijnen zorgt voor verbinding tussen de verschillende onderwerpen, ook over de grenzen van de domeinen en soms van andere schoolvakken heen. Deze vijf principes zijn naar onze overtuiging kenmerken van goed rekenonderwijs. Daarnaast moet in elke les voldoende aandacht zijn voor verschillen tussen leerlingen en voor oefenen van de basale rekenvaardigheden. Het is aan te raden om in elke les kort de geautomatiseerde basisvaardigheden te oefenen: optel- en aftreksommen tot 20 en de tafels van vermenigvuldiging, in actieve oefenvormen. Daarbij komt ook in elke les minstens een handig rekenstrategie aan de orde.

De ideale rekenles gaat uit van functioneel rekenen en vertoont de bovenstaande kenmerken van goed rekenonderwijs. Dat klinkt gemakkelijk. Je zou zeggen dat juist in het vmbo de praktijkvoorbeelden voor functioneel rekenen voor het oprapen liggen. Toch vinden docenten het nog niet zo eenvoudig deze verbinding te realiseren, is onze ervaring. Want hoe gebruik je als leraar dan die alledaagse praktijk van leerlingen? Daarvoor moet je je eerst verdiept hebben in hun wereld: Waar gaan ze mee om? Welke spelletjes spelen ze? Waar gaat hun belangstelling naar uit? Wat zijn hun hobby's of sporten? Wat doen ze voor werk; welke bijbaantjes hebben ze? Daarnaast zijn er op school legio activiteiten waarbij rekenen voor het oprapen ligt: handvaardigheid, timmeren, koken, maar ook economie of aardrijkskunde. Docenten zullen met elkaar moeten zoeken naar rekensituaties op school en in de wereld van hun leerlingen. Vervolgens

moet je als rekendocent dan de principes van realistisch rekenen inbouwen en vormgeven. Dat is gemakkelijker gezegd dan gedaan, dat vraagt studie en oefening. In de rekenlesideeën, zie kader, vindt u alvast enkele betekenisvolle lesideeën, waarbij eigen inbreng van de leerlingen een cruciale rol speelt.

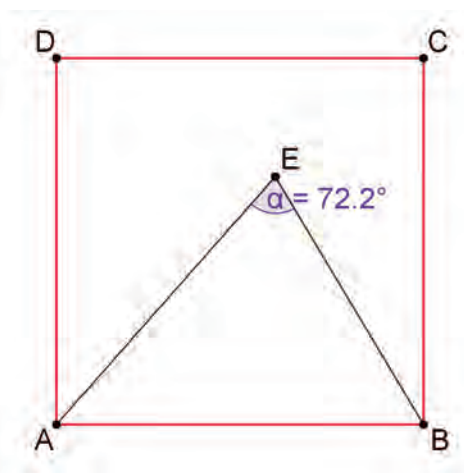
Succes ermee!

Noten en referenties

- [1] Zie www.steunpunttaalenrekenenvo.nl/nieuws/advies-cie-bosker-en-startrapportages-steunpunten-naar-tweede-kamer
 - [2] Zanten, M. van (2011). *Rekenen-wiskunde op de basisschool*, Amersfoort, Thieme Meulenhoff
 - [3] Buys, C., & van der Zwaard, P. (2010). *Verder met Rekenen*, Enschede, SLO
- www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/rekentoets_vo/voorbeeldtoetsen.aspx
- College voor Examens (2014). *Rekentoetswijzer 2F 201*, Utrecht, CvE
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen*, Enschede, SLO
- Lit, S., e.a. (2013). *Actief met rekenen en wiskunde*, Bussum, Coutinho
- www.mboraad.nl/?news/4949702/Rapport+commissie+Bosker+over+rekentoetsen+en+-examens+openbaar.aspx

Over de auteurs

Frank van Merwijk is lerarenopleider rekenen en wiskunde aan de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen (HAN). Anita Lek is senior adviseur en rekenspecialist bij Marant, adviseurs in leren en ontwikkeling. Zij geven trainingen in rekenen en didactiek voor docenten vo en mbo. E-mailadressen: frank.vanmerwijk@han.nl; a.lek@marant.nl



figuur 1

VASTGEROEST

Ab van der Roest

KANS EN MEETKUNDE

Een ongebruikelijke vraag blijkt met collega's samen toch snel op te lossen. Maar wat vindt de natuurkunde-collega er eigenlijk van? Ab van der Roest doet verslag.

Al een paar keer heb ik geschreven over situaties in de klas, maar er zijn nog andere manieren om te genieten van de wiskunde, zoals een gesprek met collega's. Op het internet kwam ik de volgende opgave tegen.

Neem een willekeurig vierkant $ABCD$. Kies in dit vierkant een willekeurig punt P . Bepaal de kans dat $\angle APB$ een scherpe hoek is.

Een inspirerende vraag, omdat kans en meetkunde gecombineerd worden. Dat past natuurlijk niet meer in ons schoolprogramma, want meetkunde hoort bij wiskunde B en kans bij wiskunde A en daar zit een schot tussen. Wiskunde D-leerlingen zouden het antwoord snel moeten kunnen vinden, maar ik denk dat wiskunde B-leerlingen het ook wel kunnen.

Met een paar collega's bespreek ik deze vraag. Ja, soms gaan de gesprekken ergens over! Na een schetsje gemaakt te hebben (zie figuur 1), was het antwoord makkelijk te vinden.

We kwamen op $\frac{4a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2}{4a^2} = 1 - \frac{1}{8}\pi$. Mooi antwoord.

Je rekent het maar na, en als het niet lukt, stuur me een mail. Daarna kwam de volgende vraag bij ons op: 'Hoe groot is de kans dat $\angle APB$ gelijk is aan 90° ?' We konden niets anders bedenken dan dat die kans gelijk aan 0 moet zijn. Het is bijna een paradox. Je kunt oneindig veel punten P aanwijzen waarvoor geldt dat $\angle APB = 90^\circ$, en toch is de kans gelijk aan 0. We zullen het ermee moeten doen; weten dat de punten er zijn, maar toch een kans van 0 dat zo'n punt willekeurig aangewezen wordt. Mijn natuurkundecollega, die met onze wiskundegesprekken graag meedoet, was totaal niet onder de indruk. Je weet dat er deeltjes zijn, maar de exacte plaats van zo'n deeltje weten we niet. In de natuurkunde is dat sinds Heisenberg zijn onzekerheidsrelaties formuleerde heel gewoon! Wat is het toch goed, dat we als wiskundigen af en toe met toegepast wiskundigen praten. Vaak is dit verfrissend.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A^o 19 $\frac{41}{42}$

Opgave 1

Van driehoek ABC is gegeven $AC = BC$, $\angle C = x^\circ$; R is de straal van de omgeschreven cirkel.

- te bewijzen, dat de straal van de ingeschreven cirkel gelijk is aan $2R \sin \frac{1}{2}x (1 - \sin \frac{1}{2}x)$;
- de maximumwaarde van deze uitdrukking te bepalen voor $R = 10$.

Opgave 2

Op de zijden BC en CD van een rechthoek $ABCD$ of hun verlengden liggen achtereenvolgens de punten P en Q zo, dat $\angle PAQ = 30^\circ$ en het oppervlak van de driehoek APQ gelijk is aan $\frac{2}{5}$ van het oppervlak van de rechthoek. Bereken de hoeken, die AP en AQ respectievelijk met de zijden AB en AD maken.

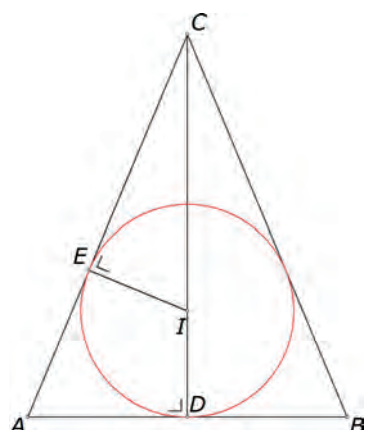
Uitwerking opgave 1a

De ingeschreven cirkel

Deze opgave deed me gelijk denken aan een standaard-oefening die ik elk jaar in 4 havo en 4 vwo bij wiskunde B behandel:

Van driehoek ABC is gegeven: $AB = 10$, $AC = BC = 13$. Bereken exact de straal van de ingeschreven cirkel.

Deze opgave zal voor u geen probleem zijn, maar toch kijken we even in detail naar de kern van deze opgave: Van driehoek ADC zijn de zijden bekend, en in driehoek EIC is $EI = r$, $CI = 12 - r$.



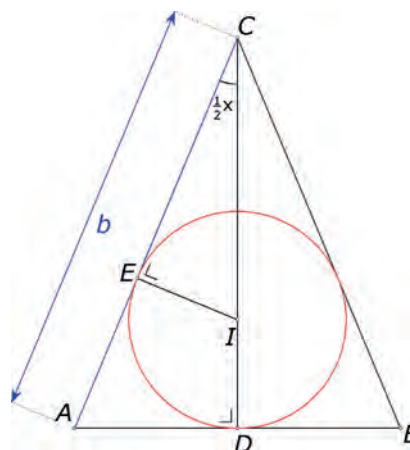
Deze driehoeken zijn gelijkvormig (hh), met verhoudings-tabel

$AD = 5$	$CD = 12$	$AC = 13$
$EI = r$	CE	$CI = 12 - r$

Waaruit volgt: $r = \frac{10}{3}$.

Wanneer we in deze opgave $AC = b$ stellen en AD uitdrukken in b en de halve tophoek $\frac{1}{2}x$, kunnen we op bovenstaande manier de cirkelstraal r uitdrukken in b en $\frac{1}{2}x$. Doet u dit even?

— wacht —



$$\sin \frac{1}{2}x = \frac{AD}{b} \text{ en } \cos \frac{1}{2}x = \frac{CD}{b}; CD = b \cos \frac{1}{2}x;$$

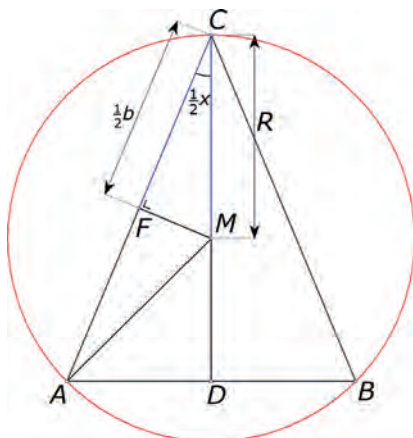
$CI = b \cos \frac{1}{2}x - r$. Dus wordt de verhoudingstabel:

$AD = b \sin \frac{1}{2}x$	CD	$AC = b$
$EI = r$	CE	$CI = b \cos \frac{1}{2}x - r$

Hieruit volgt $r = \sin \frac{1}{2}x (b \cos \frac{1}{2}x - r)$, dus
(1)... $(1 + \sin \frac{1}{2}x)r = b \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$

Ook de straal R van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC kan worden uitgedrukt in b en x . Lukt het u?

De omgeschreven cirkel



In driehoek CFM zien we gelijk: $\cos \frac{1}{2}x = \frac{\frac{1}{2}b}{R}$, dus

(2)... $b = 2R \cos \frac{1}{2}x$

Uit (1) en (2) volgt:

(3)... $(1 + \sin \frac{1}{2}x)r = b \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 2R \cos^2 \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}x$

Wat is de laatste stap?

De laatste stap

Substitutie van $\cos^2 \frac{1}{2}x = 1 - \sin^2 \frac{1}{2}x = (1 + \sin \frac{1}{2}x)(1 - \sin \frac{1}{2}x)$ in (3) geeft $(1 + \sin \frac{1}{2}x)r = b \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 2R(1 + \sin \frac{1}{2}x)(1 - \sin \frac{1}{2}x)\sin \frac{1}{2}x$, waarna de factor $1 + \sin \frac{1}{2}x$ kan worden weggedeeld, en we zijn klaar.

Uitwerking opgave 1b

Gevraagd wordt het maximum te bepalen van de functie $f(\alpha) = 20 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)$ op domein $[0^\circ; 90^\circ]$. Dit is natuurlijk niet moeilijk, maar wel een mogelijkheid om iets te doen met het resultaat van opgave a. Doet u het even?

— wacht —

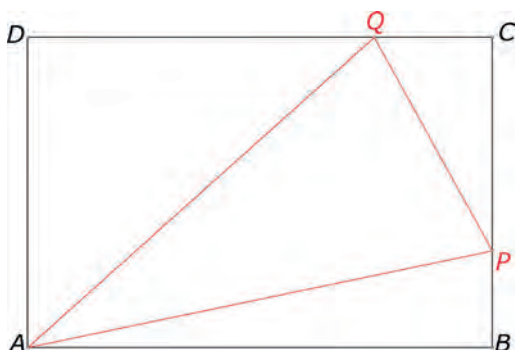
$f'(\alpha) = 20 \cos \alpha (1 - 2 \sin \alpha)$; $f'(\alpha) = 0$ geeft $\cos \alpha = 0$ of $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, dus $\alpha = 90^\circ$ of $\alpha = 30^\circ$.

Via een tekenschema of schets van f' vinden we het maximum bij $\alpha = 30^\circ$. De driehoek is dan gelijkzijdig. Deze opgave is laagdrempelig, en geeft een dwarsverband in de klas van de meetkunde en analyse.

Uitwerking opgave 2

Een werkschets

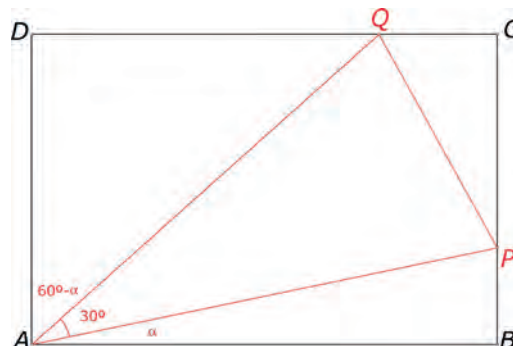
Een eerste inventarisatie



De vraagstelling doet vermoeden dat de afmetingen van de rechthoek er niet toe doen.

Stel $AB = a$, $BC = b$ en $\angle BAP = \alpha$. Welke vergelijking (met α als variabele) kunnen we nu opstellen?

De uitwerking



$$AP = \frac{a}{\cos(\alpha)} \text{ en } AQ = \frac{b}{\cos(60^\circ - \alpha)};$$

$$\text{Opp}_{\text{driehoek APQ}} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{a}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{b}{\cos(60^\circ - \alpha)} = \frac{ab}{4 \cos(\alpha) \cos(60^\circ - \alpha)}.$$

Gelijkstellen aan $\frac{2}{5} ab$ geeft $8 \cos(\alpha) \cos(60^\circ - \alpha) = 5$. Lost u deze vergelijking eens op, maar dan zonder snijpuntbepaling of solver op de grafische rekenmachine.

— wacht —

De formule $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ inzetten levert op:

$$8 \cos(\alpha) (\cos(60^\circ) \cos(\alpha) + \sin(60^\circ) \sin(\alpha)) = 5$$

$$4 \cos^2(\alpha) + 4\sqrt{3} \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 5.$$

Gebruikmaking van de verdubbelingsformules geeft $\cos(2\alpha) + \sqrt{3} \sin(2\alpha) = \frac{3}{2}$. Het linkerlid kan gezien worden als het inproduct van de vectoren

$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Dit inproduct is ook gelijk

aan $\left| \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right| \cdot \cos(2\alpha - 60^\circ)$, zodat we

$$\text{uitkomen op } 2 \cos(2\alpha - 60^\circ) = \frac{3}{2}$$

De onderbouw-rekenmachine (vroeger: het tabellenboekje) geeft $2\alpha - 60^\circ = 41,41^\circ$ of $2\alpha - 60^\circ = -41,41^\circ$.

Zodat $\alpha \approx 50,7^\circ$ of $\alpha \approx 9,3^\circ$.

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: alecluse@casema.nl

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

BOOK TOWERS

Lonneke Boels

De Torens van Hanoi is een klassiek spel dat gespeeld wordt met schijven die van groot naar klein gerangschikt zijn. Lonneke Boels bespreekt in haar rubriek deze keer een digitale variant van dit spel.



Kent u het spel *De Torens van Hanoi*? Ooit is een variant voor twee spelers een aandenken geweest bij de W4Kangoeroewedstrijd. *Book Towers* is op hetzelfde idee gebaseerd: je verplaatst boeken van de ene stapel naar de andere en er mag nooit een groter boek op een kleiner boek van dezelfde kleur komen te liggen, zie figuur 1. Er zijn wel wat extra of andere regels:

- een boek mag alleen op een boek van dezelfde kleur worden gelegd;
- je mag een hele stapel tegelijk van dezelfde kleur verplaatsen op voorwaarde dat de nummering geen gaten bevat. Bijvoorbeeld: als boek 1 en 2 op boek 4 liggen van dezelfde kleur, kun je alleen boek 1 en 2 in één zet verplaatsen en niet ook boek 4 (zie figuur 2);
- op een lege plek mag elk boek of elke stapel worden gelegd, net zoals bij Hanoi;
- en een boek mag dus alleen op een kleiner boek van dezelfde kleur worden gelegd.



figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Het spel begint makkelijk waarbij de oplossing relatief eenvoudig te vinden is. Vanaf niveau 15 wordt het lastiger; het lukt mij dan niet altijd om de drie sterren te verdienen die bij een korte oplossing horen, laat staan het kroontje op het werk voor de kortste oplossing (zie figuur 3). Vanaf niveau 23 wordt het bijzonder pittig; dan vergt het echt een vakantie om de oplossing te vinden. Overigens hebben dezelfde makers ook een 'echt' *Torens van Hanoi*-spel gemaakt: *Zen Hanoi* – het spel van de torens, zie figuur 4. Ook dit is een variant met meer dan één toren en eveneens gratis te verkrijgen voor iPad, Android- en Amazontablet.

Bij dat spel hebben de makers geleerd van de kritiek op *Book Towers*: het spel start met een stap-voor-stap uitleg en spelen van het eerste spel. Daarna begint het echte werk. Behalve de totaal andere lay-out en het verschillende aantal niveaus heb ik zo snel geen inhoudelijke verschillen kunnen ontdekken met *Book Towers*.

Pluspunten

- het een wiskundig, logisch spel;
- het is een echt spel dat leerlingen uitdaagt om flink wat stappen vooruit te denken;
- het begint vrij gemakkelijk maar wordt geleidelijk moeilijker. Voor leerlingen van bovenbouw havo en vwo zal daarom vanaf niveau 10 – 20 het spel ook behoorlijk uitdagend worden;
- het spel kent 45 gratis niveaus en is uit te breiden met steeds 100 betaalde niveaus;
- het is geschikt voor discussie in de klas over grafen of boomdiagrammen of back-tracking als methoden om oplossingen te vinden.

Minpunten

- als je een niveau afsluit zonder de oplossing te hebben gevonden (bijvoorbeeld omdat er geen zetten meer mogelijk zijn), krijg je reclame;
- als je te lang wacht met een actie, schakelt het spel automatisch door naar inloggen op Facebook;
- als je op Facebook reclame maakt, krijg je extra oplossingen;
- er is geen directe aansluiting met de stof van de middelbare school (tenzij je de eerdergenoemde link natuurlijk zelf legt).

Geschikt voor: basisschool groep 6, 7, 8 (plusleerlingen), havo en vwo alle leerjaren.

Eendoordeel: aanschaffen als je tegen de reclame kunt
Kosten: gratis; uitbreidingen kosten € 0,99 (*level pack*) tot € 3,99 (60 oplossingen)

Getest op: iPad met iOS7. Ook geschikt voor: iPhone, Android- en Amazontablet.

Meer informatie: <http://tappsgames.com/app/book-towers/>

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: L.Boels@alaka.nl

STATISTIEK IN EEN ROZIJNENDOOSJE

Aan het einde van een lesdag bedacht Marjan Botke een leuke, zinnige en lekkere manier om leerlingen belangrijke termen uit de statistiek aan te leren.

Elke donderdagmiddag van 16:00 tot 16:50 uur heb ik mijn vijfde klas voor een les wiskunde A. Ze hebben dan al de hele dag lessen gehad, zijn moe en hebben helemaal geen zin meer. Om mijn leerlingen een beetje bij de les te houden, neem ik vaak wat lekkers voor ze mee. Soms koekjes of paaseitjes, maar om het wat gezonder te maken, neem ik de laatste tijd kleine doosjes rozijnen mee. Dat vinden de meeste leerlingen erg lekker en ze hebben even wat te doen. Toen ik op een middag al mijn leerlingen bezig zag de rozijnen uit het doosje te peuteren en op te eten, bedacht ik me dat het leuk zou zijn om eens een aantal statistiektermen te koppelen aan het doosje rozijnen.

Vorbereiding

Zorg dat er voldoende doosjes rozijnen zijn voor alle leerlingen. Prepareer één doosje rozijnen met veel te veel of veel te weinig rozijnen. Dit wordt een duidelijke uitschieter in de waarnemingen.

De opzet

Geef elke leerling een doosje rozijntjes en vraag ze om het aantal rozijnen in het doosje te tellen. Daarna mogen ze de rozijntjes opeten. De aantallen rozijnen van de leerlingen heb ik op het bord geschreven. Ik had 23 leerlingen en kreeg zo 23 waarnemingen. De waarnemingen bestaan alleen uit gehele getallen (discrete waarnemingen). Laat ze de volgende berekeningen uitvoeren:

- het gemiddelde, dit kunnen ze allemaal: som/aantal waarnemingen;
- de modus, leg uit wanneer deze wel en wanneer deze niet bestaat;
- de mediaan, leg uit hoe de mediaan wordt bepaald bij een oneven en bij een even aantal waarnemingen;
- minimale en maximale waarde;
- Q1 en Q3, dit zijn de medianen van de eerste helft waarnemingen en van de tweede helft waarnemingen;
- met behulp van deze laatste vier gegevens kunnen ze het volgende uitrekenen:
 - spreidingsbreedte, dit is de grootste waarneming – de kleinste waarneming;
 - kwartielfstand $Q3 - Q1$, dit geeft aan in welke range de middelste 50% van de waarnemingen zich bevindt.

Vervolgens kunnen ze een boxplot tekenen. Teken eerste een getallenlijn met daarboven het minimum aantal, maximum aantal, mediaan, Q1 en Q3. Als dit allemaal uitgevoerd is, zeg je dat één doosje rozijnen er niet bij hoorde. Ik vraag de leerlingen waarom ze denken dat nu precies dat doosje er niet bij hoort. Ik hoop dan op een antwoord als: het wijkt teveel van de rest af, of iets dergelijks. Haal deze waarneming eruit. Je hebt dan één waarneming minder.

Laat de leerlingen met deze waarnemingen het volgende opnieuw uitrekenen/tekenen:

- gemiddelde;
- mediaan;
- modus;
- spreidingsbreedte;
- kwartielfstand;
- boxplot.

Verklaar de verschillen tussen de uitkomsten met en zonder de uitschieter. Laat zien hoe je de boxplots met elkaar kunt vergelijken. Laat ook een boxplot van een andere serie waarnemingen van rozijnendoosjes zien.

Met de gegevens over het gemiddelde kan ook handmatig de standaardafwijking worden uitgerekend. Maak eerst een tabel met een kolom met de verschillende aantallen (x), een kolom met $x - x_{\text{gem}}$, en een kolom met $(x - x_{\text{gem}})^2$.

Bereken vervolgens $\sum (x - x_{\text{gem}})^2$, $\frac{1}{n} \sum (x - x_{\text{gem}})^2$

en dan $\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x - x_{\text{gem}})^2}$. Dit is de gemiddelde

afwijking van het gemiddelde. Laat hierbij ook zien wat het wel of niet meenemen van de uitschieter betekent voor de standaardafwijking.

Resultaten

De leerlingen doen mee met de les, ze tellen en eten de rozijnen. Ze gaan zelf de tweede serie uitkomsten berekenen; ze kunnen immers zien hoe de uitkomsten bij de eerste serie zijn berekend. Ze onthouden de theorie beter (weet je nog met die rozijnen?). Het is tastbaar voor ze. Het geeft inzicht in de wiskunde/statistiek. Het laat zien dat het over echte dingen (in dit geval rozijnen) gaat. Al met al een leuke les die ik zeker nog een met mijn klassen ga doen. Op naar de supermarkt voor meer doosjes rozijnen.

Mogelijke uitbreiding

Laat de leerlingen alle waarnemingen (alle waarden van de getelde rozijnen) in een lijst op hun grafische rekenmachine invoeren.

Nu kunnen we via 1-VARSTAT een aantal items zien:

- gemiddelde;
- standaardafwijking;

- minimum en maximum waarde;
- Q1;
- Q3;
- mediaan;
- modus;

Ik vertel dat ze nu weten hoe ze de items met de hand kunnen uitrekenen en hoe ze het met de grafische rekenmachine kunnen doen. Ik wil graag dat ze het beide kunnen.

Het werken met rozijnen kan in een andere les worden voortgezet. Als je in de klas de gewichten van de doosjes rozijnen nauwkeurig kunt meten, kun je kijken of het gewicht normaal verdeeld is. Het is ook mogelijk dat je van te voren een tabel maakt met de gewichten. Zet het gewicht uit in een steelbladdiagram en een frequentiediagram. Maak gebruik van klassenindeling.

- is het een klokvorm?
- geldt de 68% regel?
- geldt de 95% regel?

Maak ten slotte een tabel met de somfrequentie.

Zet dit uit op normaalwaarschijnlijkheidspapier (let op: rechterklassegrens)

- is het bij benadering een rechte lijn?
- benader het gemiddelde, bij 50%;
- benader de standaardafwijking, gemiddelde – standaardafwijking zit bij 16%.

Veel succes en plezier ermee!

Over de auteur

Marjan Botke is al meer dan 10 jaar werkzaam als wiskundedocent. Momenteel werkt ze op het Erasmiaans Gymnasium Rotterdam. Daarnaast is ze lid van de werkgroep havo-vwo. E-mailadres: botke@erasmiaans.nl

BOEKBESPREKING

Jacques Jansen

DE PRACHT VAN PRIEMGETALLEN



Ondertitel: Het verhaal van een eeuwenlange zoektocht naar verborgen patronen

Auteurs: Paul Levrie en Rudi Penne

Uitgever: Prometheus-Bert Bakker, Amsterdam (2014)

ISBN: 978-90-351-3863-6

Prijs: € 17,95 (196 pagina's; paperback)

Op mijn boek *De pracht van priemgetallen* is een sticker geplakt met een tekst van wetenschapsjournaliste Ionica Smeets: 'Als geen ander weten zij u te bijten met de pracht van de priemgetallen.' Maar niet alleen te bijten; tijdens het lezen weten de twee auteurs mij uit te dagen om wiskundige zaken verder uit te diepen. Het is een humoristisch boek met tal van anekdotes. Kijk je wat vluchtig naar de inhoud, dan zie je dat het laatste hoofdstuk aangeduid wordt met 47. Ik moet u teleurstellen, er zijn geen 47 hoofdstukken. Het eerste hoofdstuk wordt niet aangeduid met 1 maar met 2. Het tweede hoofdstuk wordt aangeduid met 3, dan volgt hoofdstuk 5 enzovoort. Met zeven en ziften kunt u, op de wijze van de Griekse wetenschapper Eratosthenes van Cyrene (276-194), er achter komen hoeveel hoofdstukken dit boek telt. Het boek begint met een anekdote, er zullen daarna nog heel veel volgen, over de eerste ontmoeting tussen de auteurs. We maken hierbij snel kennis met een aantal priemgetallen. Deze anekdote is een vrije bewerking van de 1729-anekdote van de wiskundigen Ramanujan en Hardy.

Bouwstenen van de getallen

Ik verbaas me altijd over de definitie van een priemgetal. Nu ook weer. Op bladzijde 26 staat: Een priemgetal is een natuurlijk getal met juist twee delers: 1 en zichzelf. Je kunt ook zeggen dat een priemgetal een getal is met

precies twee verschillende delers. Automatisch sluit je dan het getal 1 uit. De auteurs leggen op een hele leuke manier uit waarom het handig is om het getal 1 niet tot de verzameling der priemgetallen te laten behoren. Hiervoor moet u wel uit eten gaan bij restaurant *De Pracht van Priemgetallen*. In de keuken van dit restaurant krijgen de koks de bestelling door met code 14421. Zij weten precies welke menu's zij moeten klaar maken. Gaat u zelf maar na, het zijn vier menu's namelijk menu 3, menu 11, menu 19 en menu 23. Stel dat ze wel zouden werken met menu 1 dan wordt het snel een chaos in de keuken want hoeveel menu's van 1 moeten er dan bereid worden? Het boek bevat veel anekdotes die het toegankelijk maken en het leesplezier verhogen. Ze zijn vaak geschikt om aan leerlingen door te geven, bijvoorbeeld die over wiskundige Cole (1861-1926).

Mersennegetal

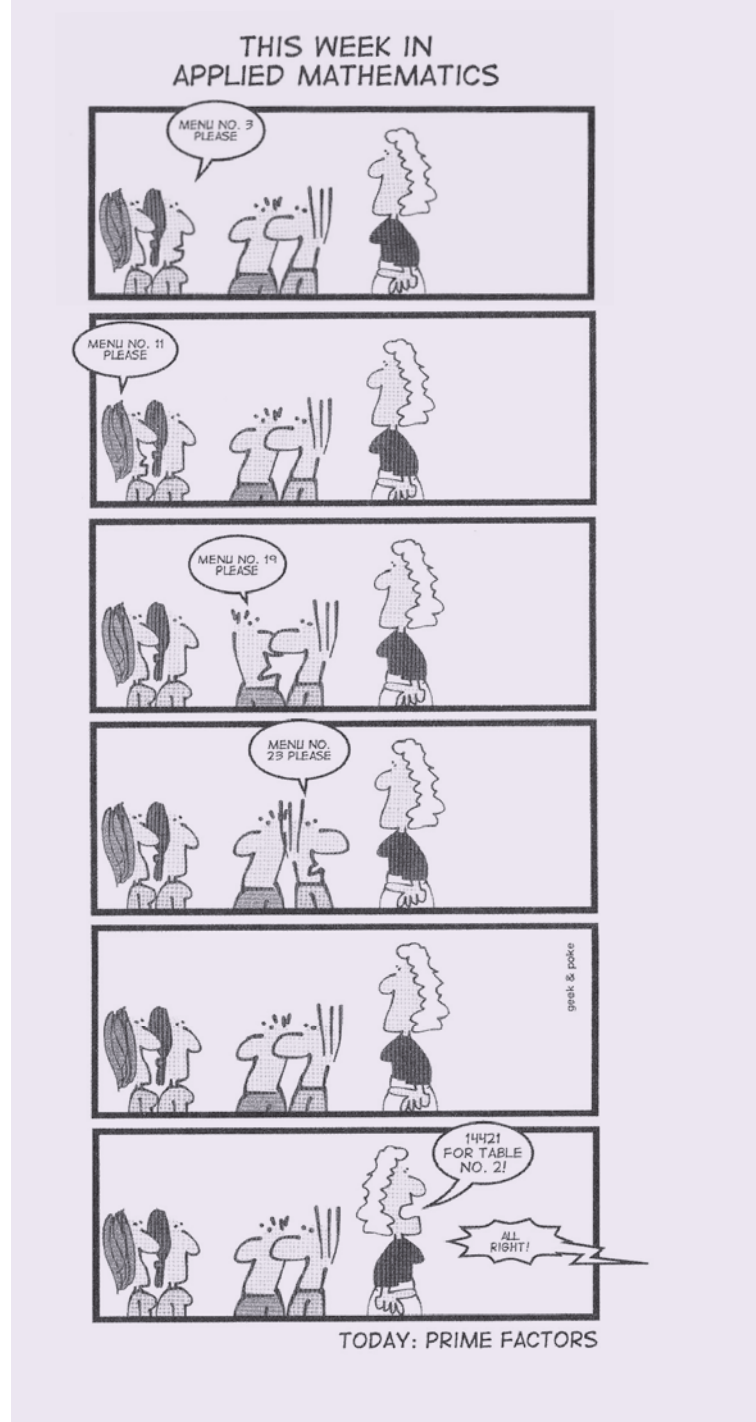
Een Mersennegetal is een getal van de vorm $2^n - 1$ waarbij n een priemgetal is. Ze zijn genoemd naar de Franse wiskundige Marin Mersenne (1588-1648) die ze in de zeventiende eeuw onderzocht op 'priem zijn'. Niet alle Mersennegetallen zijn priem. De kleinste vind je voor $n = 2, n = 3, n = 5, n = 7$ en $n = 13$. Gaat u maar na. Maar is $2^{67} - 1$ een priemgetal? Mersenne meende van wel. De wiskundige Frank Nelson Cole verraste de aanwezigen op een lezing in 1903 met de berekening van $2^{67} - 1$. De uitkomst die hij op een bord schreef was 147573952589676412927. Hij rekende daarna het product uit: 193707721 maal 761838257287. Het bleek dezelfde uitkomst op te leveren. U ziet dus, $2^{67} - 1$ heeft twee behoorlijke grote delers. Achteraf bezien is de vergissing van Mersenne begrijpelijk en vergeeflijk. Een belangrijke vraag die gesteld kan worden is: zijn er oneindig veel Mersennepriemgetallen?

De auteurs merken op dat het een eenvoudige oefening is om te bewijzen dat n noodzakelijk priem moet zijn opdat $2^n - 1$ kans heeft om zelf priem te zijn. Zou het zo eenvoudig zijn? Tja, hier voelde ik al de eerste uitdaging. Als u dat ook voelt, moet u even niet verder lezen en de uitdaging (bewijs geven) aangaan.

Bewijs

Als n niet priem is, dan kan n toch even zijn of oneven. Veronderstel dat n even is. We schrijven $n = 2m$, $2^{2m} - 1 = (2^m)^2 - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)$. Dus dit getal met even exponent is samengesteld (te ontbinden) en niet priem. Veronderstel dat n oneven is. Nu wordt het ingewikkelder. Eerst even uitproberen met $2^{15} - 1$ en $2^{21} - 1$. Waarom? Getallen met n -waarden 14, 16, 17, 18, 19, 20 kunnen we overslaan. 15 en 21 blijven over en zijn drievouden. Kunnen we daar iets mee? Door wat uit te proberen, vind ik de volgende ontbindingen:

- $2^{15} - 1 = (2^5 - 1)(2^{10} + 2^5 + 1)$;
- $2^{21} - 1 = (2^7 - 1)(2^{14} + 2^7 + 1)$.



'Zou er een patroon zijn?', vraag ik me af. Wat opvalt, bij beide ontbindingen, is de vorm van de tweede factor van het product:

- $2^{10} + 2^5 + 1 = (2^5)^2 + 2^5 + 1$; $2^{15} - 1 = (2^5 - 1)((2^5)^2 + 2^5 + 1)$;
- $2^{14} + 2^7 + 1 = (2^7)^2 + 2^7 + 1$; $2^{21} - 1 = (2^7 - 1)((2^7)^2 + 2^7 + 1)$.

Dat doet toch sterk denken aan een bekende ontbinding: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. En algemener: $x^a - 1 = (x - 1)(x^{a-1} + x^{a-2} + \dots + x + 1)$. Als n oneven is en niet priem, dan kun je n schrijven als het product van twee oneven getallen a en b : $n = ab$. Mersennegetal: $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^b)^a - 1 = (2^b - 1)((2^b)^{a-1} + \dots + 2^b + 1)$ Conclusie: als n niet priem is, dan is het Mersennegetal $2^n - 1$ zeker samengesteld.

Getal of uitdrukking	is te schrijven als...	Gaat u maar na
641	$5 \cdot 2^7 + 1$	
641	$2^4 + 5^4$	
$5 \cdot 2^7 + 1$	$5 \cdot 2^7 = -1 \pmod{641}$	
$5 \cdot 2^7 = -1 \pmod{641}$	$5 = -1 \cdot 2^{-7} \pmod{641}$	
$2^4 + 5^4$	$2^4 + 2^{-28} \pmod{641}$	
$2^4 + 2^{-28} \pmod{641}$	$2^{32} + 1 \pmod{641}$	Vermenigvuldig met $2^{28} \pmod{641}$
		Dus $2^{32} + 1$ is deelbaar door 641

tabel 1

Priemtweelingen en andere priemparen

In 2008 kwam het prachtige boek *De eenzaamheid van de priemgetallen* uit van de Turijnse natuurkundige Paolo Giordano. 'Mattia dacht dat vriendin Alice en hij zo waren, twee tweelingpriemgetallen, alleen en verloren, vlak bij elkaar, maar niet dicht genoeg om elkaar echt te raken.'^[1] Mattia is een jonge wiskundige en Alice een fotograaf. Natuurlijk wordt door de auteurs op dit boek gewezen, immers priemtweeling is in dit boek een prachtige metafoor. Twee priemgetallen vormen een tweeling als er één getal tussen zit, de onderlinge afstand is dus 2. De onderlinge afstand, daar gaat het om. Zo heb je priemneven, twee priemgetallen met afstand 4, bijvoorbeeld 43 en 47. Maar ook sexy priemgetallen, onderlinge afstand is 6, bijvoorbeeld 97 en 103. Die afstanden gaan, op jacht naar priemgetallen, een belangrijke rol spelen.

Fermatgetallen

Pierre de Fermat ging ook op jacht naar priemgetallen en onderzocht getallen van de vorm $2^{2^n} + 1$, waarbij n een natuurlijk getal is. Eerst worden getallen onderzocht van de vorm $2^n + 1$. De auteurs hebben een tabel gemaakt van de eerste tien getallen. Bij $n = 9$ krijgen zij het getal 513, maar hier vergeten zij de ontbinding te geven: 3×171 (pagina 87 van het boek). Gelukkig is niet alles perfect. Ook niet bij Fermat. Fermat dacht dat $F_n = 2^{2^n} + 1$ allemaal priem zijn. $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$ is inderdaad priem, maar vanaf dan gaat het mis. We lezen vervolgens dat Euler in 1732 liet zien dat $F_5 = 4294967297$ geen priemgetal is, doordat er opgemerkt wordt dat 641 een factor is, maar we lezen niet hoe Euler dat voor elkaar kreeg. Hier werd ik weer nieuwsgierig. Want hoe bewees Leonard Euler (1707-1783) dat $2^{32} + 1$ deelbaar is door 641? In tabel 1 ziet u een mogelijke aanpak van Euler.^[2] Zou Euler het zo gedaan hebben? In hoofdstuk 23 behandelen de auteurs het klokrekenen en daarna het modulo rekenen. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) definieerde, lezen we op pagina 107, de basis van het klokrekenen. De oplettende lezer zal nu vaststellen dat Euler het toch iets anders heeft aangepakt.^[3] Drie belangrijke vragen trachten de auteurs te beantwoorden:

- vanwaar komt de fascinatie voor priemgetallen?
- waarom zijn priemgetallen zo moeilijk?
- waarom zijn priemgetallen zo belangrijk?

Conclusie

Ik denk dat het boek in zijn opzet is geslaagd. Het boek is geschreven voor een breed publiek. Ook niet-wiskundigen zullen begrijpen waar enkele geschikte jachtterreinen liggen van de priemgetallen. Voor de lezer zal het ook duidelijk worden dat je ze daarmee nog niet te pakken hebt. Voor leerlingen en docenten zijn er genoeg aanzetten gegeven om zich verder te verdiepen. Dit boekje hoort in elke schoolmediatheek thuis. Het boek kan ook een bron zijn voor profielwerkstukken. Een leuk boek om jezelf of je collega cadeau te doen.

Tot slot

Terug naar de keuken van restaurant *De Pracht van Priemgetallen*. De koks ontvangen een opdracht met code 2015. U gaat maar na welke menu's er nu besteld zijn. Als u deze recensie leest, bent u al een heel stuk gevorderd in 11111011111.

Noten en referenties

- [1] Citaat op omslag van het boek *De eenzaamheid van de priemgetallen*.
- [2] Na een aanwijzing van Aad Goddijn, jaren geleden.
- [3] Math Wieters, oud-docent aan de Open Universiteit, wees mij op een artikel van Ed Sandifer: *How Euler Did It*. Zie vakbladeuclides.nl/905jansen1. Zie ook *Syllabus Vakantiecursus 2014*, uitgegeven door Platform Wiskunde Nederland, hoofdstuk 1. En natuurlijk ook de site: www.pandd.demon.nl/mersenne.htm



vakbladeuclides.nl/905jansen1

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl

DE NIEUWE BESTUURSLEDEN

STELLEN ZICH VOOR



Kees Garst – Secretaris



Na het halen van mijn bevoegdheid voor wiskunde en aardrijkskunde aan de tweedegraads lerarenopleiding van de VL-VU, ben ik vanaf het begin van de jaren tachtig werkzaam op ISG-Arcus te Lelystad. De eerste tien jaar heb ik vooral wiskunde gegeven in brede heterogene onderbouwklassen en in het ibo. Vervolgens heb ik in Utrecht de eerstegraads bevoegdheid voor wiskunde behaald, en daarna een Masteropleiding aan de University of Greenwich voltooid. Sindsdien ligt mijn werkveld vooral binnen de bovenbouw havo/vwo. Leerlingen die wat meer moeite hebben met het vak hebben mijn speciale belangstelling. Vandaar wellicht ook dat ik betrokken ben geraakt bij de ontwikkelgroep Vorm en ruimte van cTWO en later bij de syllabuscommissie voor wiskunde C.

Al ruim dertig jaar ben ik een trouw bezoeker van de jaarvergadering. Ik heb jaarredes beluisterd, uitleg over de financiële staat van de vereniging proberen te begrijpen en nieuwe bestuursleden met applaus aangemoedigd voor hun taak, zonder me af te vragen of een bestuurstaak ook voor mij weggelegd zou

zijn. Totdat het bestuur mij uitdaagde hierover na te denken. Na enige denktijd heb ik me aangemeld als secretaris. Als je je vervolgens verdiept in je taak merk je pas hoeveel instanties er zijn waarin de NVvW vertegenwoordigd is om de belangen van de wiskundeleraar en het wiskundeonderwijs te dienen. Tot dusver een boeiende, tijdrovende, maar inspirerende uitbreiding van mijn dagelijkse werk met de leerlingen.

Swier Garst – Voorzitter



Marian Kolleveld zei het al: Swier zit hier in een merkwaardige dubbelrol. En ja, zoals het was bedacht, is het ook gegaan. In juni vertelde Henk Rozenhart me dat het misschien niet zou lukken een nieuwe voorzitter te vinden voor de NVvW, en als er op de jaarvergadering nog geen kandidaat zou zijn of ik voor korte termijn het voorzitterschap voor mijn rekening wilde nemen. En dan ben je plotseling de voorzitter van de NVvW, maar wel met als taak een nieuwe voorzitter te vinden. Intussen begrijp ik ook wat de taak van NVvW-voorzitter inhoudt: 40 extra mailtjes per week, begrijpen wat het nieuwe project over nascholing betekent, een standpunt over rekenen innemen (media die contact opnemen na het verschijnen van een rapport), op de hoogte blijven van het fantastische werk van de webmasters, en wellicht nog wel een puntje of vijf. Maar... bij dat alles erg goed ondersteund door onze beleidsmedewerker Heleen van Ree en door de andere bestuursleden. Bij de uitnodiging dit stukje te schrijven, was de vraag: 'Wat zou je op termijn graag gerealiseerd zien?' Gezien het grote aantal

onderwerpen, ik noemde er al enkele, waarmee de verschillende bestuursleden hard aan de slag zijn, zou ik graag zien dat op ieder van die onderwerpen duidelijk sprake is van vorderingen.

Dus... in november: enkele nieuwe bestuursleden waaronder een kandidaat-voorzitter, het project voor een groot deel uitgevoerd, een prachtig 90-jaar NVvW-feest achter de rug, weer mooie examens in mei, een goed begin gemaakt met de nieuwe examenprogramma's havo en vwo, aandacht en meer voor het wiskundeprogramma op mavo en vmbo, en hopelijk natuurlijk veel nieuwe leden en liefst nog heel veel meer!!!

Ebrina Smallegange – Bestuurslid



Het kan vreemd gaan in een mensenleven. Ik had nooit gedacht dat ik docent wiskunde zou worden, laat staan dat ik in het bestuur van de NVvW gekozen zou worden. Mijn enthousiasme voor wiskunde op de middelbare school had, dacht ik, meer met mijn leuke, enthousiaste, knappe docent te maken dan met het vak wiskunde. Ondanks mijn enthousiasme voor het vak ging ik dus niet beginnen aan een studie wiskunde. Ik ging naar Wageningen, naar de Landbouwhogeschool! Een bijzondere tijd! Na mijn afstuderen heb ik een aantal jaren in Jemen, Sri Lanka, Mali en Benin gewoond en gewerkt. Ook dat was een bijzondere tijd!

Weer terug in Nederland realiseerde ik me dat wiskunde toch wel een heel interessant vak bleef. Ik ging de lerarenopleiding doen en werd tweedegraads docent wiskunde. Wat is het een mooi vak, docent wiskunde zijn. Mooi om wiskunde begrijpelijk te maken voor leerlingen die soms jaren van frustratie op de basisschool hebben meegemaakt. In iedere vmbo-klas die ik voor me krijg, zitten wel een paar leerlingen die ervan

overtuigd zijn dat zij geen wiskunde kunnen leren: 'Ik kan het niet en m'n vader en moeder kunnen het ook niet.' Het is een mooie uitdaging om die leerlingen bij de les te houden en het is fantastisch om te zien dat ook zij stapje voor stapje en soms zelfs met sprongen vooruit kunnen gaan. Om deze leerlingen nog beter te kunnen begeleiden, ben ik de opleiding tot remedial teacher gaan doen, gevolgd door een master SEN Reken-wiskundespecialist/dyscalculie. Net in die tijd kwam de commissie Meijerink, jullie wel bekend, met het rapport *Over de drempels met taal en rekenen*, en werden het protocol ERWD-VO en de rekentoets ontwikkeld. Tijdens de vele veldraadplegingen, klankbordbijeenkomsten, flitsbijeenkomsten et cetera die daarmee gepaard gingen, ontmoette ik Gert de Kleuver. Hij stelde voor dat ik in de commissie Bosker zou meedenken. De commissie Bosker heeft zich vorig jaar gebogen over de vraag: Toetst de rekentoets wel wat hij moet toetsen? De commissie Bosker heeft hard gewerkt, en advies uitgebracht aan de staatssecretaris. Deze heeft het advies in z'n geheel overgenomen.

Gert vroeg me even later om me verkiesbaar te stellen voor het bestuur van de NVvW. Ik ben lange tijd niet enthousiast geweest over de vereniging. Er was, vond ik, binnen de vereniging niet veel aandacht voor het vmbo. In *Euclides* stond niet veel dat voor een vmbodocent van belang was. Daarom zal ik me ervoor inspannen dat de NVvW ook de vmbodocenten ondersteunt in het lesgeven aan de veelzijdige, soms lastige, vaak dankbare groep leerlingen op het vmbo. Ik hoop binnen de vereniging te kunnen stimuleren dat vmbodocenten tips en *good practices* uitwisselen, en dat ze elkaar weten te vinden! Vandaar alvast deze oproep: meld je als je mee wilt denken en mee wilt uitwisselen!



Tijd voor een nieuwe
wiskundemethode:

Math Plus



Ga naar www.mathplus.nl voor het gratis
beoordelingspakket of een demonstratie op school.



REKENKUNDIGE RIJEN MET SPIEGELINGEN

We bekijken rijen waarbij iedere volgende term ontstaat door ofwel bij de vorige term een gegeven getal v op te tellen, ofwel door bij de vorige term v op te tellen en de cijfers van de som in omgekeerde volgorde te plaatsen. Als zo'n omgekeerd getal dan begint met een of meer nullen laten we die natuurlijk weg. De door omkering verkregen termen noemen we spiegelingen. Een voorbeeld van zo'n rij met $v = 5$, startgetal 2, waarin de 4e en 6e term spiegelingen zijn is: 2, 7, 12, 71, 76, 18... Door de spiegelingen hoeven deze rijen niet, zoals 'normale' rekenkundige rijen, monotoon te stijgen (of te dalen), zodat het mogelijk is dat de rij zich, bij een bepaalde keuze van de plaatsen van spiegeling, gaat herhalen (zie figuur 1). In de volgende opgaven zoeken we steeds, bij een gegeven positieve gehele waarde van v , een startgetal en een keuze van de spiegelingen, zodat er een cykel ontstaat. Voor $v < 10$ en startgetal 0 is dit niet zo moeilijk, we kiezen na de 10e term voor een spiegeling en herhalen de verkregen cykel. Met bijvoorbeeld $v = 3$: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 3, 6... Bij andere startgetallen wordt dat al lastiger. Soms krijgt u eerst een 'aanloop' die niet herhaald wordt, en dan pas de cykel.

Opgave 1 – Bepaal een rij met startgetal 1 en $v = 4$ die eindigt in een cykel.

Als v meer dan één cijfer heeft, wordt het ook lastiger.

Opgave 2 – Bepaal een startgetal en plaatsen van spiegelingen zodat een rij met $v = 10$ gaat cyclen. U kunt volstaan met het noteren van het startgetal en de te spiegelen getallen.

Bij de volgende opgaven krijgt u meer punten als u (in deze volgorde):

- 1) het aantal spiegelingen zo klein mogelijk maakt;
- 2) de cykel zo kort mogelijk maakt;
- 3) het grootste getal in de cykel zo klein mogelijk maakt.

Opmerking: een spiegeling in de cykel tellen we maar één keer!

Opgave 3 – Bepaal de spiegelingen zodat een rij met $v = 14$ gaat cyclen:

- a. met een door u gekozen startgetal;
- b. met startgetal 0.

Bij nog grotere waarden van v wordt het erg lastig om oplossingen te vinden door alleen proberen. Natuurlijk kunt u dan een computerprogramma schrijven dat het proberen van u overneemt. Maar als we de eis stellen dat er maar één spiegeling^[1] is, zijn er oplossingen te vinden door berekening.

Opgave 4 – Bepaal door berekening een rij met cykel, met $v = 61$ en met één spiegeling. Geef de berekening erbij.

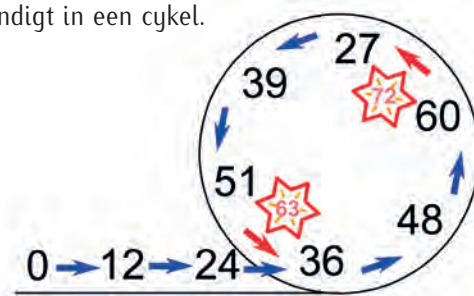
- a. met een door u gekozen startgetal;
- b. met startgetal 0.

Noot

- [1] Voor de getaltheoretici onder u: Het valt te bewijzen dat het, in elk geval voor een bepaald type getal v , altijd lukt met één spiegeling. Bovendien kunnen we iets zeggen over de lengte van de cykel, ook als er meer dan een keer wordt gespiegeld.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. Inzendingen moeten uiterlijk op 5 mei 2015 binnen zijn.



figuur 1

HO-HO-HO, STOP BIJ EEN STERRETJE

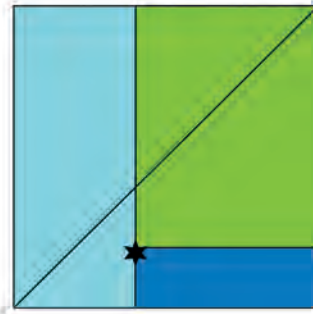
De puzzel ging over een spel dat de Kerstman en Rudolph, het rendier, spelen om een rechthoekig stuk pakpapier te verdelen. Rudolph zet daar n sterretjes op (afmeting van de sterretjes 0). De Kerstman zet dan nog één sterretje in de uiterste hoek linksonder. Daarna knipt hij $n + 1$ rechthoeken, elk met een sterretje in de hoek linksonder. Rudolph mag de rest van het papier hebben. We zoeken voor beide de strategie die het meeste papier oplevert en de percentages daarvan van het hele vel.

We gaven aan dat de lengte–breedteverhouding van het papier geen verschil maakt. Als we de plaats van de sterretjes uitdrukken in tienden van de lengte en de breedte van het papier krijgen we de oppervlakten van de geknipte rechthoeken als percentage van het hele papier. We hoeven dus alleen te kijken naar vierkante stukken papier. We gaven ook aan dat we vermoeden dat Rudolph zijn sterretjes het beste symmetrisch op een diagonaal van het papier kan zetten, maar daar geen algemeen bewijs voor kennen. Veel inzenders gebruikten dit als veronderstelling bij het oplossen van de puzzel. Ten slotte gaven we aan dat het niet moeilijk is na te gaan dat als Rudolph één sterretje zet hij dat het beste kan doen in het midden van het papier. Hij krijgt dan een kwart van het hele papier. Door verschuiving in welke richting dan ook wordt dat altijd minder.

In **opgave 1** zet het rendier op een vierkant van 10×10 zijn sterretjes op (3,5), (5,2) en (8,7) en de Kerstman een op (0,0). Wat doet de Kerstman vervolgens? De Kerstman kan (zie figuur 1) rechthoeken knippen van 3×10 (paars), 5×5 (rood), 3×5 (groen) en 2×3 (geel). Hij heeft dan 76% en het rendier 24%.



figuur 1



figuur 2



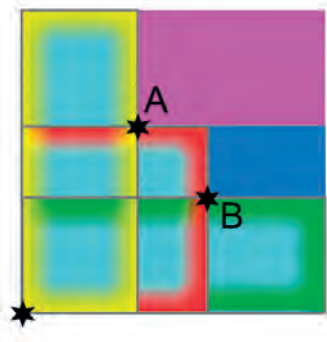
figuur 3

In **opgave 2** mag het rendier twee sterretjes zetten. Wat is dan zijn beste strategie? Met dezelfde vraag voor drie sterretjes. Bij twee sterretjes staan ze ofwel op een stijgende ofwel op een dalende lijn. We kunnen bewijzen (hier niet getoond) dat Rudolph ze bij een dalende lijn het beste op

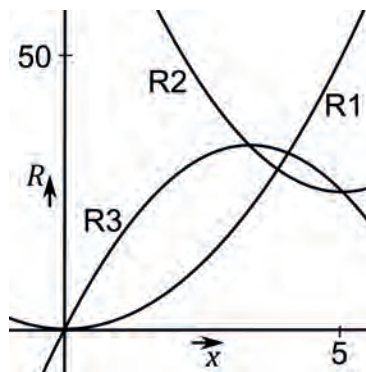
$\left(\frac{60}{9}, \frac{40}{9}\right)$ en $\left(\frac{40}{9}, \frac{60}{9}\right)$ kan zetten, met een opbrengst van $\frac{8}{27} \approx 29,63\%$.

Dus niet op de diagonaal, wel symmetrisch. Bij een stijgende lijn (zie figuur 2) kiezen we eerst het onderste sterretje. Vanwege de symmetrie van de mogelijke knip-manieren voor de Kerstman mogen we aannemen dat dit op of onder de stijgende diagonaal ligt. Het tweede sterretje komt in de groene rechthoek, en we weten dat Rudolf die het best in het midden kan zetten. Hij krijgt dan een kwart van de groene rechthoek en het donkerblauwe deel. Als hij het sterretje naar links schuift blijft dat zo tot het op de diagonaal staat, en daarbij wordt zowel het donkerblauwe deel als een kwart van de groene rechthoek groter. Hij moet beide sterretjes dus op de diagonaal zetten. Kies het

eerste sterretje op (a, a) . Dan krijgt Rudolph $\frac{(10-a)^2}{4} + a(1-a)$. Dit is maximaal een derde als



figuur 4



figuur 5

$a = \frac{10}{3}$. We hebben dan de sterretjes op $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$ en $(\frac{20}{3}, \frac{20}{3})$ met opbrengst voor Rudolph

33,33%. Dit is dus de beste strategie voor Rudolph. Bij drie sterretjes kunnen we dit resultaat weer gebruiken, tenminste als we veronderstellen dat we ook hier een stijgende lijn krijgen. De redenering is dezelfde, alleen krijgt Rudolph nu niet een kwart maar een derde van de groene rechthoek,

dus $\frac{(10-a)^2}{3} + a(1-a)$ en de opbrengst voor Rudolph is 37,5%.

J. Guichelaar werkte een vergelijkbare redenering uit tot een recursief bewijs dat als we aannemen dat de sterretjes op een stijgende lijn liggen ze op de diagonaal moeten liggen, met bij n sterretjes

de coördinaten $(\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n+1})$, met $i = 1$ t/m n .

Bij **opgave 3** en **4** mag de Kerstman, voordat hij zijn sterretje linksonder zet, het papier draaien.

In **opgave 3** zet Rudolph zijn sterretjes zoals in opgave 1. Om te bepalen of de Kerstman zijn opbrengst van opgave 1 kan verbeteren door te draaien, moeten we op dezelfde manier bij de verschillende standen de best mogelijke strategie van de Kerstman bepalen. Dat levert voor Rudolph op: bij 90° linksom 25%, bij 180° 26% en bij 90° rechtsom 20% (zie figuur 3). De Kerstman kan dus het beste 90° rechtsom draaien en krijgt dan 80%, Rudolph 20%.

In **opgave 4** zet Rudolph nu twee sterretjes, en de Kerstman mag weer draaien. In de vier mogelijke standen staan de sterretjes nu twee maal dalend en twee maal stijgend. Wij vonden inmiddels een bewijs dat de sterretjes ook hier symmetrisch op de diagonaal moeten staan. Dalend staan ze dan op $A(x, 10-x)$ en $B(10-x, x)$ en stijgend op (x, x) en $(10-x, 10-x)$ met $x < 5$. Dalend geeft voor Rudolph $R1 = 2x^2$ als de Kerstman het rode vierkant kiest (zie figuur 4), anders $R2 = x^2 + (10-x)(10-2x) = 3x^2 - 30x + 100$. Stijgend is dat $R3 = -3x^2 + 20x$.

In figuur 5 zijn deze functies getekend. Omdat de Kerstman bij elke x de onderste functie kiest, is de optimale oplossing voor Rudolph het snijpunt van $R1$ en $R2$ tussen $x = 0$ en $x = 5$.

Dat snijpunt vinden we bij $x = 15 - 5\sqrt{5}$ met een opbrengst voor Rudolph van $700 - 300\sqrt{5} \approx 29,18\%$. Dit resultaat kan worden bevestigd met een computerprogramma (onder andere uitgevoerd door H. Bakker).

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 90-3 is:

L. Pos	184	K. van der Straaten	129
J. Remijn	179	J. Verbakel	110
R. Stolwijk	171	F. Göbel	104
H. Linders	169	H. Klein	85
J. Guichelaar	138	G. Bouwhuis	79

De ladderprijs is gewonnen door Leo Pos. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Annelien Jonkman
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzenden bijdragen

Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvww.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvww.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvww.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvww.nl

2015

wo
25/3

OP DE SCHOLEN
Grote Rekendag,
Organisatie Flsme

wo
15/4

LEIDEN
Nederlands Mathematisch Congres, docentendag.
Organisatie KWG

do
16/4

DIVERSE LOCATIES
Cursus 'Hoe kijk je een examen na'
Organisatie NVvW, zie ook pagina 21

za
18/4

HILVERSUM
Jubileumfeest Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Organisatie NVvW

wo
10/6

NIJMEGEN
WiskundeDialog, nascholingsdag
Organisatie Radboud PUC of Science en het Instituut
Leraar en School (ILS).

za
17/9

UTRECHT
Symposium WGRWO
Organisatie NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

JAARGANG 90

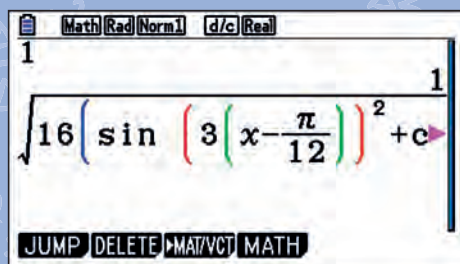
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	13 mei 2015	16 maart 2015
7	30 juni 2015	18 mei 2015

JAARGANG 91

1	8 september 2015	22 juni 2015
---	------------------	--------------

Tien redenen om voor de CASIO fx-CG20 te kiezen...

1. Functioneel kleurgebruik:



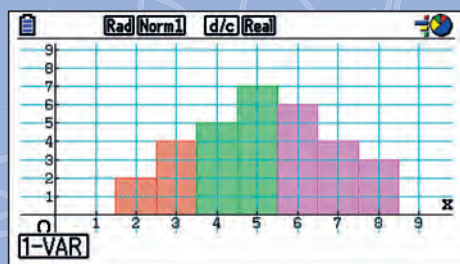
Gekleurde haakjes verschijnen vanzelf en komen in het vervolgscherm terug!

The screen shows a list table with columns: SUB, CYFER, AANTAL, and empty columns for List 1, List 2, List 3, and List 4. The rows are color-coded: red for row 1, green for row 2, blue for row 3, and yellow for row 4.

SUB	CYFER	AANTAL	List 1	List 2	List 3	List 4
1	2	2				
2	3	4				
3	4	5				
4	5	7				

The bottom of the screen shows the menu: GRAPH1 | GRAPH2 | GRAPH3 | SELECT | SET.

Als je in lijsten of sheets kleur gebruikt...



...dan komt die kleur terug in alle figuren!



In de CASIO fx-CG20 Leerlingentest werden topmerken grafische rekenmachines met elkaar vergeleken. De leerlingen waren er snel uit: de CASIO fx-CG20 is uniek in prestaties en daarmee superieur. In deze en in de volgende uitgaven van Euclides publiceren wij de 10 voordelen die het meest genoemd werden in de CASIO fx-CG20 Leelingentest. Kijk, vergelijk en oordeel zelf.



De CASIO fx-CG20 is CvTE goedgekeurd voor het centraal examen 2016 en daarna.

Uw leerlingen kiezen voor de CASIO fx-CG20

Méer informatie of workshop aanvragen? Bel +31 (0)20 545 10 70 – e-mail: educatie@casio.nl – www.casio-educatie.nl



Hoe u rekenen ook heeft opgenomen in het lesprogramma, Noordhoff Uitgevers heeft altijd een methode die bij u past!

Vraag nu een beoordelings-exemplaar aan!

 Noordhoff Uitgevers

Expert in rekenen!

Met *Getal & Ruimte Rekenen*, *Moderne Wiskunde Rekenen* én *NU Rekenen* bieden wij u:

- gegarandeerde kwaliteit;
- materiaal voor alle niveaus;
- extra oefenmogelijkheden in de ICT;
- optimale aansluiting op zowel basisonderwijs als MBO;
- methode-onafhankelijke referentie- en domeintoetsen voor een goede voorbereiding op de rekentoets.

Lees meer op:

www.getalenruimterekenen.noordhoff.nl

www.modernewiskunderekenen.noordhoff.nl

www.nurekenen.noordhoff.nl/vo

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent