

IMPRESSIES VERENIGINGSDAG

Niet alle impressies van de verenigingsdag konden we in *Euclides* nummer 4 plaatsen. Hierbij nog een aantal zeer lezenswaardige bijdragen.

A3 Wiskundige denkactiviteiten in de les: hoe doe je dat? (Mariska Sas)

[Ger Limpens]

Mariska Sas, docent aan de OSG-West-Friesland, heeft in het kader van de leergang Vernieuwing Wiskunde-onderwijs samen met enkele collega's tijdens het cursusjaar 2013/2014 een lessenserie ontwikkeld. Die lessenserie baseert zich op het subdomein *Tellen*. In de serie worden wiskundige denkactiviteiten uitdrukkelijk ten tonele gevoerd. Voordat we wat meer in die lessenserie duiken, vestigt Mariska onze aandacht op de site www.leergangwiskunde.nl/home.html, die hoort bij de leergang. Daar is veel meer te vinden en een bezoek aan deze site kan dan ook alleen maar van harte worden aanbevolen.

Vervolgens, onderwijl nog verwijzend naar het document *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* van Anne van Streun dat we vandaag allemaal in onze handbagage hebben mogen ontvangen, verdiepen we ons in 'haar' lessenserie door eerst het stappenplan dat Pólya in 1945 in *How to solve it* heeft gepresenteerd te bestuderen. Mariska is erg gecharmeerd van dit stappenplan en zegt dat dit schema 'beschrijft hoe een wiskundige denkt'. Dat schema is eveneens opgenomen in de betreffende lessenserie. Nadat we dat gedaan hebben, worden we zelf aan het werk gezet. In groepjes buigen we ons over opgaven die we van Mariska ontvangen. Die opgaven worden door Mariska ook in lesverband gebruikt in de vorm van een wiskunde-estafette. Er wordt gestart met een eenvoudige opgave (daar zijn er acht van, zo begrijp ik van Mariska) en als men als groepje het juiste antwoord richting Mariska gefluisterd heeft, ontvangt men een van de acht moeilijkere opgaven. Ons groepje is echter zodanig lang met de makkelijke opgave bezig dat het er eigenlijk niet van komt zich serieus te buigen over de moeilijkere opgave. Dat neemt niet weg dat het altijd weer leerzaam is om te zien hoe een subdomein als *Tellen* heel vaak tot twijfel bij probleemoplossing leidt. Heel vaak lijkt een strategie wel succesvol maar blijkt bij kritische beschouwing dat er toch iets over het hoofd gezien wordt. Ook vandaag dus weer. Aan het eind van de workshop komt de vraag aan de orde in hoeverre de invalshoek die gekozen is bij het maken van deze lessenserie (bedoeld als 'hoofdstukvervanger') beklift bij leerlingen. Mariska geeft aan dat dat tot nu toe onduidelijk is. Maar het lijkt de moeite waard dit toch wel te proberen.

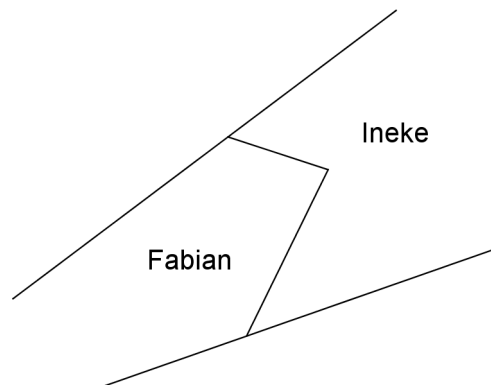




A4 Wiskundige denkactiviteiten: een tussendoortje of andere didactiek? (Theo Wesker e.a.)

[Ineke van Pol]

Een werkgroep in het kader van de 'Leergang wiskunde'. Deze workshop was boeiend. Er was voldoende afwisseling tussen zelf nadenken en luisteren. We bekeken eerst een deel van een filmpje uit een Japanse wiskundeles waarin leerlingen aangezet werden om na te denken over een probleem. Er zijn twee bezitters van een stuk land. De scheidslijn loopt niet recht.



Hoe kun je zorgen dat de scheidslijn wel recht is, maar beide bezitters een even groot stuk land behouden als ze voor de herverdeling hadden? De leraar vroeg aan de leerlingen of ze enig idee hadden waar de rechte lijn moest komen. De film werd stilgezet en de workshopbezoekers kregen drie minuten om zelf na te denken. Degenen naast mij gingen meteen in overleg. In mijn klas zou ik daar iets van gezegd hebben, maar ik was nu niet de workshopleider. Na drie minuten ging het filmpje verder. De leerlingen mochten in viertallen overleggen. Als ze geen idee hadden, konden ze naar twee hints die in de hoek op de muur hingen gaan kijken. Als ze dachten de oplossing te hebben, konden ze deze voorleggen aan de docent. Aan het eind werd de oplossing even doorgesproken. Wat de leerlingen wel net aan het begin van de les hadden herhaald, maar wat wij niet mochten zien, was dat ze de vorige les hadden besproken dat de oppervlakte van een driehoek gelijk blijft wanneer je de top evenwijdig aan de basis verschuift. Voor de leerlingen was het ondanks deze herhaling een wiskundige denkactiviteit. Wanneer wij deze informatie hadden gehad, dan was het geen wiskundige denkactiviteit. Vaak als je de oplossing ziet of hoort, heb je een 'oh ja'-gevoel. Ik hoop dat veel van mijn leerlingen dit 'oh ja'-gevoel gaan hebben, maar dat ze in de loop van de jaren vaker zelf of samen tot een oplossing komen.

De definitie van 'wiskundige denkactiviteit' (WDA) is lastig. Wanneer is het een wiskundige denkactiviteit? Als het een routine betreft, is het geen wiskundige denkactiviteit. Eenzelfde som kan het schooljaar ervoor wel een wiskundige denkactiviteit zijn, maar is na oefening dit schooljaar een routine en brengt dus geen denkactiviteit bij leerlingen teweeg.

Een manier om leerlingen aan een denkactiviteit te zetten, is om activerende werkvormen in te zetten, zoals: 'Denken, delen, uitwisselen'.

Uit een stuk van Michiel Doorman, Henk van der Kooij en Ad Mooldijk in de Nieuwe Wiskrant (jaargang 31(4)) hebben Theo en de anderen met wie hij over deze activiteiten heeft nagedacht, de volgende opmerkingen gehaald over wiskundige denkactiviteiten: onderzoekend leren, probleem oplossen, werken in groepen, creatief zijn. Bij wiskundige denkactiviteiten moet je denken aan niet-routine problemen, aan productie en niet aan reproductie.

De conclusie van Theo en de anderen was dat WDA geen tussendoortje is. Het is een manier van werken. Zowel voor havo als voor vwo vanaf 2015 in het nieuwe programma en vanaf nu is het zeker van belang om een doorlopende leerlijn op te bouwen. Mocht je op je school docenten hebben die niet én in de onderbouw én in de bovenbouw lesgeven, is een goed onderling contact van belang.



Om leerlingen ook voor te bereiden op de examens van de komende jaren waarin steeds meer 'opener' problemen opgelost moeten worden, moet je dit soort denkactiviteiten regelmatig al vanaf klas 1 aanbieden. Op de site van cTWO zijn voor deze leerlijn van 1 t/m 5 havo ideeën geplaatst. Tijdens de workshop bleek dat een deel van het materiaal op de site ontwikkeld is door een groep onder leiding van Lambrecht Spijkerboer, die in het verleden ook opgaven voor toetsen van de tussendoelen wiskunde hebben ontwikkeld.

Hopelijk lukt het met inzet van wiskundige denkactiviteiten om naast onderwijs voor de grote middelgroep ook voor begaafden en hoogbegaafden meer aantrekkelijk onderwijs te kunnen bieden door middel van *top-down* problemen en opgaven. Hoe herken je een WDA? De leerlingen hebben een actieve rol, ervaren een probleem, het is gericht op productie, maar is zeker geen routine. Opgaven geschikt voor wiskundige denkactiviteiten moet je leren herkennen en verzamelen. Je kunt een WDA inzetten wanneer je een nieuw onderwerp aankaart (Streun en Kop, 2012), of wanneer je (iedere les) iets nieuws doet, bijvoorbeeld met behulp van een andere werkvorm.

Kun je in het boek WDA's vinden? Bij *Getal&Ruimte* zijn de complexe of A-opgaven (11e editie D-opgaven) aan het eind van een paragraaf of hoofdstuk vaak een goede input voor WDA's, maar dit hangt wel van de vraagstelling af.

Bij bestaande opdrachten is vaak maar een kleine aanpassing nodig om er een denkactiviteit van te maken. Bijvoorbeeld onderdeel a, b, c weghalen en later eventueel als hints geven en onderdeel d meteen als eerste vraag stellen. Ook werkgroep A5 had hier voorbeelden van. 'Haal de houvast voor de leerling weg.' In het examen gaan we vaker opdrachten zien die 6-8 punten waard zijn. Wanneer leerlingen vanaf klas 1 getraind zijn en bepaalde strategieën hebben ontwikkeld om open vragen aan te pakken, dan blijkt bij de pilot-examens dat het ook voorkomt dat een leerling toch ook een deel van de punten binnenhaalt, zonder de opdracht helemaal op te lossen.

Op de site van cTWO wordt ook verwezen naar Kangoeroeopgaven. Er staat bij deze voorbeelden steeds dat het in dezelfde tijd kan, maar Theo betwijfelt of dat klopt. De activiteiten zijn in drie niveaus ingedeeld.

Een voorbeeld: Sem, Thomas en Daan hebben in totaal 30 knikkers. Sem geeft Thomas vijf knikkers. Thomas geeft er vier aan Daan en Daan geeft er twee aan Sem. Nu hebben ze alledrie evenveel knikkers. Hoeveel knikkers had Daan eerst?

Een van de deelnemers van de workshop had zelf vanuit zijn Mahjong-club een wiskundige denkactiviteit opgekregen. Je hebt een bepaald aantal deelnemers aan een toernooi. In elke ronde moet je drie nieuwe tegenstanders hebben. Hoe pak je dat aan? Na wat onderzoek bleek dat dit probleem ook wel bekend staat als het golfprobleem. Dit probleem blijkt behoorlijk pittig. Zijn vraag was dan ook 'Hoe moeilijk wordt een eindexamensom?'

Wanneer leerlingen vanaf klas 1 bewustgemaakt worden van verschillende strategieën om met zulke vragen/denkactiviteiten om te gaan, zijn ze moeilijk, maar kunnen leerlingen voldoende punten scoren op die vragen, was de ervaring bij pilot-examens. Dat de N-term 2 was, zat in het feit dat er bij elke opgave niet-standaard zaken zaten en dat was in totaal te veel.

Een andere deelnemer liet haar leerlingen wel oefenen door aan het eind van de toets een Kangoeroeopgave zonder antwoorden te geven. Nog een denkactiviteit: Hoeveel minuten na 13.00 uur staan de grote en de kleine wijzer precies op elkaar? Als je de oplossing ziet, is de lol eraf.

Ik ben helemaal enthousiast geworden om, ondanks dat het voor mijn gevoel niet nieuw is, om leerlingen aan het denken te krijgen, en samen met mijn collega's onze leerlingen meer wiskundig te laten denken. Het leuke is dat je voor jezelf soms ook een wiskundige denkactiviteit kunt doen, en wie wil dat nu niet?



A5 Wiskundige denkactiviteiten en gelaagde opdrachten (Jacoliene van Wijk)

[Ton Lecluse]

De docent ontwerpt zo'n denkactiviteit bijvoorbeeld op de volgende wijze: In onze wiskundeboeken staan veel samengestelde vragen, die eigenlijk naar een eindvraag toewerken. Je kunt van zo'n opgave een denkactiviteit maken door alleen de slot-vraag te formuleren (op een afzonderlijk velletje). Hiernaast ontwerp je enkele hints, die je formuleert op afzonderlijke velletjes. Door een denkactiviteit vaker te gebruiken in de klas, krijg je als docent genoeg feedback om achteraf hints erbij te maken. Formules die ook moeten worden afgeleid of bewezen kunnen ook prima als denkactiviteit worden gebruikt, waarbij de bewijs-stappen de hints zijn. Dit geldt ook voor eindexamenopgaven waar veel punten bij staan, met CV-stappen als hints.

De lesvorm: leerlingen gaan in groepjes aan de slag, en kunnen hints vragen, maar pas wanneer het hele groepje eraan toe is. Wanneer de groep de grote opgave netjes af heeft, ligt er een volgende klaar.

Je maakt tijd voor deze werkvorm door enkele opgaven in het boek over te slaan, wellicht kan een opgave uit het boek zelf (ingedikt) als denkactiviteit worden gebruikt, maar wel afzonderlijk op papier, met hints, dus goed voorbereid.

We oefenden zelf met het afleiden van formules van Simpson ($\sin(u + v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$) (maar alleen de situatie waar $u + v$ scherp is).

Een denkactiviteit kan goed worden ingezet op een normaliter lastig laatste lesuur van een dag, maar maak het niet te bond; bijvoorbeeld maximaal 1 keer per 14 dagen. Handig leerboek: *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten* (Anne van Streun), uitgave van SLO, dat alle deelnemers aan de studiedag hebben ontvangen.

[Ineke van Pol]

Jacoliene heeft de cursus 'leergang wiskunde het bevorderen van excellentie in de bètavakken' gevolgd en wil graag haar ervaringen delen. Bij haar op school zijn enkele zogenaamde U-talenter. Deze leerlingen volgen een halve dag in de maand wiskunde/natuurkunde/biologie aan de universiteit. Na zo'n dag werken aan één probleem is het elke keer weer een cultuur-shock om op school na 50 minuten weer je aandacht te moeten richten op een ander vak. Zij moeten overigens de gemiste lessen van dat dagdeel op een universiteit zelfstandig inhalen en moeten dus ook goed kunnen plannen. Om deze leerlingen ook meer te kunnen bedienen in de lessen naast de grote middengroep zijn minder geleide opdrachten ideaal. Zo kun je meer recht doen aan de verschillen in een klas. Het doel is wel om dezelfde opdracht in dezelfde tijd te laten maken. Een oplossing daarvoor is je leerlingen dezelfde opdracht met meer of minder hints erbij aan te bieden.

Het idee van *Tiered assignment*, gelaagde opdracht met hintkaarten komt uit Amerika, want daar zijn de verschillen in één klas nog veel groter dan hier. We gaan werken aan een opdracht die Jacoliene aan haar eigen groepen heeft gegeven. Ze is geïnspireerd door *Getal&Ruimte* vwo B hoofdstuk 6 (tiende editie) en je hebt als voorkennis goniometrie nodig. Leidt de somformule af, waarbij ze twee leerlingenbladen gebruikt. Op de één een rechthoekige driehoek met hypotenusa 1 en op de andere is een soortgelijke driehoek ingekapseld in een rechthoek. Druk elke zijde uit in sin en cos. Ze heeft voor groepen die niet op gang komen vier hintbladen achter de hand en voor groepen die snel zijn een extra vraag. Later bleek dat Jacoliene in *Moderne Wiskunde* deze opdracht had kunnen halen. Na deze opdracht in *Moderne Wiskunde* staat de conclusie waarbij helaas, vindt Jacoliene, andere hoeknamen zijn gebruikt dan in de opdracht.

De ervaring leert dat er grote verschillen in groepen zijn. De ene groep bleef hangen bij 'hoe kan de lengte van een lijnstuk nou $\sin(a)$ zijn?' De andere groep was al in 11 minuten klaar, haalde de fout die in de opdracht bleek te zitten eruit en gaf nog advies over een extra hint die ze had kunnen gebruiken. Dus bij de volgende klas ging het weer gesmeerder.



Jacoliene maakt ook bewust niveaugroepen. Ze begrijpt dat de goede leerling ook wel eens uitleg-moe is. Na de centrale instructie krijgt de groep met het hoogste niveau bijvoorbeeld minder mogelijkheden om hints te kopen. En er is een extra opdracht (hint) voor de snelle groep beschikbaar. Als groep mag er een vraag gesteld worden na het inleveren van één fiche (of wat je bedacht hebt als ruilmiddel te gebruiken, één deelnemer hintte al pepernoten in deze tijd van het jaar). Nadat de tijd verstreken is wel zorgen voor een centrale afsluiting en een korte evaluatie. Een voordeel is dat deze WDA makkelijk is in te passen in de lopende planning. Je hakt een opdracht uit het boek in stukjes. Doordat je hints (de onderdelen a, b en c) uitdeelt, heb je interactie met leerlingen en zicht op de vorderingen en het niveau. Voor haarzelf vond ze het een mooie bijkomstigheid dat ze haar leerlingen loswekte van het uitwerkingenboek. Haar advies is om op hoog niveau te beginnen. Je kunt altijd aanvullen. Naast een opgave uit het boek in stukken te knippen, kun je ook een pilotexamenopgaven 'aankleden'. En dan drie niveaus van opdrachten maken, met 0, 2 of 4 tips handgeschreven eronder. Dan kunnen de leerlingen kiezen. Je moet slim met je tijd omgaan, dus handgeschreven is goed genoeg. Je kunt ook na een vast aantal minuten de volgende ronde tips uitdelen. Bij een examensom kun je ook de beoordeling in stukken knippen. Een opdracht kun je aanpassen/ontwerpen in lengte (aantal stappen), eenvoudig versus complex, abstract versus concreet, open versus gestructureerd, basis versus transfer naar andere vakken. Mocht je deze workshop hebben gemist, een uitgebreidere versie geeft Jacoliene samen met Mariken Barents op de NWD.

Samen met je sectie leerlingen de structuur bieden om straks die grote examenopgave te kunnen maken... Jacoliene is nog aan het broeden hoe deze structuur van probleem-aanpak in de hints te verwerken. Bijvoorbeeld via Pólya. Of altijd als een leerling geen begin kan maken, vragen om een schets.

Welke varianten heb je bij een WDA:

- A. twee of drie uitgeschreven varianten van dezelfde opdracht
 - leerlingen kunnen zelf niveau kiezen;
 - leerlingen mogen overstappen op minder moeilijke opdracht.
- B. 'Lego man': uitgewerkte antwoord hangt op de gang.
 - ieder groep dezelfde opdracht;
 - een aantal 'toegangskarten' tot de gang per groep (je kunt dus sterkere groep minder fiches/ toegangskarten geven.
- C. docent als expert
 - iedere groep dezelfde opdracht;
 - per groep een aantal vragenkaarten. (bijvoorbeeld pepernoten in deze tijd van het jaar; misschien wat lastiger wanneer je één groep minder fiches wilt geven dan de andere).

Eén van de deelnemers vroeg: bij wiskunde D zijn er bij één opdracht wel drie of vier verschillende manieren om een opdracht te maken. Als je de verschillende manieren al weet kun je bijvoorbeeld bij 'lego man' de verschillende oplossingen op de gang hangen. Maar het klopt wel dat het gevaar is dat je hints niet passen bij de route van de leerling. Maar wanneer ze een originele oplossing hebben, kun je ze bijvoorbeeld wat extra's laten verdienen.

Een andere deelnemer vroeg: zit er voldoende oefenmateriaal in de boeken? Je kunt de tactiek van de onderdelen a, b en c als hints inzetten en alleen onderdeel d inzetten best vaak vinden in de huidige boeken.

Ook deze workshop vond ik zeer inspirerend en gaf heel duidelijk manieren aan hoe je zonder veel tijdsinvestering toch al WDA's kunt inbedden in je lessen.



Twee werkgroepen A

[Barbara Bialecka]

Voor ik over ga tot een korte bespreking van de werkgroepen, een kritische noot over de jaarvergadering in zijn totaliteit: het was te veel en te leuk om uit te kiezen! Ik heb er spijt van dat ik me nooit heb bekwaam in bilocatie. Ik had veel meer dan twee werkgroepen willen kiezen. Na lang wikken en wegen heb ik twee werkgroepen van subthema A: Wiskundige activiteiten bezocht. Beide sprekers hebben het materiaal medeontwikkeld tijdens de cursus Leergang Wiskunde.

Theo Wesker heeft de gedachte achter de wiskunde activiteiten toegelicht, verschillende voorbeelden besproken en de deelnemers aan het werk gezet met een probleem dat door een Japans docent (op *Youtube*) voorgelegd werd aan zijn klas. Wij hebben ook gezien hoe de docent de klas laat werken volgens het principe: denken, delen, uitwisselen.

Mariska Sas heeft de lessenserie: *Tellen* medeontwikkeld. Na een inleiding, het toelichten van de probleemaanpak van Pólya en voorbeelden hebben wij in groepen aan een wiskunde estafette meegedaan. Behalve problemen oplossen was de juiste strategie ook van belang voor de uitslag: gaan wij voor veel eenvoudige opgaven of lossen wij minder, maar moeilijke problemen op. Ik heb inmiddels de site van leergang wiskunde veelvuldig bezocht en een aantal van de wiskunde activiteiten in mijn lessen (van 2 vwo tot en met 6 vwo) uitgetoetst en een A3 met probleemaanpak van Pólya hangt in mijn klaslokaal. Het was voor mij een geslaagde jaarvergadering met veel nieuwe inzichten en ideeën voor mijn lessen.